

Schémas en volumes finis avec flux centrés : application à l'aéroacoustique

Marc Bernacki

▶ **To cite this version:**

Marc Bernacki. Schémas en volumes finis avec flux centrés : application à l'aéroacoustique. RR-4506, INRIA. 2002. inria-00072082

HAL Id: inria-00072082
https://inria.hal.science/inria-00072082

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Schémas en volumes finis avec flux centrés: application à l'aéroacoustique

Marc BERNACKI

N° 4506

Juillet 2002

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4506--FR

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Schémas en volumes finis avec flux centrés: application à l'aéroacoustique

Marc BERNACKI

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 4506 — Juillet 2002 — 74 pages

Résumé : Après avoir sous différentes formes linéarisé les équations d'Euler et fait des rappels théoriques, nous étudions un schéma de type saute mouton, non diffusif et stable sous une condition de type CFL dans le cadre de petites pertubations autour d'un écoulement uniforme. Nous élargissons en suite l'étude au cas de petites pertubations autour d'un écoulement stationnaire en une dimension d'espace illustrée par l'évolution d'un pulse dans une tuyère.

Mots-clés : Linéarisation des équations d'Euler, Système hyperbolique, Système symétrique de Friedrichs, Analyse de Fourier, Equation équivalente, Volumes finis, Flux centrés, Schéma saute-mouton, Tuyère.

Sous la direction de Serge PIPERNO

Rapport de stage

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

Finite volumes methods with centered fluxes: application to aeroacoustics

Abstract: After having through various forms linearized the Euler equations and doing theoretical reminders, we study a not-diffusive, leap-frog scheme, stable with a condition of type CFL within the framework of small perturbations around an uniform flow. We widen our study in the case of small perturbations around a steady flow in one dimension of space illustrated by the evolution of a pulse in a nozzle.

Key-words: linearisation of the Euler equations, hyperbolic system, symmetric system of Friedrichs, Fourier analysis, modified equation, finite volume methods, centered fluxes, leap-frog time scheme, nozzle.

Remerciements

Ce rapport a été réalisé au sein du département CAIMAN de l'unité de recherche INRIA Sophia Antipolis. Pour une grande partie il correspond à un rapport de stage de fin de DEA de Mathématiques appliqués de la Faculté des Sciences de Nice.

Je voudrais tout d'abord exprimer de grands remerciements à Monsieur Serge PIPERNO pour l'encadrement et le soutien dont j'ai pu bénéficier pendant ce stage, mais aussi pour ses compétences et ses conseils.

Je remercie l'institut INRIA de m'avoir accueilli au sein de son unité de recherche Sophia Antipolis.

Je tiens a remercier également toute l'équipe du projet CAIMAN pour son accueil, et sa bonne humeur.

J'adresse un remerciement tout particulier à N.BARTOLI, N.GLINSKY-OLIVIER, G.FOURESTEY et N.CANOUET pour leur aide et leurs précieux conseils.

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction **7**

1 Les équations d'Euler et leur linéarisation **9**
1.1 Lois de conservation: . . . 9
1.2 Linéarisation autour d'une solution stationnaire . . . 9
1.3 Cas particuliers . . . 10
1.3.1 Cas trivial . . . 10
1.3.2 cas moins trivial . . . 11
1.3.3 Cas isentropique . . . 11
1.4 Exemple de modèle d'étude . . . 12
1.4.1 Conditions aux bords . . . 13

2 Partie théorique **15**
2.1 Systèmes hyperboliques et symétriques . . . 15
2.1.1 Systèmes hyperboliques . . . 15
2.1.2 Systèmes symétriques de Friedrichs . . . 16
2.2 Théorie des schémas . . . 18
2.2.1 Rappels . . . 18
2.2.2 Présentation de la méthode des équations équivalentes . . . 20
2.2.3 Une méthode de calcul des équations équivalentes . . . 21
2.3 Analyse de Fourier . . . 26
2.3.1 Théorie . . . 26

3 Schéma volumes finis **31**
3.1 Exemple de maillage volumes finis . . . 31
3.2 Illustration . . . 33
3.2.1 Choix du problème . . . 33
3.2.2 Différents flux . . . 33
3.2.3 Illustration en dimension deux . . . 34
3.2.4 Etude de l'ordre . . . 36
3.2.5 Etude de la stabilité . . . 36

4 Un autre schéma volumes finis pour un écoulement initial uniforme **38**
4.1 Choix du schéma . . . 38
4.2 Etude de l'ordre du schéma . . . 39
4.3 Etude de la stabilité du schéma . . . 40
4.4 Comparaison avec le schéma de Lax-Friedrichs . . . 41
4.5 Conservation de l'énergie discrète . . . 41
4.5.1 Sur un maillage régulier en une dimension . . . 41
4.5.2 Sur un maillage régulier en deux dimensions . . . 43
4.5.3 Sur un maillage non régulier en deux dimensions . . . 45
4.6 Comparaison avec le schéma de Steger-Warming . . . 48

5 Etude du problème pour un écoulement initial stationnaire **50**
5.1 Mise en équations et choix du schéma 50
5.2 Étude d'un schéma en dimension un 51
5.2.1 Etude de l'ordre du schéma 51
5.2.2 Etude de la stabilité du schéma 51
5.3 Etude de petites perturbations autour d'un écoulement initial particulier 55
5.3.1 Etude d'un écoulement dans une tuyère 55
5.3.2 Evolution d'un pulse 58

6 Conclusion **67**

7 Annexe **69**
7.1 Démonstration du théorème 2.1 69
7.2 Démonstration du théorème 2.2 69
7.3 Démonstration du théorème de Banach-Steinhaus 70
7.4 Démonstration de la proposition 2.3 71
7.5 Le schéma de Lax-Friedrichs 72

Références **74**

Introduction générale

L'aéroacoustique se situe à l'interface entre les deux disciplines traditionnelles que sont la mécanique des fluides et l'acoustique. L'étude du bruit d'origine aérodynamique a connu une évolution considérable ces dernières années, avec en particulier un développement très rapide des techniques de simulation numérique. Les domaines d'application de l'aéroacoustique se sont aussi très largement élargis. Orientée initialement vers l'aéronautique, elle concerne actuellement de façon cruciale tous les moyens de transport et ceci tant pour la minimisation des nuisances apportées aux riverains que pour l'amélioration du confort des passagers: transports terrestres, aéronautique, spatial.

Les travaux que j'ai entamés pendant mon stage de DEA et que je poursuis aujourd'hui visent à long terme le développement et la validation d'une méthode numérique capable de propager le bruit généré par les structures turbulentes d'un écoulement stationnaire. L'originalité de la démarche est de vouloir utiliser pour la propagation des ondes des schémas en volumes finis utilisant des flux centrés et qui ont déjà fait leurs preuves pour la résolution des équations de Maxwell [15].

La méthode de volumes finis proposée par Remaki [15] permet aux ondes acoustiques ou électromagnétiques de se propager sans diffusion, sur un maillage quelconque, avec une dispersion raisonnable (c'est-à-dire avec une vitesse d'onde relativement précise; le schéma est d'ordre deux sur maillage régulier). C'est un schéma explicite de type saute-mouton, stable sous une condition de type CFL. Nous souhaitions conserver une discrétisation en maillages non structurés en simplexes, puisque la géométrie du domaine de l'écoulement autour de sources de bruit (parties tournantes des moteurs et jets, véhicules, etc...) est compliquée. D'autre part, initialement conçue pour la propagation en milieu homogène, cette méthode est également capable de gérer des hétérogénéités fortes de matériaux. Cette méthode devait donc s'adapter naturellement à la propagation d'ondes régie par la linéarisation des équations d'Euler autour d'une solution stationnaire, uniforme ou non. En effet, dans le cas d'une linéarisation autour d'un écoulement non-uniforme, les paramètres physiques de la propagation du son varie d'un volume fini à ses voisins.

Les résultats que nous présentons dans ce rapport constituent une amorce à ce projet, les différents points abordés sont les suivants:
Dans la partie une, nous présentons le cadre du problème et les différents modèles auxquelles nous nous sommes intéressés.
La partie deux est purement théorique, elle m'a semblé importante pour la justification des différents résultats obtenus.
La partie trois s'attache à décrire l'utilisation de schémas volumes finis sur les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme.
Dans la partie quatre, nous avons étudié l'utilisation d'un schéma volumes finis avec flux centrés, explicite de type saute-mouton, non diffusif et stable sous une condition de type CFL.
Quant à la partie cinq, elle met en évidence la transition difficile de l'écoulement uniforme à l'écoulement stationnaire en dimension un.
Enfin la partie six consiste en l'illustration des résultats des parties quatre et cinq sur le problème particulier de l'évolution d'un pulse au sein d'une tuyère de section variable.

1 Les équations d'Euler et leur linéarisation

1.1 Lois de conservation:

Le système des équations d'Euler instationnaires en deux dimensions d'espace sous forme conservative s'écrit dans le cas d'un gaz parfait:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \qquad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)\,u \end{pmatrix} \qquad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)\,v \end{pmatrix}$$

avec ρ la masse volumique, u et v les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{U}$ et E l'énergie totale par unité de volume.
La pression p est donnée par la loi d'état des gaz parfait:

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + v^2\right)\right)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

1.2 Linéarisation autour d'une solution stationnaire

Considérons $X_0 = (\rho_0, u_0, v_0, p_0)$ une solution stationnaire assez régulière de (1), le système obtenu peut s'écrire sous forme non conservative:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \dfrac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0 \dfrac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial x} + u_0 \rho_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \rho_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial y} + u_0 \rho_0 \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \rho_0 \dfrac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \\ \gamma p_0 \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right) + u_0 \dfrac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

On peut linéariser les équations d'Euler au voisinage de cette solution stationnaire X_0 pour étudier des petites perturbations.
Posons $X(x,t) = X_0(x) + \delta X(x,t)$; on a alors:

$$\begin{cases} W(X_0 + \delta X) = W(X_0) + \frac{\partial W}{\partial X}(X_0)\,\delta X + ... \\ (F \circ W)(X_0 + \delta X) = (F \circ W)(X_0) + \frac{\partial (F \circ W)}{\partial X}(X_0)\,\delta X + ... \\ (G \circ W)(X_0 + \delta X) = (G \circ W)(X_0) + \frac{\partial (G \circ W)}{\partial X}(X_0)\,\delta X + ... \end{cases}$$

Ce qui conduit, au second ordre près, à:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial X}(X_0)\,\delta X\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial (F \circ W)}{\partial X}(X_0)\,\delta X\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial (G \circ W)}{\partial X}(X_0)\,\delta X\right) = 0 \tag{3}$$

Dans l'hypothèse de la régularité de la solution W, l'équation(3) nous permet d'obtenir :

$$\left\{\begin{array}{ll} & \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right) \end{pmatrix} \\ + & \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ u_0^2\delta\rho + 2u_0\rho_0\delta u + \delta p \\ u_0\rho_0\delta v + v_0\rho_0\delta u + u_0v_0\delta\rho \\ u_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right)\right) + \delta u\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0 + \frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2\right)\right) \end{pmatrix} \\ + & \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ u_0\rho_0\delta v + v_0\rho_0\delta u + u_0v_0\delta\rho \\ v_0^2\delta\rho + 2v_0\rho_0\delta v + \delta p \\ v_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right)\right) + \delta v\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0 + \frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2\right)\right) \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right. \quad (4)$$

En utilisant des combinaisons entre les lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{F}(\tilde{W})}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{G}(\tilde{W})}{\partial y} + \tilde{H}\left(\tilde{W}\right) = 0 \\ \tilde{W} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \\ \delta p \end{pmatrix} \qquad \tilde{F}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0u_0\delta u + \delta p \\ \rho_0u_0\delta v \\ u_0\delta p + \gamma p_0\delta u \end{pmatrix} \qquad \tilde{G}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \rho_0v_0\delta u \\ \rho_0v_0\delta v + \delta p \\ v_0\delta p + \gamma p_0\delta v \end{pmatrix} \\ \tilde{H}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\rho_0\delta u + u_0\delta\rho\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\rho_0\delta v + v_0\delta\rho\right)\frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \left(\rho_0\delta u + u_0\delta\rho\right)\frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\rho_0\delta v + v_0\delta\rho\right)\frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma-1)\left(\rho_0v_0\delta u\frac{\partial u_0}{\partial y} + \left(\rho_0v_0\delta v + \delta p\right)\frac{\partial v_0}{\partial y} + \rho_0u_0\delta v\frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\rho_0u_0\delta u + \delta p\right)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \end{array}\right. \quad (5)$$

En utilisant le système(2), on peut récrire $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0\left(\delta u\frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta v\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - \frac{\delta\rho}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} \\ \rho_0\left(\delta u\frac{\partial v_0}{\partial x} + \delta v\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{\delta\rho}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y} \\ (\gamma-1)\left(-\delta u\frac{\partial p_0}{\partial x} - \delta v\frac{\partial p_0}{\partial y} + \delta p\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right) \end{pmatrix}$$

1.3 Cas particuliers

1.3.1 Cas trivial

Considérons le cas particulier où $X_0 = (\rho_0,u_0,v_0,p_0) = (\rho_0,0,0,p_0)$ avec ρ_0,p_0 constants, ce qui correspond bien à une solution triviale du système (2). On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{F}(\tilde{W})}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{G}(\tilde{W})}{\partial y} = 0 \\ \tilde{W} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \\ \delta p \end{pmatrix} \qquad \tilde{F}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} \rho_0\delta u \\ \delta p \\ 0 \\ \gamma p_0\delta u \end{pmatrix} \qquad \tilde{G}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} \rho_0\delta v \\ 0 \\ \delta p \\ \gamma p_0\delta v \end{pmatrix} \\ \tilde{H}\left(\tilde{W}\right) = 0 \end{array}\right. \quad (6)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation de l'acoustique :

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \delta p = 0$$

1.3.2 cas moins trivial

Nous pouvons aussi considérer le cas particulier où $X_0 = (\rho_0,u_0,v_0,p_0)$ avec ρ_0,u_0,v_0,p_0 constants, ce qui correspond également à une solution triviale du système (2). On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{W})}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}(\tilde{W})}{\partial y} = 0 \\ \tilde{W} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0 \delta u \\ \rho_0 \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} \qquad \tilde{F}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} \rho_0 \delta u + u_0 \delta\rho \\ \rho_0 u_0 \delta u + \delta p \\ \rho_0 u_0 \delta v \\ u_0 \delta p + \gamma p_0 \delta u \end{pmatrix} \qquad \tilde{G}\left(\tilde{W}\right) = \begin{pmatrix} \rho_0 \delta v + v_0 \delta\rho \\ \rho_0 v_0 \delta u \\ \rho_0 v_0 \delta v + \delta p \\ v_0 \delta p + \gamma p_0 \delta v \end{pmatrix} \\ \tilde{H}\left(\tilde{W}\right) = 0 \end{array} \right.$$

on peut récrire ce système sous une autre forme qui sera utile par la suite :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} + u_0 \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho_0 \delta u \\ \frac{\delta p}{\rho_0} \\ 0 \\ \rho_0 c_0^2 \delta u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \rho_0 \delta v \\ 0 \\ \frac{\delta p}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 \delta v \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

1.3.3 Cas isentropique

Pour un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, nous avons: $ds = c_v\left(\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho}\right)$. Si nous regardons le modèle de petites perturbations isentropiques autour de $X_0 = (\rho_0,u_0,v_0,p_0)$, on obtient une équation supplémentaire : $\delta p = c_0^2 \delta\rho$ avec $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$. Nous allons alors montrer la proposition suivante :

Proposition 1.1 *En supposant que la relation suivante est vérifiée :*

$$\delta p = c_0^2 \delta\rho$$

et que l'écoulement initial est à entropie constante, alors le système (4) *est équivalent au système suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0 \delta u + u_0 \delta\rho \\ \rho_0 \delta v + v_0 \delta\rho \end{pmatrix} \\ + \quad \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho_0 \delta u + u_0 \delta\rho \\ \left(u_0^2 + c_0^2\right)\delta\rho + 2u_0\rho_0\delta u \\ u_0\rho_0\delta v + v_0\rho_0\delta u + u_0 v_0 \delta\rho \end{pmatrix} + \quad \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \rho_0 \delta v + v_0 \delta\rho \\ u_0\rho_0\delta v + v_0\rho_0\delta u + u_0 v_0 \delta\rho \\ \left(v_0^2 + c_0^2\right)\delta\rho + 2v_0\rho_0\delta v + \delta p \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

Démonstration 1.1 Montrons tout d'abord que dans le cas de petites perturbations se faisant à entropie constante (même si l'écoulement initial n'est pas isentropique), nous avons bien la relation $\delta p = c_0^2 \delta\rho$: en effet dans le cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, nous avons

$$p_0 = K\rho_0^\gamma \exp\left(\frac{s_0}{c_v}\right),$$

avec K une constante, s l'entropie par unité de masse et c_v la chaleur spécifique à volume constant par unité de masse. D'où

$$p_0 + \delta p = K\left(\rho_0 + \delta\rho\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{s_0}{c_v}\right)$$

et en développant cette relation au premier ordre, nous obtenons:

$$p_0 + \delta p = K\rho_0^{\gamma} \exp\left(\frac{s_0}{c_v}\right)\left(1 + \frac{\gamma\delta\rho}{\rho_0}\right)$$

c'est à dire:

$$\delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\delta\rho = c_0^2\delta\rho$$

En supposant de plus que l'écoulement initial est à entropie constante, nous avons la relation supplémentaire:

$$grad\left(p_0\right) = c_0^2 grad\left(\rho_0\right)$$

Nous allons alors montrer que dans ce cadre, la première et la quatrième équation du système (5) sont équivalentes. En multipliant la première équation de (5) par c_0^2, on obtient:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0\delta p + \gamma p_0\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_0\delta p + \gamma p_0\delta v\right) = \left(\rho_0\delta u + u_0\delta\rho\right)\frac{\partial c_0^2}{\partial x} + \left(\rho_0\delta v + v_0\delta\rho\right)\frac{\partial c_0^2}{\partial y}$$

Or

$$\rho_0\frac{\partial c_0^2}{\partial x} = \rho_0\left(\frac{\gamma}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\gamma p_0}{\rho_0^2}\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right) = \gamma\frac{\partial p_0}{\partial x} - c_0^2\frac{\partial\rho_0}{\partial x} = \left(\gamma - 1\right)\frac{\partial p_0}{\partial x}$$

$$\rho_0\frac{\partial c_0^2}{\partial y} = \left(\gamma - 1\right)\frac{\partial p_0}{\partial y}$$

$$\delta\rho\left(u_0\frac{\partial c_0^2}{\partial x} + v_0\frac{\partial c_0^2}{\partial y}\right) = \left(\gamma - 1\right)\frac{\delta p}{c_0^2\rho_0}\left(u_0\frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial p_0}{\partial y}\right) \overset{d'après(2)}{=} -\left(\gamma - 1\right)\delta p\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

On peut donc récrire cette ligne sous la forme:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0\delta p + \gamma p_0\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_0\delta p + \gamma p_0\delta v\right) = \left(\gamma - 1\right)\left(\delta u\frac{\partial p_0}{\partial x} + \delta v\frac{\partial p_0}{\partial y} - \delta p\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right)$$

Ce qui correspond à la quatrième ligne du système (5).

■

Remarque 1.1 *Nous avons évidemment un résultat similaire en dimension un, sauf que dans ce cas il n'est pas nécessaire de supposer l'écoulement initial à entropie constante car le système (2) écrit pour une dimension d'espace nous donne la relation:* $u_0\frac{\partial p_0}{\partial x} = u_0 c_0^2\frac{\partial\rho_0}{\partial x}$.

1.4 Exemple de modèle d'étude

Par exemple, nous pourrions nous intéresser au modèle d'étude suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t} + \frac{\partial F(W(t,x,y))}{\partial x} + \frac{\partial G(W(t,x,y))}{\partial y} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Omega\times\mathbb{R}^{+*} \\ \\ W\left(0,x,y\right) = W_0\left(x,y\right) \qquad \text{sur} \quad \Omega\times\{0\} \\ W\left(t,x,y\right) = W_\infty\left(t,x,y\right) \qquad \text{sur} \quad \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

Avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, $W(t,x,y)$ une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^4$ définie sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$. Les fonctions de flux $F(W(t,x,y))$,$G(W(t,x,y))$ définies dans $\mathbb{R}^4$ seraient:

$$W = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right) \end{pmatrix}$$

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ u_0^2\delta\rho + 2u_0\rho_0\delta u + \delta p \\ u_0\rho_0\delta v + v_0\rho_0\delta u + u_0v_0\delta\rho \\ u_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right)\right) + \delta u\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0 + \frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$G(W) = \begin{pmatrix} \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ u_0\rho_0\delta v + v_0\rho_0\delta u + u_0v_0\delta\rho \\ v_0^2\delta\rho + 2v_0\rho_0\delta v + \delta p \\ v_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right)\right) + \delta v\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0 + \frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2\right)\right) \end{pmatrix}$$

1.4.1 Conditions aux bords

Pour un écoulement externe, nous distinguerions la frontière *à l'infini* notée Γ_∞ et la frontière sur le bord de l'obstacle (paroi) notée Γ_{ob}:

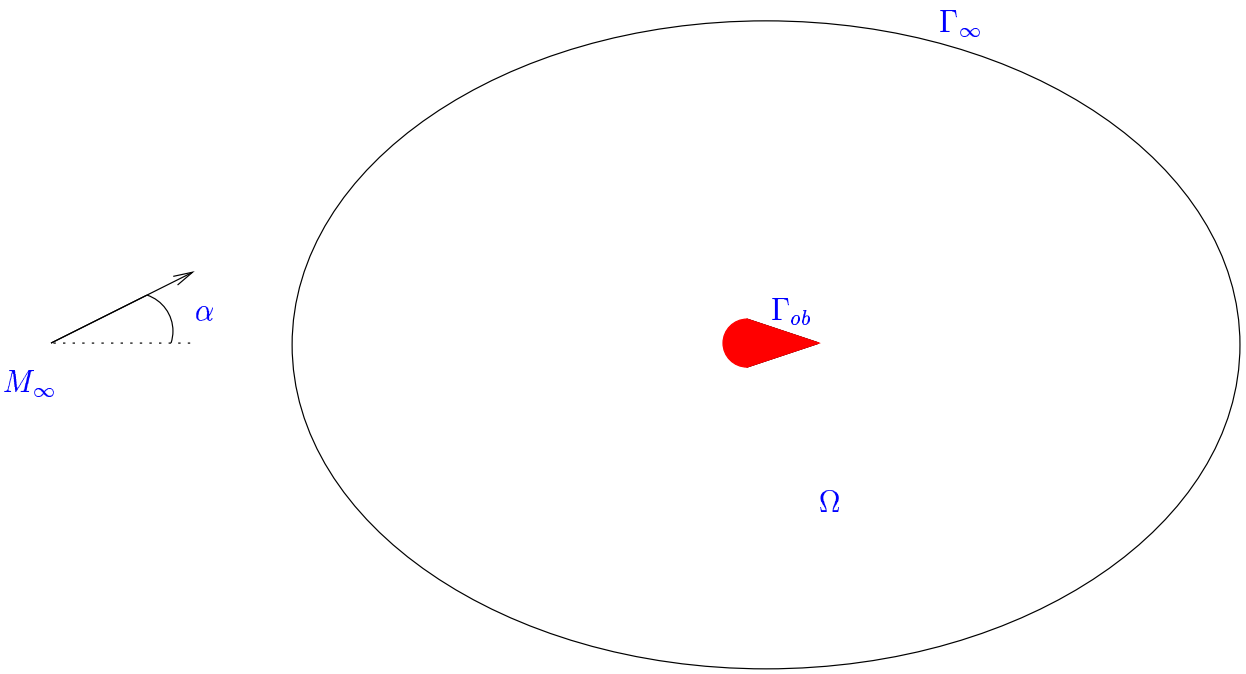


FIG. 1 – *Domaine de calcul pour un écoulement externe*

Sur Γ_∞ nous supposerions l'écoulement uniforme, $W_\infty = W\,(incident)$. α serait l'angle d'attaque de l'obstacle par rapport au fluide avec M_∞ le nombre de Mach à l'infini. Sur Γ_{ob} nous imposerions la condition de glissement : $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{n} = 0$ avec $\overrightarrow{n}$ vecteur normal à la paroi.

