



Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. II : validation numérique

Emmanuel Bongiovanni, Alexandre Ern, Nathalie Glinsky-Olivier

► To cite this version:

Emmanuel Bongiovanni, Alexandre Ern, Nathalie Glinsky-Olivier. Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. II : validation numérique. RR-4605, INRIA. 2002. inria-00071980

HAL Id: inria-00071980

<https://inria.hal.science/inria-00071980>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Une nouvelle méthode de relaxation pour les
équations de Navier-Stokes compressibles. II :
validation numérique***

Emmanuel Bongiovanni — Alexandre Ern — Nathalie Glinsky-Olivier

N° 4605

Novembre 2002

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***

Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. II : validation numérique

Emmanuel Bongiovanni*, Alexandre Ern[†], Nathalie Glinsky-Olivier[‡]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4605 — Novembre 2002 — 46 pages

Résumé : On propose un nouveau schéma de relaxation pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles munies de lois de pression et de température générales. L'accent est mis sur l'étude de la précision et de l'efficacité numérique de cette nouvelle méthode de relaxation. Deux cas tests sont étudiés : l'advection d'un réseau périodique de vortex puis l'interaction d'un choc faible et d'un spot de température.

Mots-clés : Navier-Stokes, méthode de relaxation, gaz réel, volumes finis

* CERMICS-INRIA, Sophia Antipolis

[†] CERMICS, Marne-la-Vallée

[‡] CERMICS-INRIA, Sophia Antipolis

A new relaxation method for the compressible Navier-Stokes equations - Numerical validation

Abstract: We propose a new relaxation scheme for the solution of the compressible Navier-Stokes equations with general pressure and temperature laws. We focus on solution accuracy and computational efficiency of the new relaxation method. Two test cases are investigated : the advection of a periodic set of vortices and the interaction of a weak shock with a temperature spot.

Key-words: Navier-Stokes, relaxation method, real gas, finite volumes

Table des matières

1	Introduction	4
2	La méthode de relaxation	5
2.1	Les équations de Navier-Stokes relaxées	5
2.2	Analyse mathématique du système relaxé	7
2.3	Mise en œuvre numérique	8
3	Advection d'un réseau périodique de vortex	10
3.1	Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = \gamma = 1.4$	10
3.2	Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ et $\gamma = 1.4$	13
3.3	Évolution en temps	16
3.4	Comparaison entre différents maillages	17
4	Interaction d'un choc faible et d'un spot de température	20
4.1	Cas d'un gaz réel TPCP	21
4.1.1	Détermination des conditions initiales	21
4.1.2	Résultats numériques	22
4.1.3	Influence du type de maillage	27
4.2	Cas d'un gaz réel TPCI	31
4.2.1	γ polynômial	31
4.2.2	Loi vibratoire	32
4.2.3	Comparaison des différentes lois pour $\gamma(T)$	38
5	Conclusions	45

1 Introduction

On considère les équations de Navier-Stokes compressibles bidimensionnelles. Celles-ci expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, écrites sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q, \end{cases} \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique, $U = (u, v)$ le vecteur vitesse, p la pression,

$$\pi = -\eta(\nabla U + \nabla U^T) + \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot U)I \quad (2)$$

le tenseur flux d'impulsion ($-\pi$ est le tenseur des contraintes visqueuses), η le coefficient de viscosité, $E = \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho\varepsilon$ l'énergie totale par unité de volume, ε l'énergie spécifique interne,

$$q = -\kappa \nabla T \quad (3)$$

le vecteur flux de chaleur, κ la conductivité thermique et T la température. Les coefficients η et κ sont considérés constants pour simplifier. On notera $W = (\rho, \rho U, E) \in \mathbb{R}^4$ le vecteur des variables conservatives solution de (1).

La fermeture des équations de Navier-Stokes (1) est assurée en exprimant la pression et la température en fonction des variables conservatives. En notant $\tau = 1/\rho$ la dilatation, nous faisons l'hypothèse fondamentale qu'il existe une fonction $\sigma : (\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto \sigma(\tau, \varepsilon)$, appelée entropie spécifique (mathématique), strictement convexe en (τ, ε) et dont les dérivées premières $\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma$ et $\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma$ sont strictement négatives. La pression et la température résultent alors des relations de Gibbs sous la forme

$$p = \frac{\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma} \quad \text{et} \quad T = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma}. \quad (4)$$

Une modélisation thermodynamique particulièrement simple est celle du gaz thermiquement parfait (TP) pour lequel on a la relation $p = \rho RT$ (R étant la constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire du gaz). De plus, T ne dépend pas de τ mais uniquement de ε . Lorsque cette dépendance est non linéaire, on parle de gaz thermiquement parfait et calorifiquement imparfait (TPCI) alors que lorsque cette dépendance est linéaire, on parle de gaz thermiquement parfait et calorifiquement parfait (TPCP, ou encore gaz parfait polytropique). Pour un gaz TPCP, on a $p = \rho RT = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$. En raison de sa relative simplicité, le modèle de gaz TPCP a souvent été considéré dans les simulations numériques et plusieurs codes de calcul relativement robustes ont été développés dans ce cadre. La plupart de ces codes mettent en œuvre des schémas de discrétisation par volumes finis. Or, lorsqu'il est nécessaire de considérer un gaz régi par des lois de pression et de température plus complexes que celles d'un gaz TPCP, l'extension de ces codes de calcul n'est pas immédiate car le modèle de gaz TPCP est utilisé de manière relativement profonde dans l'écriture des solveurs de Riemann.

Plutôt que de réécrire le cœur numérique du code, une approche intéressante est de mettre en œuvre une méthode de relaxation. L'idée principale est de considérer une décomposition de l'énergie interne de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. L'énergie interne ε_1 est celle d'un gaz fictif dont on se donne *a priori* une entropie $\sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$ relativement simple (par exemple celle d'un gaz TPCP) et ε_2 représente la perturbation non linéaire. Le processus de relaxation est régi par une équation de transport pour la perturbation non linéaire ε_2 couplée aux équations de conservation pour le gaz fictif.

Une méthode de relaxation pour les équations d'Euler ($\pi = 0$ et $q = 0$ dans (1)) a été développée récemment par Coquel et Perthame [CP98]. Les équations de Navier-Stokes relaxées considérées dans ce travail ont été introduites par les auteurs dans un rapport précédent [B+02] où on décrit en détail l'analyse mathématique et l'implémentation numérique de la méthode. D'un point de vue théorique, le système des équations de Navier-Stokes relaxées doit jouir de propriétés de consistance et de stabilité. La première signifie que dans la limite d'un taux de relaxation infini, on doit retrouver les équations de Navier-Stokes compressibles (1) avec les lois de pression et de température initialement considérées dans le modèle. La deuxième propriété résulte du bilan d'une entropie adéquate pour le système relaxé. D'un point de vue pratique, un avantage important de la méthode de relaxation est qu'avec très peu de modifications, on peut étendre à des entropies générales tout code dédié aux gaz TPCP.

L'objectif de ce travail est de présenter une validation numérique de la méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. Rappelons que pour les équations d'Euler, des résultats numériques obtenus avec la méthode de relaxation de Coquel et Perthame sont présentés pour des schémas volumes finis par In [In99] ainsi que pour des schémas WENO par Montarnal et Shu [MS99]. Nous considérons deux cas tests : l'advection d'un réseau périodique de vortex et l'interaction d'un choc faible avec un spot de température. Ces deux cas tests ont été retenus car des solutions de référence étaient disponibles pour des écoulements de gaz TPCP [T+00]. Dans le premier cas test, seul intervient le flux lié à la diffusion de quantité de mouvement. Dans le deuxième cas test, le flux de chaleur intervient également.

Dans la section 2, nous rappelons brièvement les fondements théoriques et l'implémentation numérique de la méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. Dans la section 3, nous présentons nos résultats obtenus sur le premier cas test. La section 4 contient les résultats numériques pour le deuxième cas test.

2 La méthode de relaxation

2.1 Les équations de Navier-Stokes relaxées

On présente ici les grandes lignes de la méthode de relaxation. L'analyse détaillée de ses propriétés mathématiques est exposée dans [B+02].

On considère un gaz fictif dont on se donne *a priori* l'entropie $\sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$. Pour simplifier, nous supposons ici que le gaz fictif est TPCP si bien que sa pression p_1 et sa température

T_1 vérifient $\tau p_1 = RT_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1$. γ_1 est une constante donnée qui représente l'exposant adiabatique du gaz fictif introduit dans la relaxation. On conviendra d'appeler "gaz réel" le gaz effectivement considéré dans l'écoulement.

Afin de définir la décomposition de l'énergie interne, nous supposons comme pour les équations d'Euler, que pour tout $\tau > 0$ fixé, la pression $p(\tau, \varepsilon)$ du gaz réel est une fonction strictement croissante de ε telle que $p(\tau, 0) = 0$ et $p(\tau, \infty) = \infty$. Dans ces conditions, grâce au théorème des fonctions implicites, on peut définir une fonction $F : (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$ telle que

$$(\gamma_1 - 1)xy = p(x, y + F(x, y)). \quad (5)$$

Pour toute paire (τ, ε) , on peut alors écrire la décomposition

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \text{avec } \varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1) \text{ et } \varepsilon_1 = \frac{\tau p(\tau, \varepsilon)}{(\gamma_1 - 1)}. \quad (6)$$

Nous nous donnons trois fonctions

$$\begin{cases} \alpha &:= \alpha(\tau, \varepsilon_1), & (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \beta &:= \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \Theta &:= \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \end{cases}$$

les deux premières correspondant à des coefficients de pondération sans dimension, la troisième ayant les dimensions d'une température. Les équations de Navier-Stokes relaxées s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q_1^\lambda + P_1^\lambda, \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -P_1^\lambda - P_2^\lambda. \end{cases} \quad (7)$$

On notera $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) \in \mathbb{R}^5$ le vecteur des variables conservatives solution de (7). Nous utiliserons l'indice supérieur λ pour indiquer qu'une fonction des variables conservatives est évaluée en $\mathcal{W}^\lambda$. Les termes de perturbation s'écrivent

$$\begin{cases} P_1 = \alpha(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) + \lambda \rho(\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1)), \\ P_2 = \beta \nabla \cdot q_2, \end{cases} \quad (8)$$

avec les flux de chaleur q_1 et q_2 définis par

$$q_1 = -\kappa \nabla T_1, \quad q_2 = \mathcal{Q} - q_1, \quad \mathcal{Q} = -\kappa \nabla \Theta.$$

On notera que seules les lois de pression et de température associées au gas fictif TPCP interviennent dans les trois premières équations du système relaxé (7).

2.2 Analyse mathématique du système relaxé

Nous introduisons la variété d'équilibre $\mathcal{V} = \{(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1)\}$.

Proposition 1. *On suppose que*

(i) *la fonction F est déterminée par la relation de consistance (5) ;*

(ii) $\forall(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}, \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 ;$

(iii) $\forall(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}, \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$

Alors, le vecteur $W^\infty = (\rho^\infty, U^\infty, E^\infty)^T \in \mathbb{R}^4$ avec $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$ satisfait les équations de Navier-Stokes compressibles (1) avec la loi de pression et de température du gaz réel.

Dans le cas général, on n'a pas nécessairement égalité des températures du gaz réel et du gaz fictif à l'équilibre, i.e. $T^\infty \neq T_1^\infty$ a priori. Un cas particulier remarquable est celui où le gaz réel est TPCI et le gaz fictif TPCP. En effet, la température a alors la même forme fonctionnelle en la densité et la pression pour le gaz réel et le gaz fictif, si bien que $T^\infty = T_1^\infty$ et par suite $q_2^\infty = 0$.

Notre résultat principal est la stabilité du système relaxé (7) via le bilan d'une entropie convenablement choisie. Comme pour les équations d'Euler, on suppose que γ_1 satisfait les conditions "sous-caractéristiques" obtenues dans [CP98]

$$\begin{cases} \gamma_1 > \sup_{\tau, \varepsilon} \gamma(\tau, \varepsilon) & \text{avec} & \gamma(\tau, \varepsilon) = \tau \partial_{\varepsilon, \tau} p - \frac{\tau}{p} \partial_{\tau, \varepsilon} p, \\ \gamma_1 > \sup_{\tau, \varepsilon} \Gamma(\tau, \varepsilon) & \text{avec} & \Gamma(\tau, \varepsilon) = \tau \partial_{\varepsilon, \tau} p + 1. \end{cases} \quad (9)$$

On notera que dans le cas où le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP, les coefficients γ et Γ ne dépendent pas de τ et, de plus, leur valeur est la même. Dans ces conditions, (9) équivaut à

$$\gamma > \sup_{\varepsilon} \gamma(\varepsilon). \quad (10)$$

Les conditions "sous-caractéristiques" (9) impliquent, en particulier, qu'il existe deux fonctions $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2)$ et $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2)$ telles que $\forall(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}, \mathcal{T}(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \tau$ et $\mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \varepsilon_1$. De plus, la fonction

$$\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \sigma(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2),$$

est compatible avec l'entropie du gaz réel à l'équilibre et en posant $\mathcal{W} = (\rho, \rho U, E_1, \rho \varepsilon_2)^T \in \mathbb{R}^5$, la fonction

$$S := S(\mathcal{W}) = \rho \Sigma \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\rho}, \frac{E_1}{\rho} - \frac{1}{2} U^2 \right), \varepsilon_2 \right), \quad (11)$$

est strictement convexe en $\mathcal{W}$ à l'équilibre, i.e. pour tout $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$. Pour les équations d'Euler relaxées, le bilan d'entropie s'écrit sous la forme

$$\partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) \leq \lambda \omega_e(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda),$$

où

$$\omega_e(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\tau} \left(\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) - \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \right) (\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1)),$$

est tel que $\omega_e \leq 0$ et $\omega_e = 0$ si et seulement si $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$ [CP98].

Theorème 2. Avec les conditions “sous-caractéristiques” (9), on suppose que la fonction α est à valeurs dans $[0, 1]$ et que les fonctions β et Θ sont données par

$$\begin{cases} \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \alpha + (1 - \alpha) \frac{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 \left(T(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \right)}, \\ \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= - \left((1 - \alpha) \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) + \alpha \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \right)^{-1}, \end{cases} \quad (12)$$

α étant évalué en (τ, ε_1) . Alors, les hypothèses de consistance de la proposition 1 sont satisfaites. De plus, en supposant que $\mathcal{W}^\lambda$ est régulière et que $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\forall \lambda, \quad \partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) - \nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{Q}^\lambda}{\Theta^\lambda} \right) = \lambda \omega_e^\lambda + \frac{\pi^\lambda : \nabla U^\lambda}{\Theta^\lambda} + \frac{\mathcal{Q}^\lambda \cdot \nabla \Theta^\lambda}{(\Theta^\lambda)^2} \leq 0, \quad (13)$$

les trois contributions étant négatives indépendamment.

Le résultat de stabilité du théorème 2 peut être complété par un résultat de stabilité asymptotique valable lorsque le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP.

Proposition 3. On suppose que la fonction α est donnée par

$$\alpha := \alpha(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma(\varepsilon_1)}{\gamma_1 - 1}, \quad (14)$$

et que les fonctions β et Θ sont données par (12). Alors, le vecteur $\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^4$ est solution, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, du système dissipatif de lois de conservation

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla (\mu_e^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\mu_e^\lambda U^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \end{cases} \quad (15)$$

où $\mu_e^\lambda = \tau^\lambda (\partial_{\varepsilon, \tau} p^\lambda) / \partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1^\lambda (c_1^2 - c^2) > 0$, les quantités $\partial_{\varepsilon, \tau} p^\lambda$ et c étant évaluées en $(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ et les quantités $\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1^\lambda$ et c_1 en $(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$ où ε_1^λ est la solution unique de $\varepsilon^\lambda = \varepsilon_1^\lambda + F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$. De plus, $q^\lambda = -\kappa \nabla T^\lambda$ où T^λ est la température du gaz réel.

