



**HAL**  
open science

**Étude numérique du comportement de l'équation de  
transfert radiatif des milieux semi-transparents  
Inversion de données spectroscopiques pour le CO<sub>2</sub>**

Philippe Al khoury, Guy Chavent, François Clément, Philippe Hervé, Olivier  
Legras

► **To cite this version:**

Philippe Al khoury, Guy Chavent, François Clément, Philippe Hervé, Olivier Legras. Étude numérique du comportement de l'équation de transfert radiatif des milieux semi-transparents Inversion de données spectroscopiques pour le CO<sub>2</sub>. [Rapport de recherche] RR-4693, INRIA. 2003. inria-00071893

**HAL Id: inria-00071893**

**<https://inria.hal.science/inria-00071893>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Étude numérique du comportement de l'équation de  
transfert radiatif des milieux semi-transparentes  
Inversion de données spectroscopiques pour le CO<sub>2</sub>*

Philippe Al Khoury — Guy Chavent — François Clément — Philippe Hervé — Olivier  
Legras

**N° 4693**

Janvier 2003

THÈME 4



*Rapport  
de recherche*



# Étude numérique du comportement de l'équation de transfert radiatif des milieux semi-transparentes Inversion de données spectroscopiques pour le $CO_2$

Philippe Al Khoury<sup>\*</sup>, Guy Chavent<sup>†</sup>, François Clément<sup>‡</sup>, Philippe Hervé<sup>§</sup>, Olivier Legras<sup>¶</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Estime

Rapport de recherche n° 4693 — Janvier 2003 — 66 pages

**Résumé :** L'objectif de ce travail est l'inversion de mesures spectroscopiques afin de reconstituer les distributions de température et de concentration en gaz carbonique ( $CO_2$ ) dans une flamme. Cette méthode non-intrusive de mesure est basée sur l'observation d'un spectre à très haute résolution et fortement sensible à la température. La résolution unidimensionnelle de l'équation du transfert radiatif a permis de simuler les spectres dans la zone étudiée. Les dérivées du modèle direct sont calculées efficacement par la technique de l'état adjoint ; elles permettent, d'une part, l'analyse de sensibilité du modèle, et d'autre part, le calcul d'une direction de descente pour l'optimisation. Une estimation a priori du nombre de paramètres identifiables relatif à un niveau de bruit donné a été réalisée à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice jacobienne. Enfin, une méthode de type Gauss-Newton avec régions de confiance a été utilisée afin de retrouver les paramètres. La méthode est illustrée sur des exemples synthétiques puis validée dans un cas réel.

**Mots-clés :** inversion, moindres carrés, analyse de sensibilité, décomposition en valeurs singulières, paramétrisation, transfert radiatif

Rapport final de contrat avec Auxitrol S.A.

<sup>\*</sup> Projet Estime, LEEE et Auxitrol. [Philippe.Al\\_Khoury@inria.fr](mailto:Philippe.Al_Khoury@inria.fr).

<sup>†</sup> Projet Estime et CEREMADE, Université de Paris 9, 75775 Paris Cedex 16. [Guy.Chavent@inria.fr](mailto:Guy.Chavent@inria.fr).

<sup>‡</sup> Projet Estime. [Francois.Clement@inria.fr](mailto:Francois.Clement@inria.fr).

<sup>§</sup> LEEE, Université de Paris 10, 1 Chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray. [philippe.herve@cva.u-paris10.fr](mailto:philippe.herve@cva.u-paris10.fr)

<sup>¶</sup> Auxitrol, Aerospace Equipment Division, 5 allée Charles Pathé, 18941 Bourges Cedex 9. [olegras@auxitrol.com](mailto:olegras@auxitrol.com)

# Numerical study of the behaviour of the radiative transfer equation for semi-transparent media Inversion of spectroscopic data for $CO_2$

**Abstract:** The aim of this paper is the inversion of spectroscopic measurements in order to obtain the temperature and concentration distributions of  $CO_2$  in a flame. This non-intrusive method is based on the observation of a very high resolution spectrum which is strongly dependent of the temperature. Modeling is performed by the one-dimensional radiative transfer equation. The adjoint-state method is used to efficiently compute the derivatives used for sensitivity analysis and for the determination of a descent direction for optimization. For some noise level the singular value decomposition of the Jacobian matrix is used to a priori estimate the number of retrievable parameters. Finally, a Gauss-Newton type with trust region method is applied to perform inversion and to retrieve parameters. The method is first illustrated on synthetic examples, and then validated with a real case example.

