



**HAL**  
open science

# Fonctions Géométriques Principales et Paramétrisation de Forme Adaptée à l'Optimisation en Aérodynamique

Jacques Morice, Jean-Antoine Desideri, Jean-Paul Zolésio

► **To cite this version:**

Jacques Morice, Jean-Antoine Desideri, Jean-Paul Zolésio. Fonctions Géométriques Principales et Paramétrisation de Forme Adaptée à l'Optimisation en Aérodynamique. [Rapport de recherche] RR-4643, INRIA. 2002. inria-00071942

**HAL Id: inria-00071942**

**<https://inria.hal.science/inria-00071942>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Fonctions Géométriques Principales  
et Paramétrisation de Forme Adaptée  
à l' Optimisation en Aérodynamique***

Jacques Morice — Jean Antoine Désidéri — Jean Paul Zolésio

**N° 4643**

Novembre 2002

THÈME 4



***rapport  
de recherche***



## Fonctions Géométriques Principales et Paramétrisation de Forme Adaptée à l' Optimisation en Aérodynamique

Jacques Morice , Jean Antoine Désidéri , Jean Paul Zolésio

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Opale

Rapport de recherche n° 4643 — Novembre 2002 — 23 pages

**Résumé :** Ce rapport s'insère dans le cadre d'études en conception optimale de forme aérodynamique pour lesquelles on cherche des paramétrisations géométriques adaptées à l'écoulement [8] [9] [10]. On présente ici une méthode pour identifier un ensemble de fonctions de forme visant à capter la sensibilité de l'écoulement à la géométrie. On modélise la perturbation du champ de vitesse consécutive à une perturbation de la forme par le gradient d'une fonction potentielle harmonique. En simplifiant les conditions aux limites, on aboutit à un problème de valeurs propres dont les vecteurs propres associés représentent discrètement les *fonctions de forme principales*. La méthode est illustrée par le calcul de ces fonctions dans le cas d'un écoulement autour d'un profil NACA0012. Ultérieurement, ces fonctions de forme serviront de base fonctionnelle pour représenter la perturbation du profil dans un calcul d'optimisation d'un critère aérodynamique.

**Mots-clés :** Optimisation, Fonctions de forme, dérivation par rapport à la forme, laplacien, Vecteur propre

# Principal Geometrical Functions and Shape Parameterization for Optimization in Aerodynamics

**Abstract:** This report is part of a series of studies in aerodynamic optimum-shape design in which we attempt to adapt the geometrical parameterization to the flow [8] [9] [10]. Here a method is presented permitting to identify a set of shape functions seeking to capture the flow sensitivity to the geometry. The velocity field perturbation is modeled by the gradient of a harmonic function. After simplifying the boundary conditions, an eigenvalue problem is considered; the associated eigenvectors represent discretely the *principal shape functions*. The method is illustrated by the actual computation of these functions in the case of the flow over a NACA0012 airfoil. Ultimately, these shape functions will serve as a functional basis to expand the airfoil perturbation in an optimization calculation w.r.t. some aerodynamic criterion.

**Key-words:** Optimisation, Shape functions, Shape derivatives, Laplacian, Eigenvector

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Perturbation et Sensibilité</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Problème variationnel vérifié par <math>\Phi'</math></b>	<b>6</b>
3.1	Equation vérifiée par $\Phi'$ . . . . .	7
3.2	Conditions aux limites . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Fonctions de forme</b>	<b>9</b>
4.1	Propriétés de $\Theta$ . . . . .	10
4.1.1	Continuité . . . . .	10
4.1.2	Caractère auto-adjoint de $\Theta$ . . . . .	10
4.1.3	Compacité . . . . .	11
4.2	Problème aux valeurs propres . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Aproximation numérique</b>	<b>12</b>
5.1	Discrétisation de $\Theta$ . . . . .	12
5.2	Calcul numérique de la matrice . . . . .	13
5.3	Calcul numérique de $\omega$ . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>14</b>
6.1	Courbes de $\omega$ . . . . .	15
6.2	Profils d'aile . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Annexe [1]</b>	<b>19</b>
8.1	Expression de $\phi(X_0)$ . . . . .	19
8.1.1	Cas où $X_0$ est à l'intérieur du domaine . . . . .	20
8.1.2	Cas où $X_0$ est sur la frontière . . . . .	21
8.2	Complétion des conditions aux limites . . . . .	22

## 1 Introduction

Pour optimiser un profil d'aile en aérodynamique, l'approche classique est d'utiliser un code de calcul de l'écoulement considéré, une paramétrisation de la forme, les calculs de dérivées, la théorie du contrôle, et une méthode de descente pour obtenir la solution. Une approche, pour la paramétrisation de la forme, est de considérer un profil initial auquel on rajoute une combinaison linéaire de fonctions de forme comme par exemple les fonctions de Hicks-Henne<sup>[7]</sup>. Lors de l'optimisation vis-à-vis d'une fonctionnelle de l'écoulement, comme par exemple, la maximalisation de portance ou la réduction de traînée, on observe que la qualité du résultat optimisé dépend du choix des fonctions de forme, du code de calcul de l'écoulement, et du degré de convergence itérative (donc de la méthode choisie pour l'optimisation).

Dans cette étude, on s'intéresse à la partie paramétrisation de la forme. On cherche un ensemble de fonctions adaptées à l'optimisation. C'est-à-dire un ensemble de fonctions qui capture la sensibilité de l'écoulement à la géométrie pour ensuite optimiser une fonctionnelle. Pour capturer cette sensibilité, on modélise la perturbation d'écoulement par un potentiel harmonique, et on calcule "la dérivée du potentiel par rapport à la géométrie".

On utilise une méthode de dérivation par rapport à la forme, pour cela on s'appuie sur [3][4][5][6] pour obtenir le problème variationnel que vérifie cette dérivée. Ensuite, on donne le système vérifié par la dérivée. A partir de ce système, on construit un opérateur compact auto-adjoint que l'on diagonalise. Puis, on précise la méthode numérique employée pour déterminer les fonctions de forme. Enfin, on illustre la méthode par les résultats numériques pour le NACA0012.

## 2 Perturbation et Sensibilité

On considère un écoulement compressible Eulérien bidimensionnel stationnaire initial dans un domaine  $\Omega$  extérieur à une géométrie de profil d'aile  $\Gamma$ . On perturbe légèrement la géométrie et on note :  $\Gamma_\tau$  la géométrie ainsi perturbée, où  $\tau$  est un petit paramètre de perturbation tel que  $\Gamma_0 = \Gamma$ . On note :  $\omega$  la composante normale de la "vitesse de perturbation" de la géométrie, de sorte qu'au premier ordre un point  $\vec{X} \in \Gamma$  est transformé en un point  $\vec{X}_\tau \in \Gamma_\tau$  :

$$\vec{X}_\tau = \vec{X} + \tau \omega \vec{n}_0 \quad (1)$$

avec  $\vec{n}_0$  la normale sortante sur  $\Gamma$ .

On suppose que les perturbations géométriques sont suffisamment régulières pour que les perturbations induites sur l'écoulement le soient également, ce qui nous amène à faire la simplification suivante : dans la géométrie  $\Omega_\tau$ , la perturbation du champ de vitesse de l'écoulement stationnaire est approchée par un gradient de potentiel  $\Phi_\tau$  harmonique

( $\Delta \Phi_\tau = 0$ ) :

$$\vec{V}_\tau = \vec{V}_0 + \nabla \Phi_\tau \quad (2)$$

avec  $\Phi_0 = 0$  partout dans  $\Omega$ .