2.3 Mise en œuvre numérique

En pratique, la façon de résoudre le système de Navier-Stokes (1) dans le cadre de la méthode de relaxation est la suivante. À partir de la solution numérique au temps discret t^n , $W^n = (\rho^n, \rho^n U^n, E^n)$, l'algorithme comprend trois étapes :

1) décomposition initiale. On évalue ε^n , τ^n et la pression $p^n = p(\tau^n, \varepsilon^n)$ puis on calcule les énergies internes $\varepsilon_1^n = p(\rho^n, \varepsilon^n) / ((\gamma_1 - 1) \rho^n)$ et $\varepsilon_2^n = \varepsilon^n - \varepsilon_1^n$ ainsi que la température

$$T_1^n = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1^n/R.$$

2) étape prédictiveur : évolution en temps. Le système des équations de Navier-Stokes relaxées (7) dans la limite de l'équilibre $\lambda \rightarrow \infty$ est intégré entre t^n et t^{n+1} . Les fonctions α , β et Θ sont évaluées selon (12) et (14) et traitées explicitement en temps. Éliminant les indices λ pour simplifier, le système qui est effectivement intégré en temps s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p_1 = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E_1 + \nabla \cdot ((E_1 + p_1)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q_1 + \alpha(t^n)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1), \\ \partial_t(\rho \varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon_2 U) = -\alpha(t^n)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) - \nabla \cdot q_2(t^n). \end{cases} \quad (16)$$

On obtient les valeurs

$$\begin{pmatrix} \rho \\ (\rho U) \\ E_1 \\ \rho \varepsilon_2 \end{pmatrix}^{n+1-}$$

3) projection au temps suivant. La solution numérique au temps t^{n+1} , W^{n+1} , est obtenue par projection

$$\begin{cases} \rho^{n+1} = \rho^{n+1-}, \\ (\rho U)^{n+1} = (\rho U)^{n+1-}, \\ E^{n+1} = E_1^{n+1-} + (\rho \varepsilon_2)^{n+1-}. \end{cases}$$

Le système (16) est résolu par une méthode mixte volumes finis/éléments finis applicable à des maillages triangulaires non structurés [F+89]. Les flux convectifs sont calculés en utilisant un schéma de Roe [Ro81]. Le solveur de Riemann est une extension très simple de celui considéré pour un gaz TPCP en l'absence de relaxation. Le schéma est d'ordre 3 en espace grâce à la combinaison de la méthode MUSCL et d'un β -schéma. Le schéma est explicite en temps et basé sur une méthode de Runge-Kutta à 4 pas. Les flux diffusifs ainsi que les termes supplémentaires provenant de la méthode de relaxation sont approchés par une technique d'interpolation éléments finis P1 [F+89]. Le pas de temps utilisé pour le schéma explicite est calculé en utilisant une loi de type CFL étendue au cas des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles et dépendant des nombres de Reynolds et de Prandtl [F+89].

3 Advection d'un réseau périodique de vortex

L'objet de cette section est de présenter les résultats numériques pour la validation de notre méthode de relaxation sur le premier cas test, l'advection d'un réseau périodique de vortex. Il s'agit d'un cas test isotherme pour lequel une solution de référence est présentée dans [T+00].

On considère l'écoulement uniforme d'un gaz TPCP ($\gamma = 1.4$) dont les caractéristiques sont

$$\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad T = 300 \text{ K}, \quad \gamma = 1.4, \quad U = (u, 0) \quad \text{où } u = 277.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

si bien que le nombre de Mach est égal à 0.8. L'écoulement uniforme est initialement perturbé par un réseau périodique bidimensionnel de vortex placés aux points de coordonnées $((i + \frac{1}{2})L, (j + \frac{1}{2})L)$ où i et j sont des entiers relatifs et L une longueur de référence qu'on prendra égale à 1 m. La vitesse tangentielle de chaque vortex est

$$U_\theta(r) = C_1 r e^{-C_2 r^2}$$

avec

$$r = \sqrt{(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2}, \quad C_1 = e^{1/2} U_c / R_c, \\ C_2 = 1/(2R_c^2), \quad U_c = 0.3u \quad \text{et} \quad R_c = 0.075L.$$

Le domaine de calcul est le carré $[0, L] \times [0, L]$. Comme dans [T+00], des conditions de périodicité sont appliquées sur les 4 bords du domaine. Le coefficient de viscosité η et la conductivité thermique κ sont évalués en supposant que le nombre de Reynolds vaut 10^4 et le nombre de Prandtl 0.7.

On étudie l'évolution de ce réseau de vortex sur 5 périodes, c'est à dire aux temps $t_i = iL/u$, $i = 1, \dots, 5$ quand le centre d'un vortex coïncide avec le centre du domaine de calcul. La méthode de relaxation a été implémentée pour $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 (la valeur 1.66 correspond au γ maximum pour un gaz parfait).

Deux maillages différents ont été utilisés. Un maillage grossier de 10201 nœuds ainsi qu'un maillage fin de 40401 nœuds. Ces deux maillages ont été obtenus par découpage en drapeaux anglais (par diagonales alternées) de maillages quadrangulaires uniformes composés de 101×101 et 201×201 points respectivement. Dans la suite, ces deux maillages seront référencés par M1 et M2. À titre de comparaison, d'autres types de maillages seront considérés dans la section 3.4.

Enfin, on rappelle que la solution de référence a été obtenue dans [T+00] en utilisant un schéma de Hermite d'ordre 6 en espace et un maillage quadrangulaire de 200×200 points.

3.1 Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = \gamma = 1.4$

L'objectif est ici d'une part de vérifier la consistance de notre méthode de relaxation et d'autre part d'étudier la précision de notre solveur Navier-Stokes non relaxé en comparant les solutions qu'il produit aux solutions de référence obtenues dans [T+00].

Les résultats obtenus pour $\gamma_1 = 1.4$ se superposent aux solutions obtenues avec un code classique Navier-Stokes gaz parfait, prouvant ainsi la consistance de la méthode de relaxation dans le cas $\gamma_1 = \gamma$.

Considérons maintenant l'impact de la finesse du maillage ainsi que de la valeur du paramètre β dans le β -schéma sur la précision de nos résultats.

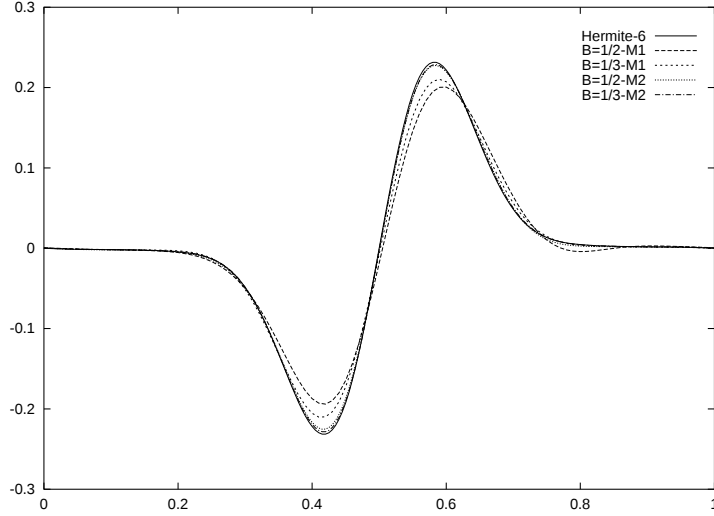


FIG. 1 – Comparaison de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma, les maillages M1 et M2 et le schéma de Hermite

Les effets de la viscosité moléculaire et de la diffusion numérique sont observés sur l'évolution du rayon du vortex. Pour cela, on compare figure 1, la distribution de vitesse verticale adimensionnée en $y = 1/2$, au temps t_5 pour le β -schéma ($\beta=1/2$ et $1/3$) et les deux maillages M1 et M2. On superpose également la solution de référence [T+00]. On compare par ailleurs, figure 2, la distribution de la pression statique au temps t_5 , en $y = 1/2$.

Les deux figures prouvent les bons résultats obtenus par notre schéma (Runge Kutta à 4 pas - β -schéma) notamment pour la valeur $\beta = 1/3$ puisque, pour le maillage le plus fin M2, les courbes de vitesse et de pression sont très proches des résultats du schéma de Hermite. Les résultats obtenus pour $\beta = 1/2$ sont moins bons surtout pour le maillage le plus grossier M1, ce qui est prévisible puisque, dans ce cas, le schéma n'est que d'ordre 2 en espace.

Ce comportement est analysé plus finement sur les zooms de la vitesse verticale autour du maximum (figure 3) et de la pression autour du centre du vortex (figure 4). Les valeurs de la vitesse obtenues pour les deux valeurs de β sont très proches pour le maillage M2 et en accord avec la courbe correspondant au schéma de Hermite. Les valeurs de la pression sont plus sensibles à la qualité du schéma puisque, même pour le maillage fin, seul le cas $\beta = 1/3$ fournit des valeurs proches de la solution de référence. Pour le maillage M1, les résultats

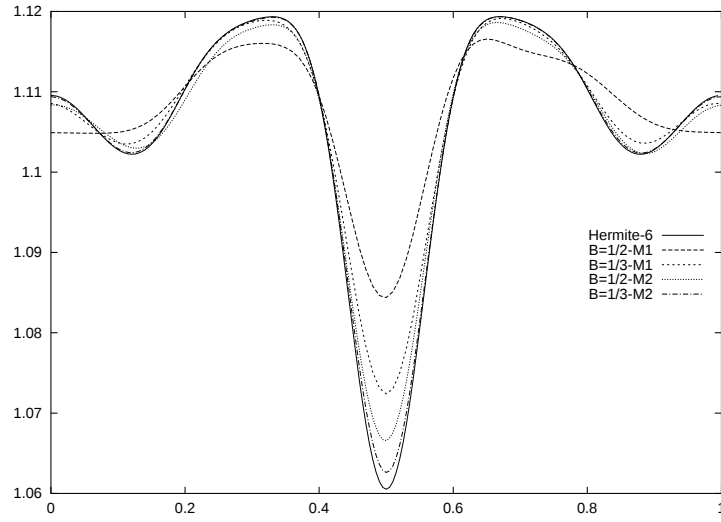


FIG. 2 – Comparaison de la pression statique à t_5 pour le β -schéma, les maillages M1 et M2 et le schéma de Hermite

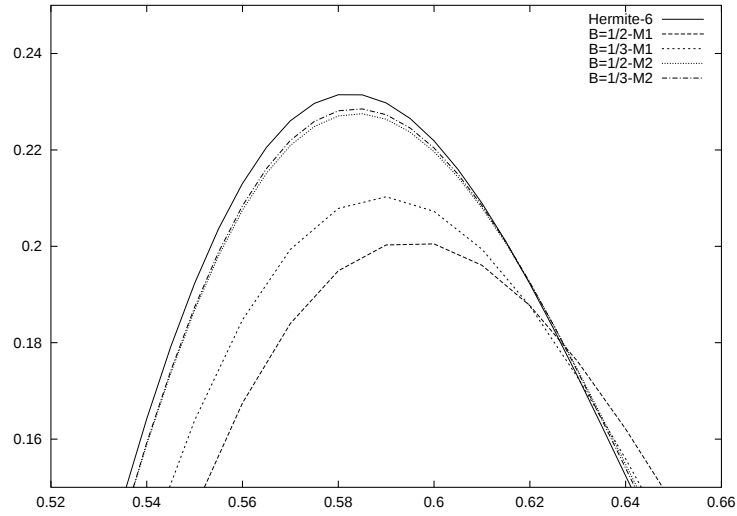


FIG. 3 – Zoom autour du maximum de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma, les maillages M1 et M2 et le schéma de Hermite

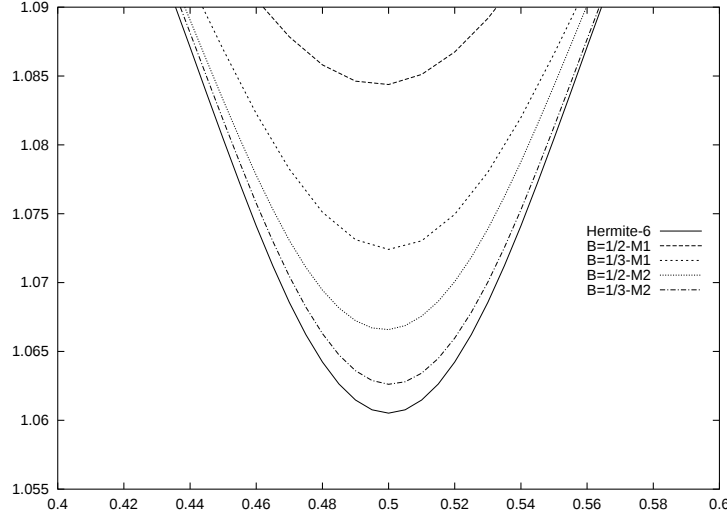


FIG. 4 – Zoom autour du centre du vortex de la pression statique à t_5 pour le β -schéma, les maillages M1 et M2 et le schéma de Hermite

obtenus pour $\beta = 1/2$ sont nettement moins bons, comme on peut le constater notamment sur le déphasage en vitesse.

3.2 Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ et $\gamma = 1.4$

On s'intéresse, à présent, aux résultats de la méthode de relaxation lorsque $\gamma_1 = 1.66$. Pour les figures, on se limite au cas du maillage M2 et l'on compare la distribution de la vitesse verticale adimensionnée, figure 5, et la distribution de la pression statique, figure 6, en $y = 1/2$ au temps t_5 pour le β -schéma et deux valeurs $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$.

En examinant les courbes de la vitesse pour $\beta = 1/2$ et $\beta = 1/3$ pour les valeurs $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$, figure 5, on ne constate aucune différence visible due à la méthode de relaxation. Ceci est plus net sur le zoom, figure 7, où les seules différences minimales proviennent de la valeur de β .

En revanche, pour la pression, figure 6, les valeurs $\beta = 1/2$ et $\beta = 1/3$ fournissent des résultats différents et l'on peut constater, en examinant le zoom, figure 8, à β fixé, un très faible écart provenant de la valeur de γ_1 . On peut tout de même conclure que les résultats provenant de la méthode de relaxation sont comparables aux solutions classiques.