**Key-words:** inversion, least-squares, sensitivity analysis, singular value decomposition, parameterisation, radiative transfert

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Description du problème, méthodologie de résolution</b>	<b>4</b>
2.1	Le problème direct . . . . .	4
2.1.1	Modèle physique . . . . .	4
2.1.2	Modèle mathématique . . . . .	6
2.1.3	Approximation numérique . . . . .	7
2.2	Dérivation, sensibilité et identifiabilité des paramètres . . . . .	8
2.2.1	État adjoint et dérivation . . . . .	8
2.2.2	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	9
2.2.3	Identifiabilité . . . . .	10
2.3	Paramétrisation . . . . .	12
2.3.1	Normalisation des paramètres physiques . . . . .	12
2.3.2	Profils gaussiens . . . . .	13
2.3.3	Profils à deux maxima . . . . .	14
2.4	Identification . . . . .	15
2.4.1	Fonction coût . . . . .	15
2.4.2	Stratégie d'inversion . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Résultats Numériques</b>	<b>16</b>
3.1	Paramètres physiques non normalisés . . . . .	16
3.1.1	Analyse de sensibilité . . . . .	16
3.1.2	Identification . . . . .	19
3.2	Choix d'un ensemble de longueurs d'onde . . . . .	19
3.2.1	Spectres générés par des profils gaussiens centrés . . . . .	19
3.2.2	Spectres générés par des profils gaussiens excentrés . . . . .	26
3.2.3	Spectres générés par des profils à deux maxima . . . . .	26
3.2.4	Spectres générés par des profils à deux maxima parfaitement symétriques . . . . .	31
3.3	Paramétrisation par des gaussiennes . . . . .	31
3.3.1	Analyse de sensibilité pour le premier jeu de 8 paramètres . . . . .	31
3.3.2	Analyse de sensibilité pour le second jeu de 8 paramètres . . . . .	31
3.3.3	Analyse de sensibilité pour 4 paramètres . . . . .	31
3.3.4	Identification de 8 paramètres . . . . .	31
3.3.5	Identification de 4 paramètres . . . . .	47
3.4	Paramétrisation par des profils à "deux maxima" . . . . .	47
3.4.1	Analyse de sensibilité pour les 10 paramètres . . . . .	47
3.4.2	Analyse de sensibilité pour 6 paramètres . . . . .	47
3.4.3	Identification de 10 paramètres . . . . .	47
3.4.4	Identification de 6 paramètres . . . . .	60
3.5	Données réelles . . . . .	60
3.5.1	Prise en compte de la résolution spectrale de l'appareil de spectroscopie . . . . .	60
3.5.2	La quantité d'information extractible des mesures . . . . .	61
3.5.3	Identification des profils . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>

## 1 Introduction

Le bon fonctionnement des turbines à gaz se lit sur la répartition de température et de concentration des différents constituants des gaz de combustion. Cette répartition permet d'évaluer le rendement de la combustion et d'estimer la quantité de gaz polluant produite.

Une méthode passive, basée sur la spectroscopie d'émission de  $CO_2$  a été choisie (voir [1]). Notre objectif ici est de déterminer les profils de température et de concentration à partir d'un spectre d'émission de  $CO_2$ . Il s'agit d'un problème inverse, où l'équation de transfert radiatif, modélisant le phénomène physique, décrit le problème direct.

Dans la première section de ce rapport, le problème direct est traité, l'application à inverser est définie et sa dérivée est calculée formellement. De plus l'analyse de sensibilité de l'application est faite par décomposition en valeurs singulières et l'identifiabilité des paramètres en est déduite. On y trouve aussi les différentes paramétrisations des profils utilisées pour l'identification, et la fonction coût à minimiser. La deuxième section contient les résultats numériques du programme basé sur la méthode décrite précédemment, et les conclusions pour des données synthétiques et réelles.

## 2 Description du problème, méthodologie de résolution

### 2.1 Le problème direct

#### 2.1.1 Modèle physique

Pour simplifier, certaines hypothèses sont effectuées :

- L'équilibre thermodynamique local est atteint.
- Des profils de température et de concentration sont supposés établis.
- L'émission et l'absorption des particules sont négligeables.
- Pas de réflexion à l'interface gaz/air.
- La diffusion est négligeable devant l'absorption et l'émission.
- La quantité étudiée du gaz est située entre 0 et  $l$  (voir figure 1).

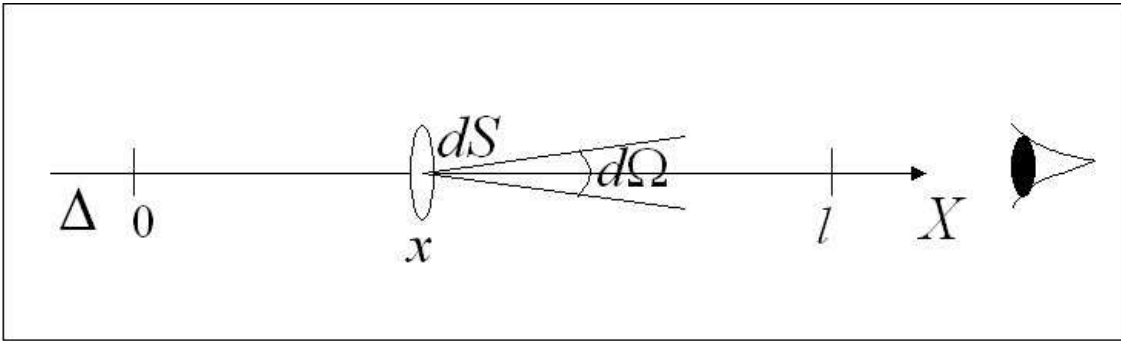


FIG. 1: *Transfert radiatif.*

Soit  $\Delta$  une direction dans l'espace, soit  $x \in \Delta$ , on note  $d\Phi_\sigma(x)$  le flux radiatif spectral pour la bande spectrale  $d\sigma$  traversant un élément de surface  $dS$  située en  $x$ , vu dans un angle solide  $d\Omega$  par le détecteur (instrument optique). On définit la luminance monochromatique  $L_\sigma$  par :