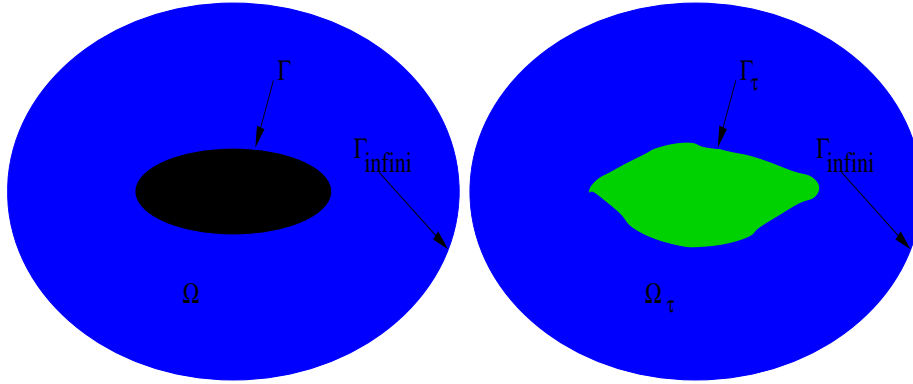


FIG. 1 – à gauche : profil non perturbé, à droite : profil perturbé

Les conditions aux limites sur les profils sont :

$$\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3)$$

$$\vec{V}_\tau \cdot \vec{n}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_\tau \quad (4)$$

avec  $\vec{n}_\tau$  la normale sortante sur  $\Gamma_\tau$ .

Alors  $\Phi_\tau$  est solution du système :

$$-\Delta \Phi_\tau = 0 \text{ dans } \Gamma_\tau \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_\tau}{\partial n_\tau} = -\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_\tau \text{ sur } \Gamma_\tau \quad (6)$$

On rappelle la notion de dérivée par rapport à la géométrie du potentiel  $\Phi$  en considérant :

$$\Phi' = \left( \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} \quad (7)$$

De manière très rigoureuse, la dérivée précédente nécessite quelque précaution : lorsque  $\tau$  varie, la fonction  $\Phi_\tau$  est un élément d'un espace fonctionnel mobile (avec le paramètre  $\tau$ ) ainsi la dérivée précédente doit être comprise comme étant la dérivée d'une extension de la fonction  $\Phi_\tau$  à tout le plan et on montre alors que la restriction de cette dérivée à la géométrie initiale ne dépend pas, en  $\tau = 0$ , du choix de l'extension.

A l'infini, la vitesse ne doit pas dépendre de la perturbation :

$$\lim_{\|X\| \rightarrow +\infty} \|\overline{\nabla \Phi_\tau}(X)\| = 0 \quad (8)$$



On considère l'ouvert borné  $\Omega_\tau$  défini par le bord du profil et une frontière extérieure notée  $\Gamma_\infty$ . Cette frontière est ici un cercle.

Sur la frontière extérieure, comme approximation, on peut prendre soit la condition de Dirichlet  $\Phi_\tau = 0$ , soit la condition de Neumann  $\frac{\partial \Phi_\tau}{\partial n_\tau} = 0$ . On choisit d'imposer la condition de Dirichlet. Bien entendu on pourrait imposer sur  $\Gamma_\infty$  une condition "transparente" en utilisant une condition intégrale classique sur  $\Gamma_\infty$ . Nous pensons que pour un rayon assez grand la sensibilité à la forme n'est que très peu affectée par notre approximation.

### 3 Problème variationnel vérifié par $\Phi'$

On suppose que la frontière de  $\Omega$  est  $C^1$  par morceau. Ceci veut dire que le vecteur unitaire tangent ainsi que le vecteur normal  $n$  sont continus sur le bord  $\Gamma$  sauf peut-être en un nombre fini de points anguleux. On caractérise d'abord le problème variationnel vérifié par  $\Phi'$ . Pour cela on introduit l'espace fonctionnel des éléments de  $H^1(\Omega)$  nuls sur la frontière extérieure :

$$H_{0,\infty}^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) / f|_{\Gamma_\infty} = 0\}$$

Soit  $\varphi \in H_{0,\infty}^1(\Omega)$ , on multiplie  $\Delta \Phi_\tau$  par  $\varphi$  et on intègre sur  $\Omega_\tau$  et par la formule de Green on obtient :

$$\int_{\Omega_\tau} -\Delta \Phi_\tau \varphi = \int_{\Omega_\tau} \nabla \Phi_\tau \cdot \nabla \varphi - \int_{\Gamma_\tau} \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial n_\tau} \varphi \quad (9)$$

Il vient d'après (5) et (6) :

$$\int_{\Omega_\tau} \nabla \Phi_\tau \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Gamma_\tau} \vec{V}_0 \cdot \vec{n}_\tau \varphi \quad (10)$$

Comme  $\varphi$  est de trace nulle sur  $\Gamma_\infty$ , on obtient par la formule de Stokes :

$$\int_{\Omega_\tau} \nabla \Phi_\tau \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega_\tau} \text{div}(\varphi \vec{V}_0) \quad (11)$$

On utilise le résultat classique de dérivation par rapport à la forme suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_{\Omega_\tau} F(\tau, X) dV \right)_{\tau=0} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (F(\tau, X))_{\tau=0} dV + \int_{\partial \Omega} F(0, X) \omega d\sigma$$

(voir [3],[4],[5] ou [6]) pour établir le problème variationnel vérifié par  $\Phi'$ .

D'une part  $\Phi_0 = 0$  par hypothèse, d'autre part  $\varphi$  ne dépend pas de  $\tau$ , de plus  $\varphi$  est de trace nulle sur  $\Gamma_\infty$ , et enfin comme :

$$\partial_\tau (\nabla \phi_\tau)_{\tau=0} = \nabla \left( \left( \frac{\partial \phi_\tau}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} \right)$$

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_{\Omega_\tau} \nabla \Phi_\tau \cdot \nabla \varphi \right)_{\tau=0} = \int_{\Omega} \nabla \Phi' \cdot \nabla \varphi \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}(\varphi \vec{V}_0) \right)_{\tau=0} = \int_{\Gamma} \operatorname{div}(\varphi \vec{V}_0) \omega \quad (13)$$

On arrive alors à :

$$\forall \varphi \in H_{0,\infty}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla \Phi' \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Gamma} \operatorname{div}(\varphi \vec{V}_0) \omega$$

Dans cet espace, comme chaque élément est de trace nulle sur  $\Gamma_\infty$ , on a l'inégalité de Poincaré :

$$\forall \varphi \in H_{0,\infty}^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \|\varphi\|^2 dv \leq C \int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2 dv \quad (14)$$

avec  $C$  une constante qui dépend de  $\Omega$ .

Ainsi on peut munir l'espace d' Hilbert  $H_{0,\infty}^1(\Omega)$  de la norme :

$$\|f\|_{H_{0,\infty}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \|\nabla f\|^2 dv$$

Par le théorème de Lax-Milgram, on en déduit alors que :  $\Phi' \in H_{0,\infty}^1(\Omega)$  et qu' il est unique.