2 Partie théorique

2.1 Systèmes hyperboliques et symétriques

Dans la première partie, nous n'avons fait qu'écrire des systèmes d'équations sans justification. Le but de ce stage étant d'étudier des schémas permettant d'approcher les solutions éventuelles de ces équations, il est donc évidemment primordial de se demander dans quel cadre, sous quelles conditions et dans quel sens ces différents problèmes admettent des solutions. Cette partie (2.1) constitue un rappel succinct de résultats théoriques qui nous sera utile pour la suite.

2.1.1 Systèmes hyperboliques

Nous considérons un système de lois de conservation de la forme:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i(W)}{\partial x_i} = 0, \quad W \in \mathbb{R}^p$$

avec d la dimension d'espace et p la dimension du système. Les fonctions de flux $F_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ sont supposés différentiables par rapport au vecteur W. Dans la cadre de nos équations (après linéarisation), les flux sont des fonctions linéaires de W. Par ailleurs dans l'hypothèse de la régularité de la solution W, l'équation précédente peut s'écrire sous forme non conservative où quasi-linéaire:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} A_i(W) \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \tag{9}$$

Définition 2.1 *Le système (9) est dit* ***strictement hyperbolique*** *si la matrice* $\sum_{i=1}^{d} A_i(W)\,\nu_i$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{R}$ *et si ses valeurs propres sont distinctes quel que soit le vecteur unitaire* ν. *Le système est dit* ***hyperbolique*** *au sens large si la matrice* $\sum_{i=1}^{d} A_i(W)\,\nu_i$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{R}$ *et si ses valeurs propres ne sont pas toutes distinctes.*

Par exemple le système des équations d'Euler constitue un problème hyperbolique. Rappelons quelques résultats élémentaires: considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + a\dfrac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ W(x,0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{10}$$

avec $a = cste \in \mathbb{R}$ et $W : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On nomme caractéristique les droites d'équations $x - at = c = cste$, on a alors les résultats suivants:

Théorème 2.1 *Une fonction* $W \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ *est solution de (10) si et seulement si W est constant le long de toutes caractéristiques. Si* $g \in C^1(\mathbb{R})$, *alors l'unique solution du problème (10) est donnée par:*

$$W(x,t) = g(x - at) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\,.$$

Considérons maintenant le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + \mathbb{A}\dfrac{\partial W}{\partial x} = 0 & \forall\,(x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[\\ W\,(x,0) = g\,(x) & \forall x \in I\!R \end{cases} \tag{11}$$

avec $w = (w_1,..,w_m) : I\!R \times [0, +\infty[\to I\!R^m$ et $\mathbb{A} = (a_{ij})_{ij}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont réelles. Il existe une matrice inversible $\mathbb{T}$ telle que :

$$\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T} = \mathbb{D} = diag\,(\lambda_1,..,\lambda_m)$$

Les colonnes de $\mathbb{T}$ sont formées des vecteurs propres de $\mathbb{A}$, appelons les $r_1,..,r_m$. Décomposons W dans cette base :

$$W\,(x,t) = \sum_{s=1}^{m} v_s\,(x,t)\,r_s$$

Le problème (11) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial x}\right) r_s \\ W\,(x,0) = \sum_{s=1}^{m} v_s\,(x,0)\,r_s = g\,(x) = \sum_{s=1}^{m} g_s\,(x)\,r_s \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_s}{\partial t} + \lambda_s \dfrac{\partial v_s}{\partial x} = 0 & \forall s \in \{1,..,m\} \\ v_s\,(x,0) = g_s\,(x) & \forall s \in \{1,..,m\} \end{cases}$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.2 *Si $g \in \left(C^1\,(\mathbb{R})\right)^m$, alors le problème (11) admet une unique solution*

$$W\,(x,t) = \sum_{s=1}^{m} g_s\,(x - \lambda_s t)\,r_s \qquad \forall\,(x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[$$

Une démonstration des deux théorèmes précédents est donnée en Annexe. Voir [9] pour une étude plus détaillée de ce type de problèmes.

2.1.2 Systèmes symétriques de Friedrichs

Rappelons le cadre général proposé par Friedrichs pour étudier les systèmes symétriques d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. On se restreint ici aux problèmes d'évolution posés dans des domaines de la forme $\Omega \times [0,T]$ où Ω est un ouvert de $I\!R^m$ et nécessitant la donnée de la fonction inconnue au temps $t = 0$. Soient $\mathbb{A}_i\,(x,t)$, m matrices carrées symétriques de $L(I\!R^p)$ dont les coefficients sont lipschitziens dans $\Omega \times [0,T]$ et $\mathbb{A}_0\,(x,t)$ une matrice carrée de $L(I\!R^p)$ dont les coefficients sont dans $L^\infty\,(\Omega \times [0,T])$. On cherche une fonction $\mathrm{U} : \Omega \times [0,T] \to I\!R^p$, solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{A}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \mathbb{A}_0 U = \mathbb{F} \\ U\,(x,0) = U_0\,(x) \end{cases} \tag{12}$$

Avec

$$U_0 \in \left(L^2(\Omega)\right)^p, \qquad F \in \left(L^2(\Omega \times [0,T])\right)^p$$

Pour Ω différent de $\mathbb{R}^m$, il faut rajouter à (12) des conditions aux limites. Une solution proposée par Friedrichs pour obtenir un problème bien posé est la suivante: soient $\Gamma = \partial\Omega$ et n vecteur normal à Γ, orienté vers l'extérieur. On pose

$$\mathbb{B}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} n_i \mathbb{A}_i(x,t) \quad \forall x \in \Gamma$$

Soit $\mathbb{M}(x,t)$, une matrice carrée de $L(\mathbb{R}^p)$, définie $\forall x \in \Gamma$, et telle que:

$$\mathbb{M} + \mathbb{M}^t \geq 0$$

$$Ker(\mathbb{B} - \mathbb{M}) \oplus Ker(\mathbb{B} + \mathbb{M}) = \mathbb{R}^p$$

Alors la condition aux limites homogène est:

$$U(x,t) \in Ker(\mathbb{B}(x,t) - \mathbb{M}(x,t)) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{13}$$

On se rapportera à Phillips-Sarason [13] pour la théorie générale et on retiendra pour la suite le résultat suivant: **sous des hypothèses convenables de régularité, le problème défini par (12) et la condition aux limites (13) admet une solution unique.**

2.2 Théorie des schémas

Dans la première partie, on a présenté des équations hyperboliques. En pratique, il n'est pas toujours possible de calculer explicitement la solution d'un problème, c'est pour cette raison qu'ont été introduites les méthodes numériques. Plusieurs familles de méthodes existent (méthode des différences finies, méthodes des volumes finis, méthodes des éléments finis, méthodes spectrales, ...). Dans cette partie, nous commencerons par rappeler rapidement certaines définitions et résultats fondamentaux (que nous illustrerons par le problème simple de l'équation d'advection). Puis nous détaillerons deux points cruciaux dans l'analyse des schémas de tout type: la méthode des équations équivalentes et l'analyse de Fourier.

2.2.1 Rappels

Considérons le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall\,(x,t) \in I\!R \times I\!R^+ \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \forall x \in I\!R \end{cases} \tag{14}$$

On supposera $c > 0$ (le cas opposé se déduisant aisément par symétrie) et la donnée initiale est supposée de classe C^1, périodique sur $I\!R$ de période 1. Cette hypothèse permet de limiter la résolution du problème à un intervalle borné et de supprimer le problème des conditions aux limites. Pour résoudre ce problème, on définit un maillage du domaine $[0,1] \times I\!R^+$, d'intervalles $\Delta x = \frac{1}{N}$ en espace et Δt en temps. En supposant que nous ne connaissons pas la solution de notre problème (ce qui évidemment n'est pas vrai), le but de la méthode consiste à calculer le mieux possible les valeurs de la solution exacte u aux noeuds du maillage, c'est à dire avoir $u_j^n \simeq u\,(x_j,t^n)$ avec $x_j = j\Delta x$, $t^n = n\Delta t > 0$. Pour cette équation, un schéma possible est:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{15}$$

Définition 2.2 *Le schéma précédent définit une approximation* ***consistante*** *de l'opérateur aux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}$ si pour toute fonction $v = v\,(t,x)$ suffisamment régulière, le*

$$\sup_{\substack{t \in I\!N\Delta t \\ x \in \{0,..,N\}\Delta x}} \left| \frac{v\,(x,t+\Delta t) - v\,(x,t)}{\Delta t} + \frac{v\,(x+\Delta x,t) - v\,(x-\Delta x,t^n)}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,t) \right|$$

tend formellement vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0 indépendamment.

Définition 2.3 *Un schéma consistant est* ***précis à l'ordre p en temps et q en espace*** *si et seulement si la norme tend vers 0 comme $\bigcirc(\Delta t^p + \Delta x^q)$ lorsque Δt et Δx tendent vers 0 indépendamment.*

Définition 2.4 *Un schéma numérique est dit* ***convergent*** *au sens de la norme $\|\|$ si et seulement si, pour la résolution numérique de l'équation considérée (sur le domaine $]0,L[$)*

$$\lim_{\Delta t,\Delta x \to 0} \left(\sup_{0 \le n\Delta t \le T} \| \left(u_j^n - u\,(x_j,t^n)\right)_j \| \right) = 0 \qquad \forall T > 0$$

Définition 2.5 *Un schéma numérique est* ***stable*** *pour la norme $|||$ si et seulement si pour tout $T > 0$, il existe une constante C_T ne dépendant pas de Δt et de Δx telle que :*

$$\|u^n\| \leq C_T \|u^0\| \qquad \forall n \quad tel\ que \quad n\Delta t \leq T$$

quelle que soit la condition initiale u^0. Dans cette définition, on parle d'une norme $|||$ sans précision. Si l'on note $u^n = \left(u_j^n\right)$, pour $j \in \{1,..,N\}$, la solution numérique au temps $t^n = n\Delta t$, on peut définir plusieurs normes:

$$\|u\|_\infty = \sup_{1\leq j\leq N} \left|u_j^n\right|, \quad \|u_1\| = \sum_{j=1}^{N} \Delta x \left|u_j^n\right|, \quad \|u_2\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \Delta x \left|u_j^n\right|^2}$$

qui correspondent, de façon discrète aux normes de $L^\infty(]0,1[), L^1(]0,1[), L^2(]0,1[)$.

Théorème 2.3 ***Théorème de Lax****: Supposons que le problème (14) est bien posé et qu' il est approché par un schéma linéaire que l'on supposera consistant alors la méthode numérique converge au sens de*

$$\forall T > 0, \qquad \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \left(\sup_{t^n \leq T} \| \underbrace{\left(u_j^n - u\left(x_j, t^n\right)\right)_j}_{e^n} \| \right) = 0$$

si et seulement si le schéma est stable pour la norme $|||$.

Démonstration 2.1 Commençons par supposer le schéma stable : soit u la solution exacte du problème (14) et $\left(u_j^n\right)$ la solution obtenue par un schéma linéaire, consistant, de condition initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et on suppose u assez régulière. Posons alors:

$$e_j^n = u_j^n - u\left(x_j, t^n\right) \qquad e^n = \left(e_j^n\right)_{1\leq j\leq N}$$

Si le schéma est précis à l'ordre q en espace et p en temps, alors pour tout $T > 0$, il existe une constante positive C_T telle que :

$$\sup_{t^n \leq T} \|e^n\| \leq C_T \left(\Delta t^p + \Delta x^q\right)$$

On écrit le schéma sous la forme $u^{n+1} = Mu^n$, où M est un opérateur de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et $u^n = \left(u_j^n\right)_{1\leq j\leq N}$. Comme le schéma est précis à l'ordre q en espace et p en temps, pour une fonction v régulière vérifiant $\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, on a, en posant $v^n = \left(v\left(x_j, t^n\right)\right)_{1\leq j\leq N}$

$$v^{n+1} = Mv^n + \Delta t \epsilon^n, \quad \text{où} \quad \|\epsilon^n\| \leq C\left(\Delta x^q + \Delta t^p\right)$$

En utilisant ces deux égalités, on obtient pour l'erreur

$$e^{n+1} = Me^n - \Delta t \epsilon^n$$

Et par récurrence

$$e^n = M^n e^0 - \Delta t \sum_{k=1}^{n} M^{n-k} \epsilon^{k-1}$$

Puisque le schéma est stable, $\|u^n\| \leq K_T \|u^0\|$, et comme, $u^n = M^n u^0$, la stabilité implique $\|M^n\| \leq K_T \quad \forall n$ tel que $n\Delta t \leq T$. Puisque $e^0 = 0$, finalement:

$$\|e^n\| \leq \Delta t \sum_{k=1}^{n} \|M^{n-k}\| \|\epsilon^{k-1}\| \leq n\Delta t K_T C \left(\Delta x^p + \Delta t^q\right)$$

Ce qui achève la première partie de la démonstration. Supposons maintenant que le schéma est convergent, nous allons utiliser le théorème de Banach-Steinhaus dont une démonstration est donnée en annexe. Rappelons l'énoncé de ce théorème :

Théorème 2.4 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille non nécessairement dénombrable d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \qquad x \in E$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

c'est à dire qu'il existe une constante c telle que :

$$\|T_i x\| \leq c\|x\| \qquad \forall x \in E, \qquad \forall i \in I$$

Considérons alors l'opérateur T_n qui a $\left(u_i^0\right)_i$ fait correspondre $(u_i^n)_i$, en supposant que nous travaillons dans des espaces de fonctions appropriés que nous ne détaillerons pas ici, nous avons alors bien à faire à une famille d'opérateurs linéaires et continus. Comme

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} T_n u^0 (x,t) = u(x,t) \quad \text{lorsque} \quad n\Delta t \to t, j\Delta x \to x$$

Il en résulte que $T_n u^0$ reste borné pour toute fonction u^0 assez régulière. On obtient finalement la consistance grâce au théorème précédent.

■

2.2.2 Présentation de la méthode des équations équivalentes

La méthode des équations équivalentes introduites par Warming et Hyett est une méthode formelle qui permet l'analyse de l'ordre d'un schéma numérique, elle permet également d'étudier les erreurs de troncature et de mesurer les effets dissipatifs et dispersifs. Nous allons donc rappeler rapidement le principe de l'équation équivalente, et cela en gardant notre exemple de l'équation d'advection. Nous démontrerons ensuite certains résultats dûs à Warming et Hyett, pour une obtention rapide et puissante de l'équation équivalente dans le cas de schémas linéaires à dimension d'espace quelconque. Tous les développements qui suivent sont formels et nous ne chercherons pas à les rendre rigoureux d'un point de vue mathématique. Permettons nous de récrire le schéma (15) sous la forme

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + c\frac{u(x+\Delta x,t) - v(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} = 0 \tag{16}$$

En supposant que u est C^∞, on peut écrire les développements de Taylor au point (x,t) suivants:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) = -c\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \bigcirc\left(\Delta x^2\right)\right)$$

En dérivant cette égalité par rapport à t, puis par rapport à x, on obtient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) = -c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \bigcirc\left(\Delta x^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) = -c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigcirc\left(\Delta x^2\right)\right)$$

En éliminant ces termes dans (16), on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -c^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) + \bigcirc\left(\Delta x^2\right)$$

Formellement, cette équation est l'équation aux dérivées partielles réellement approchée par notre schéma. Il s'agit de **l'équation équivalente à l'ordre deux**, nous pourrions poursuivre les développements jusqu'à n'importe quel ordre. Les termes restant constituent l'erreur de troncature de la méthode numérique. En particulier, l'équation précédente montre que le schéma est d'ordre un en temps et deux en espace. De plus, dans un cadre général, nous pouvons affirmer que:

- les effets des termes sont approximativement additifs.
- les termes de dérivées paires $\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}$ sont des termes de diffusion.
- les termes de dérivées impaires $\frac{\partial^{2p+1} u}{\partial x^{2p+1}}$ sont des termes de dispersion.

En effet nous pouvons illustrer les deux dernières notions par un exemple: Soit $\lambda,\mu,\omega,\varphi \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$, le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \sin(\omega x + \varphi) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Admet une unique solution donnée par:

$$u(x,t) = e^{-\lambda\omega^2 t}\sin\left(\omega\left(x - \left(c + \mu\omega^2\right)t\right) + \varphi\right)$$

Cette solution est à comparer à la solution v du problème:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x,0) = \sin(\omega x + \varphi) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donnée simplement par $v(x,t) = \sin(\omega(x - ct) + \varphi)$. On peut ainsi remarquer que l'effet du terme $\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ porte sur l'amplitude de la solution. Pour $\lambda > 0$, la solution est amortie, d'autant plus vite que ω est élevée: cet effet est dit **dissipatif**. Quant au terme $\mu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, il modifie la vitesse de propagation c de la solution de façon décroissante pour $\mu < 0$ et de manière croissante sinon; de plus dans les deux cas la perturbation agit proportionnellement à la fréquence. Cet effet, qui module la vitesse de propagation selon la fréquence, est dit **dispersif**.

2.2.3 Une méthode de calcul des équations équivalentes

Cette méthode a été introduite par Warming et Hyett [16]. Nous allons dans cette partie établir deux propositions permettant dans différents cas d'obtenir simplement l'équation équivalente d'un schéma. Ces deux résultats sont parfaitement détaillés dans [14].

Cas monodimensionnel Considérons une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants de la forme suivante (en dimension un):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{K \geq 0} \theta_K \frac{\partial^K u}{\partial x^K} \tag{17}$$

Où il s'agit d'une somme finie, et nous supposons que cette équation est approché par le schéma suivant (sur un maillage régulier):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sum_k \Psi_k (\Delta x)\, u_{j+k}^n \tag{18}$$

Où il s'agit toujours d'une somme finie, et nous introduisons la fonction suivante :

$$g_{\Delta x}(X) = \sum_k \Psi_k (\Delta x)\, e^{k \Delta x X} \tag{19}$$

Proposition 2.1 *Supposons que le schéma (18) est consistant avec l'équation (17). Alors l'équation équivalente du schéma (18) s'écrit:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\Delta t, \Delta x) \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$$

avec $\sum_{k \geq 0} \alpha_k (\Delta t, \Delta x) X^k$ *le développement en série de la fonction :*

$$F(X) = \frac{\log (1 + \Delta t g_{\Delta x}(X))}{\Delta t}$$

Lemme 2.1 *Supposons que le schéma (18) est consistant avec l'équation (17), et posons* $g_0(X) = \sum_{K \geq 0} \theta_K X^K$, *alors:*

$$\forall X \in I\!R \qquad g_{\Delta x}(X) - g_0(X) = \bigcirc (\Delta x)$$

Démonstration 2.2 *Démonstration du lemme*
Comme le schéma est consistant, nous avons pour toute fonction v(x) C^∞

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_k \Psi_k (\Delta_x)\, v(x + k\Delta x) - \sum_{K \geq 0} \theta_K \frac{d^K u}{dx^K} \right) = 0 \tag{20}$$

Pour tout $X \in I\!R$, nous pouvons prendre $v(x) = e^{xX}$, ce qui donne:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_k \Psi_k (\Delta_x)\, e^{k \Delta x X} - \sum_{K \geq 0} \theta_K X^K \right) = 0$$

d'où le résultat.

Remarque 2.1 *Nous pouvons démontrer ce lemme dans un cadre plus général. En effet, le premier terme de (20) peut s'écrire :*

$$\sum_k \sum_{K \geq 0} \Psi_k (\Delta x) \frac{(k \Delta x)^K}{K!} \frac{d^K v}{dx^K}$$

Et donc

$$\sum_k \Psi_k(\Delta x)\frac{(k\Delta x)^K}{K!} = \theta_K + \bigcirc(\Delta x) \qquad \forall K$$

$$\sum_k \sum_{K\geq 0} \Psi_k(\Delta x)\frac{(k\Delta x X)^K}{K!} = \sum_{K\geq 0}\theta_K X^K + \bigcirc(\Delta x) \qquad \forall X \in \mathbb{C}$$

Ce qui démontre le lemme $\forall X \in \mathbb{C}$.

■

Démonstration 2.3 *Démonstration de la proposition*
Supposons que $u(x,t)$ satisfait l'équation suivante:

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} = \sum_k \Psi_k(\Delta x)\, u(x+k\Delta x,t)$$

Et que de plus, nous puissions appliquer à u la transformation de Fourier: par exemple u C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Ces hypothèses ne sont pas restrictives car elles ne changent rien à l'obtention de l'équation équivalente. La transformation de Fourier nous donne:

$$\left(\frac{e^{i\tau\Delta t}-1}{\Delta t}\right)\widehat{u}(\xi,\tau) = g_{\Delta x}(i\xi)\,\widehat{u}(\xi,\tau) \tag{21}$$

En utilisant le développement en série entière de la fonction $\exp(x)$, on obtient:

$$\sum_{p\geq 1}(i\tau)^p\frac{\Delta t^{p-1}}{p!}\widehat{u}(\xi,\tau) = \sum_k\sum_{p\geq 0}\Psi_k(\Delta x)\frac{(k\Delta x)^p}{p!}(i\xi)^p\,\widehat{u}(\xi,\tau)$$

Et en appliquant la transformée de Fourier inverse, on a:

$$\sum_{p\geq 1}\frac{\Delta t^{p-1}}{p!}\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \sum_k\sum_{p\geq 0}\Psi_k(\Delta x)\frac{(k\Delta x)^p}{p!}\frac{\partial^p u}{\partial x^p}$$

La méthode des équations équivalentes qui consiste à établir explicitement cette égalité est souvent non triviale. D'après (21), la distribution $\widehat{u}(\xi,\tau)$ est nulle excepté sur l'ensemble défini par: $\frac{e^{i\tau\Delta t}-1}{\Delta t} = g_{\Delta x}(i\xi)$. Cet ensemble est également défini par:

$$i\tau = \frac{\log(1+\Delta t g_{\Delta x}(i\xi))}{\Delta t} = F(i\xi) \tag{22}$$

Regardons de plus près le lemme obtenu précédemment:

$$\sum_k\sum_{p\geq 0}\Psi_k(\Delta x)\frac{(k\Delta x X)^p}{p!} - \sum_{K\geq 0}\theta_K X^K = \bigcirc(\Delta x) \qquad \forall X$$

Ce qui est très appréciable car $\Psi_k(\Delta x)$ est formé de puissances négatives en Δx. Il s'en suit qu'il existe une suite de polynômes en X: $(g_p(X))_{p\geq 1}$; telle que

$$g_{\Delta x}(X) - g_0(X) = \sum_{p\geq 1}\Delta x^p g_p(X) \qquad \forall X$$

On peut donc écrire pour Δt,Δx petits:

$$F(X) =$$

$$\frac{\log\left(1+\Delta t g_0(X)+\Delta t\sum_{p\geq 1}\Delta x^p g_p(X)\right)}{\Delta t} = g_0(X)+\sum_{\substack{p+q\geq 1\\ r\geq 0}}\delta_{p,q,r}\Delta x^p\Delta t^q X^r \stackrel{déf}{=} \sum_{k\geq 0}\alpha_k(\Delta t,\Delta x)X^k$$

En réutilisant (22), et ce qui précède:

$$i\tau\widehat{u}(\xi,\tau) - F(i\xi)\widehat{u}(\xi,\tau) = i\tau\widehat{u}(\xi,\tau) - \sum_k \alpha_k(\Delta t,\Delta x)(i\xi)^k\widehat{u}(\xi,\tau) = 0$$

Et en utilisant la transformée de Fourier inverse, on obtient l'équation équivalente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k\leq 0}\alpha_k(\Delta t,\Delta x)\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$$

Ce qui achève la démonstration.