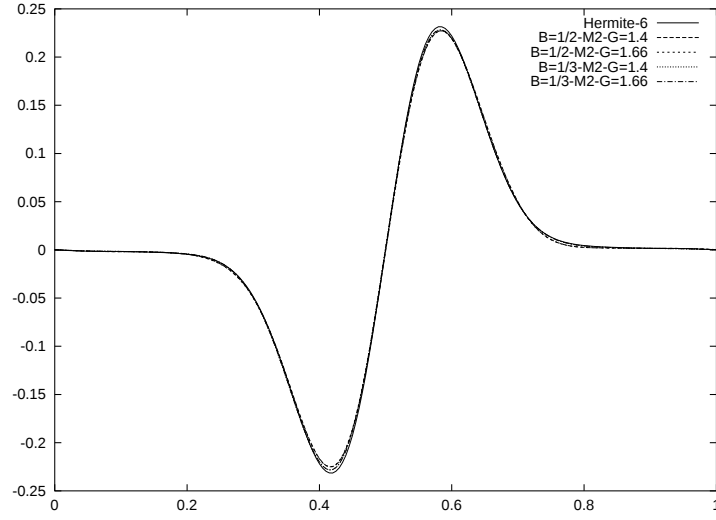


FIG. 5 – Comparaison de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma avec le maillage M2, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

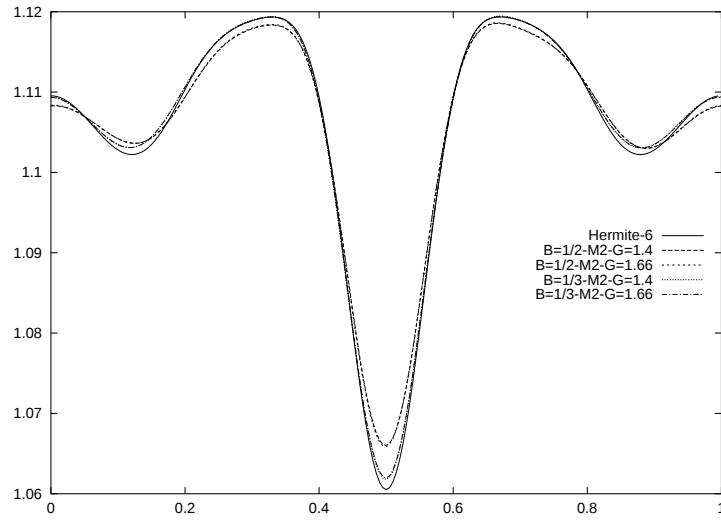


FIG. 6 – Comparaison de la pression statique à t_5 pour le β -schéma avec le maillages M2, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

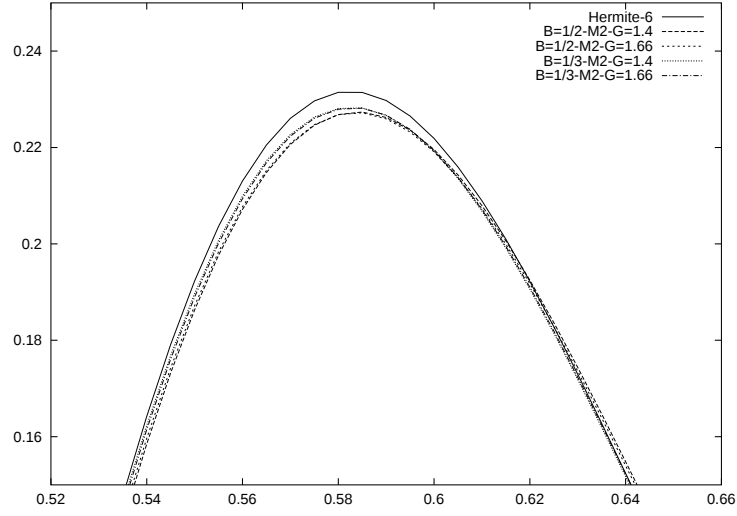


FIG. 7 – Zoom autour du maximum de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma avec le maillage M2, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

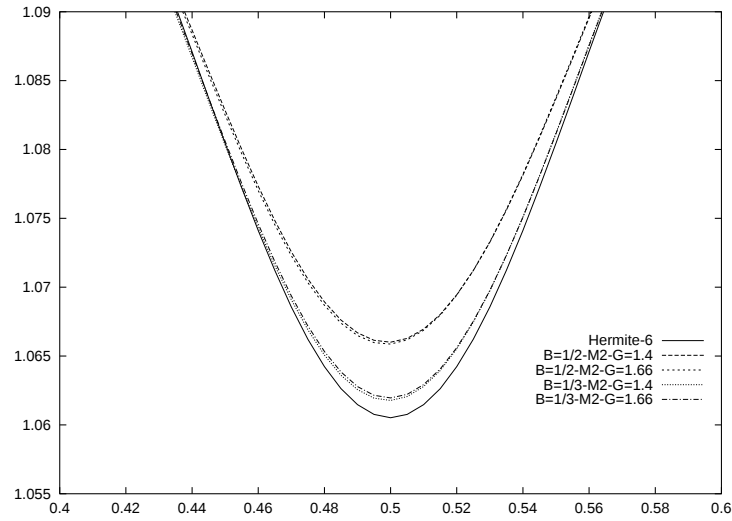


FIG. 8 – Zoom autour du centre du vortex de la pression statique à t_5 pour le β -schéma avec le maillages M2, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

Schéma		Maximum de la vitesse verticale				
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Hermite-6	Valeurs	0.27855	0.26432	0.25060	0.24412	0.23163
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.270833	0.250616	0.231027	0.216726	0.200680
	Erreur	-2.77	-5.18	-7.81	-11.22	-13.36
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.270200	0.250228	0.230497	0.215960	0.199879
	Erreur	-2.99	-5.33	-8.02	-11.53	-13.70
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.278208	0.262745	0.248134	0.239815	0.227341
	Erreur	-0.12	-0.59	-0.98	-1.76	-1.85
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.278175	0.262626	0.248049	0.239701	0.227189
	Erreur	-0.13	-0.64	-1.01	-1.81	-1.91
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.270463	0.252507	0.234708	0.224208	0.209842
	Erreur	-2.90	-4.46	-6.34	-8.15	-9.40
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.270354	0.252126	0.234306	0.223478	0.209418
	Erreur	-2.94	-4.61	-6.50	-8.45	-9.58
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.277272	0.262523	0.248305	0.241078	0.28207
	Erreur	-0.45	-0.67	-0.91	-1.24	-1.47
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.277289	0.262477	0.248192	0.240985	0.228151
	Erreur	-0.45	-0.69	-0.96	-1.28	-1.50

TAB. 1 – Valeurs et erreur relative en % du maximum de la vitesse verticale

3.3 Évolution en temps

On compare à présent l'évolution en temps du maximum de la vitesse verticale ainsi que du minimum de la pression pour chacune des cinq périodes, soit aux temps t_i , $i = 1, \dots, 5$, pour le schéma Hermite-6 et pour le β -schéma, les deux maillages M1 et M2 et pour $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 . Les résultats obtenus pour la méthode de relaxation et le maillage grossier, dont on n'a pas présenté de figure, sont donnés dans les tableaux. On calcule également l'erreur relative par rapport aux valeurs de référence du schéma de Hermite. Ces valeurs sont comparées à des tableaux similaires présentés dans [T+00].

Pour le maillage grossier M1, l'erreur sur le maximum de la vitesse au temps t_1 , tableau 1, varie entre -2.77% et -2.99% et au temps t_5 entre -9.40% et -13.70%. Les résultats sont meilleurs pour $\beta = 1/3$ mais, dans tous les cas, comparables à ceux présentés dans [T+00] puisque, les schémas de type TVD ou MUSCL, conduisent à des erreurs comprises entre -3.08% et -17.09% à t_1 et entre -5.16% et -43.42% à t_5 pour le maillage grossier de 100×100 points. Le β -schéma est très sensible au raffinement de maillage puisque, pour le maillage M2, l'erreur relative varie entre -0.12% et -0.48% à t_1 et entre -1.47% et -1.91% à t_5 . Les résultats sont également comparables à ceux de [T+00] puisque pour le maillage de 200×200 points, l'erreur à t_1 est comprise entre -0.44% et -5.22% et à t_5 entre -1.07% et -15.14% pour

Schéma		Minimum de la pression statique adimensionnée				
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Hermite-6	Valeurs	1.01276	1.01789	1.01964	1.08101	1.06052
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.018845	1.030681	1.035190	1.090148	1.082911
	Erreur	0.60	1.25	1.52	0.84	2.113
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.019269	1.031065	1.035482	1.089896	1.083371
	Erreur	0.64	1.29	1.55	0.82	2.15
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.013586	1.020151	1.022671	1.080588	1.066009
	Erreur	0.08	0.22	0.29	-0.03	0.51
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.013635	1.020284	1.022714	1.080585	1.065871
	Erreur	0.08	0.23	0.30	-0.03	0.50
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.017368	1.025454	1.028362	1.089449	1.070803
	Erreur	0.45	0.74	0.85	0.78	0.96
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.017571	1.025722	1.028585	1.089322	1.071303
	Erreur	0.47	0.76	0.87	0.76	1.01
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.013518	1.019053	1.021003	1.081229	1.061776
	Erreur	0.07	0.11	0.13	0.02	0.11
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.013552	1.019160	1.021160	1.081229	1.061960
	Erreur	0.07	0.12	0.14	0.02	0.13

TAB. 2 – Valeurs et erreur relative en % du minimum de la pression statique

des schémas comparables. On remarque que les erreurs obtenues pour $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$ sont très proches, quels que soient le maillage et la valeur de β .

L'examen du tableau 2 présentant les valeurs du minimum de la pression statique conduit aux mêmes conclusions. Pour le maillage M1, l'erreur varie entre 0.45% et 0.64% à t_1 et 0.96% et 2.15% au temps t_5 . Les résultats du schéma pour $\beta = 1/3$ sont nettement meilleurs que pour $\beta = 1/2$. Les valeurs de [T+00] se situent entre 0.29% et 1.71% à t_1 et entre 0.74% et 3.85% à t_5 pour le maillage grossier. Les résultats sont meilleurs pour le maillage fin M2. A t_1 l'erreur est comprise entre 0.07% et 0.08% et à t_5 entre 0.11% et 0.51%, le meilleur résultat correspondant au cas $\beta = 1/3$. Les schémas étudiés dans [T+00] ont des erreurs comprises entre 0.04% et 0.33% à t_1 et entre 0.11% et 1.15% à t_5 pour le maillage de 200×200 points. L'écart entre les valeurs obtenues pour $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$ est très faible, comme nous l'avons constaté pour la vitesse.

L'examen des courbes ainsi que des deux tableaux prouve les bons résultats obtenus par la méthode de relaxation et notre schéma.

3.4 Comparaison entre différents maillages

Utilisant un maillage triangulaire et comparant nos résultats aux solutions extraites de [T+00] obtenues avec un maillage quadrangulaire uniforme, il est intéressant de regarder

si la solution est dépendante du type de construction du maillage. À partir d'un maillage uniforme quadrangulaire de 201×201 points, il est possible d'obtenir deux maillages triangulaires selon que l'on découpe de façon uniforme (toujours dans le même sens) ou en drapeaux anglais (par diagonales alternées). Il est également possible de générer directement un maillage triangulaire non structuré de type quasi Delaunay contenant 201 points uniformément répartis sur chaque côté [Re93]. Les deux premiers maillages contiennent 40401 points et 80000 triangles tandis que le troisième contient 46569 points et 92336 triangles. Des détails de ces trois maillages dans le domaine $[0.4, 0.6] \times [0.4, 0.6]$ sont présentés figure 9. On notera que l'implémentation des conditions de périodicité se fait naturellement sur des maillages dont la trace au bord du domaine de calcul est elle-même périodique.

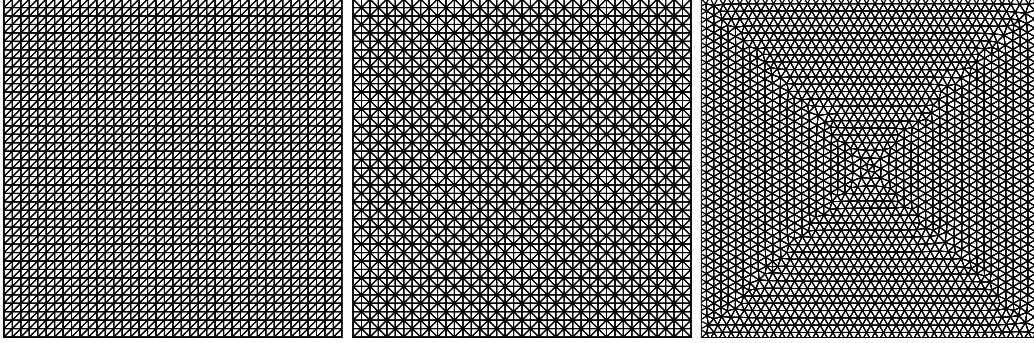


FIG. 9 – Détail dans $[0.4, 0.6] \times [0.4, 0.6]$ des différents maillages triangulaires pour l'advection du vortex ; découpage uniforme à gauche, en drapeaux anglais au centre et maillage non structuré à droite

Sur chaque maillage, on réalise une simulation avec le schéma de Runge-Kutta 4 et la valeur $\beta = 1/3$. Aucune différence n'est visible sur les coupes en $y = 0.5$ et au temps t_5 de la vitesse verticale adimensionnée et de la pression statique. On présente, tableau 3, les valeurs du maximum de la vitesse verticale et du minimum de la pression statique sur tout le domaine, au temps t_5 pour les trois différents maillages ainsi que l'erreur relative par rapport à la valeur obtenue avec le schéma de Hermite.

Les extrema provenant des différents maillages sont très proches mais, pour la vitesse comme pour la pression, le maillage non structuré conduit à des solutions plus précises, le maillage découpé de façon uniforme fournissant les moins bonnes solutions.

Ce cas test est une première validation très encourageante de notre méthode. Malheureusement, la température étant constante, il ne permet pas une validation de tous les termes, notamment de la décomposition des flux de chaleur ; ceci est donc l'objectif du cas test suivant.

	$\max v$	Erreur	$\min p$	Erreur
Hermite-6	0.23163		1.06052	
40401 points, découpage uniforme	0.22844	-1.37	1.06282	0.21
40401 points, drapeaux anglais	0.22869	-1.26	1.06261	0.19
46569 points, non structuré	0.22979	-0.79	1.061742	0.11

TAB. 3 – Valeurs et erreurs relatives du maximum de la vitesse verticale et du minimum de la pression statique pour les différents maillages

4 Interaction d'un choc faible et d'un spot de température

Pour valider la totalité du système relaxé, notamment la décomposition du flux de chaleur, on étudie un second cas test extrait de [T+00], l'interaction d'un choc faible et d'un spot de température, cas test pour lequel le champ de température n'est plus constant. On s'intéresse dans un premier temps au cas documenté d'un gaz TPCP et l'on étudiera dans une seconde partie deux situations de gaz TPCI.

Le domaine de calcul est le rectangle $[0, 2] \times [0, 1]$ m et le choc est situé en $x = 1$. Les parties gauche et droite sont respectivement indicées 1 et 2. Les valeurs de référence correspondent à la partie à gauche du choc. Quel que soit le type de gaz étudié, le nombre de Mach est $M_1 = 1.1588$ et les caractéristiques de l'état gauche sont :

$$\rho_1 = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad T_1 = 300 \text{ K}, \quad p_1 = \rho_1 R T = 103320 \text{ Pa}.$$

Le nombre de Reynolds est $Re = 2000$ et le nombre de Prandtl $Pr = 0.7$, la longueur de référence étant $L = 1$ m. Les conditions initiales à gauche et à droite du choc sont calculées en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot. A cet écoulement de base, on superpose un spot de température situé en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et défini par

$$\frac{\Delta T(r)}{T_1} = \frac{1}{\alpha^4} (r^2 - \alpha^2)^2 e^{-r^2/\sigma^2}$$

où $\alpha = 7$, $\sigma = 0.07$ et $r = \sqrt{(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2}$. Les caractéristiques du calcul sont représentées sur la figure 10.