En conclusion :

$\Phi'$  est l'unique élément de  $H_{0,\infty}^1(\Omega)$  solution du problème variationnel suivant :

$$\forall \varphi \in H_{0,\infty}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla \Phi' \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Gamma} \operatorname{div}(\varphi \vec{V}_0) \omega \quad (15)$$

### 3.1 Equation vérifiée par $\Phi'$

On introduit l'espace des fonctions tests  $D(\Omega)$ , et l'espace des distributions  $D'(\Omega)$  :

$$D(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que son support est dans } \Omega\}$$

D'après le problème variationnel (15), du fait que  $D(\Omega) \subset H_{0,\infty}^1(\Omega)$  on a alors :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla \Phi' \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (16)$$

$$\langle -\Delta \Phi', \varphi \rangle_{D', D} = 0 \quad (17)$$

Donc on obtient l'équation aux dérivées partielles (EDP) vérifiée par  $\Phi'$  dans  $D'(\Omega)$  :

$$-\Delta \Phi' = 0 \quad (18)$$

### 3.2 Conditions aux limites

Maintenant, il convient d'établir les conditions vérifiées par  $\Phi'$  sur le profil d'aile et sur la frontière extérieure. Soit  $\varphi \in H_{0,\infty}^1(\Omega)$ , par la formule de Green, comme  $\Phi'$  vérifie l'EDP (18), on a :

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi' \cdot \nabla \varphi = \int_{\Gamma} (\nabla \Phi' \cdot \vec{n}) \varphi \quad (19)$$

Pour le terme de droite de la formulation faible (14), en utilisant la formule de la divergence d'un scalaire multiplié par un vecteur on a :

$$\int_{\Gamma} \text{div}(\varphi \vec{V}_0) \omega = \int_{\Gamma} (\nabla \varphi \cdot \vec{V}_0) \omega + \int_{\Gamma} \varphi \text{div}(\vec{V}_0) \omega \quad (20)$$

D'après les conditions aux limites sur le profil (3) on a :

$$\nabla \varphi \cdot \vec{V}_0 = \nabla_{\Gamma} \varphi \cdot \langle \vec{V}_0, \vec{\tau}_0 \rangle \vec{\tau}_0 \quad (21)$$

Par une intégration par parties sur  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} -\nabla_{\Gamma} \varphi \cdot (\omega \vec{V}_{0\Gamma}) = \int_{\Gamma} \varphi \text{div}_{\Gamma}(\omega \vec{V}_0) + \Sigma_{a_i} \{ [\omega \tau](a_i) \varphi(a_i) V_{0\Gamma}(a_i) \} \quad (22)$$

Où  $a_i$  sont les points singuliers de la frontière  $\Gamma$  et  $[\alpha](a_i)$  désigne le saut de la quantité  $\alpha$  en le point  $a_i$ . On suppose le dernier nul soit parce que le bord est régulier et fermé, soit parce que  $V_0$  (ou/et  $\omega$ ) s'annule(nt) aux points anguleux  $a_i$ . Notons que si  $\omega$  est nul en ces points cela veut dire que dans les perturbations de forme envisagées ils resteront inchangés. En utilisant la formule de la divergence tangentielle d'un scalaire multiplié par un vecteur on obtient :

$$\int_{\Gamma} -\nabla_{\Gamma} \varphi \cdot (\omega \vec{V}_{0\Gamma}) = \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} \omega \cdot \vec{V}_{0\Gamma} + \omega \text{div}_{\Gamma}(\vec{V}_0)) \varphi \quad (23)$$

Or on a la formule suivante (réf : [4],[5]) avec  $E$  une fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  :

$$\text{div}(E)|_{\Gamma} = \text{div}_{\Gamma}(E) + \langle D(E) \cdot \vec{n}_0, \vec{n}_0 \rangle$$

avec  $D$  étant la matrice Jacobienne, on obtient alors :

$$-\int_{\Gamma} \text{div}(\varphi \vec{V}_0) \omega = \int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} \omega \cdot \vec{V}_{0\Gamma} + \omega \langle D(\vec{V}_0) \cdot \vec{n}_0, \vec{n}_0 \rangle) \varphi \quad (24)$$

D'après la relation (18), on trouve sur  $\Gamma$  la condition de Neumann suivante :

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n_0} = \nabla_{\Gamma} \omega \cdot \vec{V}_{0\Gamma} + \omega \langle D(\vec{V}_0) \cdot \vec{n}_0, \vec{n}_0 \rangle \quad (25)$$

On note :  $s$  l'abscisse curviligne de  $\Gamma$ , dans ce cas la condition de Neumann sur le profil s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n_0} = \partial_s \omega V_{0\Gamma} + \omega \langle D(\vec{V}_0) \cdot \vec{n}_0, \vec{n}_0 \rangle \quad (26)$$

Le terme  $\langle D(\vec{V}_0) \cdot \vec{n}_0, \vec{n}_0 \rangle$  mesure les variations de la vitesse dans la direction  $\vec{n}_0$ . Les variations de la vitesse autour du profil d'aile dans la direction normale sont peu importantes du fait que l'on suppose que le fluide est glissant. Dans ces conditions, on peut négliger ce terme par rapport au module de  $V_0$ .

Pour la suite, on prend pour la condition de Neumann sur le profil :

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n_0} = \partial_s \omega V_{0r} \text{ sur } \Gamma \quad (27)$$

Et comme  $\Phi' \in H_{0,\infty}^1(\Omega)$ , on a sur  $\Gamma_\infty$  la condition de Dirichlet suivante :

$$\Phi' = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \quad (28)$$

En conclusion :

$\Phi'$  est solution du système composé de (18), (27), (28). L'unicité de la solution dans  $H_{0,\infty}^1(\Omega)$  est triviale. D'après la conclusion de la partie précédente  $\Phi'$  est l'unique solution dans  $H_{0,\infty}^1(\Omega)$  du système suivant :

$$\begin{cases} \Delta \Phi' = 0 \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial n_0} = V_{0r} \partial_s \omega \text{ sur } \Gamma \\ \Phi' = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \end{cases} \quad (29)$$

## 4 Fonctions de forme

L'analyse porte désormais sur les fonctions suivantes

$$\beta = \alpha V_{0r}$$

Avec

$$\alpha = \partial_s \omega$$

considérées comme éléments de  $H = L^2(\Gamma)$ .

Dans cette partie, on précise la méthodologie employée pour obtenir des fonctions  $\omega$  par un problème aux valeurs propres, qui engendre de fortes variations de  $\Phi'$ . Pour cela on étudie l'endomorphisme  $\Theta$  de  $H$  dans  $H$  qui à  $\beta$  associe la trace  $\Phi'_{|\Gamma}$  de la solution du système (29) avec  $H = L^2(\Gamma)$ , c'est-à-dire :

$$\theta(\beta) = \Phi'_{|\Gamma}$$

On montre que cet endomorphisme est continu, auto-adjoint, positif et compact dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Gamma)$ .

## 4.1 Propriétés de $\Theta$

### 4.1.1 Continuité

#### Lemme 1

$\Theta$  est un endomorphisme continu de  $L^2(\Gamma)$ .