■

Illustration Reprenons le cas de l'introduction:

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} + c\frac{u(x+\Delta x,t)-v(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} = 0$$

On a alors:

$$\begin{cases} \Psi_1(\Delta x) = -\frac{c}{2\Delta x} \\ \Psi_2(\Delta x) = \frac{c}{2\Delta x} \end{cases}$$

Donc

$$g_{\Delta x}(X) = -\frac{c}{\Delta x}\sinh(\Delta x X)$$

D'où formellement

$$F(X) = -\sum_{p\geq 1}\frac{(\Delta t)^{p-1}}{p}\left(\frac{c}{\Delta x}\right)^p(\sinh(\Delta x X))^p$$

$$F(X) = -\sum_{p\geq 1}\frac{(\Delta t)^{p-1}}{p}\left(\frac{c}{\Delta x}\right)^p\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(\Delta x X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^p$$

On obtient:

$$\begin{cases} \alpha_0(\Delta t,\Delta x) = 0 \\ \alpha_1(\Delta t,\Delta x) = -c \\ \alpha_2(\Delta t,\Delta x) = -\frac{c^2\Delta t}{2} \\ \alpha_3(\Delta t,\Delta x) = -\frac{c}{3}\left(c^2\Delta t^2 + \frac{\Delta x^2}{2}\right) \\ \alpha_4(\Delta t,\Delta x) = -\frac{c^2\Delta t}{2}\left(\frac{c^2\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta x^2}{3}\right) \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire facilement l'équation équivalente à l'ordre 4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -c^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{c}{3}\left(c^2\Delta t^2 + \frac{\Delta x^2}{2}\right)\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left(\frac{c^2\Delta t}{2}\left(\frac{c^2\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta x^2}{3}\right)\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Ce résultat nous permet de retrouver que ce schéma est d'ordre un en temps et deux en espace, de plus nous avons ainsi obtenu les deux premiers termes diffusifs et le premier terme dispersif.

Cas bidimensionnel La proposition 2.1 démontré dans la partie précédente peut facilement s'étendre aux équations linéaires à coefficients constants et à deux dimensions d'espace. Considérons ainsi que l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{K,M\geq 0} \theta_{K,M} \frac{\partial^{K+M} u}{\partial x^k \partial y^M} \tag{23}$$

est approchée par le schéma explicite suivant:

$$\frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\Delta t} = \sum_{j,k} \Psi_{j,k}\left(\Delta x,\Delta y\right) u_{l+j,m+k}^n \tag{24}$$

Proposition 2.2 *Supposons que le schéma (24) est consistant avec l'équation (23). Alors l'équation équivalente s'écrit:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j,k} \alpha_{j,k}\left(\Delta t,\Delta x,\Delta y\right) \frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k}$$

Avec $\sum_{j,k} \alpha_{j,k}\left(\Delta t,\Delta x,\Delta y\right) X^j Y^k$*, le développement en série de la fonction:*

$$F\left(X,Y\right) = \frac{\log\left(1 + \Delta t g_{\Delta x,\Delta y}\left(X,Y\right)\right)}{\Delta t}$$

$$\text{où} \qquad g_{\Delta x,\Delta y}\left(X,Y\right) = \sum_{j,k} \Psi_{j,k}\left(\Delta x,\Delta y\right) e^{j\Delta x X + k\Delta y Y}$$

Démonstration 2.4 Supposons que $u\left(x,t\right)$ satisfait l'équation suivante :

$$\frac{u\left(x,y,t+\Delta t\right) - u\left(x,y,t\right)}{\Delta t} = \sum_{j,k} \Psi_{j,k}\left(\Delta x \Delta y\right) u\left(x + j\Delta x, y + k\Delta y, t\right)$$

Et que de plus, nous puissions appliquer à u la transformation de Fourier, nous obtenons alors:

$$\left(\frac{e^{i\tau\Delta t} - 1}{\Delta t}\right) \widehat{u}\left(\xi,\zeta,\tau\right) = g_{\Delta x \Delta y}\left(i\xi, i\zeta\right) \widehat{u}\left(\xi,\zeta,\tau\right)$$

La suite de la démonstration est identique à celle de la proposition 1, en prenant: $g_0\left(X,Y\right) = \sum_{K,M\geq 0} \theta_{K,M} X^k Y^M$.

■

Illustration Reprenons l'équation d'advection en deux dimensions avec c constants :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Illustrons la proposition sur le schéma :

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2\delta x} + c\frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2\delta y} = 0$$

Nous avons:

$$\begin{cases} \Psi_{1,0}\left(\Delta x,\Delta y\right) = -\frac{c}{2\Delta x} \\ \Psi_{-1,0}\left(\Delta x,\Delta y\right) = \frac{c}{2\Delta x} \\ \Psi_{0,1}\left(\Delta x,\Delta y\right) = -\frac{c}{2\Delta y} \\ \Psi_{0,-1}\left(\Delta x,\Delta y\right) = \frac{c}{2\Delta x} \end{cases}$$

Donc

$$g_{\Delta x,\Delta y}(X,Y) = -\frac{c}{\Delta x}\sinh(\Delta x X) - \frac{c}{\Delta y}\sinh(\Delta y Y)$$

$$\begin{cases} \alpha_{0,0}(X,Y) = 0 \\ \alpha_{1,0}(X,Y) = -c \\ \alpha_{0,1}(X,Y) = -c \\ \alpha_{1,1}(X,Y) = -c^2\Delta t \\ \alpha_{2,0}(X,Y) = -\frac{c^2\Delta t}{2} \\ \alpha_{2,1}(X,Y) = -c^3\Delta t^2 \\ \alpha_{0,2}(X,Y) = -\frac{c^2\Delta t}{2} \\ \alpha_{1,2}(X,Y) = -\frac{c^2\Delta t}{2} \\ \alpha_{2,2}(X,Y) = -\frac{3c^4\Delta t^3}{2} \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$$

Les résultats obtenus sont très intéressants par le fait qu'ils peuvent alléger de manière très importante les calculs de l'équation équivalente, de plus ces résultats peuvent s'étendre aux schémas implicites, nous renvoyons à [14] pour plus de détails.

2.3 Analyse de Fourier

Dans la partie précédente, nous avons détaillé certains résultats permettant d'étudier l'ordre d'un schéma et l'erreur de troncature. Dans cette partie nous allons nous intéresser à un autre point crucial sur l'analyse d'un schéma : la stabilité. Nous allons montrer comment dans le cas particulier d'opérateurs à coefficients constants approchés par des quotients différentiels à pas constants pour des problèmes posés dans $\mathbb{R}^N$, l'analyse de Fourier est un outil très utile pour l'étude de la stabilité.

2.3.1 Théorie

Revenons à la définition 2.5 de la stabilité, on pourrait juger redondant le fait d'avoir introduit trois normes car toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^N$. Il n'en ait rien car cette remarque est justifiée si et seulement si nous travaillons à Δx fixé, c'est à dire à N fixé. En effet cette équivalence n'a pas lieu uniformément pour toute valeur de Δx. Or la majoration uniforme doit être indépendante de Δx. Temporairement, laissons de côté le choix de la norme avec laquelle travailler. Nous allons commencer par rappeler des résultats très pratique sur les matrices circulantes.

Matrices circulantes L'entier N étant provisoirement fixé, tout schéma à deux niveaux peut s'écrire sous la forme :

$$u^{n+1} = Mu^n$$

avec M une matrice carrée d'ordre N. D'où $u^n = M^n u^0$, la suite de vecteur $(u^n)_n$ est donc bornée si et seulement si la suite $(M^n)_n$ est bornée. Or en notant $\rho(M)$ le rayon spectral de la matrice M, nous avons le résultat suivant:

Proposition 2.3

$$\|M^n\| \underset{n\to\infty}{\sim} (\rho(M))^n$$

(Voir démonstration en annexe). Donc si $\rho(M) < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$ et la suite (M^n) est bornée; et si $\rho(M) > 1$, alors la suite (M^n) diverge.

Définition 2.6 *Une matrice $M = (M_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ est dite circulante si et seulement si elle vérifie pour tout quadruplet $(i,j,k,l) \in \{1,2,..,N\}^4$:*

$$i - j \equiv k - l \pmod{N} \Longrightarrow M_{ij} = M_{kl}$$

Par exemple, la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & c \\ c & a & b & \ddots & & 0 \\ 0 & c & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & c & a & b \\ b & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

est circulante, $\forall a,b,c$

Proposition 2.4 *Soit M une matrice circulante d'ordre N. Alors M est diagonalisable et a pour vecteurs propres les vecteurs X_k (pour $k \in \{1,..,N\}$) de coordonnées:*

$$(X_k)_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2ijk\pi}{N}\right) \qquad \forall j \in \{1,..,N\} \tag{25}$$

Démonstration 2.5 Posons:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $H^t = E^{-1}$ et que $H^N = Id$. De plus :

$$M = \sum_{j=1}^{N} M_{1j} H^{j-1}$$

Donc M a pour vecteurs propres les vecteurs propres de E, il reste à vérifier que les vecteurs de (25) sont bien vecteurs propres de H. Or cela est immédiat car

$$MX_k = \lambda_k X_k \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{N}\right)$$

Les N valeurs propres étant distinctes, la matrice H et donc toute matrice circulante est diagonalisable.

■

Ce résultat nous invite à regarder tout vecteur dans cette base de vecteurs propres. Pour tout vecteur $u = (u_j)_{1\leq j\leq N}$, on peut écrire $u = \sum_{k=1}^{N} v_k X_K$. En fait les coordonnées v_k sont reliés aux coordonnées u_k par une transformation de Fourier discrète :

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} v_k \exp\left(\frac{2ijk\pi}{N}\right) \qquad \forall \in \{1,2,..,N\} \tag{26}$$

Lemme 2.2 *Soit $u = (u_j)_{1\leq j\leq N}$ et $v = (v_k)_{1\leq k\leq N}$ deux vecteurs vérifiant (26). Alors , v est donné par la transformation de Fourier discrète inverse :*

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} u_j \exp\left(-\frac{2ijk\pi}{N}\right) \qquad \forall k \in \{1,2,..,N\}$$

Et de plus :

$$\sum_{k=1}^{N} |v_k|^2 = \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2$$

Démonstration 2.6 Pour $m \in \{1,2,..,N\}$, calculons $w_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} u_j \exp\left(-\frac{2ijm\pi}{N}\right)$. En utilisant (26), on a :

$$w_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} v_k \left(\exp\left(\frac{2i\,(k-m)\,\pi}{N}\right)\right)^j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} v_k \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\exp\left(\frac{2i\,(k-m)\,\pi}{N}\right)\right)^j\right)$$

or

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\exp\left(\frac{2i\,(k-m)\,\pi}{N}\right)\right)^j = N\delta_{k,m}$$

ce qui démontre le premier résultat du lemme. De plus :

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 = \sum_{j=1}^{N} u_j \bar{u}_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} v_k \exp\left(\frac{2ijk\pi}{N}\right)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} \bar{v}_l \exp\left(\frac{-2ijl\pi}{N}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \frac{v_k \bar{v}_l}{N} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} \left(\exp\left(\frac{2i\,(k-l)\,\pi}{N}\right)\right)^j\right)}_{=N\delta_{k,l}}$$

on obtient finalement le résultat annoncé.

■

Nous allons illustrer, sur un exemple, les résultats obtenus.

illustration Reprenons l'équation d'advection monodimensionnel approché par un schéma explicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

On a alors $u^{n+1} = Mu^n$, avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -v & 0 & \dots & 0 & v \\ v & 1 & -v & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -v \\ -v & 0 & \dots & 0 & v & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad v = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

On a alors $M = Id - vH + vH^{-1}$, les valeurs propres de M sont donc:

$$\lambda_k = 1 - 2iv \sin\left(\frac{2ik\pi}{N}\right) \qquad \forall k \in \{1,..,N\}$$

il existe donc k tel que $|\lambda_k|^2 > 1$, nous avons donc à faire à un schéma inconditionnellement instable. Dans le cas du schéma décentré à gauche, nous aurions obtenu que $|\lambda_k|^2 \leq 1 \quad \forall k$ si et seulement si $0 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Sous cette hypothèse, en décomposant u^n dans la base des vecteurs propres sous la forme $u^n = \sum_{k=1}^N v_k^n X_k$, on a $v_k^n = (\lambda_k)^n v_k^0$. Donc

$$\Delta x \sum_{j=1}^N \|u_j^n\|^2 = \Delta x \sum_{k=1}^N \|v_k^n\|^2 \leq \Delta x \sum_{k=1}^N \|v_k^0\|^2 = \Delta x \sum_{j=1}^N \|u_j^0\|^2$$

Ce qui signifie que le schéma est stable en norme L^2, et donc converge pour cette norme d'après le théorème de Lax.

Remarque 2.2 *On peut résumer sous forme simpliste la démarche de l'analyse de Fourier dans le cas d'un schéma linéaire explicite de la forme :*

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n$$

On suppose qu'il est consistant. Pour étudier sa stabilité et dons sa convergence, on utilise un mode de Fourier, c'est à dire que l'on pose :

$$u_j^n = e^{ij\theta}, \quad u_j^{n+1} = \lambda(\theta)\, e^{ij\theta} \qquad \forall j$$

d'où

$$\lambda(\theta) = \alpha e^{-i\theta} + \beta + \gamma e^{i\theta}$$

et lorsque la solution du problème approché par ce schéma est assez régulière, le schéma est stable en norme L^2 si et seulement si $|\lambda(\theta)| \leq 1 \quad \forall \theta \in [0,2\pi]$. La valeur $\lambda(\theta)$ est appelée ***facteur d'amplification*** *du mode de Fourier $e^{ij\theta}$.*

Remarque 2.3 *Bien que tout ce qui a été dit précédemment ait été vu sur des schémas a un niveau et à une dimension, on peut facilement étendre ces résultats sur des schémas à plusieurs niveaux et à plusieurs dimensions, en effet considérons par exemple l'équation :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

approchée par le schéma consistant :

$$\frac{u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{u_{k+1,l}^n - u_{k-1,l}^n}{2\Delta x} + c\frac{u_{k,l+1}^n - u_{k,l-1}^n}{2\Delta y} = 0.$$

En posant

$$W^n = \begin{pmatrix} u^n_{k,l} \\ u^{n-1}_{k,l} \end{pmatrix}_{k,l} \quad \text{on a} \quad W^{n+1} = MW^n \quad \text{avec } M \text{ une matrice circulante}$$

Pour étudier sa stabilité, on injecte un mode de Fourier, c'est à dire :

$$u^{n-1}_{k,l} = e^{ik\theta_1+il\theta_2} \Longrightarrow u^n_{k,l} = \lambda\,(\theta_1,\theta_2)\, e^{ik\theta_1+il\theta_2}, \quad u^{n+1}_{k,l} = \lambda^2\,(\theta_1,\theta_2)\, e^{ik\theta_1+il\theta_2}$$

On obtient alors

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} + ic\Delta t\left(\frac{\sin(k\theta_1)}{\Delta x} + \frac{\sin(l\theta_2)}{\Delta y}\right) = 0$$

En posant $\mu = i\lambda$, on a donc une équation de la forme $\mu^2 + p\mu + 1 = 0$, avec p réel. Cela permet d'affirmer qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour la norme L^2 est $p \leq 2$, c'est à dire $\left|c\Delta t\left(\frac{\sin(k\theta_1)}{\Delta x} + \frac{\sin(l\theta_2)}{\Delta y}\right)\right| \leq 2 \quad \forall\theta_1,\theta_2 \in [0,2\pi]$. Ce qui est équivalent à $|c|\,\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y}\right) \leq 2$

Remarque 2.4 *Enfin, on peut également appliquer ce type de méthode sur des systèmes d'équations plus complexes, regardons par exemple le problème des cordes vibrantes:* $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - c\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$

Utilisons alors le schéma suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{v^n_k - v^{n-1}_k}{\Delta t} - c\dfrac{w^n_{k+1} - w^n_{k-1}}{\Delta x} = 0 \\ \dfrac{w^n_k - w^{n-1}_k}{\Delta t} - c\dfrac{v^n_{k+1} - v^n_{k-1}}{\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

En posant $W^n = \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix}_k$, on a $W^{n+1} = NW^n$ avec N une matrice circulante. On peut alors poser:

$$\begin{cases} v^n_k = A_n e^{ik\theta} \\ w^n_k = B_n e^{ik\theta} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + \frac{ic\Delta t\sin(\theta)}{\Delta x} B_n \\ B_{n+1} = B_n + \frac{ic\Delta t\sin(\theta)}{\Delta x} A_n \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ic\Delta t\sin(\theta)}{\Delta x} \\ \frac{ic\Delta t\sin(\theta)}{\Delta x} & 1 \end{pmatrix},$$

$G(\theta)$ est appelée la matrice d'amplification du schéma. Ces valeurs propres sont les facteurs d'amplification du mode de Fourier $e^{ij\theta}$. On obtient ainsi

$$\lambda = 1 \pm \frac{ic\Delta t\sin(\theta)}{\Delta x}$$

Finalement le schéma est inconditionnellement instable. Nous pouvons conclure en faisant une dernière remarque: nous avons illustré cette exemple en utilisant la matrice d'amplification or nous aurions pu poser directement

$$\begin{cases} v^n_k = A\lambda^n e^{ik\theta} \\ w^n_k = B\lambda^n e^{ik\theta} \end{cases}$$

et en réinjectant ces expressions dans (27), nous aurions obtenu les facteurs d'amplification du mode de Fourier $e^{ij\theta}$.

3 Schéma volumes finis

Cette partie a pour but de rappeler le principe de la discrétisation en volumes finis et d'illustrer cette méthode sur le système (7) en utilisant le schéma de Lax-Friedrichs et de Steger-Warming.

3.1 Exemple de maillage volumes finis

Soit Ω le domaine d'existence de l'équation (7), on définit une subdivision T_h de Ω par des triangles.

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{k \in T_h} k \\ k \cap k' = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou 1 sommet} \\ \text{ou 1 côté} \end{cases} \quad \forall k, k' \in T_h \end{cases}$$

Les noeuds de la triangulation sont les sommets des triangles et on pose :

$$\begin{cases} W_i = W(a_i, t) \\ a_i = \text{Sommet} \quad i = 1 \dots ns \\ ns = \text{Nombre de sommets} \end{cases}$$

Pour chaque noeud a_i, on peut par exemple définir le contour de la cellule c_i (volume de contrôle) en joignant les milieux des côtés adjacents à a_i et les centres de gravité des triangles dont a_i est sommet.

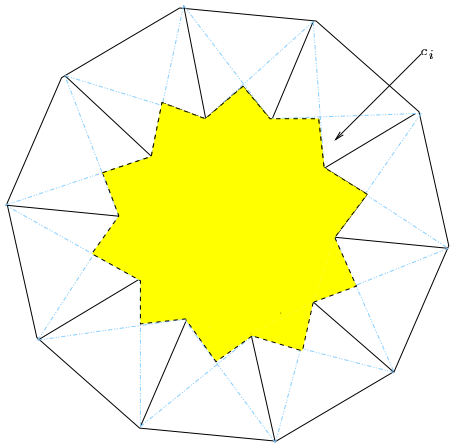


FIG. 2 – *Exemple de cellule*

Nous prendrons comme notations:

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{i \in J} c_i \\ J \subset \{0,1,2,..\} \\ |c_i| = \text{surface}(c_i) \\ s(i) = \{j \in J; j \neq i \quad \text{tels que} \quad \partial c_i \cap \partial c_j \neq \emptyset\} \\ \partial c_{ij} = \partial c_i \cap \partial c_j, \quad j \in J \\ n_{ij} = (n_{xij}, n_{yij}) \text{ est la normale extérieure du côté } \partial c_{ij} \text{ de } \partial c_i \\ l_{ij} = |\partial c_{ij}| \\ \Delta t = \text{pas de temps et} \quad t_k = k\Delta t, \quad k \subset \{0,1,2,..\} \end{cases}$$

Formulation intégrale Reprenons l'équation (7) sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F(W)}{\partial x}+\frac{\partial G(W)}{\partial y}=0 \qquad \text{sur} \quad \Omega\times(0,T) \quad \text{avec} \quad 0\le T<\infty \tag{28}$$

$$W=\begin{pmatrix}\delta\rho\\ \rho_0\delta u\\ \rho_0\delta v\\ \delta p\end{pmatrix} \qquad F(W)=\begin{pmatrix}\rho_0\delta u+u_0\delta\rho\\ \rho_0u_0\delta u+\delta p\\ \rho_0u_0\delta v\\ u_0\delta p+\gamma p_0\delta u\end{pmatrix} \qquad G(W)=\begin{pmatrix}\rho_0\delta v+v_0\delta\rho\\ \rho_0v_0\delta u\\ \rho_0v_0\delta v+\delta p\\ v_0\delta p+\gamma p_0\delta v\end{pmatrix}$$

Nous cherchons à résoudre (28). Pour que le problème soit bien posé il serait évidemment nécessaire de rajouter a cette équation une condition initiale et des conditions aux bords (voir page 8).

Grâce à (28), nous obtenons pour toute cellule c_i, $\quad i\in J$:

$$\int_{c_i}W(x,y,t)\;dxdy\Big|_{t_k}^{t_{k+1}}+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sum_{j\in s(i)}\int_{\partial c_{ij}}\left(F(W)\,n_x+G(W)\,n_y\right)\;dSdt=0$$

Sur chaque cellule c_i nous considérons les approximations suivantes:

$$\int_{c_i}W(x,y,t)\;dxdy \quad\approx\quad |c_i|W_i^k$$

$$\int_{c_i}W(x,y,t)\;dxdy\Big|_{t_k}^{t_{k+1}} \quad\approx\quad |c_i|\left(W_i^{k+1}-W_i^k\right)$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{\partial c_{ij}}\left(F(W)\,n_x+G(W)\,n_y\right)\;dSdt \quad\approx\quad \Delta t\left(\theta H_{ij}^{k+1}+(1-\theta)\,H_{ij}^k\right)l_{ij}$$

avec W_i^k une approximation de la solution exacte W dans la cellule c_i à l'instant t_k, $\theta\in[0,1]$ et $H_{ij}^k=H_{ij}\left(W_i^k,W_j^k,n_{ij}\right)$ correspond au flux numérique de W à travers le côté ∂c_{ij} de la cellule c_i. Les approximations et l'équation précédente nous donnent:

$$W_i^{k+1}=W_i^k-\frac{\Delta t}{|c_i|}\sum_{j\in s(i)}\left[\left(\theta H_{ij}^{k+1}+(1-\theta)\,H_{ij}^k\right)l_{ij}\right], \qquad i\in J, \quad k=0,1,... \tag{29}$$

Ce à quoi nous devons rajouter:

$$W_i^0=\frac{1}{|c_i|}\int_{c_i}W(x,y,0)\;dxdy, \qquad i\in J$$

Lorsque $\Theta\in\,]0,1]$, le schéma est dit implicite. Pour la suite, nous nous intéresserons aux cas où le schéma est explicite ($\Theta=0$), et prend donc la forme :

$$W_i^{k+1}=W_i^k-\frac{\Delta t}{|c_i|}\sum_{j\in s(i)}H_{ij}\left(W_i^k,W_j^k,n_{ij}\right)l_{ij}, \qquad i\in J, \quad k=0,1,... \tag{30}$$

Propriétés du flux numérique Nous verrons par la suite, différents choix possibles pour l'expression du flux numérique et nous supposerons qu'ils vérifient les assertions suivantes:

i) $H_{ij}(u,v,n)$ est défini et continue sur $\quad D\times D\times S_1 \quad$ avec $\quad D \quad$ domaine de définition des fonctions F et G

ii) H_{ij} est consistant : $H_{ij}(u,u,n)=F(u)\,n_x+G(u)\,n_y \qquad \forall u\in D, \quad n\in S_1$

iii) H_{ij} est conservative : $H_{ij}(u,v,n)=-H_{ji}(v,u,-n) \qquad \forall u,v\in D, \quad n\in S_1$

Si la condition *ii)* où *iii)* est vérifiée $\forall i\in J, \quad j\in s(i)$, alors la méthode sera, respectivement, dite consistante ou conservative.

3.2 Illustration

3.2.1 Choix du problème

Plaçons nous dans un cadre isentropique et considérons les variables $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0\delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \end{pmatrix}$.