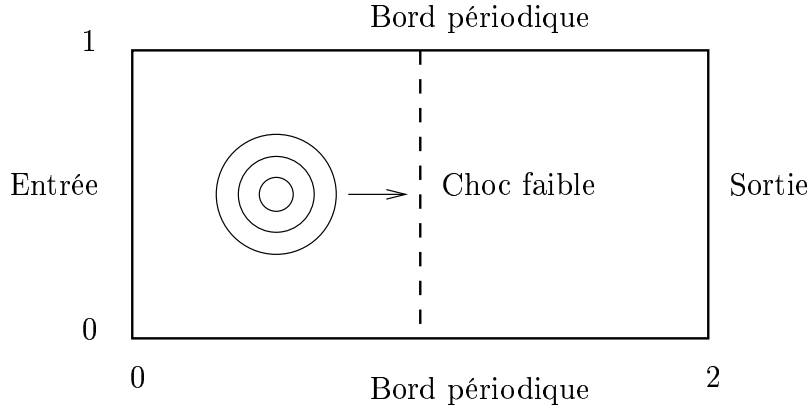


FIG. 10 – Domaine de calcul et conditions aux limites

Des conditions de périodicité sont appliquées sur les bords supérieur et inférieur du domaine. Les conditions à l'entrée et à la sortie sont traitées, de façon décentrée, par un schéma de Steger-Warming [SW81].

En plus des quantités classiques de l'écoulement, et pour la comparaison avec l'article [T+00], on s'intéresse à la vorticité

$$\omega = v_x - u_y$$

où (u, v) sont les composantes cartésiennes du vecteur vitesse U et à l'évolution en temps de l'intégrale de son module

$$\int_{\Omega} |\omega| d\Omega. \quad (17)$$

On étudie également l'évolution au cours du temps de l'intégrale du moment baroclinique

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\nabla p \times \nabla \rho}{\rho^2} \right| d\Omega. \quad (18)$$

4.1 Cas d'un gaz réel TPCP

Dans un premier temps, pour une validation détaillée de notre méthode et une comparaison avec les résultats présentés dans [T+00], le gaz réel est supposé TPCP et le rapport des chaleurs spécifiques est constant $\gamma = 1.4$.

4.1.1 Détermination des conditions initiales

Les valeurs initiales à gauche et à droite sont calculées en résolvant les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ h_1 + 1/2 u_1^2 &= h_2 + 1/2 u_2^2 \end{cases} \quad (19)$$

où les composantes de la vitesse verticales v_1 et v_2 sont nulles et h est l'enthalpie spécifique. Suivant la méthode décrite par Williams [Wi85], si l'on pose

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m, \quad (20)$$

les deux dernières équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{p_2 - p_1}{(1/\rho_2) - (1/\rho_1)} = -m^2 \quad (21)$$

et

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) (p_2 - p_1). \quad (22)$$

Ces deux équations lient p et $1/\rho$ indépendamment de la vitesse. Le gaz étant TPCP, l'enthalpie interne s'exprime simplement $h = \gamma p / (\gamma - 1) \rho$ et une solution $(1/\rho_2, p_2)$ peut

s'interpréter comme l'intersection d'une droite, la droite de Rayleigh, donnée par l'équation (21) et d'une hyperbole, la courbe de Hugoniot, dont l'équation est (22). L'équation (20) permet ensuite de déduire la vitesse.

Les valeurs initiales que l'on obtient sont :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, & \rho_2 = 1.52 \text{ kg.m}^{-3} \\ p_1 = 103320 \text{ Pa}, & p_2 = 144648 \text{ Pa}, \\ u_1 = 402.32 \text{ m.s}^{-1}, & u_2 = 316.71 \text{ m.s}^{-1}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, & T_2 = 330.63 \text{ K}. \end{cases}$$

4.1.2 Résultats numériques

Comme pour le cas test précédent, tous nos résultats sont comparés aux solutions de référence présentées dans [T+00]. Celles-ci ont été obtenues avec un schéma de Hermite d'ordre 6 sur trois maillages quadrangulaires : un maillage grossier de 101×51 points, un maillage intermédiaire de 201×101 points et un maillage fin de 801×101 points. Nous choisissons, pour limiter le nombre de figures, de présenter les isovaleurs de nos solutions uniquement sur notre maillage le plus fin contenant 80901 points et obtenu par découpage en drapeaux anglais du maillage quadrangulaire de 801×101 points. Nous utilisons le maillage intermédiaire de 201×101 points uniquement pour la comparaison des intégrales de la vorticité (17) et du moment baroclinique (18), en conformité avec [T+00]. Les maillages de 201×101 points et 801×101 points sont respectivement référencés par M1 et M2. Nous utilisons un seul schéma numérique : le schéma de Runge-Kutta 4 et le β -schéma pour $\beta = 1/3$.

On présente d'abord les solutions au temps adimensionné 0.5 ($t_1 = 0.5/u_1$, temps où le spot de température traverse le choc) obtenues avec un solveur Navier-Stokes classique ($\gamma_1 = 1.4$) et la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.66$. Les isovaleurs de la masse volumique, de la pression et de la vorticité sont présentées pour les deux méthodes figure 11.

Ces solutions sont tout à fait comparables aux résultats présentés dans [T+00]. On constate une modification de la courbure du choc visible sur les isovaleurs de la densité et de la pression, une zone de basse pression en aval du choc et la présence d'une paire de tourbillons de vitesse correspondant à des valeurs positives et négatives de vorticité. Lorsque l'on compare les deux colonnes de résultats (solveur Navier-Stokes classique/méthode de relaxation), on ne constate aucune différence visible, quelle que soit la variable. Il faut noter que la valeur $\gamma_1 = 1.66$ est une valeur extrême puisque la seule contrainte est que γ_1 soit supérieur à γ dans tout le domaine c'est à dire, dans ce cas, à 1.4.

De même, on présente les solutions au temps adimensionné égal à 1. ($t_2 = 1./u_1$), obtenues pour le solveur Navier-Stokes gaz parfait classique et le schéma de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$. Les isovaleurs de la densité, de la pression et de la vorticité, figure 12, sont également comparables aux résultats de référence.

La seule différence par rapport aux résultats du schéma de Hermite concerne les traces visibles au niveau du choc. Elles sont dues au schéma que nous utilisons. Les schémas TVD et ENO, d'un ordre inférieur à 6 et qui sont également considérés dans [T+00], produisent

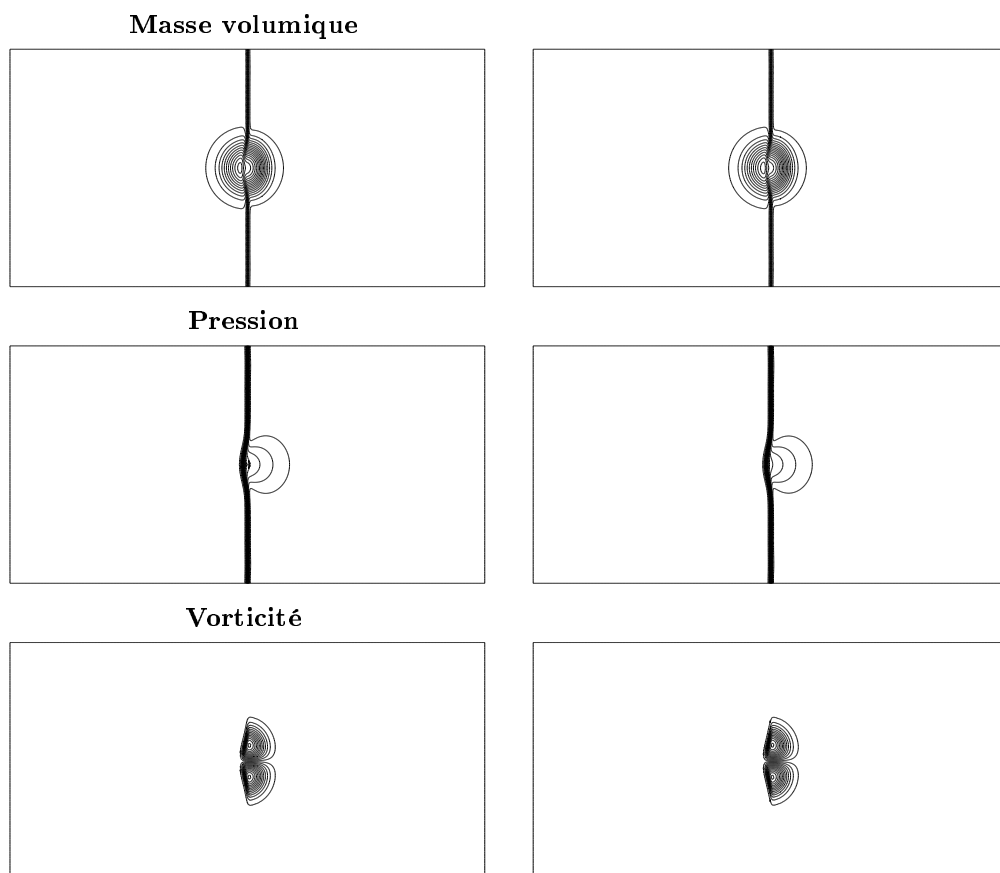


FIG. 11 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression et de la vorticité à t_1 - Gaz TPCP $\gamma = 1.4$ - Solveur Navier-Stokes (   gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (   droite)

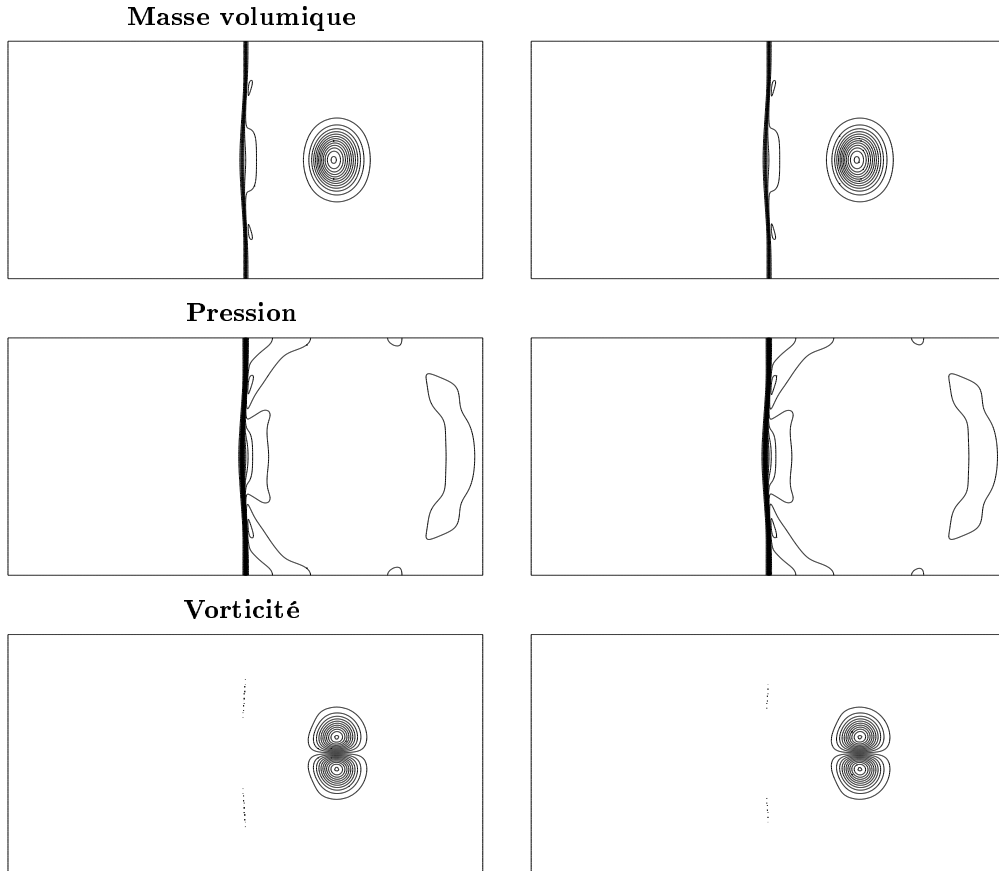


FIG. 12 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression et de la vorticité à t_2 - Gaz TPCP $\gamma = 1.4$ - Solveur Navier-Stokes (   gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (   droite)

eux aussi ces traces dans le choc. En examinant les deux colonnes de solutions, on peut encore constater que les résultats provenant de la méthode de relaxation sont identiques à ceux du solveur de Navier-Stokes dédié aux gaz TPCP.

On compare plus finement les solutions des deux méthodes en présentant, figure 13, les coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ aux temps t_1 et t_2 . Les courbes se superposent dans tous les cas.

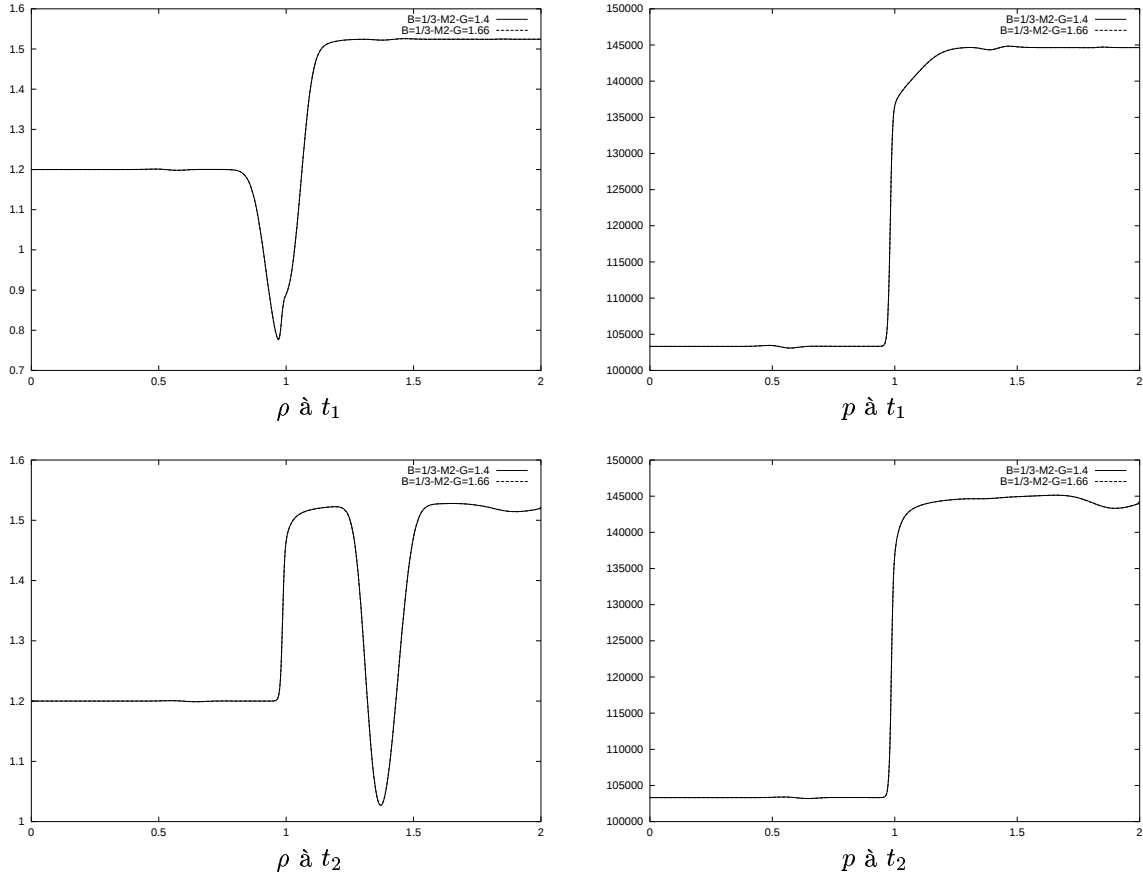


FIG. 13 – Coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.66$) - Maillage de 80901 points

On s'intéresse à présent à l'évolution au cours du temps de l'intégrale sur le domaine de la norme de la vorticité (17) et du moment baroclinique (18), qui sont de bons indicateurs de la précision de la solution.