Preuve :

Pour montrer que l'endomorphisme est continu, il suffit de vérifier qu'il existe une constante  $C$  tel que :

$$\forall \alpha \in L^2(\Gamma), \|\Phi'(\alpha)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|\alpha\|_{L^2(\Gamma)}$$

D'après la formule de Green et l'EDP vérifiée par  $\Phi'$  (28) :

$$\forall \varphi \in H_{0,\infty}^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla \Phi' \cdot \nabla \varphi = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi'}{\partial n_0} \varphi \quad (30)$$

Or on peut prendre  $\varphi = \Phi'$ , on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi'(\alpha) \cdot \nabla \Phi'(\alpha) = \int_{\Gamma} \alpha \Phi'(\alpha) \quad (31)$$

par application de Cauchy-Scharwtz dans  $L^2(\Gamma)$  on a,

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi'(\alpha) \cdot \nabla \Phi'(\alpha) \leq \|\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \|\Phi'(\alpha)\|_{L^2(\Gamma)} \quad (32)$$

par application du théorème de trace, comme  $\Phi'$  est de trace sur  $\Gamma_{\infty}$  et comme on a l'inégalité (14), il existe une constante  $C'$  telle que :

$$\int_{\Gamma} |\Phi'(\alpha)|^2 \leq C' \int_{\Omega} \nabla \Phi'(\alpha) \cdot \nabla \Phi'(\alpha) \quad (33)$$

Pour  $C = C'$ , on a :

$$\|\Phi'(\alpha)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \quad (34)$$

On en conclut la continuité de l'endomorphisme.

### 4.1.2 Caractère auto-adjoint de $\Theta$

#### Lemme 2

$\Theta$  est un opérateur auto-adjoint positif de  $L^2(\Gamma)$ .

Preuve :

Il suffit de vérifier que :

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in (L^2(\Gamma))^2, \int_{\Gamma} \Phi'(\alpha_1) \alpha_2 = \int_{\Gamma} \Phi'(\alpha_2) \alpha_1$$

Soit  $(\alpha_1, \alpha_2) \in (L^2(\Gamma))^2$ , la relation (32) est valable pour  $\Phi'(\alpha_1), \Phi'(\alpha_2)$ . Comme on peut prendre  $\varphi = \Phi'(\alpha_1)$  ou  $\varphi = \Phi'(\alpha_2)$ , on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi'(\alpha_1) \cdot \nabla \Phi'(\alpha_2) = \int_{\Gamma} \alpha_1 \Phi'(\alpha_2) \quad (35)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi'(\alpha_2) \cdot \nabla \Phi'(\alpha_1) = \int_{\Gamma} \alpha_2 \Phi'(\alpha_1) \quad (36)$$

Donc l'opérateur est bien auto-adjoint. Par ailleurs l'opérateur est positif car :

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi'(\alpha) \cdot \nabla \Phi'(\alpha) = \int_{\Gamma} \alpha \Phi'(\alpha) \geq 0 \quad (37)$$

### 4.1.3 Compacité

#### Lemme 3

$\Theta$  est un opérateur compact de  $L^2(\Gamma)$ .

La preuve résulte directement de la compacité de l'inclusion de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

## 4.2 Problème aux valeurs propres

L'endomorphisme continu  $\Theta$  de  $L^2(\Gamma)$  est compact et auto-adjoint positif. D'après la théorie spectrale classique, on lui associe un ensemble de modes propres, les valeurs propres forment une suite décroissante de réels positifs. Les fonctions propres forment une base orthogonale de  $L^2(\Gamma)$ . En particulier, l'espace propre associé à la plus grande valeur propre correspond au mode de perturbation géométrique qui a le plus d'influence sur l'écoulement.

L'idée directrice de notre approche est donc d'utiliser les premières fonctions propres de  $\theta$ , disons par exemple les 15 premières,  $\beta_1, \dots, \beta_{15}$ , pour exprimer les variations  $\omega$  de la géométrie. L'idée immédiate serait de définir  $\alpha_i = \frac{\beta_i}{V_{0\Gamma}}$  mais comme  $\alpha_i$  est la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne  $s$  de la composante normale  $\omega$  de la vitesse géométrique du bord on voit qu'une condition nécessairement vérifiée par les fonctions  $\alpha_i$  est que l'intégrale totale le long du bord  $\Gamma$  soit nulle. Les fonctions  $\beta_i$  étant complètement indépendantes (dans leur définition même) de la fonction  $V_0$  on voit bien que le choix immédiat dont nous parlons pour les fonctions  $\alpha_i$  ne peut pas vérifier cette relation nécessaire. On propose alors d'utiliser pour générer les fonctions de forme  $\omega_i$ , non pas directement les fonctions propres  $\beta_i$  mais des combinaisons linéaires de ces fonctions qui vérifient la condition précédente. Désignons par :

$$H_* = \{ \alpha \in L^2(\Gamma) \text{ tels que } \int_{\Gamma} \alpha(s) ds = 0 \}$$

Si  $E_k$  désigne le sous espace de  $L^2(\Gamma)$  engendré par les  $k$  premières fonctions propres  $\beta_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,

Les fonctions  $\alpha_i$  seront choisies dans  $E_k \cap H_*$ , intersection qui n'est pas réduite au seul élément zéro. Par exemple on peut construire les fonctions de la manière suivante :

$$1 \leq i \leq k-1, \quad \alpha_i = \frac{\beta_i}{V_0} - \gamma_i \frac{\beta_{i+1}}{V_0}$$

avec

$$\gamma_i = \left( \int_{\Gamma} \frac{\beta_{i+1}}{V_0} d\Gamma \right)^{-1} \int_{\Gamma} \frac{\beta_i}{V_0}$$

On vérifie alors que :  $\int_{\Gamma} \alpha_i(s) ds = 0$ .

Ainsi on obtient  $\beta_1, \beta_2, \dots$  qui ont le plus d'influence sur l'écoulement, puis on obtient les  $\omega_i$  (fonctions de forme) correspondant au  $\beta_i$  grâce à la relation suivante :

$$\omega_i(s) = \omega_i(0) + \int_0^s \alpha_i(\sigma) d\sigma \quad (38)$$

## 5 Approximation numérique

### 5.1 Discrétisation de $\Theta$

Pour trouver une base approchée  $H^n$  de  $H_\omega$  du problème aux valeurs propres, il faut vérifier :

D'abord que chacun des éléments peut s'écrire :

$$\alpha(s) V_{0\Gamma}(s)$$

Ensuite comme le profil d'aile est un circuit fermé, il faut vérifier aussi que :

$$\int_{\Gamma} \alpha(s) ds = 0 \quad (39)$$

On construit la base orthonormée de la manière suivante :

Soit  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  une famille libre de  $L^2(\Gamma)$  tel que chaque élément est à moyenne nulle, ainsi cette famille libre peut représenter  $\alpha$ . Comme  $V_{0\Gamma}$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois,  $(V_{0\Gamma} g_1, V_{0\Gamma} g_2, \dots, V_{0\Gamma} g_n)$  est également une famille libre de  $L^2(\Gamma)$ ; ainsi cette famille libre peut servir à la représentation de la fonction  $\beta$ .

On utilise le procédé d'orthogonalisation de Gramm Schimidt, pour obtenir une famille orthonormée  $(f_1^S, f_2^S, \dots, f_n^S)$  qui sert de base orthonormée de l'espace approché.