$$(1) \quad L_\sigma(x) = \frac{d\Phi_\sigma}{dS d\Omega d\sigma}(x).$$

**La Loi de Planck** La luminance du corps noir  $L_\sigma^0$  pour la longueur d'onde  $\sigma$  est une fonction de la température  $T$ , donnée par :

$$(2) \quad L_\sigma^0(T) = \frac{k_1 \sigma^3}{\exp\left(\frac{k_2 \sigma}{T}\right) - 1}$$

où :

- $k_1 = 1.19 \times 10^{-8} \text{ W cm}^4/\text{m}^2\text{sr}$ ,
- $k_2 = 1.438 \text{ cm K}$ ,
- $\sigma$  est le nombre d'onde en  $\text{cm}^{-1}$ ,
- $T$  est la température en Kelvin.

Une tranche  $dx$  située au point  $x$  produit le flux radiatif  $d\Phi_\sigma(x+dx) - d\Phi_\sigma(x)$ , résultant des phénomènes d'émission et d'absorption.

**Le flux absorbé**  $d\Phi_\sigma^a$  étant le flux absorbé par la tranche  $dx$  dont le coefficient d'absorption est  $K_\sigma dx$ , on écrit :

$$d\Phi_\sigma^a = K_\sigma d\Phi_\sigma(x) dx.$$

En terme de luminance on écrit :

$$(3) \quad L_\sigma^a = K_\sigma L_\sigma(x) dx.$$

**Le flux émis**  $d\Phi_\sigma^e$  étant le flux émis par la tranche  $dx$ , on écrit :

$$(4) \quad d\Phi_\sigma^e = \eta_\sigma(x) dS d\Omega d\sigma dx.$$

La luminance  $L_\sigma^e$  associée est :

$$L_\sigma^e = \eta_\sigma(x) dx$$

où  $\eta_\sigma$  est le coefficient d'émission du gaz pour un nombre d'onde  $\sigma$ . L'hypothèse d'équilibre thermique implique d'une part que la luminance qui doit régner en tout point est  $n^2 L_\sigma^0(T(x))$  où  $T$  est la température au point  $x$ , l'indice réel du milieu  $n$  est égal à 1 à quelque  $10^{-4}$  près pour les gaz, cette luminance étant absorbée et le gaz émet  $L_\sigma^e$ . D'autre part à l'équilibre thermique le flux absorbé est égal au flux émis, ce qui se traduit en terme de luminance par :

$$L_\sigma^e = \eta_\sigma(x) dx = K_\sigma L_\sigma^0(T(x)) dx.$$

**Bilan** Le bilan radiatif de ces phénomènes :

$$d\Phi_\sigma(x+dx) - d\Phi_\sigma(x) = d\Phi_\sigma^e - d\Phi_\sigma^a$$

ou bien :

$$L_\sigma(x+dx) - L_\sigma(x) = L_\sigma^e - L_\sigma^a.$$

D'où l'équation suivante pour la luminance :

$$(5) \quad \frac{dL_\sigma}{dx}(x) = K_\sigma(x) [L_\sigma^0(x) - L_\sigma(x)].$$



**Conditions aux limites** En  $x = 0$  :

$$(6) \quad L_\sigma(0) = L_0.$$

Cette quantité correspond à la luminance de la paroi derrière le gaz, ou l'émission de l'atmosphère.

En  $x = l$  :

$$L_\sigma(l) = L_{cal}.$$

Cette quantité correspond à la luminance reçue calculée à la sortie du domaine  $[0, l]$ .

**Le coefficient d'absorption  $K_\sigma$**   $K_\sigma$  dépend de la température  $T$  et de la concentration  $C$ . Cette dépendance est modélisée par la formule suivante :

$$(7) \quad K_\sigma(T, C) = \alpha_\sigma(T) \frac{CP}{10kT}$$

avec

$$(8) \quad \alpha_\sigma(T) = a_3^\sigma T^3 + a_2^\sigma T^2 + a_1^\sigma T + a_0^\sigma$$

- $\alpha_\sigma(T)$  est exprimé en  $\text{cm}^3$ , nous le notons parfois  $P_\sigma(T)$ , les valeurs des coefficients de ce polynôme sont calculées à partir d'une base de données expérimentales pour la molécule du gaz étudié (ici  $\text{CO}_2$ ),
- $C$  fraction molaire prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[0.00033, 0.1]$ ,
- $P$  la pression en bar,
- $k = 1.38 \times 10^{-23} (\text{J.K}^{-1})$  la constante de Boltzmann,
- $T$  température en K, prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[280, 1000]$ .