On compare, figure 14, les résultats obtenus sur les maillages M1 et M2 pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.66$. On superpose également la solution de référence [T+00]. Pendant les premières itérations en temps, l'intégrale de $|\omega|$ est très faible. Vers un temps adimensionné d'environ 0.35, le spot commence à interagir avec le choc et la production de vorticité augmente régulièrement pour se stabiliser vers un temps adimensionné proche de 0.6. Les résultats que nous obtenons sont très proches de ceux de la méthode de Hermite. Les courbes correspondant au maillage le plus grossier M1 sont plus éloignées de la courbe correspondant au schéma de Hermite que celles du maillage M2. De plus, l'erreur entre les solutions correspondant aux valeurs $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$ est très réduite pour le maillage M2 et plus visible pour le maillage M1.

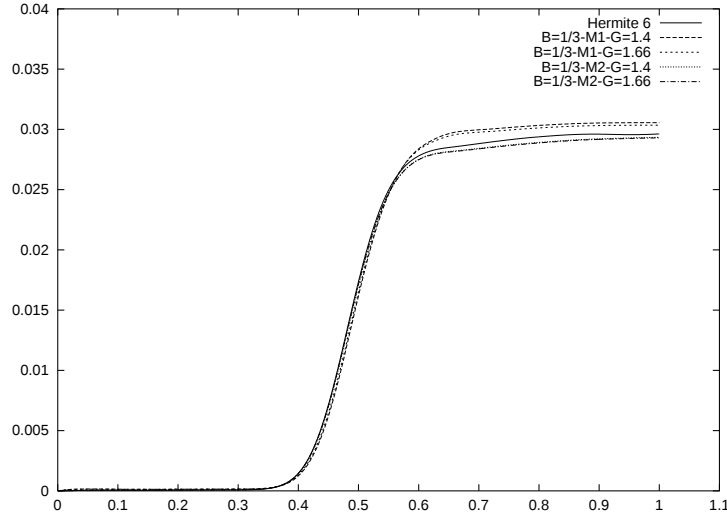


FIG. 14 – Evolution en temps de l'intégrale de $|\omega|$ pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.41, 1.66$) - Maillage de 80901 points

On s'intéresse à présent à l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (18). Comme précédemment pour la vorticité, on compare les résultats obtenus pour les maillages M1 et M2 par le solveur Navier-Stokes et par la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.66$, figure 15. On superpose également la courbe correspondant à la solution de référence [T+00].

Les valeurs non nulles de cette intégrale se situent à des temps adimensionnés compris entre 0.3 et 0.7, c'est à dire lorsque le spot de température traverse le choc. Les courbes correspondant aux différents résultats sont très proches. Une comparaison plus précise est faite sur le zoom autour du maximum, figure 16. On constate que les résultats obtenus pour le maillage M2 sont très proches de la solution du schéma de Hermite et que l'erreur

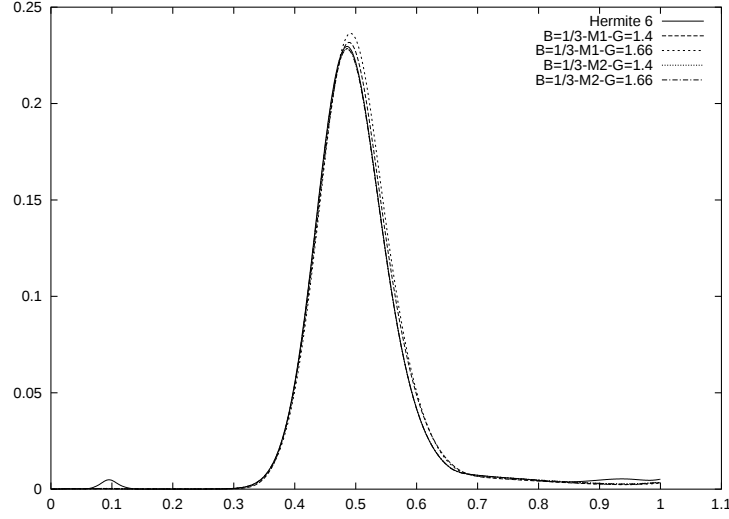


FIG. 15 – Evolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (18) pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.66$)

provenant de la méthode de relaxation est très faible. Les résultats sont moins bons pour le maillage M1 et l'erreur provenant de la méthode de relaxation est plus visible dans ce cas.

L'ensemble des résultats que nous obtenons sont satisfaisants et ce cas test constitue une validation de la méthode de relaxation dans une situation où tous les termes additionnels liés aux flux diffusifs interviennent.

4.1.3 Influence du type de maillage

Pour terminer cette étude détaillée du cas d'un gaz TPCP, on étudie, comme pour le cas test précédent, l'influence du type de maillage sur la solution. On considère trois maillages. Les deux premiers sont obtenus en découpant un maillage quadrangulaire de 201×101 points d'une part de façon uniforme et d'autre part en drapeaux anglais. Ces deux maillages contiennent 20301 points et 40000 triangles. Le troisième maillage triangulaire est non structuré, de type quasi-Delaunay et ayant les mêmes nœuds sur le bord du domaine que les deux autres maillages. Le maillage non structuré contient 23440 points et 46278 triangles. La comparaison entre les différents maillages est effectuée en utilisant la valeur $\gamma_1 = 1.4$.

On compare, figure 17, l'évolution temporelle de l'intégrale sur le domaine de la norme de la vorticité (17) pour les trois maillages. On superpose également la courbe obtenue dans [T+00] avec le schéma de Hermite en utilisant un maillage plus fin de 801×101 points. On constate que le résultat obtenu avec le découpage uniforme est très diff rent des

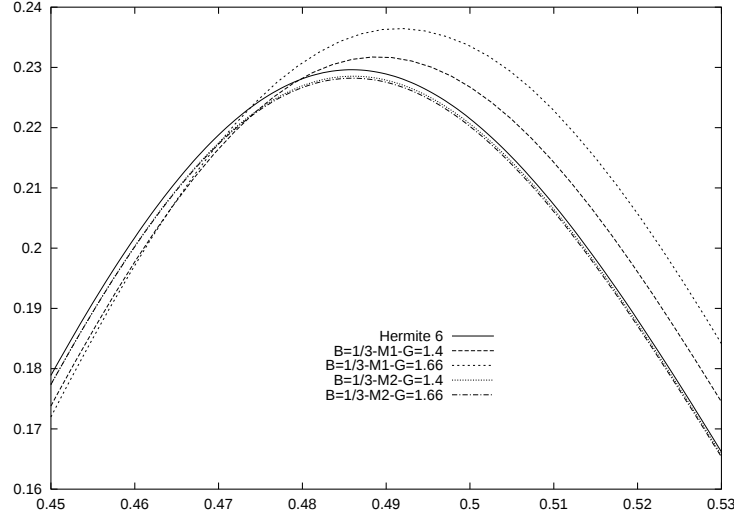


FIG. 16 – Zoom de l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (18) autour du maximum. Solveur de Navier-Stokes, méthode de relaxation $\gamma_1 = 1.66$ et schéma de Hermite

autres courbes, notamment dès les premières itérations. En effet, tandis que pour les autres courbes l'intégrale de la vorticité est nulle jusqu'à un temps adimensionné d'environ 0.35 qui correspond au début de l'interaction entre le spot de température et le choc, pour le découpage uniforme, on constate une valeur importante de la vorticité dès les premières itérations. Les autres résultats sont très proches de la courbe du schéma de Hermite, surtout celles correspondant au maillage non structuré.

On s'intéresse à présent à l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique pour les différents maillages. Pour plus de clarté, on présente directement le zoom autour du maximum, figure 18. Les différences entre les trois maillages sont plus faibles sur cette intégrale que pour la norme de la vorticité. Une fois de plus, le maillage non structuré fournit les meilleurs résultats, les deux autres découpages présentant un déphasage sur le temps auquel le maximum est atteint.

Afin de comprendre le comportement de l'intégrale de $|\omega|$, on présente, figure 19, les isovaleurs de la vorticité au temps t_2 pour les trois maillages étudiés. Les différences des solutions sont très nettes au niveau du choc, puisque, dans le cas du découpage uniforme, des isovaleurs au niveau du choc sont visibles. Le maillage non structuré produit une fois de plus la solution la plus proche du schéma de Hermite.

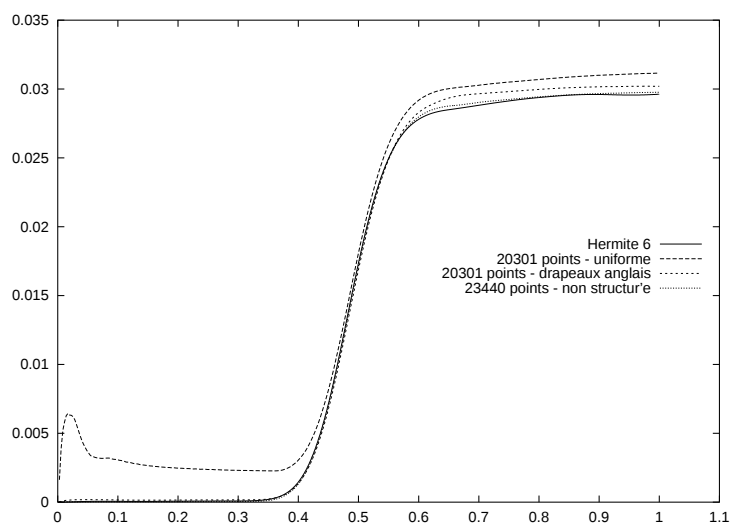


FIG. 17 – Comparaison de l'évolution en temps de l'intégrale de $|\omega|$ pour le maillage de 20301 points (découpage uniforme, en drapeaux anglais) et le maillage non structuré de 23440 points

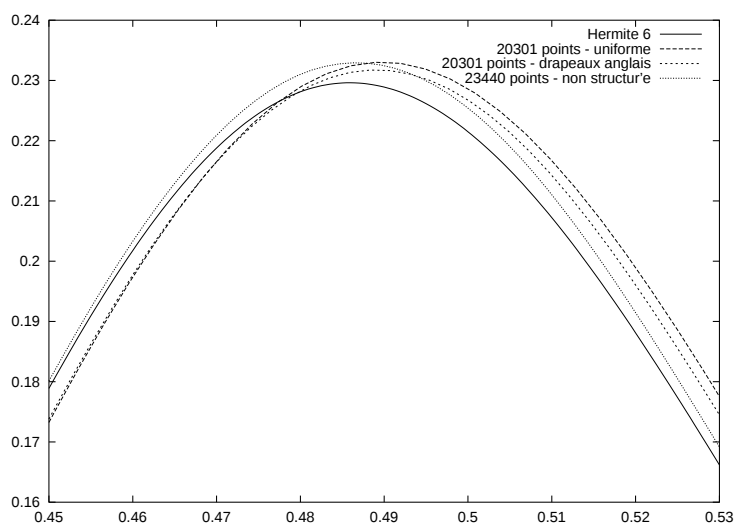
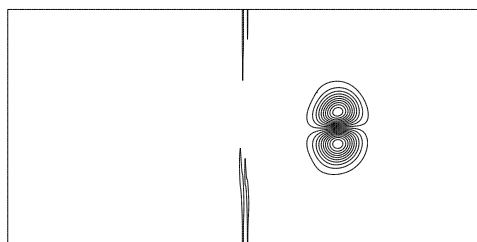
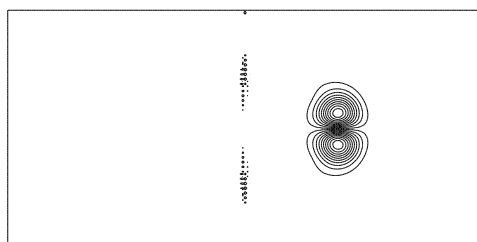


FIG. 18 – Zoom de l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (18) autour du maximum. Comparaison des maillages de 20301 points (découpage uniforme et drapeaux anglais) et du maillage non structuré de 23440 points

Maillage de 20301 points - découpage uniforme



Maillage de 20301 points - drapeaux anglais



Maillage de 23440 points - non structuré

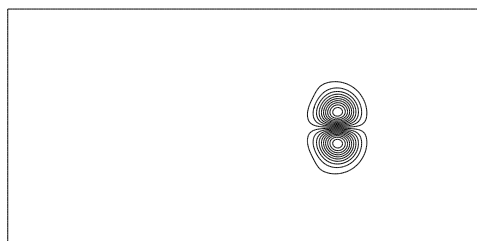


FIG. 19 – Isovaleurs de la vorticité au temps t_2 pour les maillages de 20301 points (découpage uniforme et drapeaux anglais) et le maillage non structuré de 23440 points

4.2 Cas d'un gaz réel TPCI

On s'est également intéressé à deux cas différents de gaz TPCI, situation qui n'est pas abordée dans [T+00]. Pour valider les résultats de la méthode de relaxation pour de tels gaz, on les compare aux solutions obtenues avec un solveur Navier-Stokes gaz réel obtenu en modifiant le solveur de Riemann pour inclure les non linéarités en ε et éliminer la relation $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$ qui n'est plus valable ici. Deux cas différents ont été étudiés.

4.2.1 γ polynômial

Partant d'un fichier donnant le γ de l'air pour des températures comprises entre 300 et 3000 K, représenté figure 20, et se limitant aux températures comprises entre 300 et 600 K, on peut approcher par régression linéaire ces valeurs par un polynôme du second degré en posant :

$$\gamma(T) = a T^2 + b T + c, \quad \text{où } a = -6.85 \cdot 10^{-8}, \quad b = -4.76 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad c = -1.3526.$$

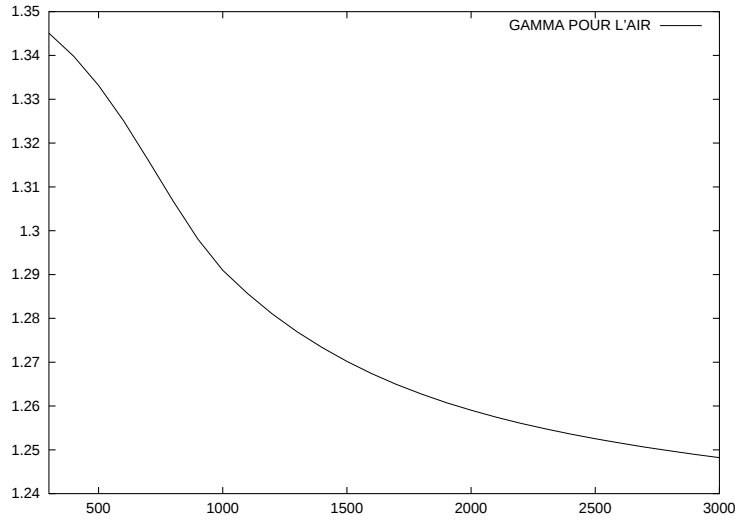


FIG. 20 – γ de l'air en fonction de la température

À partir de cette définition de γ , on déduit l'expression de l'énergie spécifique interne

$$\varepsilon(T) = \int_{T_0}^T c_v(\tau) d\tau \quad \text{où} \quad c_v(T) = \frac{R}{\gamma(T) - 1},$$

nécessaire pour le calcul de la température puis de la pression $p = \rho R T$ à chaque itération.