A  $\Theta \in L(L^2(\Gamma))$ , on associe  $\Theta_n \in L(H^n)$  dans la base  $f_1^S, f_2^S, \dots, f_n^S$ . On construit la matrice  $\Theta^n$  de cette endomorphisme dans cette base, comme la base est orthonormée les coefficients de la matrice sont :

$$\Theta_{i,j}^n = \langle \Theta_n(f_i^S), f_j^S \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \Theta_n(f_i^S) f_j^S d\sigma \quad (40)$$

## 5.2 Calcul numérique de la matrice

Pour résoudre le système (29), on utilise une méthode intégrale basée sur la formule de Green. Le principe de la méthode est exposé en annexe [1].

Le profil d'aile est représenté par un polygone, de même pour la frontière  $\Gamma_\infty$ . On note :  $2n$  le nombre de faces du polygone qui représente le profil de l'aile,  $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$  les sommets de ce polygone. Soit  $\Gamma_i$  la  $i$ ème arête du polygone dans le sens anti-trigonométrique en partant du bord de fuite et  $dist(\Gamma_i)$  la distance de cette arête. On introduit  $\Gamma_i^2$  la réunion de l'arête  $\Gamma_{2i}$  et l'arête  $\Gamma_{2i-1} : \forall i \in [1, n]$ ,  $\Gamma_i^2 = \Gamma_{2i-1} \cup \Gamma_{2i}$ .

Dans la procédure FORTRAN utilisée (D03EAF de la bibliothèque NAG), la fonction  $\Phi'$  et sa dérivée normale sont approchées par des constantes sur chaque  $\Gamma_i^2$  en entrée comme en sortie. La base orthonormée approchée de  $L^2(\Gamma)$  est construite comme suit :

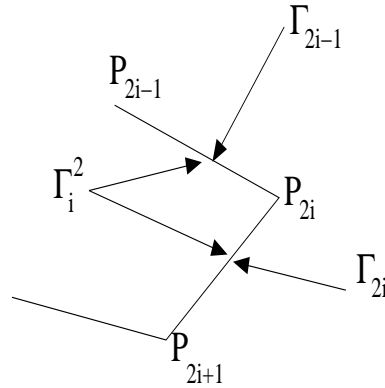


FIG. 2 – Détail de la représentation du profil d'aile

On définit les  $g_i$  par :  $\forall i \in [1, n - 1]$ ,

$$g_i(s) = 1 / (dist(\Gamma_{2i-1}) + dist(\Gamma_{2i})) \text{ sur } \Gamma_i^2$$

$$g_i(s) = -1 / (dist(\Gamma_{2i+1}) + dist(\Gamma_{2i+2})) \text{ sur } \Gamma_{i+1}^2$$

$$g_i(s) = 0 \text{ sinon}$$

On a seulement  $n - 1$  fonctions car on a  $n$  ensembles  $\Gamma_i^2$  où on spécifie une constante.

On approche  $V_{0r}$  sur  $\Gamma_i^2$  par une moyenne pondérée des vitesses aux noeuds du profil, notée  $V_{0r}(i)$  :

$$V_{0r}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{V_{0r}(p_{2i-1}) dist(\Gamma_{2i-1}) + V_{0r}(p_{2i+1}) dist(\Gamma_{2i})}{dist(\Gamma_{2i}) + dist(\Gamma_{2i-1})} + V_{0r}(p_{2i}) \right) \quad (41)$$

On définit les  $f_i$  par :  $\forall i \in [1, n - 1]$

$$f_i(s) = V_{0r}(j) g_i(s) \text{ sur } \Gamma_j^2 \quad (42)$$



On orthogonalise par le procédé de Gramm Schimdt, on obtient :  $f_i^S$ . Les coefficients de la matrice  $\Theta^n$  sont donnés par (44), les fonctions sont approchées par une méthode  $\mathbb{P}_o$  issue de la routine, ainsi les intégrales sont approchées par :

$$\int_{\Gamma} \Theta_n(f_i^S) f_j^S d\sigma = \sum_{k=1}^n \Theta_n(f_i^S)(k) f_j^S(k) (dist(\Gamma_{2k-1}) + dist(\Gamma_{2k})) \quad (43)$$

avec :  $f_i^S(k)$  la valeur de  $f_i^S$  sur  $\Gamma_k^2$ ,  $\Theta_n(f_i^S)(k)$  la valeur de  $\Theta_n(f_i^S)$  sur  $\Gamma_k^2$ .

### 5.3 Calcul numérique de $\omega$

Après diagonalisation de la matrice symétrique, si on note  $V^k$  un vecteur propre de la matrice dans la base des  $f_i^S$  alors la fonction  $\alpha$ , qui lui est associée, est :

$$\alpha^k(s) = \alpha_j^k = \sum_{i=1}^{n-1} V_i^k \frac{f_i^S(j)}{V_{0r}(j)} \text{ sur } \Gamma_j^2 \quad (44)$$

Il n'y a pas de problème de division car du fait de l'obtention des  $f_i^S$  on a :

$$f_i^S(j) = \left( \sum_{k=1}^{n-1} c_k g_k(s)|_{\Gamma_j^2} \right) * V_{0r}(j)$$

De ce fait, on remarque que les noeuds impairs du profil ont une valeur à droite et à gauche différentes, il faut en tenir compte pour l'intégration. Pour déterminer la valeur de  $\omega^k$  en chaque noeud du profil  $(p_1, p_2, \dots, p_{2n})$ , on note  $\omega_j^k = \omega^k(p_j)$ . Comme le profil présente un point anguleux au bord de fuite, on fait le choix de poser  $\omega_1^k = 0$  :

$$\forall j \in [2, 2n], \quad \omega_j^k = \omega_{j-1}^k + \int_{\Gamma_{j-1}} \alpha^k(s) d\sigma \quad (45)$$

D'après la méthode employée pour approcher les intégrales (cf : 47) :

$$\omega_j^k = \omega_{j-1}^k + dist(\Gamma_{j-1}) \alpha_{j'}^k \quad (46)$$

où  $j = 2j' - 1$  lorsque  $j$  est impair, et  $j = 2j'$  autrement.

## 6 Résultats numériques

Dans cette partie, on présente les résultats numériques pour le NACA0012 avec un angle d'attaque de  $8^\circ$  et avec un nombre de Mach à l'infini de 0.3. D'abord on trace les courbes des  $\omega$  qui correspondent aux plus grandes valeurs propres de  $\Theta$ , puis les profils d'aile qui résultent de ces perturbations à partir du profil NACA0012 (relation (1)).

## 6.1 Courbes de $\omega$

Ces courbes représentent les  $\omega$  correspondant aux plus grandes valeurs propres ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ) dans le cas d'un profil NACA0012 (figures 5 et 6).