**Remarque 1** Pour un profil de température  $x \mapsto T(x)$  et un profil de concentration  $x \mapsto C(x)$ , on note  $K_\sigma(T(x), C(x))$  par  $K_\sigma(x)$ , et ainsi de suite pour les autres fonctions.

### 2.1.2 Modèle mathématique

On suppose  $L_0 = 0$  pour toutes les longueurs d'onde. Ainsi nous disposons de l'équation différentielle suivante :

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dL_\sigma}{dx}(x) &= K_\sigma(x) [L_\sigma^0(x) - L_\sigma(x)] \\ L_\sigma(0) &= 0 \end{aligned}$$

dont la solution est :

$$(10) \quad L_\sigma(x) = \int_0^x K_\sigma(u) L_\sigma^0(u) e^{-\int_u^x K_\sigma(v) dv} du.$$

L'objectif est de calculer  $L_\sigma(l)$  (notée  $L_{\sigma,cal}$  ou parfois  $R_\sigma^{cal}$ ) pour pouvoir comparer avec des mesures données.

**Notation 2** On note respectivement  $\mathcal{C}_T([0, l])$  et  $\mathcal{C}_C([0, l])$  les ensembles de profils de température et de concentration continus positifs et bornés.

**Définition 3** Pour une longueur d'onde  $\sigma$ , nous définissons la fonction  $f_\sigma$  :

$$(11) \quad \begin{aligned} f_\sigma : \mathcal{C}_T([0, l]) \times \mathcal{C}_C([0, l]) &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (T, C) &\longmapsto L_\sigma(l) \end{aligned}$$

et pour un ensemble  $\Sigma$  de  $I$  longueurs d'onde, on définit  $F_\Sigma$  par :

$$(12) \quad \begin{aligned} F_\Sigma : \mathcal{C}_T([0, l]) \times \mathcal{C}_C([0, l]) &\longrightarrow \mathcal{R}^I \\ (T, C) &\longmapsto (f_{\sigma_i}(T, C))_{1 \leq i \leq I} \end{aligned}$$

Donc, le problème à résoudre est le suivant :

**Soit  $L_\Sigma^{mes}$  un vecteur de  $\mathcal{R}^I$ , on cherche les profils  $(T, C)$  tels que :**  

$$F_\Sigma(T, C) = L_\Sigma^{mes}.$$

Pour résoudre ce problème il faut commencer par une discrétisation, permettant de calculer numériquement  $L_\sigma(l)$ . Ce calcul peut se faire à partir de la formule intégrale de la solution (10), mais nous avons choisi de discrétiser l'équation différentielle (9) afin de réduire le temps de calcul.

### 2.1.3 Approximation numérique

Nous utilisons dans la suite une approximation par des fonctions constantes par morceaux, en considérant une subdivision uniforme  $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$  de l'intervalle  $[0, l]$ , la longueur de chaque sous intervalle est  $h = \frac{l}{N}$ .

Ainsi, nous approchons les fonctions  $T(x)$ ,  $C(x)$ ,  $K_\sigma(x)$ , et  $L_\sigma^0(x)$  par des fonctions constantes par morceaux, de telle façon que sur un intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  on ait:  $T(x) \simeq T_i$ ,  $C(x) \simeq C_i$ ,  $K_\sigma(x) \simeq K_i$ , et  $L_\sigma^0(x) \simeq L_i$  pour tout  $i \in [1..N]$ .

**Notation 4** La fonction  $L_\sigma(x)$  est discrétisée en les points  $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ , et on note  $R_i = L_\sigma(x_i)$  "Luminance Reçue", ainsi  $f_\sigma(T, C) = R_N$ .

Les premières relations entre ces quantités sont les équations suivantes issues des formules (7) et (2) :

$$(13) \quad K_i = K_\sigma(T_i, C_i) \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$$(14) \quad L_i = L_\sigma^0(T_i) \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Une discrétisation de l'équation différentielle (9) donne la relation de récurrence :

$$(15) \quad \begin{aligned} R_0 &= 0. \\ R_i &= (1 - hK_i)R_{i-1} + hK_iL_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Les équations (13), (14) et (15) sont appelées **les équations d'état directes**.

**Notation 5** On note  $T = (T_i)_{1 \leq i \leq N}$  et  $C = (C_i)_{1 \leq i \leq N}$ , et on définit  $m = (T, C) \in \mathcal{R}^{2N}$  appelé le vecteur des paramètres physiques. On note  $K = (K_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,  $L = (L_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,  $R = (R_i)_{0 \leq i \leq N}$ , et on définit  $u = (K, L, R) \in \mathcal{R}^{3N+1}$  appelé le vecteur des variables d'état. Les équations d'état peuvent s'écrire sous la forme :

$$(16) \quad e(u, m) = 0$$

et la solution de cette équation est notée  $u_m$ .

## 2.2 Dérivation, sensibilité et identifiabilité des paramètres

Dans ce chapitre, les dérivées de la luminance  $F_\Sigma$  par rapport aux paramètres physiques  $m = (T, C)$  sont calculées formellement. La sensibilité des paramètres et leur identifiabilité sont déduits d'une étude basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de sensibilité.