Les valeurs initiales à droite et à gauche vérifient les conditions générales de Rankine-Hugoniot et, comme précédemment pour un gaz TPCP, on utilise la méthode développée par Williams [Wi85]. Mais, à présent, le gaz étant TPCI, la courbe de Hugoniot décrite par (22) n'est plus une hyperbole mais une courbe dont l'allure générale ressemble à une hyperbole et dont les asymptotes en $1/\rho \rightarrow 0$ et $1/\rho \rightarrow +\infty$ sont les mêmes que dans le cas d'un gaz TPCP. L'intersection de cette courbe avec la droite de Rayleigh est calculée itérativement par une méthode de point fixe. On obtient les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, & \rho_2 = 1.53 \text{ kg.m}^{-3} \\ p_1 = 103320 \text{ Pa}, & p_2 = 144022 \text{ Pa}, \\ u_1 = 394.35 \text{ m.s}^{-1}, & u_2 = 308.33 \text{ m.s}^{-1}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, & T_2 = 326.97 \text{ K}. \end{cases}$$

On constate que le rapport des chaleurs spécifiques varie entre $\gamma(300) = 1.3450$ et $\gamma(600) = 1.3251$. En conformité avec la condition "sous-caractéristique" (10), nous prenons une valeur de γ_1 supérieure au maximum de $\gamma(T)$, c'est à dire, dans ce cas, supérieur à $\gamma(300)$. Dans les résultats présentés ci-dessous, la méthode de relaxation a été mise en œuvre avec $\gamma_1 = 1.38$.

Comme dans le cas précédent (gaz TPCP), on présente les isovaleurs aux temps adimensionnés $t_1 = 0.5/u_1$ et $t_2 = 1./u_1$. Les isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité au temps t_1 sont présentées sur les figures 21. On présente également les isovaleurs de la température. On note une grande similitude entre les solutions obtenues avec un solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation, quelle que soit la variable. Ceci prouve les bons résultats de la méthode de relaxation même dans le cas où γ est une fonction de la température. Le comportement des différentes variables est comparable au cas précédent de gaz TPCP.

On présente également les isovaleurs des mêmes quantités au temps t_2 . Les résultats des deux méthodes sont une fois de plus comparables et le comportement de la masse volumique et de la vorticité, figure 22, sont très proches du cas gaz TPCP. Seule la pression présente une oscillation en sortie un peu plus étendue que dans le cas d'un gaz TPCP.

On compare également, figures 23 et 24, les coupes de la masse volumique, de la pression, de la température et de γ aux temps t_1 et t_2 pour le solveur de Navier-Stokes incluant un γ variable et la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.38$.

On constate que dans tous les cas les courbes se superposent ; seuls les extrema présentent un léger écart (minimum de ρ    t_2 , maximum de T et minimum de γ).

4.2.2 Loi vibratoire

Un second cas de gaz TPCI est celui où l'énergie spécifique interne suit une loi vibratoire

$$\varepsilon = c_v^{tr} T + \frac{\alpha \Theta_{vib}}{\exp\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right) - 1}$$

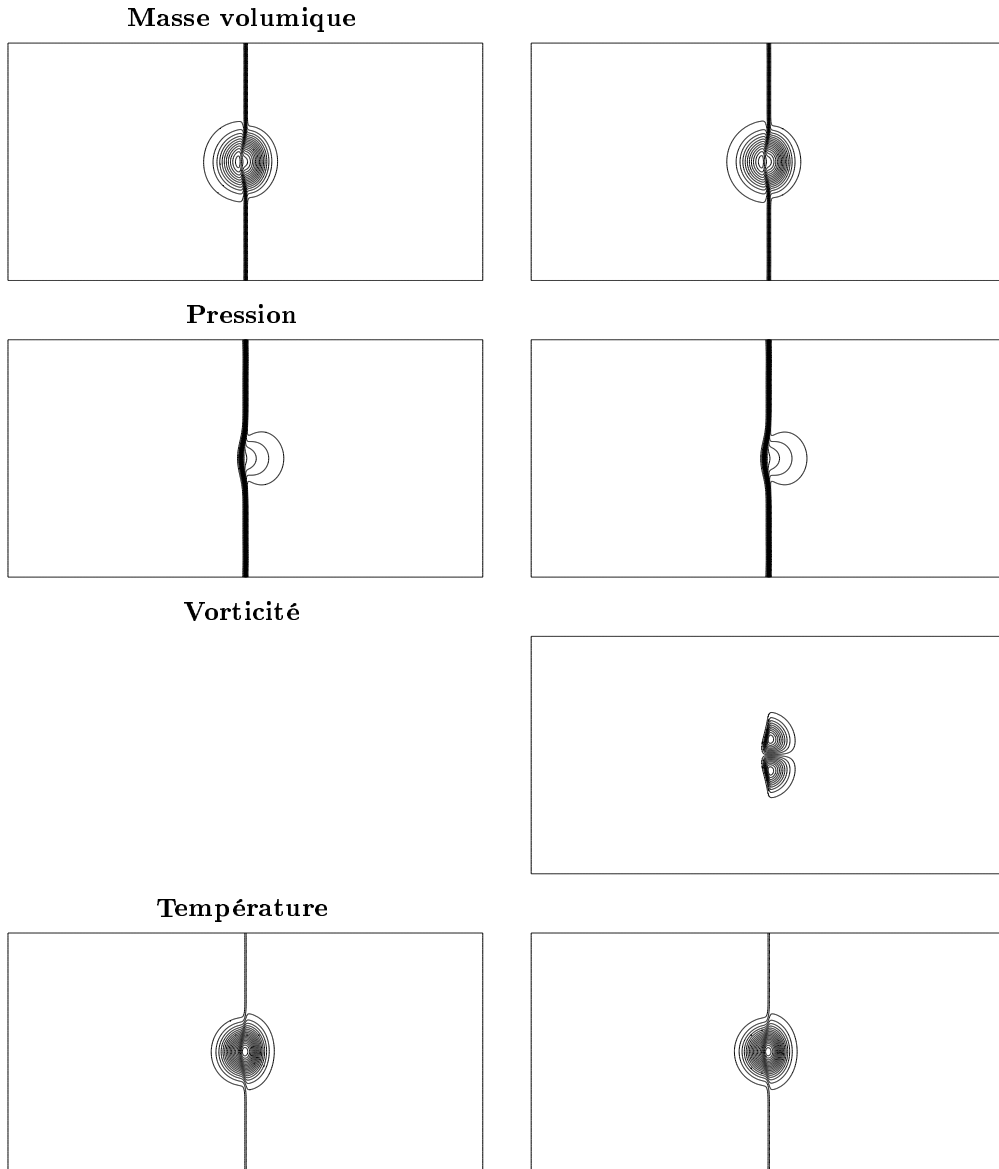


FIG. 21 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_1 - Loi de $\gamma(T)$ polynômiale - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

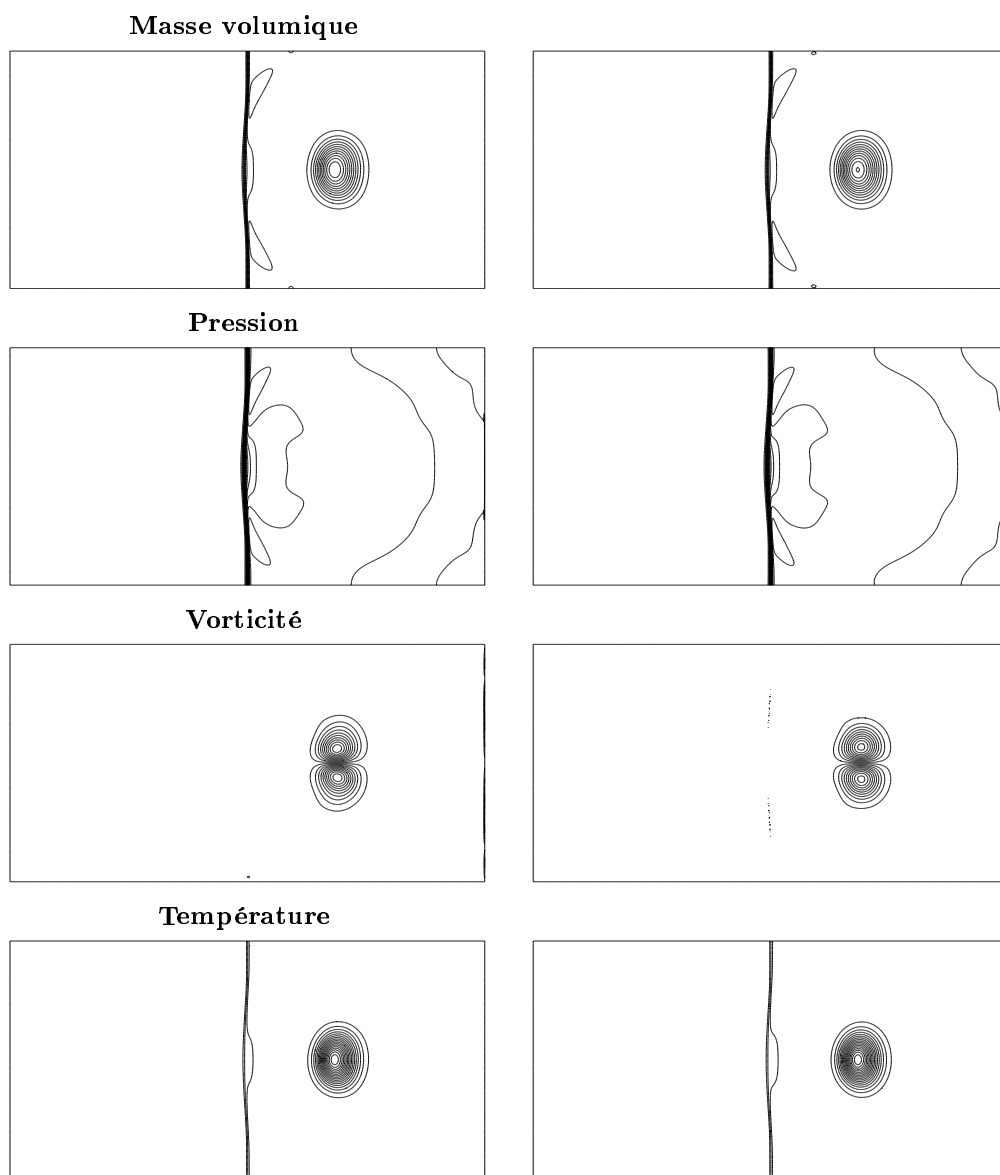


FIG. 22 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_2 - Loi de $\gamma(T)$ polynômiale - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

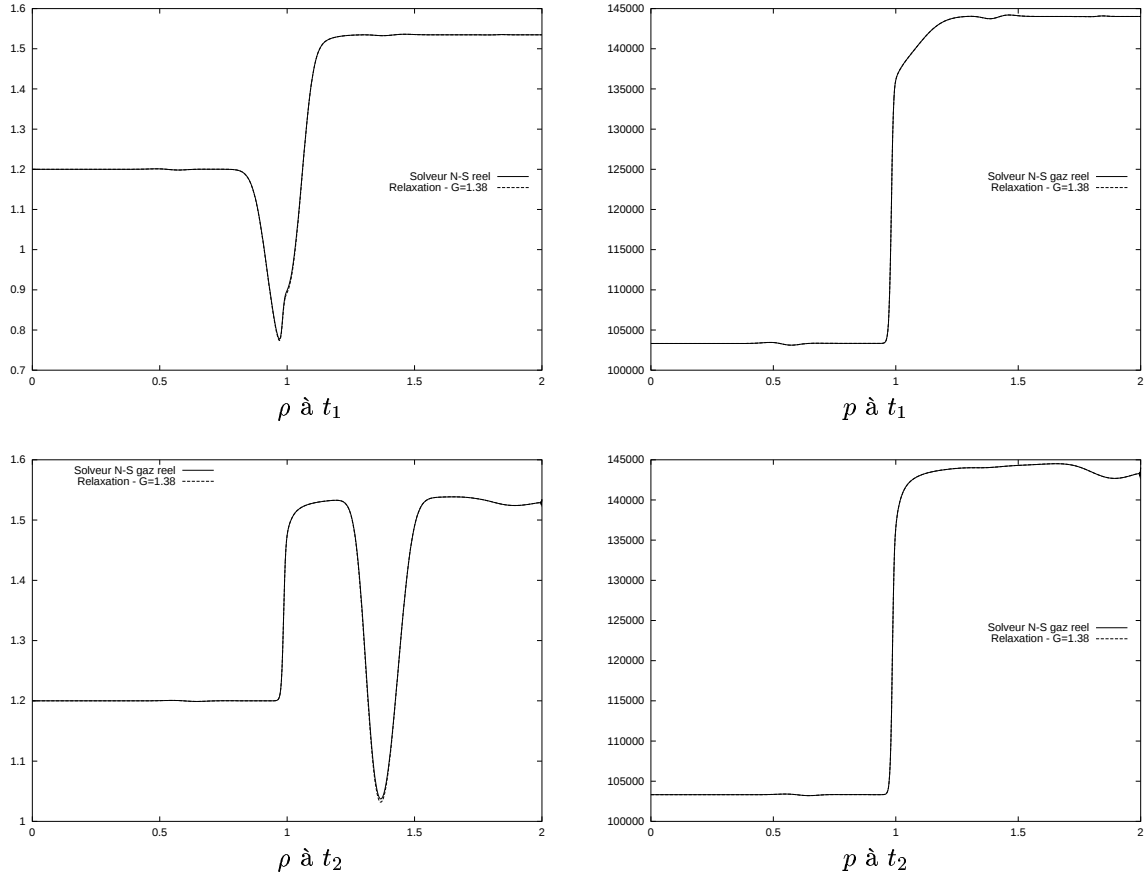


FIG. 23 – Coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi polynômiale

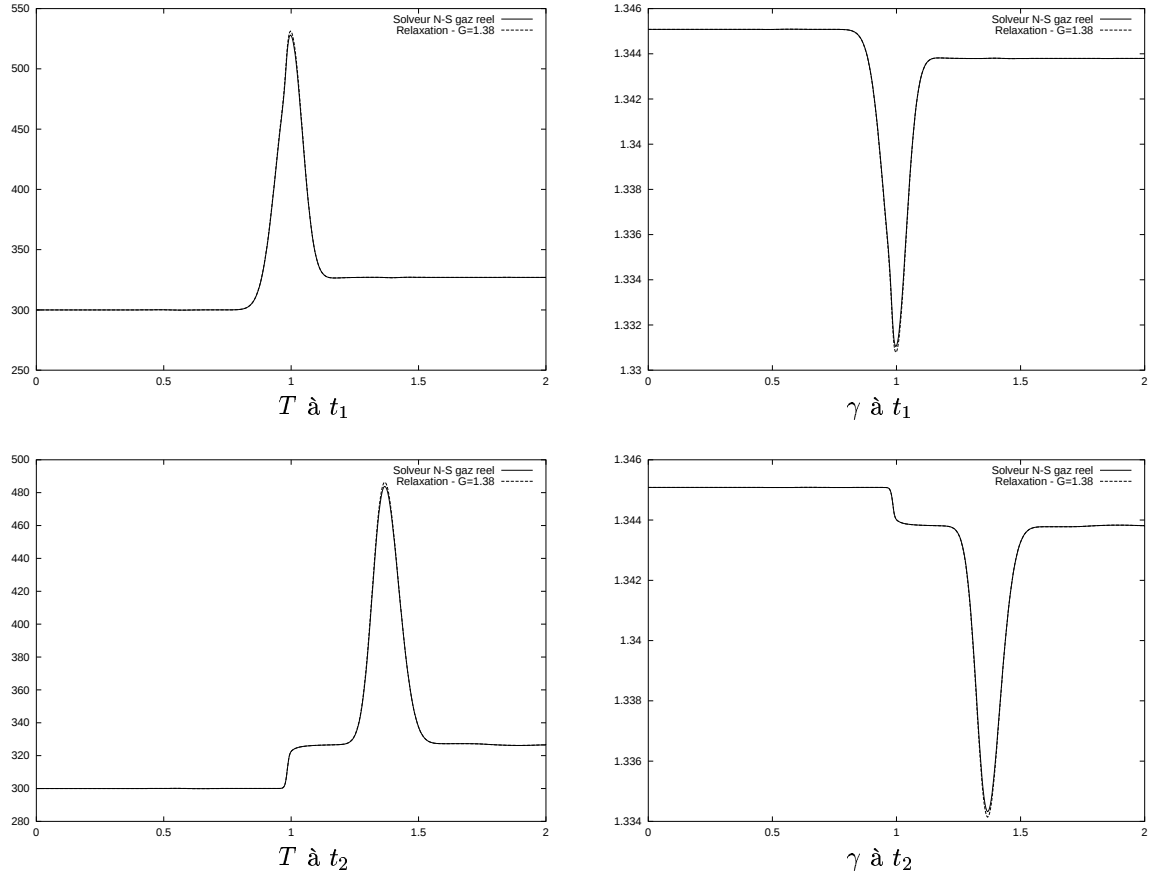


FIG. 24 – Coupes de la température et de γ en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi polynômiale