Notre système s'écrit alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}_{W} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{pmatrix} u_0X + c_0Y \\ u_0Y + c_0X \\ u_0Z \end{pmatrix}}_{F(W)} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\begin{pmatrix} v_0X + c_0Z \\ v_0Y \\ v_0Z + c_0X \end{pmatrix}}_{G(W)} = 0$$

ou encore:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 & c_0 & 0 \\ c_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}}\frac{\partial W}{\partial x} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}}\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \tag{31}$$

Avant de donner différents flux, rappelons quelque notations:
pour tout vecteur $n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$, on note

$$\mathcal{P}(W,n) = F(W)\,n_x + G(W)\,n_y$$

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{A}n_x + \mathbb{B}n_y = \begin{pmatrix} n_xu_0 + n_yv_o & c_on_x & c_0n_y \\ c_0n_x & n_xu_0 + n_yv_o & 0 \\ c_0n_y & 0 & n_xu_0 + n_yv_o \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{T}(n)\;\mathbb{D}\;\mathbb{T}^{-1}(n) \quad \text{avec} \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} n_xu_0 + n_yv_o & 0 & 0 \\ 0 & n_xu_0 + n_yv_o + c_0\|n\| & 0 \\ 0 & 0 & n_xu_0 + n_yv_o - c_0\|n\| \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{T}(n) = \frac{1}{\|n\|}\begin{pmatrix} 0 & \|n\|/\sqrt{2} & \|n\|/\sqrt{2} \\ n_y & n_x/\sqrt{2} & -n_x/\sqrt{2} \\ -n_x & n_y/\sqrt{2} & -n_y/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et comme} \quad \mathbb{T}(n) \in \bigcirc(3) \Longrightarrow \mathbb{T}^{-1}(n) = \mathbb{T}^t(n)$$

$$\mathbb{D}^{\pm} = diag\left(\lambda_1^{\pm},\lambda_2^{\pm},\lambda_3^{\pm}\right)$$

$$|\mathbb{D}| = diag\left(|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\right)$$

$$\mathbb{P}^{\pm} = \mathbb{T}\mathbb{D}^{\pm}\mathbb{T}^{-1}$$

3.2.2 Différents flux

– Le flux de Lax-Friedrichs:

$$H_{ijLF}(u,v,n) = \frac{1}{2}\left(F(u)\,n_x + G(u)\,n_y + F(v)\,n_x + G(v)\,n_y - \frac{1}{\lambda_{ij}}(v-u)\right)$$

avec $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ indépendant de u et de v.

– Le flux de Vijayasundaram:

$$H_{ijV}(u,v,n) = \mathbb{P}^+\left(\frac{u+v}{2},n\right)u + \mathbb{P}^-\left(\frac{u+v}{2},n\right)v$$

– Le flux de Steger-Warming:

$$H_{ijSW}(u,v,n) = \mathbb{P}^+(u,n)\,u + \mathbb{P}^-(v,n)\,v$$

– Le flux de Van Leer:

$$H_{ijVL}(u,v,n) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}(u,n) + \mathcal{P}(v,n) - \left|\mathbb{P}\left(\frac{u+v}{2},n\right)\right|(v-u)\right)$$

Remarques

– Les quatre schémas précédents vérifient les trois assertions précédentes.

– Dans le cadre de notre système, $\mathcal{P}$ ne dépend que de n, donc les trois derniers flux sont identiques.

– Une version équivalente du flux de Vijayasundaram s'écrit:

$$H^{\star}_{ijV}(u,v,n) = \left(\mathbb{A}^+\left(\frac{u+v}{2}\right)u + \mathbb{A}^-\left(\frac{u+v}{2}\right)v\right)n_x + \left(\mathbb{B}^+\left(\frac{u+v}{2}\right)u + \mathbb{B}^-\left(\frac{u+v}{2}\right)v\right)n_y$$

Dans le cadre de notre problème (en supposant l'écoulement uniforme subsonique, $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$), nous avons:

$$\mathbb{A}^+ = \begin{pmatrix} \frac{u_0+c_0}{2} & \frac{u_0+c_0}{2} & 0 \\ \frac{u_0+c_0}{2} & \frac{u_0+c_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{A}^- = \begin{pmatrix} \frac{u_0-c_0}{2} & \frac{-u_0+c_0}{2} & 0 \\ \frac{-u_0+c_0}{2} & \frac{u_0-c_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B}^+ = \begin{pmatrix} \frac{v_0+c_0}{2} & 0 & \frac{v_0+c_0}{2} \\ 0 & v_0 & 0 \\ \frac{v_0+c_0}{2} & 0 & \frac{v_0+c_0}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbb{B}^- = \begin{pmatrix} \frac{v_0-c_0}{2} & 0 & \frac{-v_0+c_0}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_0+c_0}{2} & 0 & \frac{v_0-c_0}{2} \end{pmatrix}$$

3.2.3 Illustration en dimension deux

Nous allons dans cette partie écrire explicitement le schéma de Steger-Warming appliqué à l'équation (31) sur un maillage régulier composé de rectangles où le domaine est infini.

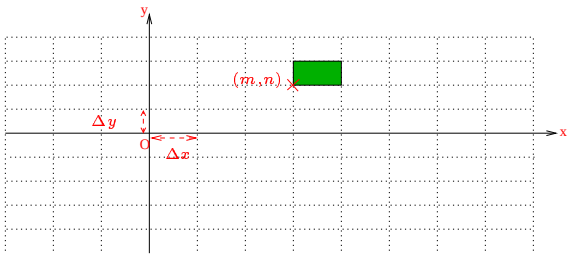


FIG. 3 – *Grille volumes finis*

Pour le schéma de Lax-Friedrichs, nous poserions $\lambda_{ij} = 2 \times \frac{\Delta t}{\Delta x}$, respectivement: $\lambda_{ij} = 2 \times \frac{\Delta t}{\Delta y}$ pour les cellules c_i, c_j telles que ∂c_{ij} est parallèle respectivement avec l'axe des ordonnées,

où avec l'axe des abscisses. Pour ne pas alourdir notre étude, nous renvoyons à l'annexe pour l'écriture explicite du schéma de Lax-Friedrichs appliqué à nos équations. Notons $W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = W^k\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$ une approximation de W à l'instant t_k dans la cellule c dont le centre a pour coordonnées $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$ et $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors en utilisant le schéma de Steger-Warming, l'équation (31) s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} W^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\left(\mathbb{P}^+(n_1)+\mathbb{P}^+(-n_1)\right)W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \mathbb{P}^-(n_1)\,W^k_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} + \mathbb{P}^-(-n_1)\,W^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \\ -\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\left(\mathbb{P}^+(n_2)+\mathbb{P}^+(-n_2)\right)W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \mathbb{P}^-(n_2)\,W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} + \mathbb{P}^-(-n_2)\,W^k_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right.$$

En supposant que l'écoulement initial est subsonique et que les différentes grandeurs sont positives, on obtient:

$$X^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c_0 X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{u_0-c_0}{2}X^k_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \frac{c_0+u_0}{2}X^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_0 Y^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{c_0-u_0}{2}Y^k_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \frac{u_0+c_0}{2}Y^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(c_0 X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - \frac{c_0+v_0}{2}X^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{v_0-c_0}{2}X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_0 Z^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{c_0-v_0}{2}Z^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \frac{v_0+c_0}{2}Z^k_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)$$

$$Y^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = Y^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c_0 Y^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{u_0-c_0}{2}Y^k_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \frac{c_0+u_0}{2}Y^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_0 X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{c_0-u_0}{2}X^k_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \frac{u_0+c_0}{2}X^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_0 Y^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - v_0 Y^k_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)$$

$$Z^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = Z^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_0 Z^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - u_0 Z^k_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(c_0 Z^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{v_0-c_0}{2}Z^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \frac{c_0+v_0}{2}Z^k_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_0 X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{c_0-v_0}{2}X^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \frac{v_0+c_0}{2}X^k_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)$$

3.2.4 Etude de l'ordre

En utilisant la technique des équations équivalentes sur le schéma précédent et en se plaçant en $x = x_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$, $t = t^k = k\Delta t$, on obtient, en effectuant les différents développements limités :

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + u_0\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + \rho_0\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \bigcirc(\Delta t) + \bigcirc(\Delta x) + \bigcirc(\Delta y) = 0$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + u_0\frac{\partial \delta u}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + \bigcirc(\Delta t) + \bigcirc(\Delta x) + \bigcirc(\Delta y) = 0$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + u_0\frac{\partial \delta v}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + c_0\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + \bigcirc(\Delta t) + \bigcirc(\Delta x) + \bigcirc(\Delta y) = 0$$

Ce qui prouve que sur le maillage considéré, le schéma de Steger-Warming approche le problème (31) à l'ordre un en temps et en espace. En effectuant le même raisonnement sur le schéma de Lax-Friedrichs donné en annexe, nous aurions obtenu:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + u_0\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + \rho_0\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \bigcirc\left(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{\Delta y^2}{\Delta t} + \Delta x^2 + \Delta y^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + u_0\frac{\partial \delta u}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + \bigcirc\left(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{\Delta y^2}{\Delta t} + \Delta x^2 + \Delta y^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + u_0\frac{\partial \delta v}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + c_0\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + \bigcirc\left(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{\Delta y^2}{\Delta t} + \Delta x^2 + \Delta y^2\right) = 0$$

Ce qui montre que le schéma de Lax-Friedrichs peut être inconsistant. Mais que sous les hypothèses $\Delta x = \bigcirc(\Delta t)$, $\Delta y = \bigcirc(\Delta t)$, ce schéma est d'ordre un en temps et en espace sur le maillage considéré.

3.2.5 Etude de la stabilité

En utilisant ce qui a été vu sur l'analyse de Fourier dans la partie 2.3, nous allons déterminer la matrice d'amplification du schéma et exprimer ses valeurs propres: en supposant que $W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$ puisse s'exprimer sous la forme d'une de série de Fourier discrète à deux variables d'espaces, posons

$$\begin{cases} \delta\rho^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = A_k e^{i(m\theta_1+n\theta_2)} \\ \delta u^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = B_k e^{i(m\theta_1+n\theta_2)} \\ \delta v^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = C_k e^{i(m\theta_1+n\theta_2)} \end{cases}$$

En utilisant (62),(63),(64), on obtient alors:

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k\left(-\frac{\Delta t u_0 i}{\Delta x}sin(\theta_1) - \frac{\Delta t v_0 i}{\Delta y}sin(\theta_2) + \frac{1}{2}cos(\theta_1) + \frac{1}{2}cos(\theta_2)\right) \\ +B_k\left(-\frac{\Delta t\rho_0 i}{\Delta x}sin(\theta_1)\right) + C_k\left(-\frac{\Delta t\rho_0 i}{\Delta y}sin(\theta_1)\right) \\ B_{k+1} = B_k\left(-\frac{\Delta t u_0 i}{\Delta x}sin(\theta_1) - \frac{\Delta t v_0 i}{\Delta y}sin(\theta_2) + \frac{1}{2}cos(\theta_1) + \frac{1}{2}cos(\theta_2)\right) \\ +A_k\left(-\frac{\Delta t c_0^2 i}{\Delta x\rho_0}sin(\theta_1)\right) \\ C_{k+1} = C_k\left(-\frac{\Delta t u_0 i}{\Delta x}sin(\theta_1) - \frac{\Delta t v_0 i}{\Delta y}sin(\theta_2) + \frac{1}{2}cos(\theta_1) + \frac{1}{2}cos(\theta_2)\right) \\ +A_k\left(-\frac{\Delta t c_0^2 i}{\Delta y\rho_0}sin(\theta_2)\right) \end{cases}$$

On obtient la matrice d'amplification du schéma:

$$G = \left(-\frac{\Delta t u_0 i}{\Delta x} sin\left(\theta_1\right) - \frac{\Delta t v_0 i}{\Delta y} sin\left(\theta_2\right) + \frac{1}{2} cos\left(\theta_1\right) + \frac{1}{2} cos\left(\theta_2\right)\right) Id$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta t \rho_0 i}{\Delta x} sin\left(\theta_1\right) & -\frac{\Delta t \rho_0 i}{\Delta y} sin\left(\theta_2\right) \\ -\frac{\Delta t c_0^2 i}{\Delta x \rho_0} sin\left(\theta_1\right) & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta t c_0^2 i}{\Delta y \rho_0} sin\left(\theta_2\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta t \rho_0 i}{\Delta x} sin\left(\theta_1\right) & -\frac{\Delta t \rho_0 i}{\Delta y} sin\left(\theta_2\right) \\ -\frac{\Delta t c_0^2 i}{\Delta x \rho_0} sin\left(\theta_1\right) & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta t c_0^2 i}{\Delta y \rho_0} sin\left(\theta_2\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont $\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = i\Delta t c_0 \sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{sin(\theta_2)}{\Delta y}\right)^2}, \quad \mu_3 = -\mu_2$. Ainsi les valeurs propres de la matrice d'amplification sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(cos\left(\theta_1\right) + cos\left(\theta_2\right)\right) - i\Delta t \left(\frac{u_0}{\Delta x} sin\left(\theta_1\right) + \frac{v_0}{\Delta y} sin\left(\theta_2\right)\right) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(cos\left(\theta_1\right) + cos\left(\theta_2\right)\right) - i\Delta t \left(\frac{u_0}{\Delta x} sin\left(\theta_1\right) + \frac{v_0}{\Delta y} sin\left(\theta_2\right) + c_0 \sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{sin(\theta_2)}{\Delta y}\right)^2}\right) \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(cos\left(\theta_1\right) + cos\left(\theta_2\right)\right) - i\Delta t \left(\frac{u_0}{\Delta x} sin\left(\theta_1\right) + \frac{v_0}{\Delta y} sin\left(\theta_2\right) - c_0 \sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{sin(\theta_2)}{\Delta y}\right)^2}\right) \end{cases} \tag{33}$$

Posons $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et $n = \Delta t \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_1)}{\Delta x} \\ \frac{\sin(\theta_2)}{\Delta y} \end{pmatrix}$, nous avons alors:

$$\begin{cases} \Im\left(\lambda_1\right) = -U \cdot n \\ \Im\left(\lambda_2\right) = -U \cdot n - c_0 \|n\| \\ \Im\left(\lambda_3\right) = -U \cdot n + c_0 \|n\| \end{cases}$$

Donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient:

$$\rho\left(G\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\theta_1\right) + \cos^2\left(\theta_2\right)\right) + \left(c_0 + \|U\|\right)^2 \|n\|^2$$

$$\rho\left(G\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(2 - \sin^2\left(\theta_1\right)\left(1 - \frac{2\Delta t^2\left(\|U\| + c_0\right)^2}{\Delta x^2}\right) - \sin^2\left(\theta_2\right)\left(1 - \frac{2\Delta t^2\left(\|U\| + c_0\right)^2}{\Delta y^2}\right)\right)$$

Nous obtenons ainsi pour le schéma de Lax-Friedrichs une condition suffisante de stabilité:

$$\Delta t \leq \frac{\min\left(\Delta x, \Delta y\right)}{\sqrt{2}\left(\|U\| + c_0\right)}. \tag{34}$$

Pour le schéma de Steger-Warming, nous verrons dans la suite une condition suffisante de stabilité sur maillage quelconque. Nous allons à présent introduire un nouveau schéma auquel nous comparerons le schéma de Lax-Friedrichs et le schéma de Steger-Warming.

4 Un autre schéma volumes finis pour un écoulement initial uniforme

4.1 Choix du schéma

Nous supposerons donc dans cette partie que l'écoulement initial est uniforme (à vitesse non nulle), et que l'hypothèse d'isentropie reste vraie. Nous repartons en fait du système (31):

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}_{W} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{pmatrix} u_0 X + c_0 Y \\ u_0 Y + c_0 X \\ u_0 Z \end{pmatrix}}_{F(W)} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{pmatrix} v_0 X + c_0 Z \\ v_0 Y \\ v_0 Z + c_0 X \end{pmatrix}}_{G(W)} = 0$$

Existence et unicité La remarque que nous allons faire aurait très bien pu être fait dans la partie précédente mais nous avons préféré l'introduire dans la partie la plus importante.
En utilisant ce qui a été vu dans la partie théorique, nous pouvons formellement parler d'existence et d'unicité de la solution d'un tel système. En effet le système précédent peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbb{A}\frac{\partial W}{\partial x} + \mathbb{B}\frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

avec $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices symétriques constantes. On se trouve donc ici dans un cas particulier des systèmes symétriques de Friedrichs. De ce fait modulo des hypothèses de régularité, en fixant une donnée initiale et des conditions aux limites appropriées le problème (31) admet une solution unique.
De plus lorsque nous travaillons en une dimension, le problème peut se récrire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \begin{pmatrix} u_0 & c_0 \\ c_0 & u_0 \end{pmatrix}\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

Nous pouvons, d'après le théorème 2.2, donner alors l'expression de la solution si la donnée initiale est assez régulière.

Choix du flux Nous choisissons:

$$H_{ij}(u,v,n) = \frac{1}{2}\left(F(u)\,n_x + G(u)\,n_y + F(v)\,n_x + G(v)\,n_y\right)$$

Après la discrétisation spatiale, le schéma s'écrit comme une équation différentielle ordinaire donnée sur chaque cellule c_i par:

$$\frac{dW}{dt} + \Psi(W) = 0$$

où

$$\Psi(W) = \frac{1}{|c_i|}\sum_{j\in s(i)} H_{ij} l_{ij}$$

Schéma en temps Nous choisissons comme discrétisation temporelle le schéma suivant:

$$W^{n+1} = W^{n-1} - 2\Delta t\,\Psi(W^n) \qquad \text{sur chaque cellule} \tag{35}$$

Illustration en dimension deux Nous allons dans cette partie écrire explicitement le schéma sur un maillage régulier composé de rectangles où le domaine est infini: en utilisant (35) et l'expression de H_{ij} on obtient:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{X^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - X^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{X^{n}_{m+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2}} - X^{n}_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + v_0 \dfrac{X^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2}} - X^{n}_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \\
+c_0 \dfrac{Y^{n}_{m+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2}} - Y^{n}_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + c_0 \dfrac{Z^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2}} - Z^{n}_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} = 0 \\
\dfrac{Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{Y^{n}_{m+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2}} - Y^{n}_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + v_0 \dfrac{Y^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2}} - Y^{n}_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \\
+c_0 \dfrac{X^{n}_{m+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2}} - X^{n}_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = 0 \\
\dfrac{Z^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - Z^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + u_0 \dfrac{Z^{n}_{m+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2}} - Z^{n}_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + v_0 \dfrac{Z^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2}} - Z^{n}_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \\
+c_0 \dfrac{X^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - X^{n}_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} = 0
\end{array}\right. \tag{36}$$

4.2 Etude de l'ordre du schéma

Proposition 4.1 *Le schéma (35) est d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage régulier.*

Démonstration 4.1 Pour simplifier les calculs, nous proposons de montrer la proposition précédente dans le cas du système (36). Pour ce faire, nous utilisons la technique des équations équivalentes: on se place en $x = x_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$, $t = t^n = n\Delta t$. En considérant les différents développements limités, on obtient:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial X}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial X}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial X}{\partial y} + c_0 \dfrac{\partial Y}{\partial x} + c_0 \dfrac{\partial Z}{\partial y} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) + \bigcirc\left(\Delta x^2\right) + \bigcirc\left(\Delta y^2\right) = 0 \\
\dfrac{\partial Y}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial Y}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial Y}{\partial y} + c_0 \dfrac{\partial X}{\partial x} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) + \bigcirc\left(\Delta x^2\right) + \bigcirc\left(\Delta y^2\right) = 0 \\
\dfrac{\partial Z}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial Z}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial Z}{\partial y} + c_0 \dfrac{\partial X}{\partial y} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) + \bigcirc\left(\Delta x^2\right) + \bigcirc\left(\Delta y^2\right) = 0
\end{array}\right.$$

Ce qui prouve que le schéma (36) approche le système (31) à l'ordre deux en temps et en espace sur le maillage considéré.

■

Remarque 4.1 *Cela nous permet donc d'affirmer que notre schéma est plus précis que le schéma de Lax-Friedrichs ou de Steger-Warming.*

4.3 Etude de la stabilité du schéma

Proposition 4.2 *Le schéma (36) est stable sous la condition de type CFL suivante :*

$$\Delta t \left(\frac{|u_0|}{\Delta x} + \frac{|v_0|}{\Delta y} + |c_0| \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right) \leq 1 \tag{37}$$

Démonstration 4.2 En utilisant l'analyse de Fourier décrite dans la partie 2.3, on pose :

$$\begin{cases} X^n_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \lambda^n X e^{i(m\theta_1+n\theta_2)} \\ Y^n_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \lambda^n Y e^{i(m\theta_1+n\theta_2)} \\ Z^n_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \lambda^n Z e^{i(m\theta_1+n\theta_2)} \end{cases} \qquad \lambda \neq 0, (X,Y,Z) \neq (0,0,0)$$

On obtient alors en injectant ces expressions dans le système (36):

$$\begin{cases} X \left(\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\Delta t} + u_0 \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + + v_0 \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} \right) + c_0 Y \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + c_0 Z \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} = 0 \\ Y \left(\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\Delta t} + u_0 \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + + v_0 \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} \right) + c_0 X \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} = 0 \\ Z \left(\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\Delta t} + u_0 \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + + v_0 \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} \right) + c_0 X \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} = 0 \end{cases}$$

On obtient trois équations possibles pour $\lambda - \frac{1}{\lambda}$:

$$\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\Delta t} + u_0 \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + + v_0 \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\Delta t} + u_0 \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + + v_0 \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} + c_0 i \sqrt{\frac{(sin\theta_1)^2}{\Delta x^2} + \frac{(sin\theta_2)^2}{\Delta y^2}} = 0$$

$$\frac{\lambda - \frac{1}{\lambda}}{2\Delta t} + u_0 \frac{isin(\theta_1)}{\Delta x} + + v_0 \frac{isin(\theta_2)}{\Delta y} - c_0 i \sqrt{\frac{(sin\theta_1)^2}{\Delta x^2} + \frac{(sin\theta_2)^2}{\Delta y^2}} = 0$$

Les différents λ possibles vérifient une équation de la forme :

$$\lambda^2 + ki\lambda - 1 = 0 \qquad \text{avec k réel.}$$

En posant $\mu = i\lambda$, on obtient $\mu^2 - k\mu + 1 = 0$ avec $|\mu| = |\lambda|$. Donc une condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit $|k| \leq 2$. En effet dans ce cas, on a deux racines complexes conjuguées de module 1 ce qui assure la stabilité; dans le cas contraire, on a deux racines réelles dont l'une a une valeur absolue strictement supérieure à 1, d'où l'instabilité. Or

$$\sup_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \left(\begin{array}{l} \left| 2\Delta t \left(u_0 \frac{sin(\theta_1)}{\Delta x} + v_0 \frac{sin(\theta_2)}{\Delta y} \right) \right|, \\ \left| 2\Delta t \left(u_0 \frac{sin(\theta_1)}{\Delta x} + v_0 \frac{sin(\theta_2)}{\Delta y} + c_0 \sqrt{\frac{(sin\theta_1)^2}{\Delta x^2} + \frac{(sin\theta_2)^2}{\Delta y^2}} \right) \right|, \\ \left| 2\Delta t \left(u_0 \frac{sin(\theta_1)}{\Delta x} + v_0 \frac{sin(\theta_2)}{\Delta y} - c_0 \sqrt{\frac{(sin\theta_1)^2}{\Delta x^2} + \frac{(sin\theta_2)^2}{\Delta y^2}} \right) \right| \end{array} \right)$$

$$= 2\Delta t \left(\frac{|u_0|}{\Delta x} + \frac{|v_0|}{\Delta y} + |c_0| \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right)$$

Ce sup est atteint pour $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Donc une condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit:

$$2\Delta t \left(\frac{|u_0|}{\Delta x} + \frac{|v_0|}{\Delta y} + |c_0| \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right) \leq 2.$$

■

4.4 Comparaison avec le schéma de Lax-Friedrichs

Dans le cadre d'un maillage régulier en rectangle, nous avons obtenu une condition suffisante de stabilité pour le schéma de Lax-Friedrichs. Nous pouvons de plus constater que:

$$\bigcup_{i=2,3} \lambda_i \left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2} \right) = i\Delta t \left(\pm\frac{u_0}{\Delta x} \pm \frac{v_0}{\Delta y} \pm c_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right)$$

Finalement:

$$\rho(G) = \max\left(|\lambda_1|_{\max}, |\lambda_2|_{\max}, |\lambda_3|_{\max} \right) \geq \Delta t \left(\frac{|u_0|}{\Delta x} + \frac{|v_0|}{\Delta y} + |c_0| \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right)$$

Ce qui prouve que le schéma (36) admet un domaine de stabilité plus important que celui du schéma de Lax-Friedrichs.