### 2.2.1 État adjoint et dérivation

Pour une longueur d'onde  $\sigma$ , on définit l'application  $f_\sigma$  associée par la formule (11) et calculée à l'aide des formules (13) (14) et (15).

**Définition 6** On appelle variable d'état adjoint  $\bar{u} \in \mathcal{R}^{3N+1}$ , le vecteur  $\bar{u} = (\bar{K}, \bar{L}, \bar{R})$  de multiplicateurs de Lagrange associés au problème de minimisation de  $f_\sigma = R_N$ , où  $\bar{K}$  est associé à l'équation (13),  $\bar{L}$  est associé à l'équation (14), et  $\bar{R}$  est associé à (15). La fonction lagrangienne est :

$$(17) \quad \mathcal{L}(u, \bar{u}, m) = f_\sigma(u) + \langle e(u, m), \bar{u} \rangle.$$

En explicitant (17) on obtient :

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(u, \bar{u}, m) &= R_N \\ &+ \sum_{i=1}^N (K_i - K_\sigma(T_i, C_i)) \bar{K}_i \\ &+ \sum_{i=1}^N (L_i - L_\sigma^0(T_i)) \bar{L}_i \\ &+ \sum_{i=1}^N \{R_i - [(1 - hK_i)R_{i-1} + h.K_i L_i]\} \bar{R}_i \\ &+ R_0 \bar{R}_0. \end{aligned}$$

Cette fonction vérifie :

$$(19) \quad \forall m, \forall \bar{u}, \quad \mathcal{L}(u_m, \bar{u}, m) = R_N = f_\sigma(u_m).$$

Soit  $\bar{u}$  tel que :

$$(20) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u, \bar{u}, m) = 0.$$

Alors, en dérivant (17) par rapport à  $m$ , il vient :

$$(21) \quad \frac{\partial f_\sigma}{\partial m}(u_m) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}(u_m, \bar{u}, m).$$

Cela permet de calculer la dérivée  $\frac{\partial f_\sigma}{\partial m}(u_m)$ .

En explicitant l'égalité (20) on trouve les équations donnant  $\bar{u} = (\bar{K}, \bar{L}, \bar{R})$  :

$$(22) \quad \bar{R}_N = -1.$$

$$(23) \quad \bar{R}_{i-1} = \bar{R}_i(1 - hK_i) \quad i = N, \dots, 1.$$

$$(24) \quad \bar{K}_i = h\bar{R}_i(L_i - R_{i-1}) \quad i = N, \dots, 1.$$

$$(25) \quad \bar{L}_i = hK_i\bar{R}_i \quad i = N, \dots, 1.$$

Ces équations sont les **équations d'état adjointes discrètes**. Elles permettent de calculer les dérivées de la fonction  $f_\sigma$  par les formules :

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_\sigma}{\partial T_i}(T, C) &= - \left[ \bar{K}_i \frac{\partial K_\sigma}{\partial T}(T_i, C_i) + \bar{L}_i \frac{dL_\sigma^0}{dT}(T_i) \right] & i = 1, 2, \dots, N. \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial C_i}(T, C) &= -\bar{K}_i \frac{\partial K_\sigma}{\partial C}(T_i, C_i) & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

**Remarque 7** Soit  $d$  une direction dans l'espace des paramètres, on peut vérifier numériquement le gradient calculé par la formule précédente en vérifiant l'égalité :

$$\langle Df_\sigma(x), d \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\sigma(x + hd) - f_\sigma(x)}{h}.$$

En pratique on normalise le pas  $h = \varepsilon \frac{\|x\|}{\|d\|}$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Remarque 8** Pour  $\Sigma = \{\sigma_i, 1 \leq i \leq I\}$  un ensemble de  $I$  longueurs d'onde, nous pouvons calculer la dérivée de la fonction  $F_\Sigma$  définie par (12), en notant que :

$$(27) \quad DF_\Sigma(T, C) = \begin{bmatrix} Df_{\sigma_1} \\ \vdots \\ Df_{\sigma_I} \end{bmatrix}.$$

$DF_\Sigma$  est appelée **matrice de sensibilité**.

## 2.2.2 Décomposition en valeurs singulières

Soit  $\Sigma = \{\sigma_i, 1 \leq i \leq I\}$  un ensemble de  $I$  longueurs d'onde. La quantité  $DF_\Sigma(m) \cdot \delta m$  est une première approximation de la variation de  $F_\Sigma$  associée à une variation des paramètres  $\delta m$ , ainsi une étude de l'application linéaire définie par la matrice  $DF_\Sigma(m)$  s'avère utile. Cette étude est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $DF_\Sigma$ .