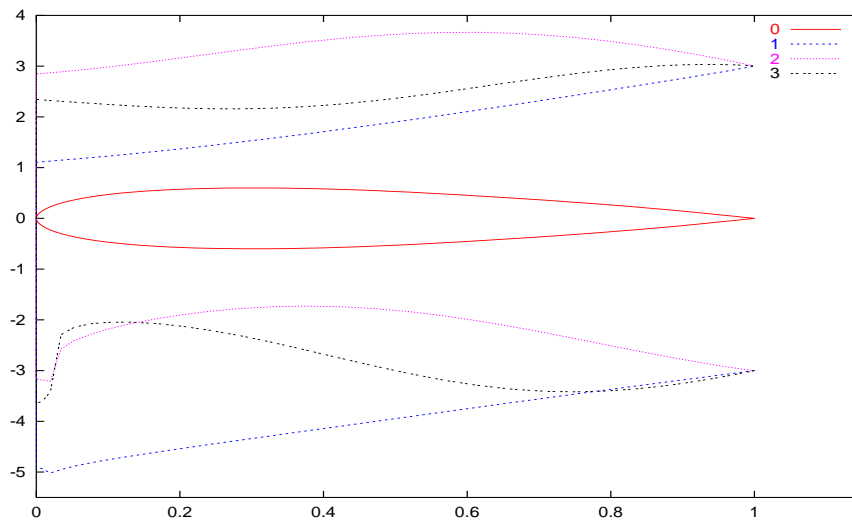


FIG. 3 – 0 : profil NACA0012, 1 :  $\omega_1$ , 2 :  $\omega_2$ , 3 :  $\omega_3$

Si la vitesse était constante sur le profil, on trouverait des modes de Fourier. On trouve ici des modes qui en sont proches. Les modes principaux sont associés aux grandes valeurs propres ; ce sont les modes les moins oscillants.

Pour la partie inférieure du profil d'aile, la zone d'abscisse  $[0,0.1]$  a une influence importante sur  $\omega$ , ceci s'explique par la présence d'un point de vitesse nulle, ce phénomène est encore plus visible quand on représente les  $\alpha$ . On représente  $\alpha_1$ , celui qui correspond à  $\omega_1$  pour le NACA0012, le long de la partie inférieure du profil d'aile en partant du bord d'attaque (cf figure 5).

## 6.2 Profils d'aile

Ces courbes représentent le profil d'aile initial et les profils associés aux plus grandes valeurs propres ; on a pris pour  $\tau$  une valeur qui rend les formes perturbées visibles. Les profils perturbés sont alors transformés par rotation et par homothétie de telle manière que le bord d'attaque soit au point de coordonnée  $(0,0)$  (figures 6 et 7).

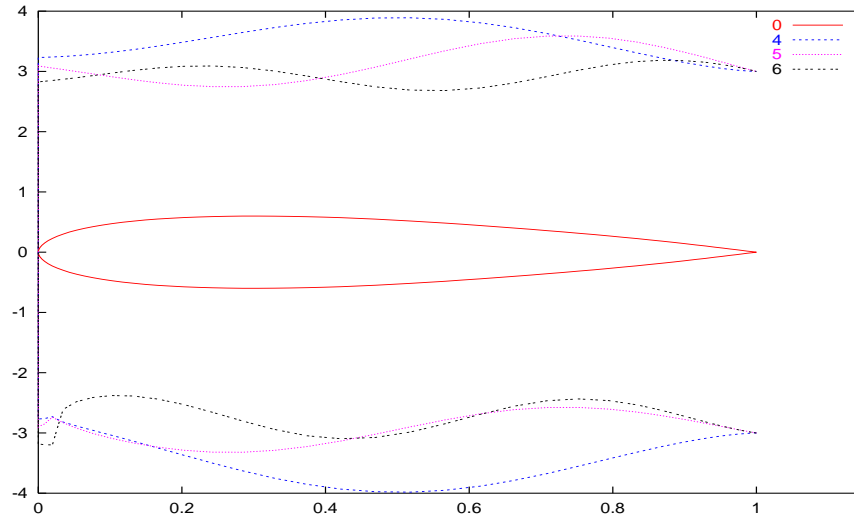


FIG. 4 – 0 : profil NACA0012, 4 :  $\omega_4$ , 5 :  $\omega_5$ , 6 :  $\omega_6$

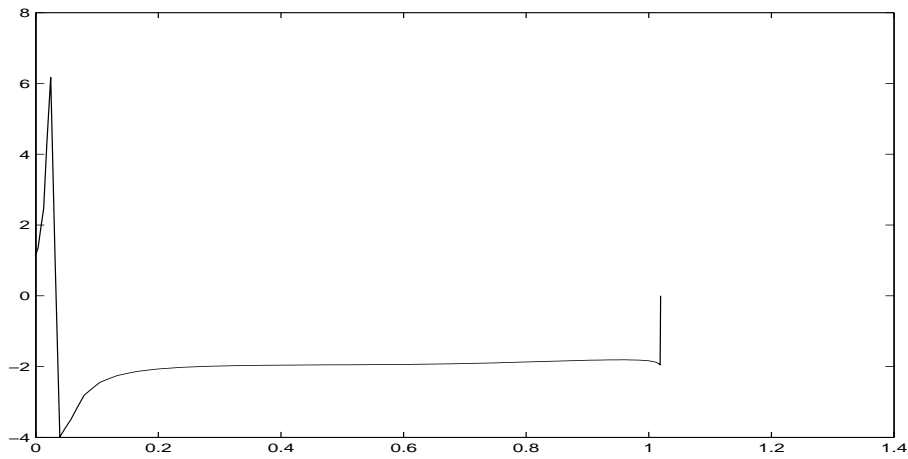


FIG. 5 – Fonction  $\alpha_1$

## 7 Conclusion

On a construit un ensemble de fonctions de formes principales. Ces fonctions sont reliées à la sensibilité de l'écoulement à la géométrie par la "dérivée du potentiel par rapport à la