où $c_v^{tr} = R/(\gamma^{tr} - 1)$ est la chaleur spécifique à volume constant due au terme de translation ($\gamma^{tr} = 1.4$), $\Theta_{vib} = 1000$ K et $\alpha = R$. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser une méthode itérative (par exemple la méthode de Newton) pour calculer la température à partir de ε . $\gamma(T)$ est déduit de ε sachant que

$$c_v(T) = \frac{d\varepsilon}{dT} \quad \text{et} \quad \gamma(T) = 1 + \frac{R}{c_v(T)}.$$

La courbe de γ en fonction de la température est présentée figure 25. On peut constater que la variation de γ est supérieure au cas précédent de loi polynômiale et qu'il est nécessaire d'utiliser des valeurs de γ_1 supérieures à 1.345 afin de satisfaire la condition "sous-caractéristique" (10).

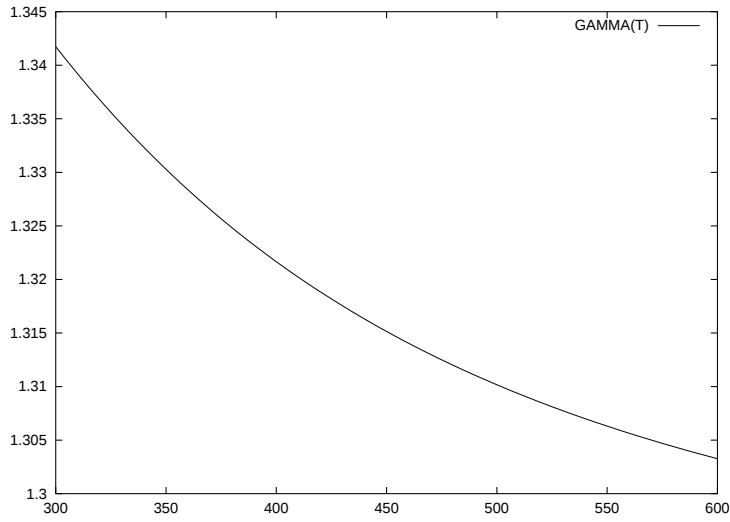


FIG. 25 – γ en fonction de la température pour la loi vibratoire

En appliquant les conditions générales de Rankine-Hugoniot, on obtient de nouvelles conditions initiales à gauche et à droite :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, & \rho_2 = 1.53 \text{ kg.m}^{-3} \\ p_1 = 103320 \text{ Pa}, & p_2 = 144263 \text{ Pa}, \\ u_1 = 393.86 \text{ m.s}^{-1}, & u_2 = 307.23 \text{ m.s}^{-1}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, & T_2 = 326.75 \text{ K}. \end{cases}$$

Les figures 26 et 27 présentent les isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température aux temps t_1 et t_2 . Les résultats obtenus par le solveur de Navier-Stokes et la méthodes de relaxation sont tout à fait comparables, quelle que soit

la variable. Les résultats sont semblables aux résultats obtenus dans le cas de la loi de γ polynômiale, à l'exception de la masse volumique au temps t_2 .

Comme dans le cas de la loi de γ polynômiale, on présente, figures 28 et 29, les coupes en $y = 0.5$ de la masse volumique, de la pression, de la température et de γ aux temps t_1 et t_2 . On constate exactement le même comportement que pour la loi polynômiale : les courbes se superposent à l'exception de quelques différences sur les valeurs extrêmes de la masse volumique à t_2 , de la température et de γ .

4.2.3 Comparaison des différentes lois pour $\gamma(T)$

Pour terminer notre examen des différentes solutions, on compare les solutions obtenues pour les différents types de gaz : le gaz TPCP et les deux lois de gaz TPCI. On superpose, figures 30 et 31, les coupes en $y = 0.5$ de la masse volumique, de la pression, de la température et de γ aux temps t_1 et t_2 solutions de la méthode de relaxation. Les différences sont très visibles sur le γ et beaucoup plus faibles pour les autres variables pour lesquelles on distingue moins les deux cas de gaz TPCI.

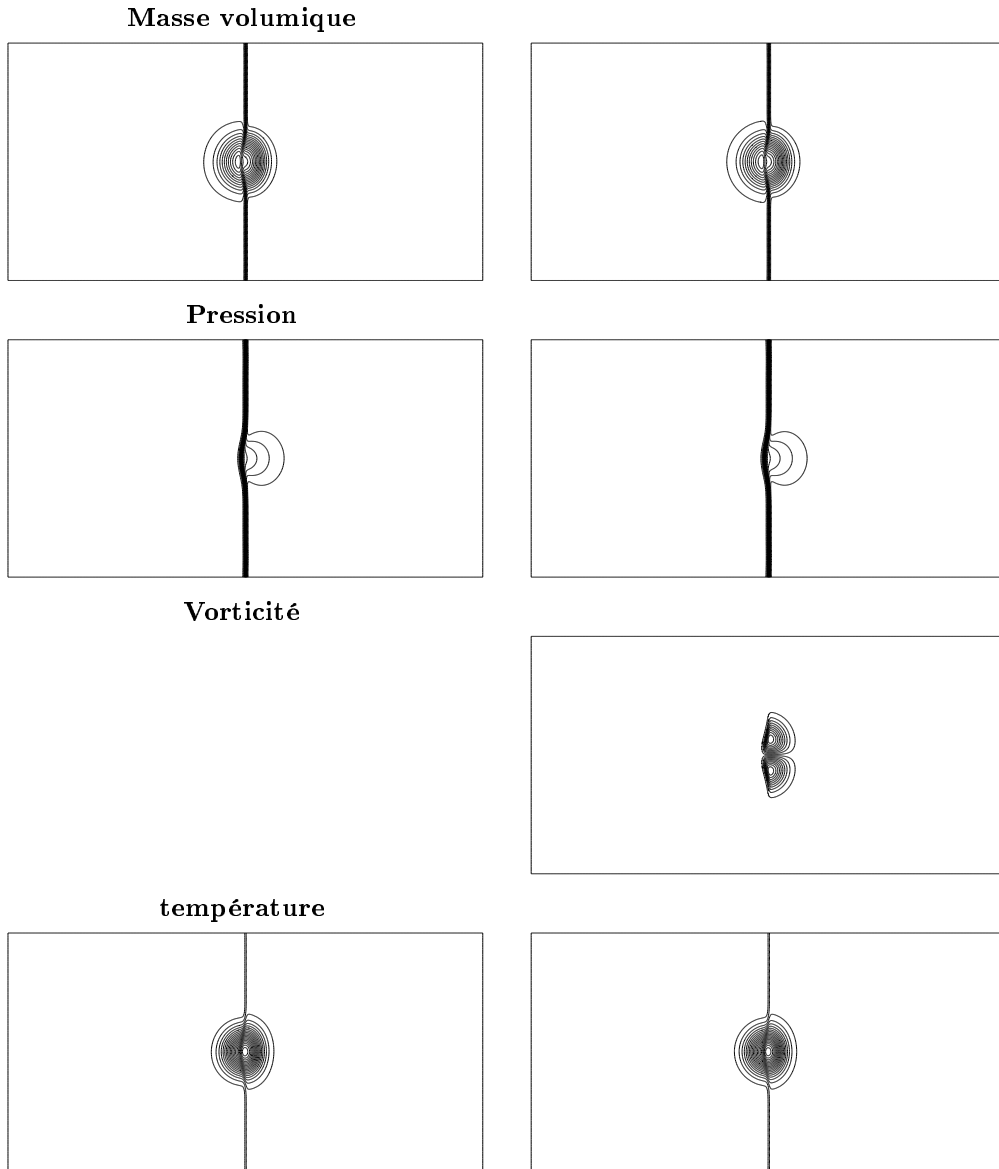


FIG. 26 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_1 - Loi vibratoire - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

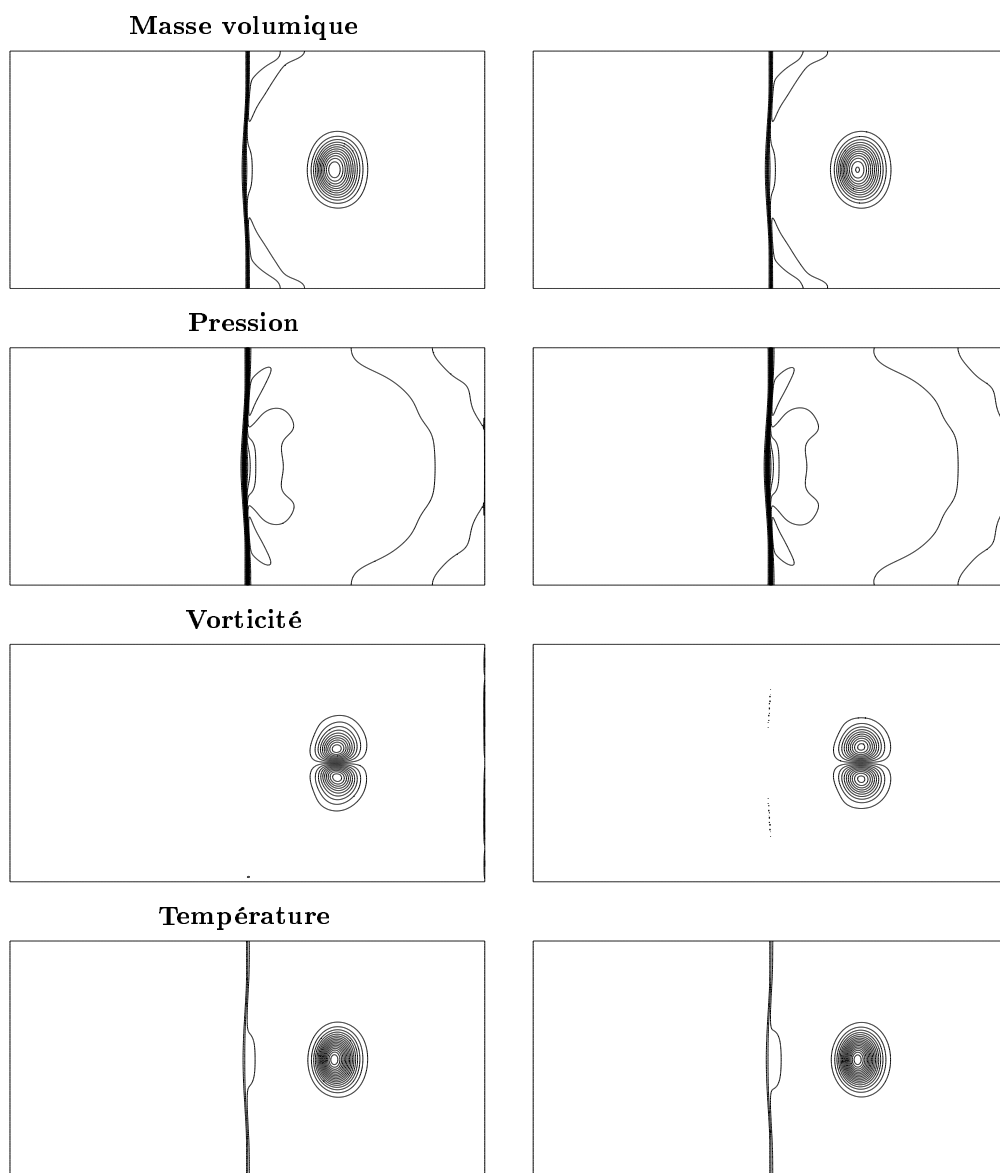


FIG. 27 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_2 - Loi vibratoire - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