La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $DF_\Sigma$  est la donnée de trois matrices  $U$ ,  $\Sigma$ , et  $V$  telles que :

$$(28) \quad DF_\Sigma = U\Sigma V^t$$

où  $U = [u_1, \dots, u_I]$  est une matrice orthogonale  $I \times I$  appelée matrice des vecteurs singuliers à gauche,  $V = [v_1, \dots, v_{2N}]$  est une matrice orthogonale  $2N \times 2N$  appelée matrice des vecteurs singuliers à droite, et  $\Sigma$  est une matrice  $I \times 2N$ , dont la diagonale contient les valeurs singulières de la matrice  $DF_\Sigma$  classées par ordre décroissant, le reste des composantes de  $\Sigma$  sont nulles. Les valeurs singulières sont positives ou nulles, la structure de  $\Sigma$  est de la forme (si  $I < 2N$ ) :

$$(29) \quad \overbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{2N} \Bigg\} I$$

où  $\Sigma_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0})$  est une matrice carrée diagonale.

On peut réécrire (28), de la façon suivante:

$$(30) \quad DF_\Sigma V = U\Sigma.$$

C'est à dire:

$$(31) \quad DF_{\Sigma}v_i = \lambda_i u_i \quad i = 1, \dots, i_0.$$

$$(32) \quad DF_{\Sigma}v_i = 0 \quad \text{pour } i > i_0.$$

D'après cette écriture, on peut dire que  $V$  représente les directions principales de l'action de  $DF_{\Sigma}$  dans l'espace des paramètres, les valeurs singulières donnent une évaluation de cette action, et que  $U$  représente les directions principales du résultat de cette action dans l'espace des mesures.

### 2.2.3 Identifiabilité

On dispose d'un ensemble de longueurs d'onde  $\Sigma$ , et on veut évaluer la quantité d'information récupérable par le modèle, c'est à dire le nombre de paramètres indépendants qu'on espère retrouver.

**Mesures parfaites** Soit  $v$  un vecteur dans l'espace des paramètres,  $V$  étant une base, on peut donc écrire  $v$  dans cette base sous la forme :

$$(33) \quad v = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i v_i.$$

D'après (31) et (32) on a :

$$(34) \quad DF_{\Sigma}v = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i DF_{\Sigma}v_i = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \lambda_i u_i.$$

Cela veut dire qu'une direction  $v$  de variation dans l'espace des paramètres peut impliquer, en une première approximation une variation non nulle dans l'espace des luminances, si elle a une composante non nulle sur un des premiers  $i_0$  vecteurs singuliers à droite. Par conséquent, on peut espérer identifier au plus  $i_0$  paramètres.

**Mesures bruitées** Soit  $m = (T, C) \in \mathcal{R}^{2N} \mapsto F_{\Sigma}(m) \in \mathcal{R}^I$  l'application étudiée précédemment.

Nous remarquons que

$$(35) \quad \forall T \in (\mathcal{R}_+^*)^N, \quad F_{\Sigma}(T, 0) = 0.$$

Pour un point  $m = (T, C)$ , on note  $F_{\Sigma, m}^{lin}$  l'approximation linéaire en  $m$  de l'application  $F_{\Sigma}$ , c'est l'application :

$$(36) \quad F_{\Sigma, m}^{lin}(T_1, C_1) = F_{\Sigma}(T, C) + DF_{\Sigma}(T, C)[(T_1, C_1) - (T, C)].$$

En prenant  $C_1 = 0$ , et vu la propriété (35) on a :

$$(37) \quad F_{\Sigma}(T, C) \simeq DF_{\Sigma}(T, C)[(T, C) - (T_1, 0)].$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\|F_{\Sigma}(T, C)\|_{\mathcal{R}^I} \leq \|DF_{\Sigma}(T, C)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{R}^{2N}, \mathcal{R}^I)} \|(T, C) - (T_1, 0)\|_{\mathcal{R}^{2N}}.$$

En faisant tendre  $T_1$  vers 0, on obtient :

$$\|F_{\Sigma}(T, C)\|_{\mathcal{R}^I} \leq \|DF_{\Sigma}(T, C)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{R}^{2N}, \mathcal{R}^I)} \|(T, C)\|_{\mathcal{R}^{2N}}.$$

On choisit maintenant pour  $m$  le point  $m_0 = (T_0, C_0)$  qui vérifie  $F_\Sigma(m_0) = R_\Sigma^0$ , on a

$$\|DF_\Sigma(m_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{R}^{2N}, \mathcal{R}^I)} = \lambda_1(m_0)$$

donc

$$(38) \quad \|R_\Sigma^0\| \leq \lambda_1(m_0) \|m_0\|.$$

Étant donnée une perturbation  $\epsilon$  des données  $R_\Sigma^0$ , l'objectif est de trouver  $\delta m_0$  qui minimise la fonction :

$$J(\delta m) = \frac{1}{2} \langle (R_\Sigma^0 + \epsilon) - F_\Sigma(m_0 + \delta m), (R_\Sigma^0 + \epsilon) - F_\Sigma(m_0 + \delta m) \rangle.$$

Le problème linéarisé associé est :

$$J_{lin}(\delta m) = \frac{1}{2} \langle \epsilon - DF_\Sigma(m_0)\delta m, \epsilon - DF_\Sigma(m_0)\delta m \rangle.$$

En faisant la décomposition de  $\epsilon$  et  $\delta m_0$  sur les bases des vecteurs singuliers convenables

$$\begin{aligned} \delta m_0 &= \sum_{i=1}^{2N} \delta a_i v_i, \\ \epsilon &= \sum_{i=1}^K \epsilon_i u_i. \end{aligned}$$