4.5 Conservation de l'énergie discrète

4.5.1 Sur un maillage régulier en une dimension

Dans le cas monodimensionnel, et où les volumes de contrôle sont des segments de longueur Δx, le schéma (35) s'écrit (la variable Z disparaît):

$$\begin{cases} \frac{X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + u_0 \frac{X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + c_0 \frac{Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = 0 \\ \frac{Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + u_0 \frac{Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + c_0 \frac{X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{38}$$

Proposition 4.3 *On définit l'énergie discrète par:*

$$2\varepsilon^n_{vf} = \sum_m \left(\left(X^n_{m+\frac{1}{2}} \right)^2 + X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} + \left(Y^n_{m+\frac{1}{2}} \right)^2 + Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \right) \tag{39}$$

Alors l'énergie donnée par la formule (39) se conserve et est une forme quadratique définie positive des variables X^{n+1},X^n,Y^{n+1},Y^n pour $\frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_0| + |c_0|) < 1$. (le milieu de propagation est supposé infini).

Démonstration 4.3

$$2\varepsilon^n_{vf} =$$

$$\sum_m \left(\left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(X^n_{m+\frac{1}{2}} \right)^2 - X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \right) + \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(Y^n_{m+\frac{1}{2}} \right)^2 - Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \right) \right)$$

En injectant les équations de (38), on obtient:

$$2\varepsilon^n_{vf} =$$

$$\sum_m \left[\begin{array}{l} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) \\ + \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) \end{array} \right]$$

D'où:

$$2\varepsilon^n_{vf} - 2\varepsilon^{n-1}_{vf} =$$

$$\sum_m \left[\begin{array}{l} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) - X^n_{m+\frac{1}{2}} \left(X^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - X^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) - X^n_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - Y^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ + \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) - Y^n_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - Y^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) - Y^n_{m+\frac{1}{2}} \left(X^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - X^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) \end{array} \right]$$

Or:

$$\sum_m \left(X^n_{m+\frac{1}{2}} \left(X^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - X^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) = -\sum_m \left(X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\sum_m \left(Y^n_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - Y^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) = -\sum_m \left(Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\sum_m \left(X^n_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - Y^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) = -\sum_m \left(Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\sum_m \left(Y^n_{m+\frac{1}{2}} \left(X^{n-1}_{m+\frac{3}{2}} - X^{n-1}_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) = -\sum_m \left(X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

En utilisant ces résultats dans l'égalité précédente, on obtient:

$$2\varepsilon^n_{vf} - 2\varepsilon^{n-1}_{vf} =$$

$$\sum_m \left[\begin{array}{l} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} + X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}}\right) \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - X^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} + Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}}\right) \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} - Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right)\right) \end{array} \right]$$

$$= 0 \qquad \text{grâce à(38)}$$

Vérifions maintenant que ε^n_{vf} est bien une forme quadratique définie positive des variables X^{n+1},X^n,Y^{n+1},Y^n pour $\frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_0| + |c_0|) < 1$. On a:

$$2\varepsilon^n_{vf} =$$

$$\sum_m \left[\begin{array}{l} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) \\ + \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_0 Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(Y^n_{m+\frac{3}{2}} - Y^n_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} \left(X^n_{m+\frac{3}{2}} - X^n_{m-\frac{1}{2}}\right) \end{array} \right]$$

d'où

$$2\varepsilon^n_{vf} \geq$$

$$\sum_m \left[\begin{array}{l} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|u_0| \left(\left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(X^{n}_{m+\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m-\frac{1}{2}}\right)^2 \right) \right) \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x}|c_0| \left(\left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(Y^{n}_{m+\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m-\frac{1}{2}}\right)^2 \right) \right) \\ \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|u_0| \left(\left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(Y^{n}_{m+\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m-\frac{1}{2}}\right)^2 \right) \right) \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x}|c_0| \left(\left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(X^{n}_{m+\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m-\frac{1}{2}}\right)^2 \right) \right) \end{array} \right]$$

Finalement:

$$2\varepsilon^n_{vf} \geq$$

$$\sum_m \left[\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_0| + |c_0|)\right) \left(\left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m+\frac{1}{2}}\right)^2 \right) \right]$$

$$\Longrightarrow \text{pour} \quad \frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_0| + |c_0|) < 1 \quad 2\varepsilon^n_{vf} \geq 0$$

De plus:

$$2\varepsilon^n_{vf} = 0 \Longleftrightarrow X^n_{m+\frac{1}{2}} = X^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = Y^n_{m+\frac{1}{2}} = Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall m$$

Ce qui achève la démonstration, implique la conservation de l'énergie discrète et la stabilité du schéma pour $\frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_0| + |c_0|) < 1$ (puisque X et Y sont bornés en tout point du maillage).

■

4.5.2 Sur un maillage régulier en deux dimensions

En restant dans le cadre d'un maillage régulier en rectangles, c'est à dire, en utilisant (36); on a la proposition suivante:

Proposition 4.4 *On définit l'énergie discrète par:*

$$2\varepsilon^n_{vf} = \sum_{m,l} \left[\begin{array}{l} \left(X^n_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 + X^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} X^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \left(Y^n_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 \\ + Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + \left(Z^n_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 + Z^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} Z^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \end{array} \right] \tag{40}$$

Alors pour $\Delta t \left(\frac{|u_0|}{\Delta x} + \frac{|v_0|}{\Delta y} + |c_0| \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right) \right) < 1$*, l'énergie donnée par la formule (40) se conserve et est une forme quadratique définie positive des variables* $X^{n+1}, X^n, Y^{n+1}, Y^n, Z^{n+1}, Z^n$*. (le milieu de propagation est supposé infini).*

Démonstration 4.4

$$2\varepsilon^n_{vf} = \sum_{m,n} \left[\begin{array}{l} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(X^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 - X^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \left(X^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - X^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \right) \\ + \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Y^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 - Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \left(Y^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - Y^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \right) \\ + \left(Z^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(Z^{n}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}\right)^2 - Z^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \left(Z^{n+1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - Z^{n-1}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right]$$

En injectant les équations du système (36):

$$2\varepsilon^n_{vf} - 2\varepsilon^{n-1}_{vf} =$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m,n}\Bigg[\tfrac{\Delta t}{\Delta x}u_0\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)-X^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta y}v_0\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n}_{m+\frac12,l+\frac32}-X^{n}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)-X^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac32}-X^{n-1}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta x}c_0\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)-X^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta y}c_0\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^{n}_{m+\frac12,l+\frac32}-Z^{n}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)-X^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac32}-Z^{n-1}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta x}u_0\left(Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)-Y^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta y}v_0\left(Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n}_{m+\frac12,l+\frac32}-Y^{n}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)-Y^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac32}-Y^{n-1}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta x}c_0\left(Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)-Y^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta x}u_0\left(Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-Z^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)-Z^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-Z^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta y}v_0\left(Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^{n}_{m+\frac12,l+\frac32}-Z^{n}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)-Z^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac32}-Z^{n-1}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)\\
&+\tfrac{\Delta t}{\Delta y}c_0\left(Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n}_{m+\frac12,l+\frac32}-X^{n}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)-Z^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac32}-X^{n-1}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)\\
&+\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2-\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2-\left(Y^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2-\left(Z^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2\Bigg]
\end{aligned}
$$

Une nouvelle fois, en effectuant des changements d'indices:

$$\sum_{m,l}\left(X^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)=-\sum_{m,l}\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)$$

$$\sum_{m,l}\left(X^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac32}-X^{n-1}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)=-\sum_{m,l}\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n}_{m+\frac12,l+\frac32}-X^{n}_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\right)$$

$$\sum_{m,l}\left(Y^{n}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^{n-1}_{m+\frac32,l+\frac12}-X^{n-1}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)=-\sum_{m,l}\left(X^{n-1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^{n}_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^{n}_{m-\frac12,l+\frac12}\right)\right)$$

...

Finalement, en combinant ces différentes sommes et en utilisant les équations du système (36), on obtient:

$$2\left(\varepsilon^{n}_{vf}-\varepsilon^{n-1}_{vf}\right)=0$$

Montrons maintenant que sous la condition: $\Delta t\left(\frac{|u_0|}{\Delta x}+\frac{|v_0|}{\Delta y}+|c_0|\left(\frac{1}{\Delta x}+\frac{1}{\Delta y}\right)\right)<1$, nous avons bien à faire à une forme quadratique définie et positive. Nous avons:

$$2\varepsilon^{n}_{vf}=$$

$$\sum_{m,l}\left[\begin{array}{l}
\frac{\Delta t}{\Delta x}u_0X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^n_{m+\frac32,l+\frac12}-X^n_{m-\frac12,l+\frac12}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta y}v_0X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^n_{m+\frac12,l+\frac32}-X^n_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_0X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^n_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^n_{m-\frac12,l+\frac12}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta y}c_0X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^n_{m+\frac12,l+\frac32}-Z^n_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}u_0Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^n_{m+\frac32,l+\frac12}-Y^n_{m-\frac12,l+\frac12}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta y}v_0Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Y^n_{m+\frac12,l+\frac32}-Y^n_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_0Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^n_{m+\frac32,l+\frac12}-X^n_{m-\frac12,l+\frac12}\right)+\left(Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(Y^n_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2\\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}u_0Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^n_{m+\frac32,l+\frac12}-Z^n_{m-\frac12,l+\frac12}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta y}v_0Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(Z^n_{m+\frac12,l+\frac32}-Z^n_{m+\frac12,l-\frac12}\right)\\
+\frac{\Delta t}{\Delta y}c_0Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\left(X^n_{m+\frac12,l+\frac32}-X^n_{m+\frac12,l-\frac12}\right)+\left(Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(Z^n_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2\\
+\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(X^n_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2
\end{array}\right]$$

En utilisant l'inégalité : $|a\,(b+c)| \leq a^2+\frac12\left(b^2+c^2\right)$, on obtient:

$$2\varepsilon^n_{vf} \geq$$

$$\sum_{m,l}\left[\begin{array}{l}
\left(\left(X^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(X^n_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2\right)\left(1-\Delta t\left(\frac{|u_0|}{\Delta x}+\frac{|v_0|}{\Delta y}+|c_0|\left(\frac{1}{\Delta x}+\frac{1}{\Delta y}\right)\right)\right)\\
\left(\left(Y^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(Y^n_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2\right)\left(1-\Delta t\left(\frac{|u_0|}{\Delta x}+\frac{|v_0|}{\Delta y}+\frac{|c_0|}{\Delta x}\right)\right)\\
\left(\left(Z^{n+1}_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2+\left(Z^n_{m+\frac12,l+\frac12}\right)^2\right)\left(1-\Delta t\left(\frac{|u_0|}{\Delta x}+\frac{|v_0|}{\Delta y}+\frac{|c_0|}{\Delta y}\right)\right)
\end{array}\right]$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition, et nous donne une condition suffisante de stabilité (ce résultat étant cohérent avec le résultat de la partie 4.3).

■

4.5.3 Sur un maillage non régulier en deux dimensions

Nous allons démontrer un résultat analogue en dimension deux sur un maillage non structuré :

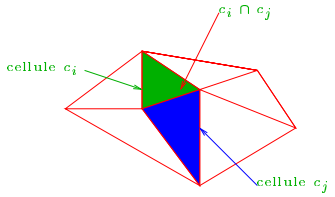


FIG. 4 – *Exemple: maillage non structuré en triangles*

Proposition 4.5 *Soit*

$$E^n=\sum_i |c_i|\left((X^n_i)^2+X^{n+1}_iX^{n-1}_i+(Y^n_i)^2+Y^{n+1}_iY^{n-1}_i+(Z^n_i)^2+Z^{n+1}_iZ^{n-1}_i\right) \tag{41}$$

On a alors

$$E^n-E^{n-1}=0.$$

Démonstration 4.5 En reprenant (35)

$$|c_i|\left(W_i^{n+1}-W_i^{n-1}\right)=-2\Delta t\sum_{j\in s(i)}H_{ij}l_{ij}$$

On obtient:

$$\left\{\begin{array}{l}|c_i|\left(X_i^{n+1}-X_i^{n-1}\right)+\Delta t\sum_{j\in s(i)}l_{ij}\left(\left(u_0X_j^n+c_0Y_j^n\right)n_{ijx}+\left(v_0X_j^n+c_0Z_j^n\right)n_{ijy}\right)=0\\ |c_i|\left(Y_i^{n+1}-Y_i^{n-1}\right)+\Delta t\sum_{j\in s(i)}l_{ij}\left(\left(u_0Y_j^n+c_0X_j^n\right)n_{ijx}+v_0Y_j^nn_{ijy}\right)=0\\ |c_i|\left(X_i^{n+1}-X_i^{n-1}\right)+\Delta t\sum_{j\in s(i)}l_{ij}\left(u_0Z_j^nn_{ijx}+\left(v_0Z_j^n+c_0X_j^n\right)n_{ijy}\right)=0\end{array}\right. \tag{42}$$

Grâce au fait que:

$$\sum_{j\in s(i)}l_{ij}n_{ijx}=\sum_{j\in s(i)}l_{ij}n_{ijy}=0$$

De plus nous avons également les résultats suivants:

$$\sum_i\sum_{j\in s(i)}l_{ij}X_i^nX_j^{n-1}n_{ijx}=\sum_j\sum_{i\in s(j)}l_{ij}X_i^nX_j^{n-1}n_{ijx}$$

$$=-\sum_j\sum_{i\in s(j)}l_{ij}X_i^nX_j^{n-1}n_{jix}=-\sum_i\sum_{j\in s(i)}l_{ij}X_i^{n-1}X_j^nn_{ijx}$$

$$\sum_i\sum_{j\in s(i)}l_{ij}X_j^{n-1}Y_i^nn_{ijx}=\sum_j\sum_{i\in s(j)}l_{ij}X_j^nY_i^nn_{ijx}$$

$$=-\sum_j\sum_{i\in s(j)}l_{ij}X_j^{n-1}Y_i^nn_{jix}=-\sum_i\sum_{j\in s(i)}l_{ij}X_i^{n-1}Y_j^nn_{ijx}$$

...

Exprimons E^n-E^{n-1}:

$$E^n-E^{n-1}=$$

$$\sum_i|c_i|\left[\left(X_i^{n+1}\right)^2-\left(X_i^{n-1}\right)^2+\left(Y_i^{n+1}\right)^2-\left(Y_i^{n-1}\right)^2+\left(Z_i^{n+1}\right)^2-\left(Z_i^{n-1}\right)^2\right]$$

$$+\Delta t\sum_{j\in s(i)}l_{ij}\left[\left(\underbrace{u_0X_i^{n+1}X_j^n}_{1}-\underbrace{u_0X_i^nX_j^{n-1}}_{2}+\underbrace{c_0X_i^{n+1}Y_j^n}_{3}-\underbrace{c_0X_i^nY_j^{n-1}}_{4}\right)n_{ijx}\right.$$

$$\left.+\left(\underbrace{v_0X_i^{n+1}X_j^n}_{5}-\underbrace{v_0X_i^nX_j^{n-1}}_{6}+\underbrace{c_0X_i^{n+1}Z_j^n}_{7}-\underbrace{c_0X_i^nZ_j^{n-1}}_{8}\right)n_{ijy}\right.$$

$$+\left(\underbrace{u_0Y_i^{n+1}Y_j^n}_{9}-\underbrace{u_0Y_i^nY_j^{n-1}}_{10}+\underbrace{c_0Y_i^{n+1}X_j^n}_{11}-\underbrace{c_0Y_i^nX_j^{n-1}}_{12}\right)n_{ijx}+\left(\underbrace{v_0Y_i^{n+1}Y_j^n}_{13}-\underbrace{v_0Y_i^nY_j^{n-1}}_{14}\right)n_{ijy}$$

$$+\left(\underbrace{u_0Z_i^{n+1}Z_j^n}_{15}-\underbrace{u_0Z_i^nZ_j^{n-1}}_{16}\right)n_{ijx}+\left(\underbrace{v_0Z_i^{n+1}Z_j^n}_{17}-\underbrace{v_0Z_i^nZ_j^{n-1}}_{18}+\underbrace{c_0Z_i^{n+1}X_j^n}_{19}-\underbrace{c_0Z_i^nX_j^{n-1}}_{20}\right)n_{ijy}$$

En utilisant les résultats précédents sur 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 et en combinant après transformations 1 et 2, 3 et 12, 4 et 11, 5 et 6, 7 et 20, 8 et 19, 9 et 10, 13 et 14, 15 et 16, 17 et 18, on obtient :

$$E^n - E^{n-1} =$$
$$\sum_i \left[\left(Yi^{n+1} + Yi^{n-1}\right) \left(|c_i| \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1}\right) + \Delta t \sum_{j\in s(i)} l_{ij} \left(\left(u_0 Y_j^n + c_0 X_j^n \right) n_{ijx} + v_0 Y_j^n n_{ijy} \right) \right) \right.$$
$$+ \left(X_i^{n+1} + X_i^{n-1}\right) \left(|c_i| \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1}\right) + \Delta t \sum_{j\in s(i)} l_{ij} \left(\left(u_0 X_j^n + c_0 Y_j^n \right) n_{ijx} + \left(v_0 X_j^n + c_0 Z_j^n \right) n_{ijy} \right) \right)$$
$$\left. + \left(Z_i^{n+1} + Z_i^{n-1}\right) \left(|c_i| \left(Z_i^{n+1} - Z_i^{n-1}\right) + \Delta t \sum_{j\in s(i)} l_{ij} \left(u_0 Z_j^n n_{ijx} + \left(v_0 Z_j^n + c_0 X_j^n \right) n_{ijy} \right) \right) \right]$$
$$= 0 \qquad \text{d'après(42)}$$

Ce qui achève la preuve.

■

Regardons maintenant dans le cas du maillage défini par le dessin précédant sous quelle condition E^n est une forme quadratique définie positive.

Proposition 4.6

$$\textit{Soit} \quad E^n = \sum_i |c_i| \left((X_i^n)^2 + X_i^{n+1} X_i^{n-1} + (Y_i^n)^2 + Y_i^{n+1} Y_i^{n-1} + (Z_i^n)^2 + Z_i^{n+1} Z_i^{n-1} \right)$$

On a alors

$$E^n \geq \sum_i \left[\begin{array}{l} \left((X_i^n)^2 + \left(X_i^{n+1}\right)^2 \right) \left(|c_i| - \Delta t \left(\frac{1}{2} |u_0| + \frac{1}{2} |v_0| + |c_0| \right) P_i \right) \\ + \left((Y_i^n)^2 + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 \right) \left(|c_i| - \frac{\Delta t}{2} \left(|u_0| + |v_0| + |c_0| \right) P_i \right) \\ + \left((Z_i^n)^2 + \left(Z_i^{n+1}\right)^2 \right) \left(|c_i| - \frac{\Delta t}{2} \left(|u_0| + |v_0| + |c_0| \right) P_i \right) \end{array} \right]$$

avec

$$P_i = \sum_{j\in s(i)} l_{ij} \qquad \forall i \in J$$

Démonstration 4.6 Nous avons

$$E^n = \sum_i |c_i| \left[\begin{array}{l} (X_i^n)^2 + \left(X_i^{n+1}\right)^2 - X_i^{n+1} \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1}\right) \\ + (Y_i^n)^2 + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 - Y_i^{n+1} \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1}\right) \\ + (Z_i^n)^2 + \left(Z_i^{n+1}\right)^2 - Z_i^{n+1} \left(Z_i^{n+1} - Z_i^{n-1}\right) \end{array} \right]$$

C'est à dire

$$E^n = \sum_i \left[\begin{array}{l} |c_i| \left((X_i^n)^2 + \left(X_i^{n+1}\right)^2 \right) + \Delta t \sum_{j\in s(i)} l_{ij} X_i^{n+1} \left(\left(u_0 X_j^n + c_0 Y_j^n \right) n_{ijx} + \left(v_0 X_j^n + c_0 Z_j^n \right) n_{ijy} \right) \\ + |c_i| \left((Y_i^n)^2 + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 \right) + \Delta t \sum_{j\in s(i)} l_{ij} Y_i^{n+1} \left(\left(u_0 Y_j^n + c_0 X_j^n \right) n_{ijx} + v_0 Y_j^n n_{ijy} \right) \\ + |c_i| \left((Z_i^n)^2 + \left(Z_i^{n+1}\right)^2 \right) + \Delta t \sum_{j\in s(i)} l_{ij} Z_i^{n+1} \left(u_0 Z_j^n n_{ijx} + \left(v_0 Z_j^n + c_0 X_j^n \right) n_{ijy} \right) \end{array} \right]$$

Donc en utilisant que

$$\Delta t \sum_i \sum_{j\in s(i)} u_0 l_{ij} n_{ijx} X_i^{n+1} X_j^n \geq -\frac{\Delta t u_0}{2} \left(\sum_i \left(X_i^{n+1}\right)^2 P_i + \sum_i \sum_{j\in s(i)} \left(X_j^n\right)^2 l_{ij} \right)$$

$$\sum_i \sum_{j\in s(i)} \left(X_j^n\right)^2 l_{ij} = \sum_i (X_i^n)^2 P_i$$

$$\Delta t \sum_i \sum_{j\in s(i)} c_0 l_{ij} n_{ijx} X_i^{n+1} Y_j^n \geq -\frac{\Delta t c_0}{2}\left(\sum_i \left(X_i^{n+1}\right)^2 P_i + \sum_i \sum_{j\in s(i)} \left(Y_j^n\right)^2 l_{ij}\right)$$

$$\sum_i \sum_{j\in s(i)} \left(Y_j^n\right)^2 l_{ij} = \sum_i \left(Y_i^n\right)^2 P_i$$

...

Et en regroupant les termes, on obtient le résultat annoncé.

■

Finalement, le résultat précédent nous donne une condition suffisante de stabilité qui dépend du pas de temps, des valeurs initiales et de la géométrie du maillage. En effet cette condition suffisante s'écrit:

$$\frac{|c_i|}{P_i} \geq \Delta t \left(\frac{1}{2}|u_0| + \frac{1}{2}|v_0| + |c_0|\right) \qquad \forall i \in J$$

Ce résultat est très intéressant car il nous permet de définir un pas de temps suffisant en fonction de la géométrie de notre maillage.