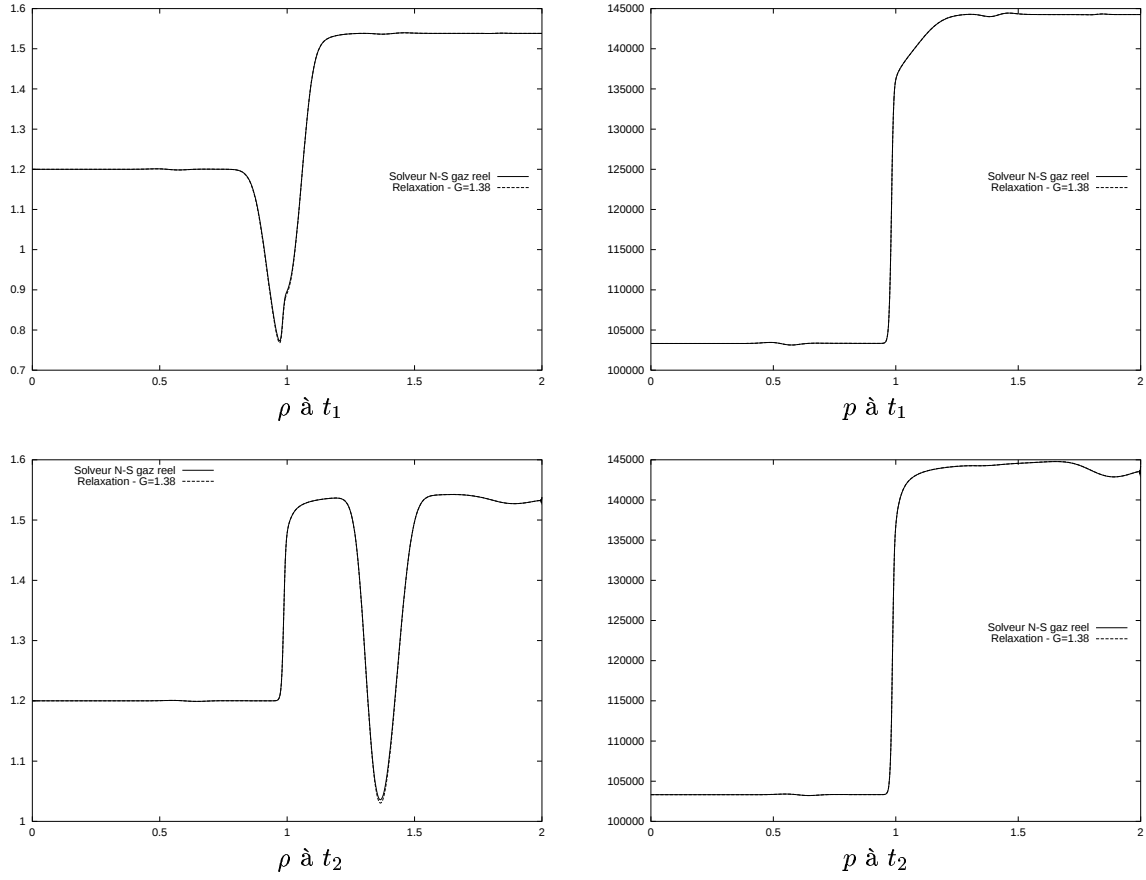


FIG. 28 – Coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi vibratoire

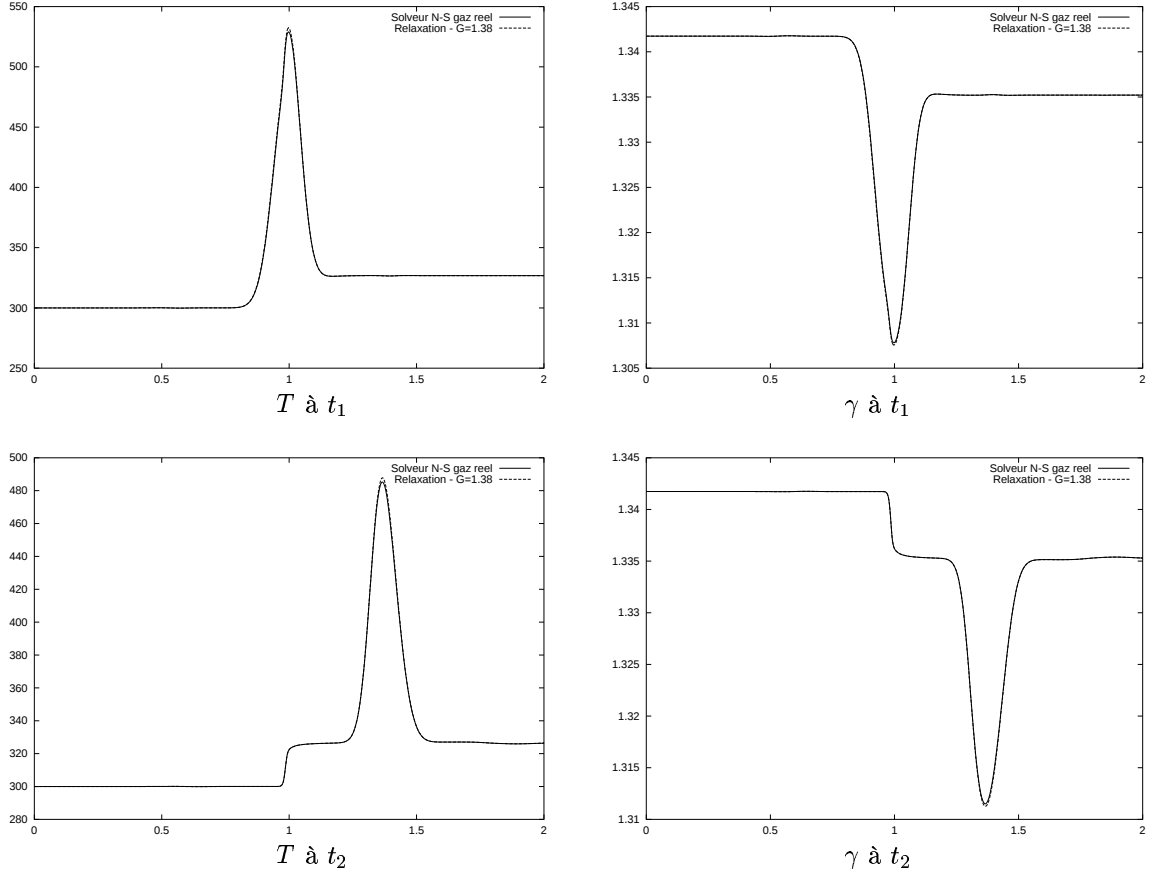


FIG. 29 – Coupes de la température et de γ en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi vibratoire

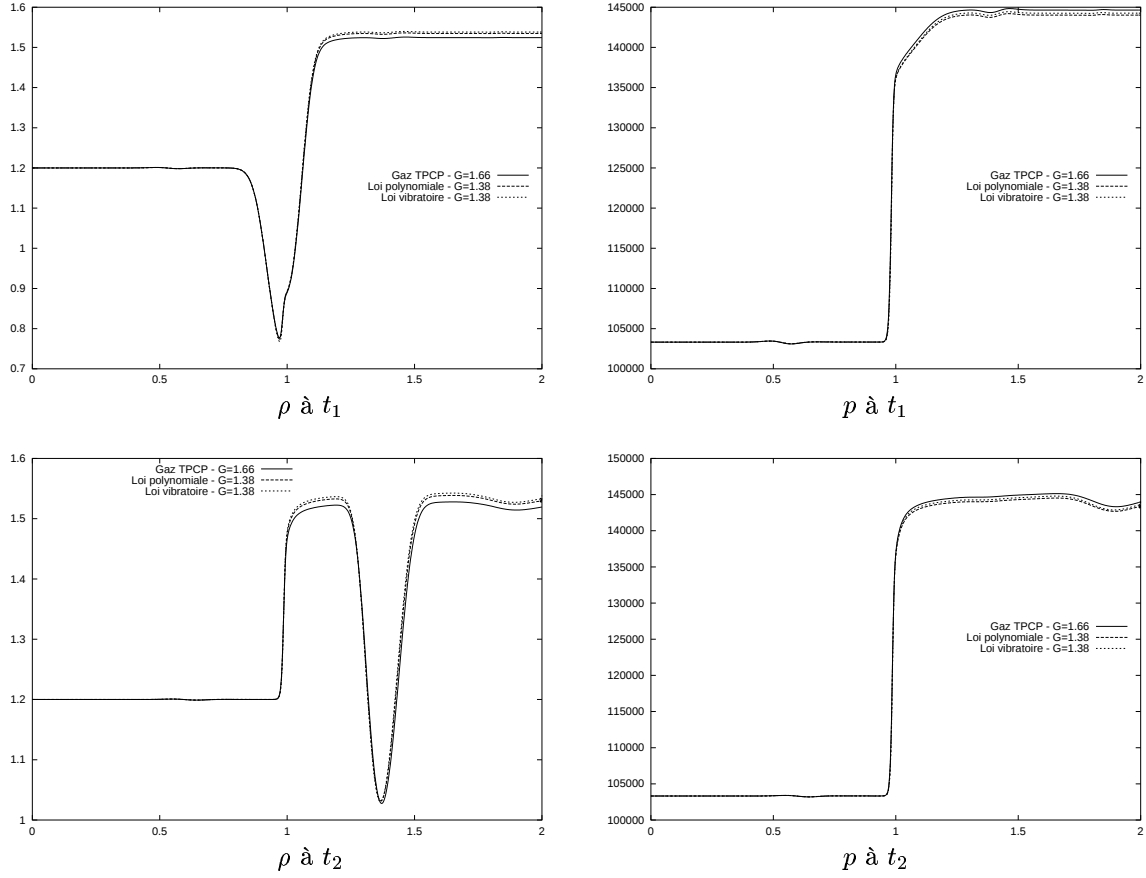


FIG. 30 – Comparaison de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le gaz TPCP, la loi polynomiale et la loi vibratoire - Méthode de relaxation

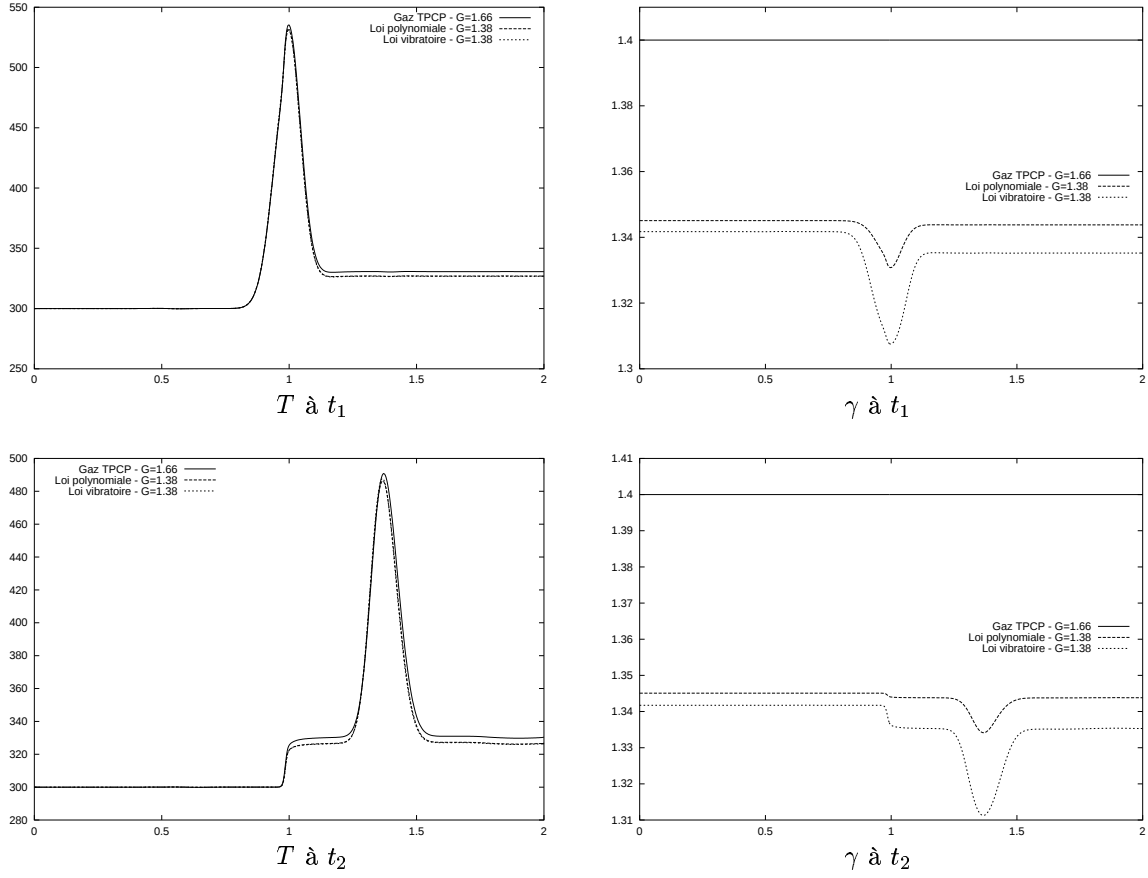


FIG. 31 – Comparaison de la température et de γ en $y = 1/2$ pour le gaz TPCP, la loi polynômiale et la loi vibratoire - Méthode de relaxation

5 Conclusions

On a présenté une nouvelle méthode de relaxation pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles munies de lois de pression et de température générales. La méthode est rapidement exposée ici : la théorie détaillée ainsi que les justifications mathématiques se trouvent dans [B+02]. Cette méthode est une extension au cas des équations de Navier-Stokes du schéma proposée par Coquel et Perthame [CP98] pour résoudre les équations d'Euler munies d'une loi de pression générale. Le schéma que nous décrivons pour les équations de Navier-Stokes permet de résoudre des problèmes d'écoulements visqueux régis par des lois de pression et de température générales (expressions fonctionnelles complexes ou valeurs tabulées) en utilisant, avec de très faibles modifications, un solveur Navier-Stokes adapté aux gaz TPCP.

Notre discrétisation des équations de Navier-Stokes compressibles utilise une méthode mixte volumes finis-éléments finis basée sur un schéma de Roe. Le schéma est explicite et d'ordre élevé en temps et en espace ; l'approximation en temps repose sur un schéma de Runge-Kutta à quatre pas et pour améliorer la précision spatiale, on combine la méthode MUSCL et un β -schéma. Cette méthode peut s'appliquer à n'importe quel autre solveur des équations de Navier-Stokes pour un gaz TPCP. L'avantage dans ce contexte est qu'il n'est pas nécessaire de modifier le solveur de Riemann approché (pour l'approximation des flux convectifs) pour tenir compte des non linéarités de la loi d'état.

Notre méthode de relaxation a été validée en reproduisant deux cas tests d'écoulements de gaz TPCP détaillés dans [T+00] : l'advection d'un réseau périodique de vortex et l'interaction d'un choc faible et d'un spot de température.

Le premier cas test constitue une première validation de notre méthode ; la température étant constante, seuls les flux diffusifs liés au tenseur des contraintes visqueuses interviennent dans la relaxation. Les résultats obtenus sont comparables aux solutions de référence issues de [T+00].

La validation du système relaxé complet est faite sur le second cas test : l'interaction d'un choc faible et d'un spot de température. Les solutions obtenues sont tout à fait comparables aux résultats de la méthode de Hermite d'ordre 6 présentée dans [T+00]. Le second cas test nous a permis d'étudier deux situations de gaz thermiquement parfaits calorifiquement imparfaits (TPCI) pour lesquels γ est une fonction de la température et l'énergie spécifique interne ε dépend de la température de façon non linéaire. Dans ce cas, la validation de la méthode est faite par comparaison à un solveur des équations de Navier-Stokes pour lequel le solveur de Riemann est étendu pour inclure les non linéarités de la loi de pression. Les résultats obtenus par la méthode de relaxation dans ces deux cas de gaz TPCI sont tout à fait comparables aux solutions de référence.

Remerciements Nous remercions C. Tenaud pour nous avoir fourni les courbes solutions du schéma de Hermite afin d'effectuer nos comparaisons.

Références

- [B+02] BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., “Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. I : cadre théorique”, Rapport de recherche INRIA No. XXX, 2002.
- [CP98] COQUEL, F., PERTHAME, B., “Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics”, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, 1998, pp. 2223-2249.
- [F+89] FÉZOU, L., LANTÉRI, S., LARROUTUROU, B., OLIVIER, C., “Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire”, Rapport de recherche INRIA No. 1033, 1989.
- [In99] IN, A., “Numerical evaluation of an energy relaxation method for inviscid real fluids”, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21(1), 1999, pp. 340-365.
- [MS99] MONTARNAL, P., SHU, C.-W., “Real Gas Computation Using an Energy Relaxation Method and High-Order WENO Schemes”, *J. Comput. Phys.*, vol. 148, 1999, pp.59-80.
- [Re93] REBAY, S., “Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm”, *J. Comput. Phys.*, vol. 106, 1993, pp. 125-138.
- [Ro81] ROE, P.L., “Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes”, *J.C.P.*, vol. 43, 1981, pp. 357-372.
- [SW81] STEGER, J., WARMING, R.F., “Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods”, *J. Comp. Phys.*, vol. 40(2), 1981, pp. 263-293.
- [T+00] TENAUD, C., GARNIER, E., SAGAUT, P., “Evaluation of some high-order shock capturing schemes for direct numerical simulation of unsteady two-dimensional free flows”, *Int. J. Meth. Fluids*, vol. 33, 2000, pp. 249-278.
- [Wi85] WILLIAMS, F.A., “Combustion theory”, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Readingn Mass., 1985.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399