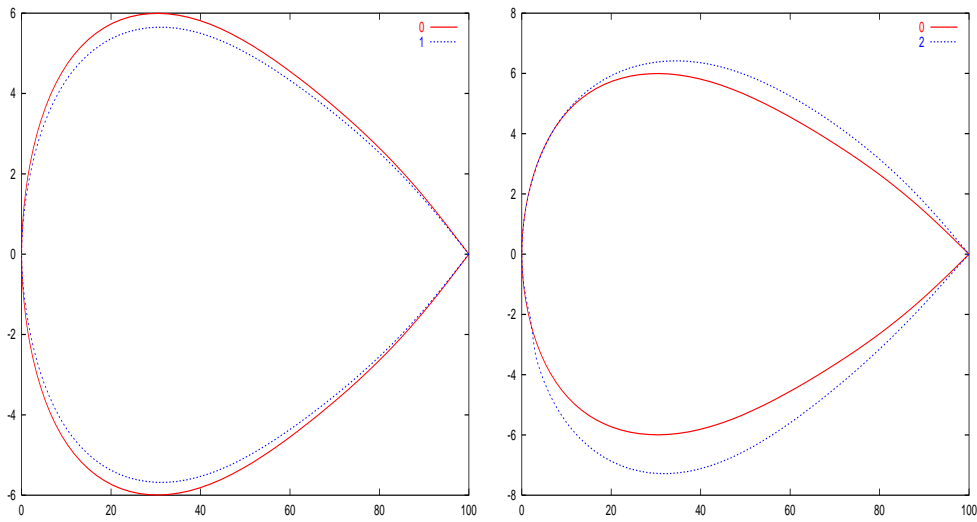


FIG. 6 – 0 : profil initial, 1 :profil 1 , 2 : profil 2

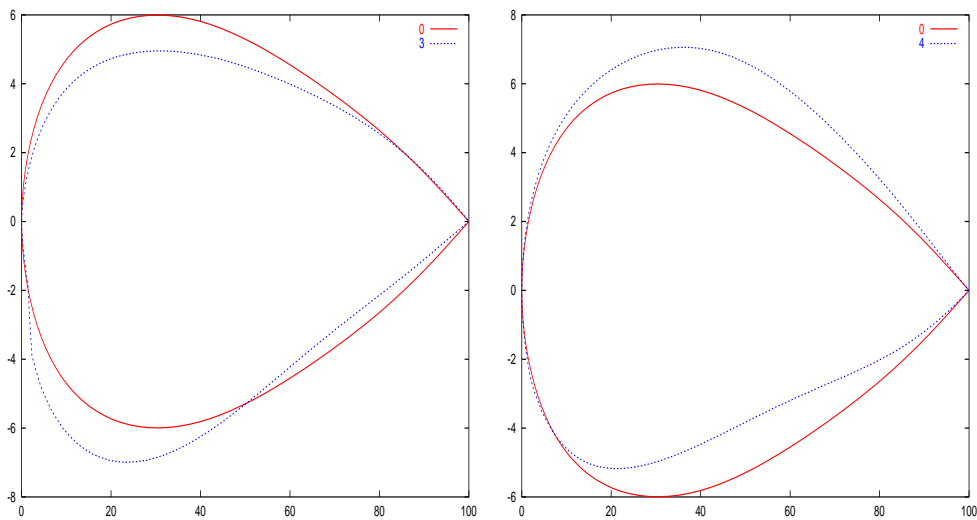


FIG. 7 – 0 : profil initial, 3 : profil 3, 4 : profil 4

géométrie". On a montré que la zone de vitesse nulle proche du bord d'attaque est critique pour ces fonctions.

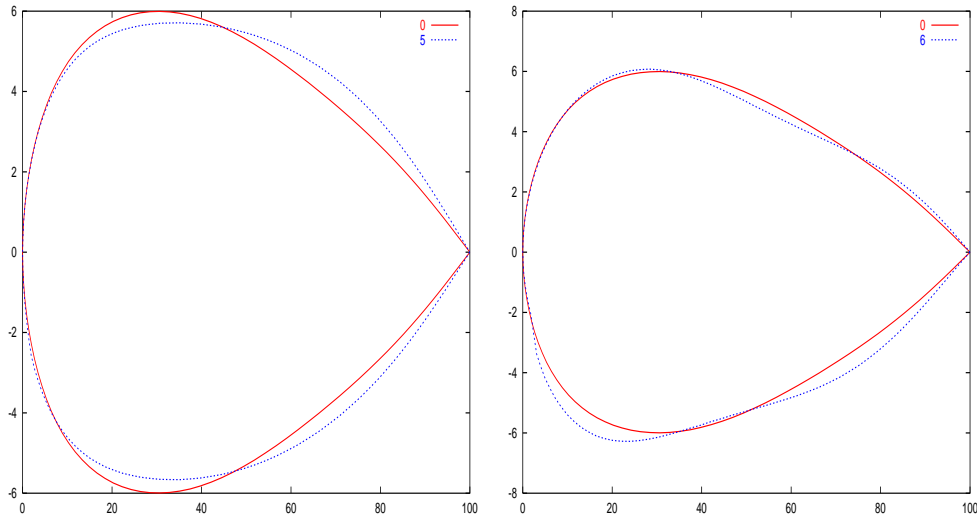


FIG. 8 – 0 : profil initial, 5 : profil 5, 6 : profil 6

Ultérieurement ces fonctions propres serviront comme base de représentation des perturbation d'une forme de profil dans un calcul vis à vis d' un critère aérodynamique. Des variantes de la méthode pourront être élaborées pour utiliser la variable pression (qui influe directement sur la portance et la trainée) ou bien la vitesse.

## 8 Annexe [1]

### Méthode intégrale pour la résolution du laplacien en 2D

Pour résoudre l'équation de Laplace, on utilise une procédure de la bibliothèque NAG. Cette routine est utilisée pour le cas d'un laplacien en 2D avec un domaine arbitraire (référence NAG : D03EAF, référence bibliographique [1]) . Pour résoudre ce problème la routine NAG utilise une méthode intégrale basée sur la formule de Green.

Formule de Green : soit  $\Omega$  un ouvert, soient  $\psi$  et  $\phi$  des fonctions régulières

$$\int_{\Omega} -\Delta\phi\psi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}\psi = \int_{\Omega} \nabla\psi\nabla\phi \quad (47)$$

En échangeant  $\phi$  et  $\psi$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} -\Delta\psi\phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial n}\phi = \int_{\Omega} \nabla\psi\nabla\phi \quad (48)$$

Pour résoudre le problème, on introduit une identité et la solution élémentaire du laplacien. Cette identité relie une intégrale sur l'ouvert  $\Omega$  et une intégrale sur le bord de l'ouvert  $\partial\Omega$ . Elle est obtenue par la différence entre (47) et (48) :

$$\int_{\Omega} -\Delta\psi\phi + \Delta\phi\psi = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial n}\phi \quad (49)$$

On introduit la solution élémentaire du laplacien en deux dimensions. Elle est définie par l'équation suivante :

$$\Delta E = \delta_0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \quad (50)$$

où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac. La solution de ce problème est :  $E(X) = 2\pi \ln(\|X\|_2)$ .

C'est une distribution, de plus  $E|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ .

On se place dans un problème intérieur où l'ouvert est borné par une frontière extérieure  $\Gamma_\infty$  et une frontière  $\Gamma$  représentant le profil d'aile.

Le problème que l'on pose (dont  $\Phi$  est la solution) est le suivant :

$$-\Delta\phi = 0 \text{ sur } \Omega \quad (51)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \beta \text{ sur } \Gamma \quad (52)$$

$$\phi = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \quad (53)$$

#### 8.1 Expression de $\phi(X_0)$

Dans cette partie, on obtient deux relations entre des intégrales sur le bord fonction de  $\phi, \psi, \frac{\partial\phi}{\partial n}$  et  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  où  $\psi = \ln(\|X - X_0\|_2) = \frac{E(X - X_0)}{2\pi}$  et  $E$  est la solution élémentaire. L'une donne la valeur de  $\phi(X_0)$  sur un point du domaine et l'autre sur un point de la frontière.

### 8.1.1 Cas où $X_0$ est à l'intérieur du domaine

On a  $2\pi \psi(X) = E(X - X_0)$  où  $E$  est la solution élémentaire et  $\psi$  vérifie l'équation :

$$2\pi \Delta \psi = \delta_{X_0} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \quad (54)$$

Comme  $\psi$  explose en  $X_0$ , on applique l'identité (49) sur l'ouvert  $\Omega_\epsilon$  : l'ouvert  $\Omega$  privé de la boule fermée de centre  $X_0$  et de rayon  $\epsilon$  :

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\epsilon(X_0) \quad \partial\Omega_\epsilon = \partial B_\epsilon \cup \Gamma \cup \Gamma_\infty$$

la formule (49) donne :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta \phi \psi - \Delta \psi \phi = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon} \phi \quad (55)$$

D'une part,  $\psi$  vérifie le système (54), d'autre part  $\phi$  est solution de l'équation de Laplace ; l'intégrale sur  $\Omega_\epsilon$  est donc nulle :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta \phi \psi - \Delta \psi \phi = 0 \quad (56)$$

On sépare l'intégrale sur le bord, on obtient :

$$\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon} \psi = - \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi - \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \quad (57)$$

Maintenant, on fait tendre  $\epsilon$  vers 0, dans cette égalité.