Illustration En considérant le maillage simple suivant:

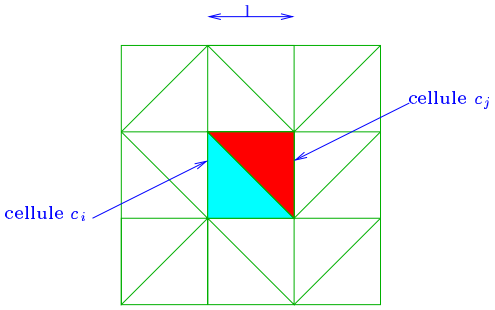


FIG. 5 – *maillage en triangles rectangles isocèles*

Une condition suffisante de stabilité s'écrit

$$\Delta t \leq \frac{l}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}|u_0| + \frac{1}{2}|v_0| + |c_0|\right)}. \tag{43}$$

4.6 Comparaison avec le schéma de Steger-Warming

Nous allons rappeler certaines définitions et certains résultats sur les schémas monotones, pour une étude complète de ce type de problème nous renvoyons à [9]. Reprenons la forme générale des formulations intégrales:

$$W_i^{k+1} = W_i^k - \frac{\Delta t}{|c_i|} \sum_{j\in s(i)} H_{ij}\left(W_i^k, W_j^k, n_{ij}\right) l_{ij}, \qquad i \in J, \quad k = 0,1,...$$

Ce que l'on peut noter sous la forme

$$W_i^{k+1} = H_i\left(W^k\right) \qquad i \in J, \quad k = 0,1,... \tag{44}$$

Définition 4.1 *Soit $M > 0$. On dit que le schéma (44) est monotone sur l'ensemble*

$$\mathcal{M}_M = \left\{ W = \{W_j\}_{j\in J}\,; \quad \|W\|_\infty = \sup_{j\in J} |W_j| \leq M \right\}$$

si et seulement si $\forall W = \{W_j\}, W^\star = \left\{W_j^\star\right\} \in \mathcal{M}_M$

$$W_j \leq W_j^\star \quad \forall j \in J \Longrightarrow H_i(W) \leq H_i(W^\star) \quad \forall i \in J$$

Définition 4.2 *On dit que la fonction flux H_{ij} est lipschitz-continue sur toute boule $B(0,R)$ si et seulement si $\forall R > 0$, il existe une constante $c(R)$ telle que*

$$|H_{ij}(u,v,n) - H_{ij}(u^\star,v^\star,n)| \leq c(R)\left(|u-u^\star| + |v-v^\star|\right), \quad \forall u,u^\star,v,v^\star \in B(0,R), \quad n \in \mathcal{S}_1$$

Théorème 4.1 *Supposons que le schéma (44) est consistant, conservatif, monotone sur l'ensemble $\mathcal{M}_M$ et que la fonction flux est Lipschitz-continue.*
Supposons de plus que la condition suivante est vérifiée :

$$\Delta t c(M) \frac{P_i}{|c_i|} \leq 1 \quad \forall i \in J.$$

Alors le schéma est L^p stable $\forall p \in [0,\infty]$: si $W^0 \in \mathcal{M}_M$ et $\|W^0\|_1 < \infty$, alors $\|W^0\|_p < \infty$ et

$$\|W^k\|_p \leq \|W^0\|_p, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in [0,\infty]$$

$$\|W^k\|_p \leq \left(\|W^0\|_\infty^{p-1}\|W_0\|_1\right)^{1/p}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in [0,\infty]$$

En utilisant ce théorème sur le schéma de Steger-Warming appliqué au système (31), nous obtenons le résultat suivant:

Théorème 4.2 *Une condition suffisante de stabilité de ce schéma sur tout maillage s'écrit*

$$\Delta t \max_{i\in J, j\in s(i)} \left(|\lambda_s(n_{ij})| \frac{P_i}{|c_i|} \right) \leq 1 \qquad s \in \{1,2,3\}$$

avec λ_s les valeurs propres de la matrice $\mathbb{D}$ (voir 3.2.1)
Finalement

- Le schéma (36) est stable sous la condition

$$\Delta t \leq \frac{|c_i|}{P_i\left(\frac{|u_0|+|v_0|}{2} + |c_0|\right)} \quad \forall i \in J$$

- Le schéma de Steger-Warming est stable sous la condition

$$\Delta t \leq \frac{|c_i|}{P_i\,|\lambda_s(n_{ij})|} \quad \forall j \in s(i), \quad i \in J$$

Par exemple, dans le cadre d'un maillage en triangles rectangles isocèles, la condition suffisante pour le schéma de Steger-Warming s'écrit:

$$\Delta t \leq \frac{l}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\,|u_0| + \sqrt{2}\,|v_0| + 2\,|c_0|\right)}$$

cette condition étant plus restrictive que celle obtenue pour notre schéma.

Conclusion Nous avons finalement montré que dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme, notre schéma était plus précis et "plus stable" que les schémas de Lax-Friedrichs et de Steger-Warming. Mais le résultat le plus important réside évidemment dans le caractère non diffusif de notre schéma contrairement aux deux autres.

5 Etude du problème pour un écoulement initial stationnaire

5.1 Mise en équations et choix du schéma

Nous travaillons donc maintenant avec des données initiales dépendant de l'espace. Pour traiter le plus grand nombre de problèmes possibles, nous supposerons simplement que la donnée initiale est assez régulière et bornée. Nous verrons que ce problème est bien plus délicat que le précédent. Par exemple même sur un maillage régulier, il n'est plus question d'utiliser l'analyse de Fourier...

- En dimension deux, en conservant l'hypothèse d'isentropie et en gardant les variables initiales: $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \end{pmatrix}$ On obtient le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X}{\partial t} + \dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(c_0^2 - u_0^2\right) X + 2u_0 Y\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-u_0 v_0 X + v_0 Y + u_0 Z\right) = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-u_0 v_0 X + v_0 Y + u_0 Z\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(c_0^2 - v_0^2\right) X + 2v_0 Z\right) = 0 \end{array} \right. \tag{45}$$

- En changeant de variables, nous pouvons récrire les équations précédentes sous une forme non conservative mais symétrique: en posant $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0\delta\rho \\ \rho_0\delta u \\ \rho_0\delta v \end{pmatrix}$ On a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_0 Y + u_0 X\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(c_0 Z + v_0 X\right) = Y\dfrac{\partial c_0}{\partial x} + Z\dfrac{\partial c_0}{\partial y} + \dfrac{X}{c_0}\left(u_0\dfrac{\partial c_0}{\partial x} + v_0\dfrac{\partial c_0}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0 Y + c_0 X\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(v_0 Y\right) = -Y\dfrac{\partial u_0}{\partial x} - Z\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{X}{c_0\rho_0}\dfrac{\partial p_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0 Z\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(v_0 Z + c_0 X\right) = -Y\dfrac{\partial v_0}{\partial x} - Z\dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{X}{c_0\rho_0}\dfrac{\partial p_0}{\partial y} \end{array} \right. \tag{46}$$

- En une dimension d'espace, nous pouvons également donner sous deux formes équivalentes le système d'équations:

$$W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X}{\partial t} + \dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0 X\right) = 0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_0^2 X\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0 Y\right) = -\left(u_0 X + Y\right)\dfrac{\partial u_0}{\partial x} \end{array} \right. \tag{47}$$

$$W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0\delta\rho \\ \rho_0\delta u \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_0 Y\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0 X\right) = \left(\dfrac{u_0}{c_0}X + Y\right)\dfrac{\partial c_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_0 X\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_0 Y\right) = -\left(\dfrac{u_0}{c_0}X + Y\right)\dfrac{\partial u_0}{\partial x} \end{array} \right. \tag{48}$$

Existence et unicité L'intérêt d'avoir transformé le système (45) en (46) réside dans le fait que le système (46) peut encore s'écrire sous la forme:

$$\frac{\partial W\,(x,y,t)}{\partial t} + \mathbb{A}(x,y)\,\frac{\partial W\,(x,y,t)}{\partial x} + \mathbb{B}(x,y)\,\frac{\partial W\,(x,y,t)}{\partial y} + \mathbb{C}(x,y)\,W = 0$$

avec

$$\mathbb{A}(x,y) = \begin{pmatrix} u_0 & c_0 & 0 \\ c_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{B}(x,y) = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}$$

Nous retrouvons donc un système symétrique de Friedrichs et d'après la partie théorique, sous des hypothèses convenables de régularité, le problème (45) et donc le problème (46) associé a une donnée initiale et à des conditions aux limites appropriées admet une solution unique. Les mêmes raisons justifient le passage du système (47) au système (48).

5.2 Étude d'un schéma en dimension un

Pour approcher le système d'équations (47), nous allons utiliser le schéma à pas constant suivant:

$$\begin{cases} \frac{X_i^{n+1}-X_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{u_{0i+1}X_{i+1}^n - u_{0i-1}X_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \\ \frac{Y_i^{n+1}-Y_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\left(c_{0i+1}\right)^2 X_{i+1}^n - \left(c_{0i-1}\right)^2 X_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{u_{0i+1}Y_{i+1}^n - u_{0i-1}Y_{i-1}^n}{\Delta x} = -\left(Y_i^n + u_{0i}X_i^n\right)\frac{u_{0i+1}-u_{0i-1}}{\Delta x} \end{cases} \tag{49}$$

Etudions certaines propriétés de ce schéma.

5.2.1 Etude de l'ordre du schéma

Proposition 5.1 *Le schéma (49) est d'ordre deux en temps et en espace*

Démonstration 5.1 En utilisant toujours la technique des équations équivalentes et en se ramenant à $x = x_i = i\Delta x$, $t = t^n = n\Delta t$. On obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(Y + u_0 X\right) + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) + \bigcirc\left(\Delta x^2\right) = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_0^2 X + u_0 Y\right) + \left(Y + u_0 X\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \bigcirc\left(\Delta t^2\right) + \bigcirc\left(\Delta x^2\right) = 0 \end{cases}$$

Ce qui prouve que le schéma (49) approche le système (47) à l'ordre deux en temps et en espace. ■

5.2.2 Etude de la stabilité du schéma

Revenons à la forme des équations du problème (47), le terme à droite: $\begin{pmatrix} 0 \\ -\left(Y + u_0 X\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} \end{pmatrix}$ est similaire à un terme source et il est responsable de la difficulté des équations. Dans cette optique, commençons par regarder les équations sans ce second membre. En considérant donc le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 X\right) = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_0^2 X\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 Y\right) = 0 \end{cases} \tag{50}$$

et le schéma suivant qui lui est consistant à l'ordre deux en temps et en espace:

$$\begin{cases} \frac{X_i^{n+1} - X_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{u_{0i+1}X_{i+1}^n - u_{0i-1}X_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \\ \frac{Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\left(c_{0i+1}\right)^2 X_{i+1}^n - \left(c_{0i-1}\right)^2 X_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{u_{0i+1}Y_{i+1}^n - u_{0i-1}Y_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{51}$$

On a alors le résultat suivant:

Proposition 5.2 *Soit*

$$E^n = \sum_i \left[c_{0i}^2 \left((X_i^n)^2 + X_i^{n+1} X_i^{n-1} \right) + (Y_i^n)^2 + Y_i^{n+1} Y_i^{n-1} + u_{0i} \left(2 X_i^n Y_i^n + X_i^{n+1} Y_i^{n-1} + X_i^{n-1} Y_i^{n+1} \right) \right] \tag{52}$$

Le milieu de propagation est supposé infini. On a :

$$E^n - E^{n-1} = 0$$

De plus sous la condition

$$\inf \left[\begin{array}{l} \inf_i \left(\frac{c_{0i}^2}{u_{0i}^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2 \sup_i \left(\frac{c_{0i}^2}{u_{0i}} \right) \left(1 + \sup_i \left| 1 - \frac{u_{0i}^2}{c_{0i}^2} \right| \right) \right) \\ \inf_i \left(1 - \frac{u_{0i}^2}{c_{0i}^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_i \left(\frac{c_{0i}^2}{u_{0i}} \right) \sup_i \left| 1 - \frac{u_{0i}^2}{c_{0i}^2} \right| \end{array} \right] > 0 \tag{53}$$

l'énergie définie par (52) est une forme quadratique définie positive des variables X^n,X^{n+1},Y^n et Y^{n+1}.

Démonstration 5.2

$$E^n - E^{n-1} =$$

$$\sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0i}^2 \left(\left(X_i^{n+1} \right)^2 - \left(X_i^{n-1} \right)^2 - X_i^{n+1} \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1} \right) + X_i^n \left(X_i^n - X_i^{n-2} \right) \right) \\ + \left(Y_i^{n+1} \right)^2 - \left(Y_i^{n-1} \right)^2 - Y_i^{n+1} \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1} \right) + Y_i^n \left(Y_i^n - Y_i^{n-2} \right) \\ + u_{0i} \left(X_i^n \left(Y_i^n - Y_i^{n-2} \right) + Y_i^n \left(X_i^n - X_i^{n-2} \right) + X_i^{n-1} \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1} \right) + Y_i^{n-1} \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1} \right) \right) \end{array} \right]$$

$$= \sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0i}^2 \left(\left(X_i^{n+1} \right)^2 + X_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n + u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n \right) \right) \\ - c_{0i}^2 \left(\left(X_i^{n-1} \right)^2 + X_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^{n-1} - Y_{i-1}^{n-1} + u_{0i+1} X_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} X_{i-1}^{n-1} \right) \right) \\ + \left(Y_i^{n+1} \right)^2 + Y_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0i+1}^2 X_{i+1}^n - c_{0i-1}^2 X_{i-1}^n + u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n \right) \\ - \left(Y_i^{n-1} \right)^2 - Y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0i+1}^2 X_{i+1}^{n-1} - c_{0i-1}^2 X_{i-1}^{n-1} + u_{0i+1} Y_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} Y_{i-1}^{n-1} \right) \\ - u_{0i} X_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0i+1}^2 X_{i+1}^{n-1} - c_{0i-1}^2 X_{i-1}^{n-1} + u_{0i+1} Y_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} Y_{i-1}^{n-1} \right) \\ - u_{0i} X_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0i+1}^2 X_{i+1}^n - c_{0i-1}^2 X_{i-1}^n + u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n \right) \\ - u_{0i} Y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^{n-1} - Y_{i-1}^{n-1} + u_{0i+1} X_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} X_{i-1}^{n-1} \right) \\ - u_{0i} Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n + u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n \right) \end{array} \right]$$

$$= \sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0_i}^2 \left(\left(X_i^{n+1}\right)^2 + X_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n + u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right)\right) \\ -c_{0_i}^2 \left(X_i^{n-1}\right)^2 + Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0_{i+1}}^2 X_{i+1}^n - c_{0_{i-1}}^2 X_{i-1}^n\right) - c_{0_i}^2 X_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} X_{i-1}^{n-1}\right) \\ + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 + Y_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0_{i+1}}^2 X_{i+1}^n - c_{0_{i-1}}^2 X_{i-1}^n + u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n\right) \\ - \left(Y_i^{n-1}\right)^2 + c_{0_i}^2 X_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n\right) - Y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} Y_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} Y_{i-1}^{n-1}\right) \\ + c_{0_i}^2 X_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right) + u_{0_i} Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right) \\ + c_{0_i}^2 X_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} X_{i-1}^{n-1}\right) + u_{0_i} Y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} X_{i-1}^{n-1}\right) \\ + Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n\right) - u_{0_i} Y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} X_{i-1}^{n-1}\right) \\ + Y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} Y_{i+1}^{n-1} - u_{0i-1} Y_{i-1}^{n-1}\right) - u_{0_i} Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right) \end{array} \right]$$

En simplifiant et en regroupant les termes, on obtient:

$$= \sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0_i}^2 \left(\left(X_i^{n+1}\right)^2 + X_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n + u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right)\right) \\ -c_{0_i}^2 \left(X_i^{n-1}\right)^2 + c_{0_i}^2 X_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n\right) + c_{0_i}^2 X_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right) \\ + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 + Y_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0_{i+1}}^2 X_{i+1}^n - c_{0_{i-1}}^2 X_{i-1}^n + u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n\right) \\ - \left(Y_i^{n-1}\right)^2 + Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0_{i+1}}^2 X_{i+1}^n - c_{0_{i-1}}^2 X_{i-1}^n\right) + Y_i^{n-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n\right) \end{array} \right]$$

$$= \sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0_i}^2 \left(X_i^{n+1} + X_i^{n-1}\right) \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n + u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right)\right) \\ + \left(Y_i^{n+1} + Y_i^{n-1}\right) \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0_{i+1}}^2 X_{i+1}^n - c_{0_{i-1}}^2 X_{i-1}^n + u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0i-1} Y_{i-1}^n\right)\right) \end{array} \right]$$

$$= 0$$

ce qui achève la première partie de la démonstration. Nous pouvons récrire E^n sous la forme:

$$E^n = \sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0_i}^2 \left((X_i^n)^2 + \left(X_i^{n+1}\right)^2 - X_i^{n+1} \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1}\right)\right) \\ + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 + (Y_i^n)^2 - Y_i^{n+1} \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1}\right) \\ -u_{0_i} X_i^{n+1} \left(Y_i^{n+1} - Y_i^{n-1}\right) - u_{0_i} Y_i^{n+1} \left(X_i^{n+1} - X_i^{n-1}\right) + 2u_{0_i} \left(X_i^{n+1} Y_i^{n+1} + X_i^n Y_i^n\right) \end{array} \right]$$

$$= \sum_i \left[\begin{array}{l} c_{0_i}^2 \left(\left(X_i^n + \frac{u_{0_i}}{c_{0_i}^2} Y_i^n\right)^2 + \left(X_i^{n+1} + \frac{u_{0_i}}{c_{0_i}^2} Y_i^{n+1}\right)^2 \right) + \left(1 - \frac{u_{0_i}^2}{c_{0_i}^2}\right) \left((Y_i^n)^2 + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 \right) \\ + \left(c_{0_i}^2 X_i^{n+1} + u_{o_i} Y_i^{n+1}\right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(Y_{i+1}^n - Y_{i-1}^n + u_{0i+1} X_{i+1}^n - u_{0i-1} X_{i-1}^n\right) \\ + \left(Y_i^{n+1} + u_{0_i} X_i^{n+1}\right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(c_{0_{i+1}}^2 X_{i+1}^n - c_{0_{i-1}}^2 X_{i-1}^n + u_{0i+1} Y_{i+1}^n - u_{0_{i-1}}^n Y_{i-1}^n\right) \end{array} \right]$$

En posant $Z_i^n = u_0^i X_i^n + \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} Y_i^n \qquad \forall\,(i,n)$

$$E^n = \sum_i \left[\begin{array}{l} \frac{{c_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \left(\left(Z_i^{n+1}\right)^2 + \left(Z_i^n\right)^2 \right) + \left(1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2}\right) \left(\left(Y_i^n\right)^2 + \left(Y_i^{n+1}\right)^2 \right) \\ + \frac{{c_0}_i^2}{u_{0i}} Z_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\left(1 - \frac{{u_0}_{i+1}^2}{{c_0}_{i+1}^2}\right) Y_{i+1}^n - \left(1 - \frac{{u_0}_{i-1}^2}{{c_0}_{i-1}^2}\right) Y_{i-1}^n + Z_{i+1}^n - Z_{i-1}^n \right) \\ + \left(\left(1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2}\right) Y_i^{n+1} + Z_i^{n+1} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{{c_0}_{i+1}^2}{u_{0i+1}} Z_{i+1}^n - \frac{{c_0}_{i-1}^2}{u_{0i-1}} Z_{i-1}^n \right) \end{array} \right]$$

Donc

$$E^n \geq \left[\begin{array}{l} \left(\left(Z_i^{n+1}\right)^2 + \left(Z_i^n\right)^2 \right) \left(\inf_i \left(\frac{{c_0}_i^2}{{u_0}_i^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2 \sup_i \left(\frac{{c_0}_i^2}{u_{0i}} \right) \left(1 + \sup_i \left| 1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \right| \right) \right) \right) \\ + \left(\left(Y_i^{n+1}\right)^2 + \left(Y_i^n\right)^2 \right) \left(\inf_i \left(1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_i \left(\frac{{c_0}_i^2}{u_{0i}} \right) \sup_i \left| 1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \right| \right) \end{array} \right]$$

Ce qui montre bien que sous la condition

$$\inf \left[\begin{array}{l} \inf_i \left(\frac{{c_0}_i^2}{{u_0}_i^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2 \sup_i \left(\frac{{c_0}_i^2}{u_{0i}} \right) \left(1 + \sup_i \left| 1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \right| \right) \right) \\ \inf_i \left(1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sup_i \left(\frac{{c_0}_i^2}{u_{0i}} \right) \sup_i \left| 1 - \frac{{u_0}_i^2}{{c_0}_i^2} \right| \end{array} \right] > 0$$

E^n est une forme quadratique définie positive des variables Z^n,Z^{n+1},Y^n,Y^{n+1} et donc des variables X^n,X^{n+1},Y^n,Y^{n+1}, ce qui prouve le théorème. Ce résultat nous donne donc une condition suffisante de stabilité sur le schéma (51).

■

Remarque 5.1 *Nous pouvons voir que cette condition suffisante de stabilité n'est jamais vérifiée si l'écoulement initial est supersonique sur l'un des segments du maillage.*

Remarque 5.2 *Nous avons donc montré dans le cas où l'on négligeait le "terme source" du schéma (49) qu'une certaine énergie discrète se conservait, malheureusement nous pourrions démontrer qu'il n'existe pas de résultat analogue lorsque nous tenons compte de ce terme. Par exemple pour l'énergie (52), nous aurions obtenu :*

$$E^n - E^{n-1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_i \left[\left(u_{0i+1} - u_{0i-1}\right) \left(Y_i^n + u_0^n X_i^n\right) \left(Y_i^{n+1} - 2u_{0i} X_i^{n-1} - Y_i^{n-1}\right) \right].$$

Finalement, il sera nécessaire d'étudier au cas par cas selon l'écoulement initial l'évolution de $E^n - E^{n-1}$. Nous verrons dans la partie suivante un exemple d'écoulement où il existe une limite de stabilité pour le schéma (49).

5.3 Etude de petites perturbations autour d'un écoulement initial particulier

Le but de cette partie est d'utiliser le schéma vu dans la partie précédente. Seulement, en une dimension d'espace, les solutions stationnaires de équations d'Euler ne sont guère intéressantes car elles sont constantes. C'est pourquoi nous allons nous-mêmes construire dans un cadre particulier une solution digne d'intérêt, pour cela nous allons considérer un "pseudo" problème 1D: un écoulement dans une tuyère. Après avoir succinctement rappelé la théorie d'un écoulement dans une tuyère, nous utiliserons notre schéma pour suivre l'évolution d'une petite perturbation au sein de notre écoulement.

5.3.1 Etude d'un écoulement dans une tuyère

Considérons l'écoulement stationnaire d'un gaz supposé parfait dans un tuyau de section variable, dit tuyère. Nous supposerons qu'on puisse considérer le mouvement du gaz dans chaque section du tuyau comme étant uniforme, et que la vitesse soit pratiquement dirigée suivant l'axe du tuyau. Il faut pour cela que le tuyau ne soit pas trop large, et l'aire S de sa section doit varier suffisamment lentement suivant sa longueur. De sorte que toutes les quantités caractérisant l'écoulement seront des fonctions de la seule coordonnée le long de l'axe du tuyau. Pour ce faire, nous travaillerons avec le type de modèle suivant :

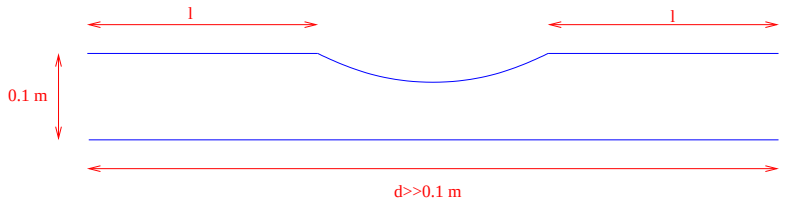


FIG. 6 – *modèle de tuyère*

Mise en équations Repartons des équations sous forme intégrale des équations d'Euler pour un gaz parfait:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \vec{u} \left(\rho \vec{u} \cdot d\vec{S} \right) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} d\mathcal{V} - \iint_{\mathcal{S}} p d\vec{S}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}} p \vec{u} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(\vec{f} \cdot \vec{u} \right) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V}$$

Avec

- $\vec{f}$ densité massique d'une force volumique.
- ρe énergie interne, $E = \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right)$.
- $\dot{q}$ chaleur reçue par unité de masse.

Dans l'équation de l'énergie, plusieurs autres phénomènes peuvent venir s'ajouter:

- les effets rotationnels.
- les effets visqueux.
- les effets diffusifs, conductifs et radiatifs.

· les effets gravitationnels.