On tire l'égalité :

$$\epsilon_i = \lambda_i \delta a_i \quad i = 1, \dots, i_0.$$

D'où :

$$(39) \quad \frac{|\delta a_i|}{\|m_0\|} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \frac{\epsilon_i}{\|R_\Sigma^0\|} \quad i = 1, \dots, i_0.$$

En termes de rapport signal sur bruit en dB, on peut exprimer ce résultat sous la forme suivante :

$$(40) \quad S/B(a_i) \geq S/B(R_{\sigma_i}^0) + (\lambda_i/\lambda_1)_{dB} \quad i = 1, \dots, i_0.$$

D'où pour les indices  $i$  qui vérifient :

$$(\lambda_i/\lambda_1)_{dB} + \min_i S/B(R_{\sigma_i}^0) > 0,$$

on a :

$$S/B(a_i) > 0.$$

C'est à dire que la valeur obtenue de ce paramètre n'est pas totalement embrouillée par le bruit, d'où la définition du nombre  $i_1$  des paramètres identifiables :

$$i_1 = \text{card}\{\lambda_i, \quad -(\lambda_i/\lambda_1)_{dB} < \min_j S/B(R_{\sigma_j}^0)\}.$$

**Paramétrisation** Lorsque le nombre des paramètres identifiables  $i_1$  est inférieur à  $2N$  le nombre des paramètres physiques des profils  $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$  et  $(C_i)_{1 \leq i \leq N}$  (ce sera le cas général dans les applications numériques), on cherche une paramétrisation  $p \mapsto m(p) = (T(p), C(p))$  dépendant d'un nombre des paramètres proche de  $i_1$ . en supposant une certaine forme a priori des profils. Cette forme doit être acceptable du point de vue physique, elle est définie par la donnée de  $P$  valeurs réelles  $p = (p_1, \dots, p_P)$  qui deviennent les nouveaux paramètres à trouver. Par la règle de dérivation des fonctions composées, on a :

$$(41) \quad \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_j}(u_{m(p)}) = \frac{\partial f_\sigma}{\partial m}(u_{m(p)}) \frac{\partial m}{\partial p_j}(p).$$

Pour cette nouvelle paramétrisation, une nouvelle analyse de sensibilité permettant d'évaluer le nombre des nouveaux paramètres que l'on peut effectivement retrouver  $i_P$ , puis une comparaison de  $i_P$  avec  $i_1$  permet de juger l'efficacité de cette paramétrisation. On va étudier quelques paramétrisations dans la section suivante.

## 2.3 Paramétrisation

Différentes paramétrisations sont exposées ici, leur utilité est discutée avec les résultats numériques dans la deuxième partie de cette étude.

### 2.3.1 Normalisation des paramètres physiques

L'objectif est d'éliminer les problèmes de différence de sensibilité par rapport aux variables  $T$  et  $C$ , qui seraient dus au choix d'unités. On impose pour cela que l'intervalle des variations de chaque paramètre est  $[0, 1]$ .

On définit les paramètres physiques normalisés notés  $m_{nor} = (t, c)$ , associés au choix de deux valeurs :  $T_{\max}$  la température maximale et  $C_{\max}$  la concentration maximale, par les formules :

$$(42) \quad t = \frac{T}{T_{\max}} = \left( \frac{T_i}{T_{\max}} \right)_{1 \leq i \leq N}, \quad c = \frac{C}{C_{\max}} = \left( \frac{C_i}{C_{\max}} \right)_{1 \leq i \leq N}.$$

On note :

$$P_N : \Omega \longrightarrow R^{2N} \\ (t, c) \longmapsto (T, C)$$

où

$$\Omega = \{(t, c) \in R^{2N} : 0 \leq t_i \leq 1, 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 1..N\}.$$

Pour ce changement de variable, et pour une fonction  $f_\sigma : m = (T, C) \longmapsto f_\sigma(m)$ , on définit la fonction :

$$(43) \quad f_{\sigma, nor} : m_{nor} = (t, c) \longmapsto f_{\sigma, nor}(m_{nor}) = f_\sigma(m).$$

Dont les dérivées partielles vérifient

$$(44) \quad i \in [1, ..N] \\ \frac{\partial f_{\sigma, nor}}{\partial t_i}(m_{nor}) = T_{\max} \frac{\partial f_\sigma}{\partial T_i}(m). \\ \frac{\partial f_{\sigma, nor}}{\partial c_i}(m_{nor}) = C_{\max} \frac{\partial f_\sigma}{\partial C_i}(m).$$

### 2.3.2 Profils gaussiens

On suppose que la distribution dans l'espace, de la température et de la concentration, suit une loi gaussienne, ce qui revient à écrire :

$$(45) \quad \begin{aligned} i &\in [1, \dots, N] \\ T_i &= T_\infty + \Delta T * \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_T}{\alpha_T} \right)^2 \right], \\ C_i &= C_\infty + \Delta C * \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_C}{\alpha_C} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