Soit  $X \in \partial B_\epsilon$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon}(X) \phi(X) = \nabla \psi(X) \cdot n_\epsilon(X) \phi(X)$$

On a :  $\psi = \ln(|X - X_0|_2)$ , de plus  $n_\epsilon = (-\cos(\theta), -\sin(\theta))$  et  $X - X_0 = (\epsilon \cos(\theta), \epsilon \sin(\theta))$ .

On obtient alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon}(X) \phi(X) = -\frac{\phi(X)}{\epsilon}$$

On fait le changement de variable  $s = \epsilon \theta$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne sur la boule :

$$\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon} \phi ds = - \int_0^{2\pi} \phi(X(\epsilon, \theta)) d\theta$$

Ainsi en passant à la limite (quand  $\epsilon$  tend vers 0), comme  $\phi$  est  $L^2(\Omega)$  d'après la partie 3, on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon} \phi ds = -2\pi \phi(X_0) \quad (58)$$

Nous avons  $\psi(X) = \ln(\|X - X_0\|_2)$  ainsi sur la frontière de la boule on a  $\psi(X) = \ln(\epsilon)$ . On fait le même changement de variable  $s = \epsilon \theta$  :

$$\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon} \psi ds = \epsilon \ln(\epsilon) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon}(\epsilon, \theta) d\theta$$

Comme  $\phi \in H^1(\Omega)$  on a :  $\frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon}$  est bornée quelque soit  $\epsilon$ . Comme  $\epsilon \ln(\epsilon)$  tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0, on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon} \psi ds = 0 \quad (59)$$

Ainsi on a trouvé une relation qui donne explicitement la valeur de  $\phi(X_0)$  dans  $\Omega$  en fonction des intégrales sur le bord du domaine avec  $\psi(X) = \ln(\|X - X_0\|_2)$  :

$$2\pi \phi(X_0) = \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi + \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \quad (60)$$

### 8.1.2 Cas où $X_0$ est sur la frontière

On se place dans le cas d'un ouvert régulier. On s'intéresse à un point du profil d'aile  $\Gamma$ . Dans ce cas, de manière analogue à ce qui précède, on prend comme ouvert :  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\epsilon(X_0)$ . Dans ce cas, on définit en plus  $\Gamma_\epsilon = \Gamma \setminus \partial B_\epsilon(X_0)$  et on prend  $\psi(X) = \ln(\|X - X_0\|_2)$ , de sorte que (57) s'écrit :

$$\int_{\partial B_\epsilon \cap \Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n_\epsilon} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n_\epsilon} \psi = - \int_{\partial \Gamma_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi - \int_{\partial \Gamma_\infty} \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \quad (61)$$

On fait tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient pour  $\Omega$  régulier :

$$\pi \phi(X_0) = \int_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi + \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial \psi}{\partial n} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi \quad (62)$$

Pour un point sur la frontière extérieure, nous obtenons le même résultat pour  $\Omega$  régulier.

Remarque : Si on prend comme frontière extérieure un triangle alors l'égalité précédente n'est pas vraie pour un sommet. Il faut remplacer  $\pi$  par l'angle du triangle au sommet considéré.

En conclusion :

La relation (62) relie la valeur de  $\phi$  en un point intérieur au domaine à des intégrales sur la frontière (profil d'aile et limite à l'infini) faisant intervenir à la fois  $\phi$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ . Or, les conditions aux limites naturelles du problème, (53), ne fournissent qu'une seule de ces fonctions.



## 8.2 Complétion des conditions aux limites

Dans cette partie, on se place sous les hypothèses de notre problème. Le but de cette partie est de trouver les expressions  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  sur la frontière extérieure et  $\phi$  sur le profil d'aile qui manquent pour pouvoir calculer en tout point du domaine  $\Omega$  par (62).

On utilise la relation (62), d'une part on multiplie cette expression par une fonction test nulle sur  $\Gamma$  et ensuite on intègre sur la frontière extérieure. Soit  $\theta$  une fonction test s'annulant sur  $\Gamma$ .

$$\int_{\Gamma_\infty} (-b_\Gamma(\phi) + b_{\Gamma_\infty}(\frac{\partial \phi}{\partial n})) \theta(X_0) ds(X_0) = - \int_{\Gamma_\infty} d_\Gamma(\frac{\partial \phi}{\partial n}) \theta(X_0) ds(X_0) \quad (63)$$

D'autre part, on multiplie cette expression par une fonction test nulle sur  $\Gamma_\infty$  et ensuite on intègre sur  $\Gamma$ . Soit  $\mu$  une fonction test s'annulant sur  $\Gamma_\infty$ .

$$\pi \int_\Gamma \phi(X_0) \mu(X_0) ds(X_0) + \int_\Gamma (-b_\Gamma(\phi) + b_{\Gamma_\infty}(\frac{\partial \phi}{\partial n})) \mu(X_0) ds(X_0) = - \int_\Gamma d_\Gamma(\frac{\partial \phi}{\partial n}) \mu(X_0) ds(X_0) \quad (64)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_\Gamma(\phi) &= \int_\Gamma \beta(X) \ln(\|X - X_0\|_2) ds(X) \\ b_\Gamma(\phi) &= \int_\Gamma \phi(X) \frac{(X - X_0) \cdot \overrightarrow{n(X)}}{\|X - X_0\|_2^2} ds(X) \\ b_{\Gamma_\infty}(\frac{\partial \phi}{\partial n}) &= \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial n}(X) \ln(\|X - X_0\|_2) ds(X) \end{aligned}$$

On aboutit ainsi à un système d'équations linéaires dont la solution fournit les données manquantes.

## Références

- [1] G.T Symm, R.A Pitfield, *Solution of Laplace's equation in two dimensions*, NPL Report NAC 44 National Physical Laboratory, 1974.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Masson, Paris, 1992.
- [3] M.C Delfour, J.-P Zolésio, *Shapes and Geometries Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, Siam, 2001.
- [4] J. Sokolowski, J.-P Zolésio, *Introduction to Shape Optimization Shape Sensitivity Analysis*, Springer-Verlag, 1992.
- [5] J.-P. Zolésio, *Introduction to Shape Optimization Problems and Free Boundary Problems*, in *Shape Optimization and Free Boundaries, Series C : Mathematical and Physical Sciences*, Vol 380, Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 397-457.
- [6] J. Cagnol, M.P Polis, J.-P Zolésio, *shape optimization and optimal design*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Vol 216, Marcel Dekker, 2001.
- [7] Z.L. Tang, J.-A. Désidéri, J. Périaux, *Distributed Optimization using Virtual and Real Game Strategies*, Rapport de recherche INRIA 4543, Septembre 2002.
- [8] A. Clarich, J.-A. Désidéri, *Self-adaptive parameterisation for aerodynamic optimum-shape design*, Rapport de Recherche INRIA 4428, Mars 2002.
- [9] M. Karakasis, J.-A. Désidéri, *Model Reduction and Adaption of Optimum-Shape Design in Aerodynamics by Neural Networks*, Rapport de Recherche INRIA 4503, Juillet 2002.
- [10] Z.L. Tang, J.-A. Désidéri, *Towards Self-Adaptive Parameterization of Bézier Curves for Airfoil Aerodynamic Design*, Rapport de Recherche INRIA 4572, Octobre 2002.



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis

2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399