Tous ces phénomène seront évidemment ici négligés. De plus, par rapport au problème qui nous concerne, nous avons $\vec{f} = \vec{0}$ et $q^{\cdot} = 0$. Par rapport aux hypothèses sur l'écoulement, effectuons un bilan sur le contour suivant:



FIG. 7 – *Contour*

Les équations s'écrivent:

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho\vec{u}\cdot d\vec{S} = 0 \Longrightarrow \rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \tag{54}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{u}\left(\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}\right) = -\iint_{\mathcal{S}} pd\vec{S} \Longrightarrow p_1 S_1 + \rho_1 u_1^2 S_1 + \int_{S_1}^{S_2} pdS = p_2 S_2 + \rho_2 u_2^2 S_2 \tag{55}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho\left(e+\frac{1}{2}u^2\right)\vec{u}\cdot d\vec{S} = -\iint_{\mathcal{S}} p\vec{u}\cdot d\vec{S} \Longrightarrow p_1 u_1 S_1 + \rho_1 u_1 S_1\left(e_1+\frac{u_1^2}{2}\right) = p_2 u_2 S_2 + \rho_2 u_2 S_2\left(e_2+\frac{u_2^2}{2}\right) \tag{56}$$

$$\underset{\text{en divisant par}(54)}{\Longleftrightarrow} \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Les équations (54) et (56) montrent que le long de la tuyère, nous avons les relations suivantes:

$$\rho(x)\,u(x)\,S(x) = const = C_1 \qquad \frac{\gamma p(x)}{\rho(x)(\gamma-1)} + \frac{u(x)^2}{2} = const = C_2$$

Appliquons la relation (55) à un volume de contrôle infiniment petit:

$$pS + \rho u^2 S + pdS = (p+dp)(S+dS) + (\rho+d\rho)(u+du)^2(S+dS)$$

En gardant les termes du premier ordre et en utilisant que $d(\rho uS) = 0$, on obtient:

$$\begin{cases} Sdp + Su^2 d\rho + \rho u^2 dS + 2\rho uSdu = 0 \\ ud(\rho uS) = 0 \Longleftrightarrow \rho u^2 dS + \rho uSdu + Su^2 d\rho = 0 \end{cases}$$

Finalement:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u\frac{du}{dx}$$

et les trois équations donnent le système suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\rho uS) = 0 \\ \dfrac{dp}{dx} + \rho u\dfrac{du}{dx} = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)} + \dfrac{u^2}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{57}$$

Nous renvoyons à [2] et [3] pour une étude complète sur les écoulements dans une tuyère. En combinant les trois équations du système (57), nous obtenons une équation différentielle reliant u et S:

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-2\frac{C_2}{u^2}\right)\frac{du}{dx}+\frac{1}{S}\left(u-2\frac{C_2}{u}\right)\frac{dS}{dx}=0 \tag{58}$$

Cette équation différentielle permet, connaissant $S(x)$, de chercher $u(x)$ ou inversement et de trouver ensuite $p(x)$ et $\rho(x)$.

Illustrations

– Considérons la tuyère donnée par la figure 6, avec

$$S(x)=\begin{cases}0.1 & \forall x\in[0,0.3]\bigcup[0.7,1]\\ x^2-x+0.31 & \forall x\in[0.3,0.7]\end{cases}$$

et de plus

$$\left.\begin{array}{l}u(x)=100m.s^{-1}\\ \rho(x)=1.3kg.m^{-3}\\ p(x)=1013.2mbar\end{array}\right\}\qquad \forall x\in[0,0.3]$$

Bien qu'il n'y ait pas de solution explicite à notre équation, nous obtenons alors grâce au logiciel Scilab.

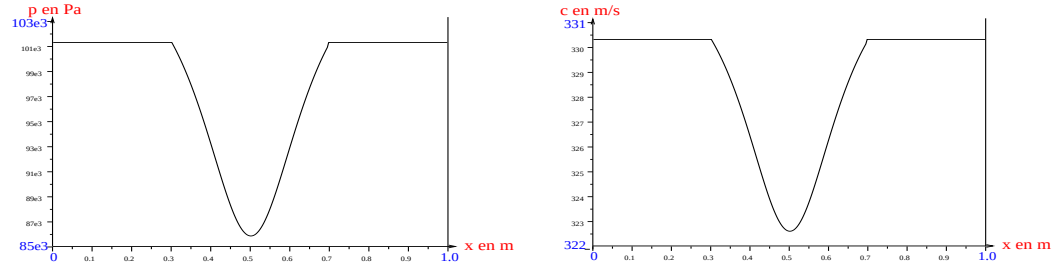


FIG. 8 – *pression et célérité*

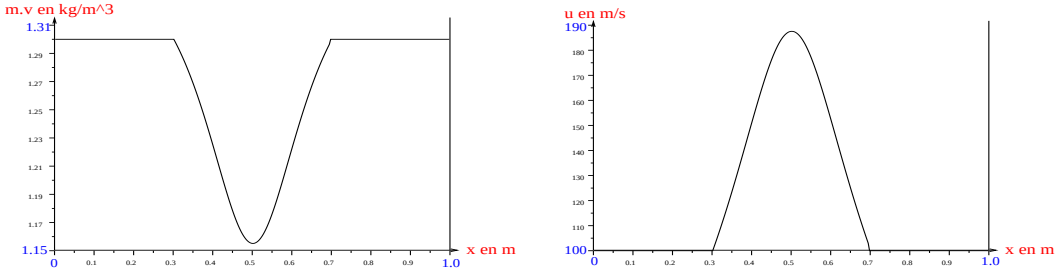


FIG. 9 – *masse volumique et vitesse*

– On peut également en supposant l'évolution de la vitesse connue trouver la forme de la tuyère adaptée: soit

$$u(x)=\begin{cases}100 & \forall x\in[0,0.1]\bigcup[0.9,1]\\ -28645.8*(x-0.5)^4+4895.83*(x-0.5)^2+50 & \forall x\in[0.1,0.9]\end{cases}$$

Avec

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = 0.1m \\ \rho(x) = 1.3kg.m^{-3} \\ p(x) = 1013.2mbar \end{array}\right\} \qquad \forall x \in [0,0.1]$$

On obtient alors formellement la forme de la tuyère qui permettrait d'obtenir une telle évolution de la vitesse, mais il faut également tenir compte du fait que notre modèle a un sens physique si les variations de la section de notre tuyère reste raisonnable.

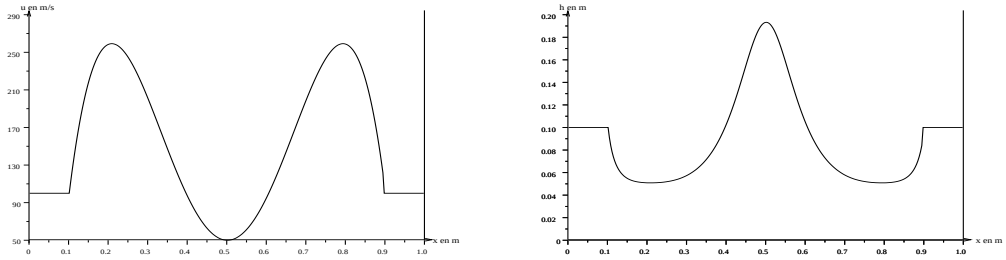


FIG. 10 – *vitesse et forme de la tuyère*

5.3.2 Evolution d'un pulse

Le but de cette partie est de décrire et comparer les résultats obtenus pour la propagation d'une perturbation choisie sous la forme d'un pulse au sein de trois écoulements distincts.

Premier modèle Les données pour le premier modèle sont:

- *Pour l'écoulement*

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = 100m.s^{-1} \\ \rho(x) = 1.3kg.m^{-3} \\ p(x) = 1013.2mbar \end{array}\right\} \qquad \forall x \in [0,5]$$

- *Pour la section*

$$S(x) = 0.1m$$

- *Pour la perturbation*

$$\left\{\begin{array}{l} X(x,0) = \delta\rho(x,0) = \exp\left(-100\,(x-1.25)^2\right) \\ Y(x,0) = \rho_0(x)\,\delta u(x,0) = c_0 \exp\left(-100\,(x-1.25)^2\right) \end{array}\right. \qquad \forall x \in [0,5]$$

- *Pour le pas d'espace* $\Delta x = 1/1000m$
- *Solution exacte pour le système (50)*
  D'après le théorème 2.2, comme les fonctions $X(x,0)$ et $Y(x,0)$ sont régulières, le problème (50) admet alors une unique solution sur $[0,5] \times I\!R^+$ donnée par:

$$\left\{\begin{array}{l} X(x,t) = \exp\left(-100\,(x-(u_0+c_0)\,t-1.25)^2\right) \\ Y(x,t) = c_0 \exp\left(-100\,(x-(u_0+c_0)\,t-1.25)^2\right) \end{array}\right.$$

Deuxième modèle

- *Pour l'écoulement*

$$\left.\begin{array}{l} u\left(x\right)=100m.s^{-1} \\ \rho\left(x\right)=1.3kg.m^{-3} \\ p\left(x\right)=1013.2mbar \end{array}\right\} \qquad \forall x\in[0{,}2.25] \tag{59}$$

- *Pour la section*

$$S\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} 0.1 & \forall x\in[0{,}2.25]\bigcup[2.75{,}5] \\ 0.64\left(x-2.5\right)^{2}+0.06 & \forall x\in[2.25{,}2.75] \end{array}\right.$$

- *Pour la perturbation*

$$\left\{\begin{array}{l} X\left(x{,}0\right)=\delta\rho\left(x{,}0\right)=\exp\left(-100\left(x-1.25\right)^{2}\right) \\ Y\left(x{,}0\right)=\rho_{0}\left(x\right)\delta u\left(x{,}0\right)=c_{0}\left(x\right)\exp\left(-100\left(x-1.25\right)^{2}\right) \end{array}\right. \qquad \forall x\in[0{,}5] \tag{60}$$

- *Pour le pas d'espace* $\Delta x=1/1000m$

Troisième modèle Pour l'écoulement et la perturbation nous gardons respectivement les mêmes données que (59),(60). Nous conservons également le même pas d'espace. Seule la forme de la tuyère change:

$$S\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} 0.1 & \forall x\in[0{,}1]\bigcup[4{,}5] \\ 0.05 & \forall x\in[2{,}3] \\ 0.025\left(x-2.5\right)^{2}+0.04375 & \forall x\in[1{,}2]\bigcup[3{,}4] \end{array}\right.$$

Résultats sur les écoulements Les quatre dessins qui suivent représentent la forme des tuyères pour le modèle 2 et 3 ainsi que l'évolution de la vitesse de l'écoulement dans chacune de ces tuyères (l'évolution des vitesses étant toujours obtenue grâce à (58)).

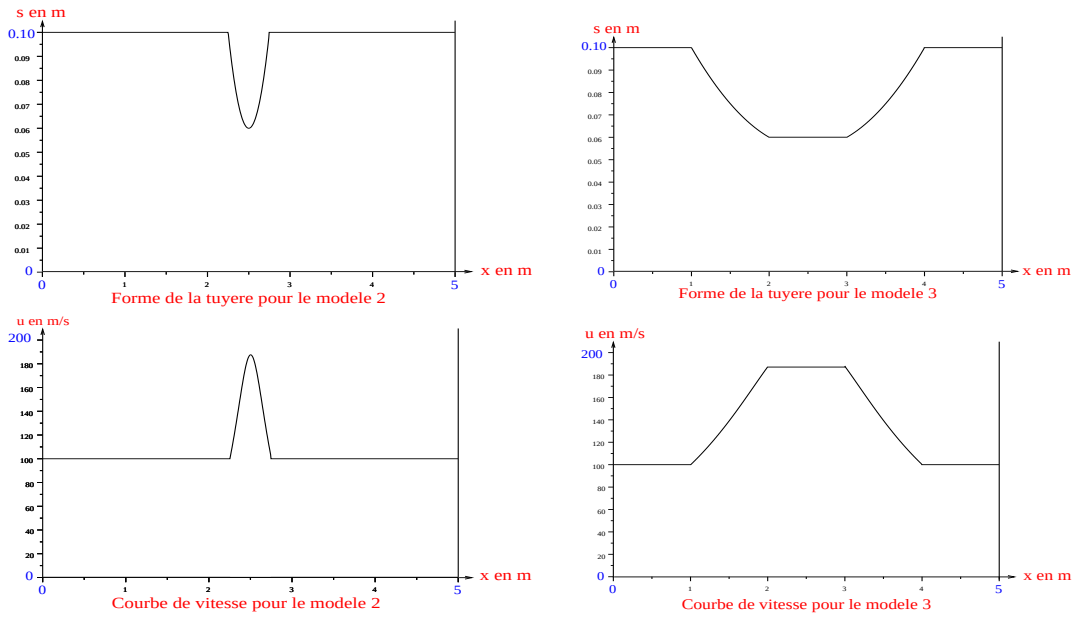


FIG. 11 – *vitesses d'écoulements et formes des tuyères pour le modèle 2 et 3*

Résultats sur la stabilité Les dessins qui suivent représentent les résultats obtenus grâce au schéma (49) pour les modèles 2 et 3 en faisant varier le pas de temps.

– Pour le modèle 2

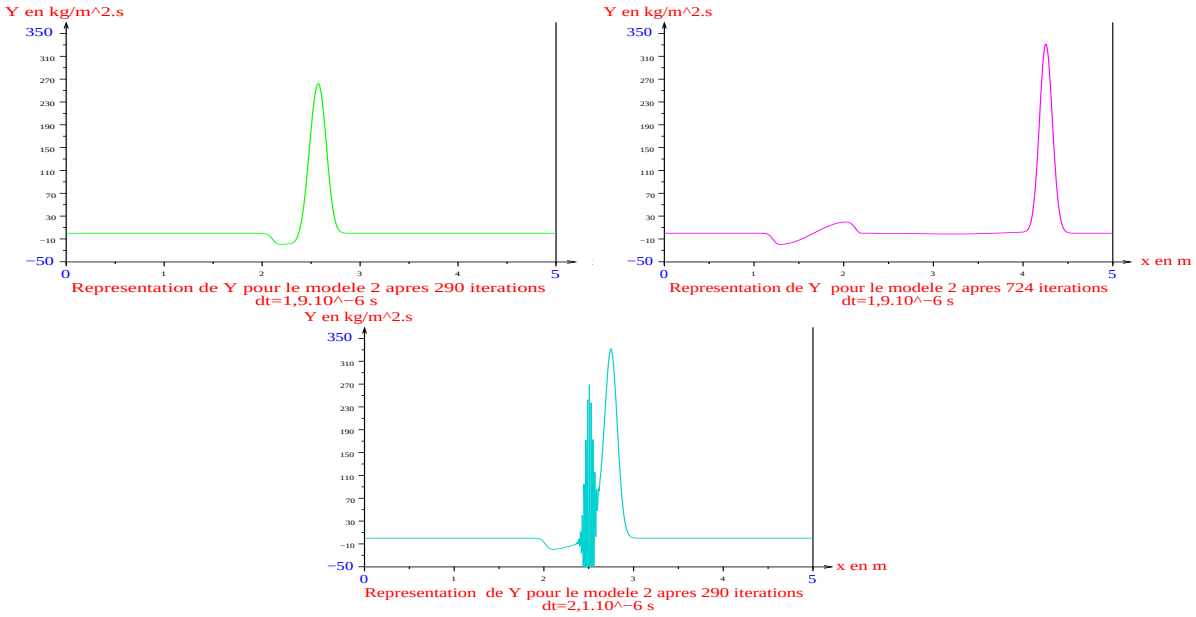


FIG. 12 – *Représentations de Y pour le modèle 2 avec différents pas de temps*

– Pour le modèle 3

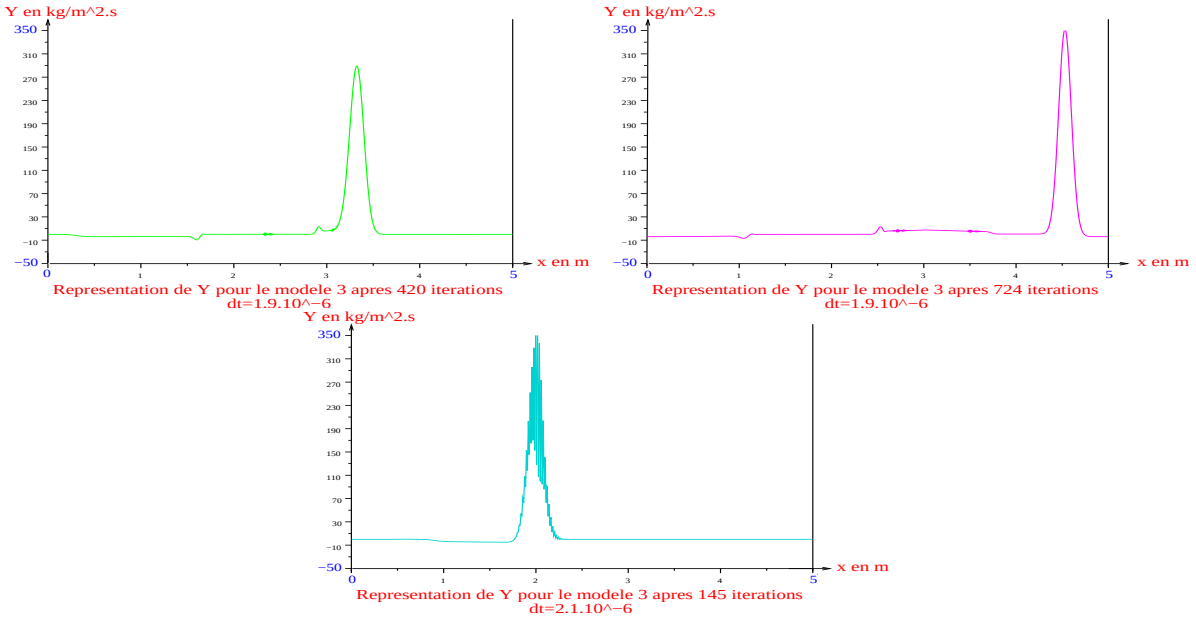


FIG. 13 – *Représentations de Y pour le modèle 3 avec différents pas de temps*

Etude comparative

- La figure (14) correspond aux résultats obtenus par notre schéma sur le modèle 1 et 2 et la solution exacte pour le modèle 1. (sur le premier graphique les courbes noires et vertes sont confondues, le deuxième graphique est un zoom sur les trois courbes)
- La figure (15) correspond aux résultats obtenus par notre schéma sur le modèle 1 et 3 et la solution exacte pour le modèle 1.
- La figure (16) correspond aux courbes de la solution exacte, de la solution approchée par notre schéma, de la solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs, de la solution approchée par le schéma de Lax-Wendroff (équivalent dans le cadre de notre problème au schéma de MacCormack) et de la solution approchée par le schéma de Van Leer (équivalent dans le cadre de notre problème au schéma de Steger-Warming et au schéma de Vijayasundaram) pour le modèle 1.
- Grâce à (39) et au changement de variable effectué entre (38) et (51), nous savons que l'énergie discrète :

$$2\varepsilon_{vf}^{n} = \sum_{m} \left(c_0^2 \left(\left(X_{m+\frac{1}{2}}^{n} \right)^2 + X_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} X_{m+\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \left(Y_{m+\frac{1}{2}}^{n} \right)^2 + Y_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} Y_{m+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

se conserve et est une forme quadratique définie positive pour $\frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_0| + |c_0|) < 1$. La figure (17) correspond à l'évolution de cette énergie pour toute les solutions énoncées précédemment.

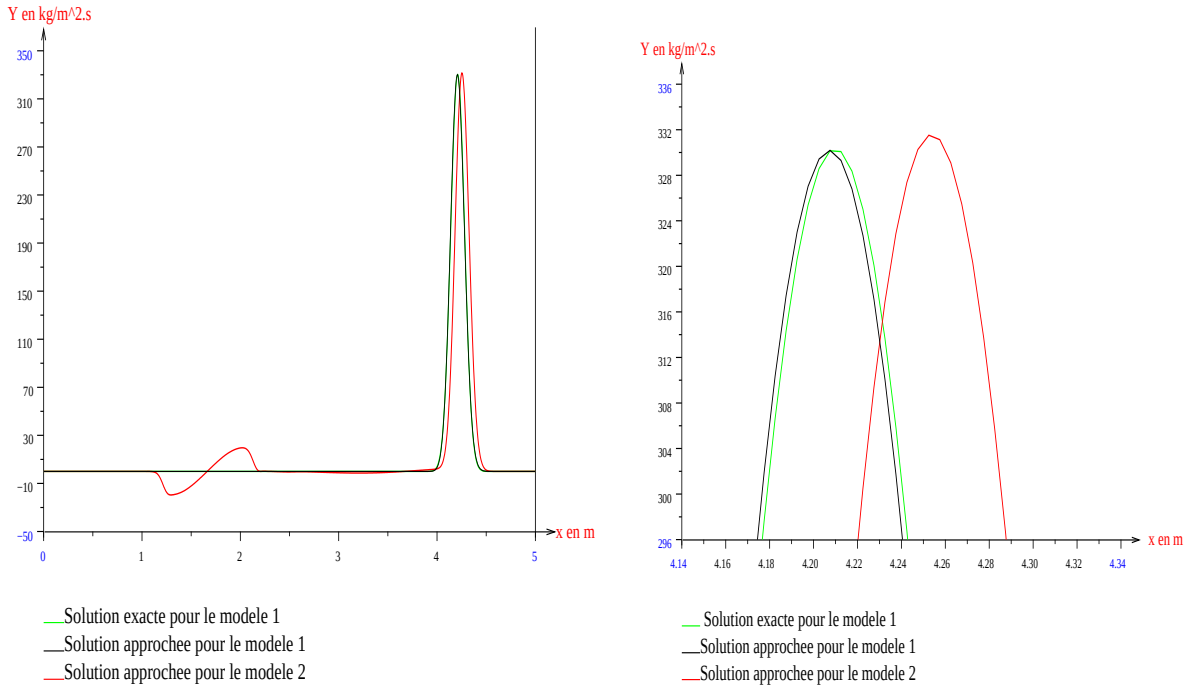


FIG. 14 – *Représentations de Y pour le modèle 1 et le modèle 2*

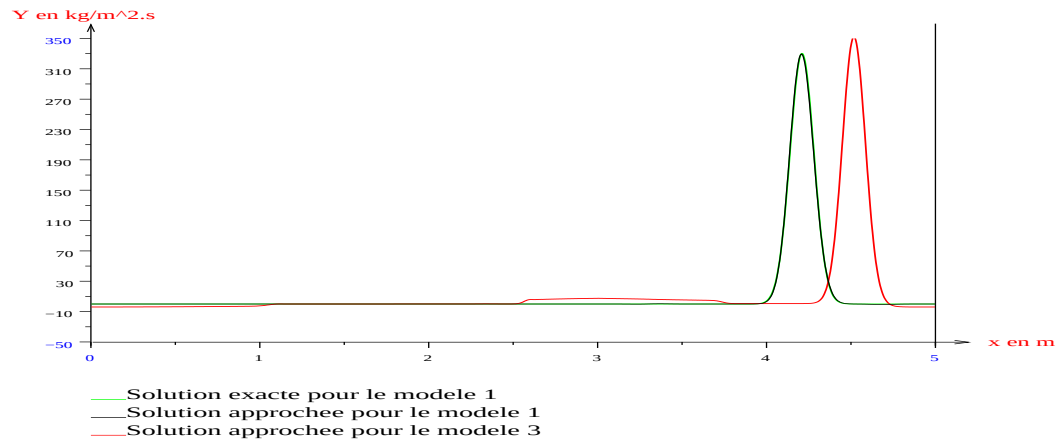


FIG. 15 – *Représentations de Y pour le modèle 1 et le modèle 3*

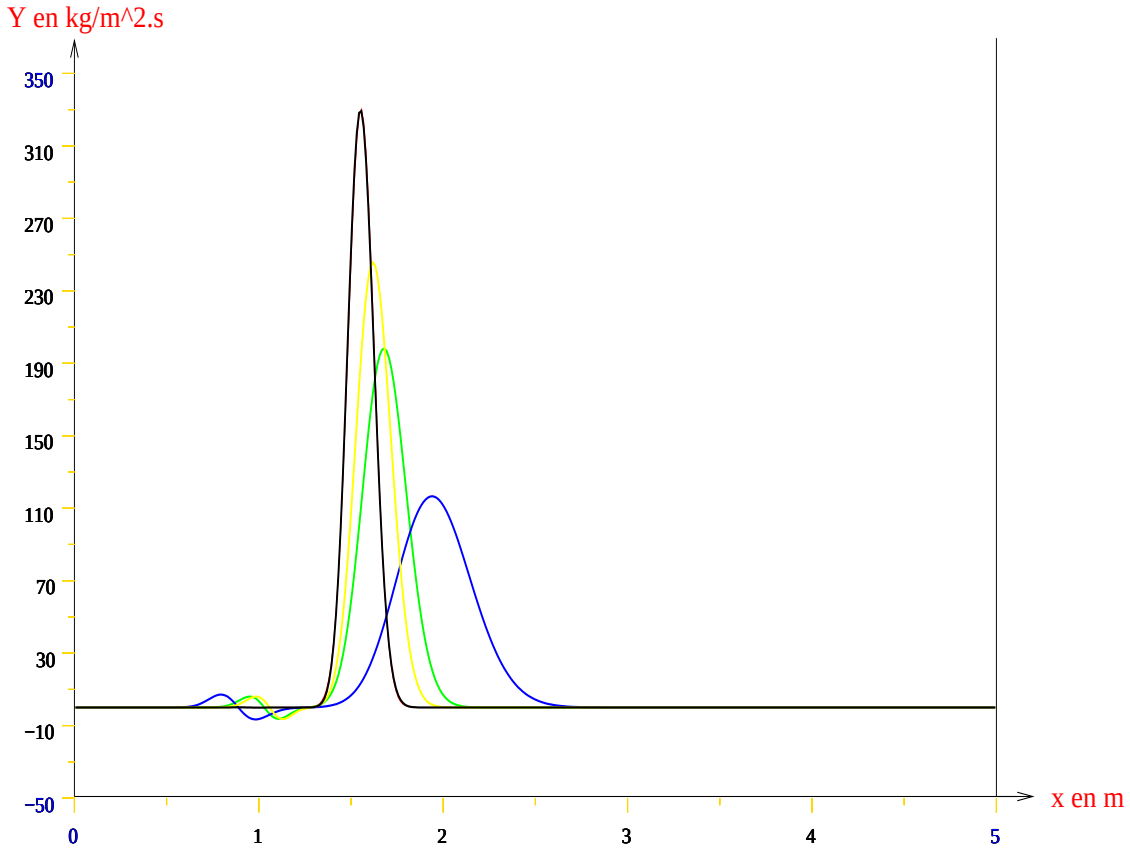


FIG. 16 – *Représentations de Y pour le modèle 1 grâce à différents schémas*

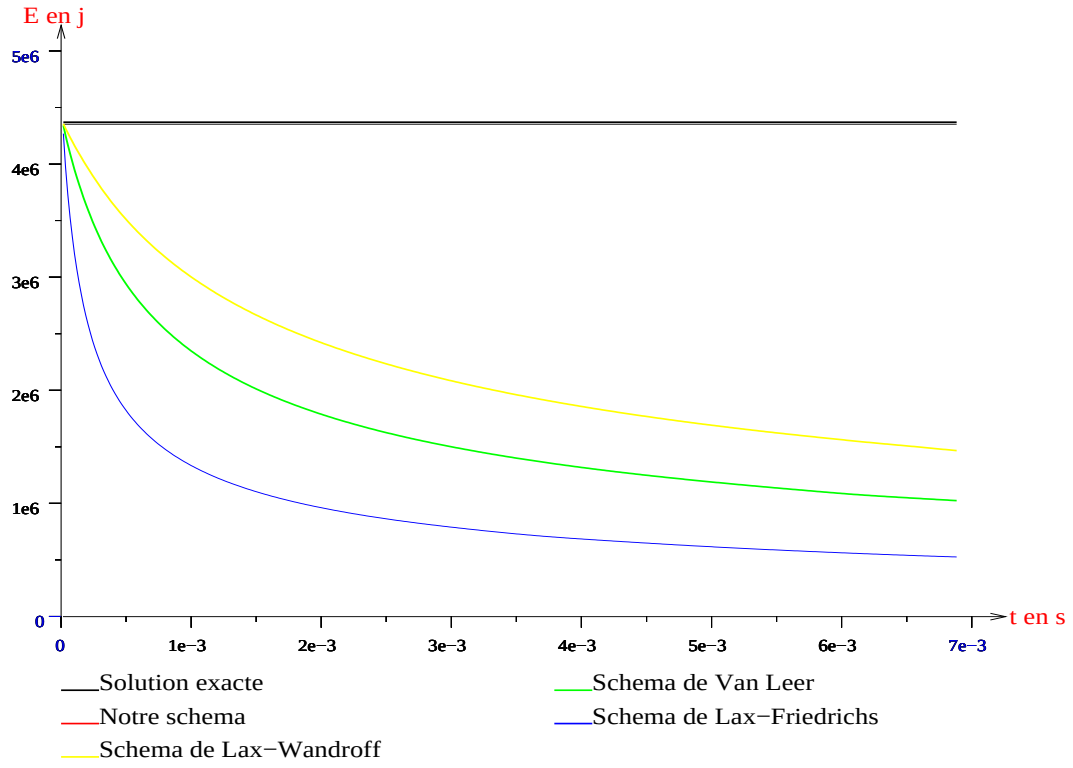


FIG. 17 – *Evolution de l'énergie pour différents schémas*

Les résultats Les figures (12),(13),(14),(15) et d'autres qui n'ont pas été représentées nous permettent de remplir le tableau suivant:

BILAN			
	modèle 1	modèle 2	modèle 3
Limite théorique de stabilité	$\Delta t \leq 2{,}27.10^{-6}s$	✓	✓
Condition théorique suffisante de stabilité pour le schéma (51) d'après (53)	✓	$\Delta t < 2.10^{-6}s$	$\Delta t < 2.10^{-6}s$
Limite de stabilité observée	Pour le schéma (38) $\Delta t \leq 2{,}27.10^{-6}s$	Pour le schéma (49) $\Delta t < 2{,}1.10^{-6}s$	Pour le schéma (49) $\Delta t < 2{,}1.10^{-6}s$
Limite de stabilité observée	✓	Pour le schéma (51) $\Delta t < 2{,}1.10^{-6}s$	Pour le schéma (51) $\Delta t < 2{,}1.10^{-6}s$

Nous pouvons de plus faire les remarques suivantes:

1. Pour le modèle 1, la solution exacte et la solution approchée par le schéma (38) sont indiscernables (voir figure 14).
2. Pour le modèle 2, nous observons une "réflexion" à l'endroit où la tuyère se déforme et le pulse se propage quasiment à la même vitesse que le pulse du modèle 1 (voir figure 14).
3. Pour le modèle 3, nous observons deux "réflexions" aux endroits où la tuyère se rétrécit puis s'élargit et le pulse se déplace plus vite que le pulse du modèle 1 (voir figure 15).

4. Nous vérifions grâce à la figure (16) la qualité de notre schéma comparativement au schéma de Lax-Friedrichs, au schéma de Steger-Warming (équivalent ici au schéma de Van Leer) ou au schéma de Lax-Wandroff.
5. Enfin la figure (17) illustre le caractère non diffusif de notre schéma contrairement aux schémas énoncés précédemment.

Interprétation Les résultats sont assez simples à interpréter:

- Pour le modèle 1, nous avons vu que le schéma (38) était d'ordre deux en temps et en espace et non diffusif. Cela explique 1.
- Grâce aux résultats sur la stabilité donnés par le tableau précédent nous pouvons vérifier que la limite de stabilité observée pour le schéma (49) est la même que pour le schéma (51), qu'elle est en accord avec la condition théorique suffisante de stabilité pour le schéma (51) et cela pour le modèle deux ou trois. Ce qui montre que dans le cadre de notre étude la limite de stabilité du schéma (51) n'est quasiment pas modifiée lorsque nous rajoutons le terme source.
- L'accélération du pulse du modèle 3 par rapport au pulse du modèle 1 ou 2 s'explique par le fait qu'en moyenne la vitesse de l'écoulement du modèle 3 est plus importante que celle du modèle 1 ou 2 (car notre onde se propage vers la droite à la vitesse $c_0(x) + u_0(x)$).
- Les résultats théoriques énoncés pour le schéma de Lax-Friedrichs et le schéma de Steger-Warming dans la partie 3.2 expliquent les mauvais résultats obtenus avec ces deux schémas.

6 Conclusion

Cette étude a permis de mettre en évidence que l'utilisation de schémas volumes finis avec flux centrés pour l'étude de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme où stationnaire pouvait être très intéressante. Mais il faut évidemment tempérer son enthousiasme car les résultats obtenus sont pour l'instant très ciblés. En effet par exemple, l'étude de petites perturbations autour d'un écoulement uniformes se sont révélées instructives mais demeurent très restrictives et peu applicables aux réalités physiques des problèmes d'écoulement. De plus dans le cas de petites perturbations autour d'un écoulement stationnaire, seuls quelques résultats sur le problème en une dimension ont été obtenus, il reste donc énormément de difficultés à franchir.

En revanche, il me semble évident que l'utilisation de ce type de méthode appliqué à l'aéroacoustique pourrait s'élargir dans un futur proche car pour l'instant peu de recherches ont été faites dans le domaine non stationnaire sur les équations d'Euler linéarisées.

C'est pour cette raison que cette étude pourrait se poursuivre principalement sur les problèmes suivants:

- Etudes de petites perturbations autour d'un écoulement stationnaire en deux puis trois dimensions d'espaces tout d'abord dans l'hypothèse d'écoulements isentropiques.
- Reprendre ensuite cette même étude dans l'hypothèse d'écoulements non isentropiques.
- Et enfin l'élaboration d'un code capable de propager le bruit généré par les structures turbulentes d'un écoulement stationnaire.

7 Annexe

7.1 Démonstration du théorème 2.1

.Enoncé du théorème:
Considérons le problème de Cauchy :

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + a\frac{\partial W}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[\\ W(x,0) = g(x) & \forall x \in I\!R \end{cases}$$

avec $a = cste \in I\!R$ et $W : I\!R \times [0, +\infty[\to I\!R$. On nomme caractéristiques les droites d'équations $x - at = c = cste$, on a alors:

une fonction $W \in C^1(I\!R \times [0,T])$ est solution de (10) si et seulement si W est constant le long de toutes caractéristiques. Si $g \in C^1(I\!R)$, alors l'unique solution du problème (10) est donnée par:

$$W(x,t) = g(x - at) \quad \forall (x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[$$

Démonstration 7.1 Commençons par supposer que $W \in C^1(I\!R \times [0,T])$ est solution de (10), considérons une caractéristique quelconque $t = t(s)$, $x = x(s)$, avec $\frac{dt}{ds} = 1$, $\frac{dx}{ds} = a$; on a alors:

$$\frac{d}{ds}(W(x(s),t(s))) = \left(\frac{\partial W}{\partial t} + a\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x(s),t(s)) = 0 \quad \forall s \in I \subset I\!R$$

Finalement, $W(x(s),t(s)) = cste \quad \forall s \in I$.
Inversement, supposons que $W \in C^1(I\!R \times [0,T])$ est constante le long de toute caractéristique. Soit $(x_0,t_0) \in I\!R \times [0,T]$, il existe alors une caractéristique définie sur I et $s_0 \in I$ telle que $x(s_0) = x_0$, $t(s_0) = t_0$. Or $\forall s \in I$

$$0 = \frac{d}{ds}(W(x(s),t(s))) = \left(\frac{\partial W}{\partial t} + a\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x(s),t(s))$$

En prenant $s = s_0$, on obtient: $\left(\frac{\partial W}{\partial t} + a\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x_0,t_0) = 0 \quad \forall (x_0,t_0) \in I\!R \times [0,T]$. De plus, si $g \in C^1(I\!R)$, la fonction $g(x - at)$ satisfait les hypothèses précédentes et d'un autre côté comme toute solution W est constante le long des caractéristiques, $W(x,t) = W(x - at,0) = g(x - at)$. Ce qui achève la démonstration.

■

7.2 Démonstration du théorème 2.2

.Enoncé du théorème:
Considérons le système:

$$(11) \qquad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \mathbb{A}\frac{\partial W}{\partial x} = 0 & \forall (x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[\\ W(x,0) = g(x) & \forall x \in I\!R \end{cases}$$

avec $w = (w_1,..,w_m) : I\!R \times [0, +\infty[\to I\!R^m$ et $\mathbb{A} = (a_{ij})_{ij}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont réelles. On a alors :

si $g \in \left(C^1(\mathbb{R})\right)^m$, le problème (11) admet une unique solution

$$W(x,t) = \sum_{s=1}^{m} g_s(x - \lambda_s t)\, r_s \qquad \forall (x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[$$

avec $(r_s)_s$ famille des vecteurs propres de $\mathbb{A}$ et $(g_s)_s$ coordonnées de la fonction g dans cette base.
Démonstration 7.2 Ce résultat découle immédiatement du théorème précèdent appliqué à chaque coordonnée de la solution W du problème. En effet en écrivant $W(x,t) = \sum_{s=1}^{m} v_s(x,t)\, r_s$, W est solution si et seulement si:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \lambda_s \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0 & \forall s \in \{1,..,m\} \\ v_s(x,0) = g_s(x) & \forall s \in \{1,..,m\} \end{cases}$$

Or si $g_s \in C^1(I\!R) \quad \forall s \in \{1,..,m\}$, l'unique solution du système précédent s'écrit

$$v_s(x,t) = g_s(x - \lambda_s)$$

C'est à dire si $g \in \left(C^1(\mathbb{R})\right)^m$, l'unique solution de (11) est $W(x,t) = \sum_{s=1}^{m} g_s(x - \lambda_s t)\, r_s \quad \forall (x,t) \in I\!R \times [0, +\infty[$.

■

7.3 Démonstration du théorème de Banach-Steinhaus

.Enoncé du théorème:
Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille non nécessairement dénombrable d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \qquad x \in E$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

c'est à dire qu'il existe une constante c telle que:

$$\|T_i x\| \leq c\|x\| \qquad \forall x \in E, \qquad \forall i \in I$$

La démonstration de ce théorème peut se faire en utilisant le lemme de Baire.
.Enoncé du lemme de Baire:
Soit X un espace métrique complet. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés. On suppose que

$$Int(X_n) = \varnothing \quad \forall n \geq 1.$$

Alors

$$Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \varnothing.$$

Démonstration 7.3 *Démonstration du lemme de Baire*
Soit $O_n = \complement X_n$, comme $\complement int(A) = adh\left(\complement A\right)$, O_n est donc un ouvert dense. Il s'agit de montrer que $\Omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense dans X. Soit $\tilde{O}$ un ouvert non vide de X, montrons que $\tilde{O} \cap \Omega \neq \varnothing$. On choisit $x_0 \in \tilde{O}$ et $r_0 > 0$ arbitraires tels que

$$\overline{B}(x_0,r_0) \subset \tilde{O}$$

On choisit ensuite $x_1 \in B(x_0,r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tels que

$$\begin{cases} \overline{B}(x_1,r_1) \subset B(x_0,r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Ce qui est possible puisque O_1 est un ouvert dense. On construit ainsi par récurrence deux suites (x_n) et (r_n) telles que:

$$\begin{cases} \overline{B}(x_{n+1},r_{n+1}) \subset B(x_n,r_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

La suite x_n est donc de Cauchy or X est complet: $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. De plus $x_{n+p} \in B(x_n,r_n) \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, en passant a la limite on obtient $l \in \overline{B}(x_n,r_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Et finalement, on obtient le résultat:

$$l \in \tilde{O} \cap \Omega.$$

■

Démonstration 7.4 *Démonstration du théorème de Banach-Steinhaus*

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n = \{x \in E, \forall i \in I \quad \|T_i x\| \leq n\}$$

X_n est donc fermé et d'après l'hypothèse du théorème, on a

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E$$

D'après le lemme de Baire, on obtient qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Int(X_{n_0}) \neq \varnothing$. Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x_0,r) \subset X_{n_0}$, on a

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad \forall (i,z) \in I \times B(0,1)$$

Finalement

$$r\|T_i\|_{L(E,F)} \leq n_0 + \|T_i(x_0)\|$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

■

7.4 Démonstration de la proposition 2.3

Enoncé de la proposition:

Soit $\rho(\mathbb{M})$ le rayon spectral de $\mathbb{M}$ matrice carrée d'ordre N. On a alors pour toute norme matricielle $\|\|$:

$$\|\mathbb{M}^n\| \underset{n\to\infty}{\sim} (\rho(\mathbb{M}))^n$$

Démonstration 7.5 Soit p un vecteur vérifiant

$$p \neq 0, \quad \mathbb{M}p = \lambda p, \quad |\lambda| = \rho(\mathbb{M})$$

et soit q un vecteur tel que la matrice pq^t ne soit pas nulle. Comme

$$\rho(\mathbb{M})\|pq^t\| = \|\lambda pq^t\| = \|\mathbb{M}pq^t\| \leq \|\mathbb{M}\|\|pq^t\|$$

On obtient $\rho(\mathbb{M}) \leq \|\mathbb{M}\|$, or comme $\rho(\mathbb{M}) = (\rho(\mathbb{M}^n))^{\frac{1}{n}}$; on a déjà

$$\rho(\mathbb{M}) \leq \|\mathbb{M}^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Considérons maintenant pour $\epsilon > 0$, la matrice $\mathbb{M}_\epsilon = \frac{\mathbb{M}}{\rho(\mathbb{M})+\epsilon}$, elle vérifie $\rho(\mathbb{M}_\epsilon) < 1$. Montrons qu'il existe alors au moins une norme matricielle subordonnée $\|\|_\star$ telle que $\|\mathbb{M}\|_\star \leq \rho(\mathbb{M}) + \epsilon$.

Pour cela utilisons le fait qu'il existe une matrice inversible $\mathbb{U}$ telle que $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{U}$ soit triangulaire, supérieure par exemple :

$$\mathbb{U}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & h_{12} & h_{13} & \dots & \dots & h_{1N} \\ & \lambda_2 & h_{23} & \dots & \dots & h_{2N} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_{N-1} & h_{N-1,N} \\ & & & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Les scalaires λ_i étant les vecteurs propres de la matrice $\mathbb{M}$. Pour tout scalaire $\kappa \neq 0$, considérons la matrice

$$\mathbb{D}_\kappa = diag\left(1,\kappa,\kappa^2,...,\kappa^{N-1}\right)$$

On a :

$$\left(\mathbb{U}\mathbb{D}_\kappa\right)^{-1}\mathbb{M}\left(\mathbb{U}\mathbb{D}_\kappa\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \kappa h_{12} & \kappa^2 h_{13} & \dots & \dots & \kappa^{N-1} h_{1N} \\ & \lambda_2 & \kappa h_{23} & \dots & \dots & \kappa^{N-2} h_{2N} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_{N-1} & \kappa h_{N-1,N} \\ & & & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Etant donné $\epsilon > 0$, fixons κ tel que $\sum_{j=i+1}^{N} \left|\kappa^{j-1} h_{ij}\right| \leq \epsilon \quad \forall i \in \{1,..,N-1\}$. Alors l'application

$$\|\|_\star : \mathbb{M} \to \|\mathbb{M}\|_\star = \|\left(\mathbb{U}\mathbb{D}_\kappa\right)^{-1}\mathbb{M}\left(\mathbb{U}\mathbb{D}_\kappa\right)\|_\infty$$

vérifie $\|\mathbb{M}\|_\star \leq \rho\left(\mathbb{M}\right) + \epsilon$, et d'autre part c'est la norme subordonnée à la norme vectorielle $u \in \mathbb{K}^N \to \|\left(\mathbb{U}\mathbb{D}_\kappa\right)^{-1} u\|_\infty$. On rappel que $\|\mathbb{M}\|_\infty = \max_i \sum_j |m_{ij}|$. Finalement, comme $\rho\left(\mathbb{M}_\epsilon\right) < 1$, d'après ce qui précède il existe une norme matricielle subordonnée $\|\|_\star$ telle que $\|\mathbb{M}_\epsilon\|_\star < 1$. D'où comme $\|\mathbb{M}_\epsilon^n\|_\star \leq \|\mathbb{M}_\epsilon\|_\star^n$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{M}_\epsilon^n = 0$. Par suite, il existe un entier $k = k\left(\epsilon\right)$ tel que

$$l \geq k \longrightarrow \|\mathbb{M}_\epsilon^l\| = \frac{\|\mathbb{M}^l\|}{\left(\rho\left(\mathbb{M}\right) + \epsilon\right)^l} \leq 1.$$

Conclusion: on obtient le résultat annoncé

$$\|\mathbb{M}^n\| \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\rho\left(\mathbb{M}\right)\right)^n.$$

.

■

7.5 Le schéma de Lax-Friedrichs

Appliquons le schéma de Lax-Friedrichs au système (31) sur un maillage régulier composé de rectangles où le domaine est infini avec de plus $\lambda_{ij} = 2 \times \frac{\Delta t}{\Delta x}$, respectivement: $\lambda_{ij} = 2 \times \frac{\Delta t}{\Delta y}$, pour les cellules c_i, c_j, telles que ∂c_{ij} est parallèle respectivement avec l'axe des ordonnées, où avec l'axe des abscisses. En notant que $W^k_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = W^k\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$ est une approximation

de W à l'instant t_k dans la cellule c dont le centre a pour coordonnée $\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$, l'équation (31) s'écrit alors:

$$\left\{\begin{array}{l} W^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = -\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F\left(W^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}}\right) - F\left(W^{k}_{m-\frac{1}{2}),n+\frac{1}{2}}\right)\right) \\ -\dfrac{\Delta t}{2\Delta y}\left(G\left(W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}}\right) - G\left(W^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ +\frac{1}{4}\left(W^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} + W^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \\ +\dfrac{1}{4}\left(W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} + W^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - 2W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right.$$

Ce qui donne:

$$\left\{\begin{array}{l} W^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = -\dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F\left(W^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}}\right) - F\left(W^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)\right) \\ -\dfrac{\Delta t}{2\Delta y}\left(G\left(W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}}\right) - G\left(W^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ +\dfrac{1}{4}\left(W^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} + W^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + W^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} + W^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{61}$$

Par souci de commodité dans l'étude de ce schéma, nous manipulerons la première forme de l'équation. En revenant aux grandeurs qui nous intéressent, nous pouvons récrire le schéma volumes finis sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\rho^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_0\left(\delta\rho^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \delta\rho^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) + \rho_0\left(\delta u^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \delta u^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)\right) \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(v_0\left(\delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right) + \rho_0\left(\delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\delta\rho^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} + \delta\rho^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2\delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} + \delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - 2\delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{62}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta u^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_0\left(\delta u^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \delta u^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{c_0^2}{\rho_0}\left(\delta\rho^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \delta\rho^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)\right) \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(v_0\left(\delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\delta u^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} + \delta u^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2\delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} + \delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - 2\delta u^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{63}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta v^{k+1}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_0\left(\delta v^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - \delta v^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right)\right) \\ -\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(v_0\left(\delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right) + \frac{c_0^2}{\rho_0}\left(\delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - \delta\rho^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\delta v^{k}_{m+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} + \delta v^{k}_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2\delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} + \delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - 2\delta v^{k}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{64}$$

Références

[1] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. DUNOD, 1999.

[2] S. Candel. *Mécanique des Fluides.* DUNOD, 1990.

[3] J. D.Anderson,Jr. *Modern compressible flow.* McGraw-Hill Book Company, 1982.

[4] L. Landau et E. Lifchitz. *Mécanique des fluides.* Éditions MIR, 1953.

[5] R. Dautray et J.L Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, numéro 8.* MASSON, 1984 et 1985.

[6] R. Dautray et J.L Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, numéro 9.* MASSON, 1984 et 1985.

[7] S. Piperno et N. Glinsky-Olivier. Initiation a la simulation numérique d'écoulements compressibles, Novembre 2000. Semaine européenne ParisTech.

[8] D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles.* MASSON, 1994. troisième édition.

[9] M. Feistauer. *Mathematical methods in fluid dynamics.* Number 67 in Pitman Monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics 67. Longman Scientific Technical, 1993.

[10] L. Fezoui. Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis. Rapports de recherche numéro 358, INRIA, Janvier 1985.

[11] E. Godlewski and P.A Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* Number 118 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 1996.

[12] B. Larrouturou. Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur. Ecole Polytechnique, 1994. Département de Mathématiques Appliquées.

[13] R.S. Phillips and L. Sarason. Singular symmetric positive first order differential operators. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15(2), 1966.

[14] R.Carpentier, A.dLa Bourdonnaye, and B.Larrouturou. On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods. Technical Report 94-26, INRIA,CERMICS, 1994.

[15] M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène.* PhD thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées, 1999.

[16] R.F.Warming and F.Hyett. *J.Comp.Phys.*, 14(2):159, 1974.

[17] H. Steve. Méthodes implicites efficaces pour la résolution des équations d'Euler en éléments finis. Rapports de recherche numéro 779, INRIA, Décembre 1987.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399