On construit ainsi un opérateur noté  $P_G$  défini sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$  par :

$$(46) \quad \begin{aligned} P_G : \Omega &\longrightarrow \mathcal{R}^{2N} \\ (P_T, P_C) &\longmapsto (T, C) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} P_T &= (\Delta T, T_\infty, \alpha_T, x_T) \\ P_C &= (\Delta C, C_\infty, \alpha_C, x_C) \end{aligned}$$

et

$$\Omega \subset \left[ \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_*^+)^3 \right] \times \left[ \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_*^+)^3 \right].$$

La composition de cette application avec  $f_\sigma$  (11) donne :

$$(47) \quad \begin{aligned} f_\sigma \circ P_G : \Omega &\longrightarrow \mathcal{R} \\ P = (P_T, P_C) &\longmapsto f_\sigma(P_G(P)) = L_\sigma(l). \end{aligned}$$

La dérivée de cette application par rapport au paramètre  $p$  est d'après (41):

$$(48) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (f_\sigma \circ P_G)}{\partial p}(P) &= Df_\sigma(T, C) \frac{\partial P_G}{\partial p}(P) \\ p &\in \{\Delta T, T_\infty, \alpha_T, x_T, \Delta C, C_\infty, \alpha_C, x_C\}. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dérivée on utilise les formules suivantes. On va citer les formules associées aux paramètres du profil de température, sachant que celles pour la concentration sont semblables.

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial T_\infty} &= 1, \\ \frac{\partial T_i}{\partial \Delta T} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_T}{\alpha_T} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_T} &= 2 \frac{(x_i - x_T)}{\alpha_T^2} \Delta T \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_T}{\alpha_T} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_T} &= 2 \frac{(x_i - x_T)^2}{\alpha_T^3} \Delta T \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_T}{\alpha_T} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$



**Remarque 9** Pour  $F_\Sigma$  associée à un ensemble des longueurs d'ondes  $\Sigma$ , on obtient une formule semblable :

$$(50) \quad \frac{\partial (F_\Sigma \circ P_G)}{\partial p}(P) = DF_\Sigma(T, C) \frac{\partial P_G}{\partial p}(P).$$

Cela permet de construire la nouvelle matrice de sensibilité par rapport à cette paramétrisation, et de faire l'analyse de sensibilité associée.

**Remarque 10** Une autre paramétrisation mettant l'accent sur la valeur maximale de la température (ou la concentration), s'obtient en remplaçant  $\Delta T$  par  $(T_{max} - T_\infty)$ .

### 2.3.3 Profils à deux maxima

On suppose que la distribution de la température et celle de la concentration ont la forme suivante:

$$(51) \quad \begin{aligned} i &\in [1, \dots, N] \\ T_i &= T_\infty + \Delta T_1 \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,1}}{\alpha_{T,1}} \right)^2 \right] + \Delta T_2 \exp \left[ - \left( \frac{x - x_{T,2}}{\alpha_{T,2}} \right)^2 \right], \\ C_i &= C_\infty + \Delta C_1 \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{C,1}}{\alpha_{C,1}} \right)^2 \right] + \Delta C_2 \exp \left[ - \left( \frac{x - x_{C,2}}{\alpha_{C,2}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'opérateur  $P_{2G}$  est défini par :

$$(52) \quad \begin{aligned} P_{2G} : \Omega \subset \mathcal{R}^7 \times \mathcal{R}^7 &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (P_T, P_C) &\longmapsto (T, C) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_T &= (T_\infty, \Delta T_1, \Delta T_2, \alpha_{T,1}, \alpha_{T,2}, x_{T,1}, x_{T,2}) \\ P_C &= (C_\infty, \Delta C_1, \Delta C_2, \alpha_{C,1}, \alpha_{C,2}, x_{C,1}, x_{C,2}) \end{aligned}$$

et

$$\Omega \subset \left[ R_*^+ \times R^2 \times (R_*^+)^4 \right] \times \left[ R_*^+ \times R^2 \times (R_*^+)^4 \right].$$

Les formules suivantes permettent de calculer numériquement les dérivées par rapport aux paramètres de  $P_T$  :

$$(53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial T_\infty} &= 1, \\ \frac{\partial T_i}{\partial \Delta T_1} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,1}}{\alpha_{T,1}} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial T_i}{\partial \Delta T_2} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,2}}{\alpha_{T,2}} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_{T,1}} &= 2 \frac{x_i - x_{T,1}}{\alpha_{T,1}^2} \Delta T_1 \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,1}}{\alpha_{T,1}} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_{T,2}} &= 2 \frac{x_i - x_{T,2}}{\alpha_{T,2}^2} \Delta T_2 \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,2}}{\alpha_{T,2}} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_{T,1}} &= 2 \frac{(x_i - x_{T,1})^2}{\alpha_{T,1}^3} \Delta T_1 \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,1}}{\alpha_{T,1}} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial \alpha_{T,2}} = 2 \frac{(x_i - x_{T,2})^2}{\alpha_{T,2}^3} \Delta T_2 \exp \left[ - \left( \frac{x_i - x_{T,2}}{\alpha_{T,2}} \right)^2 \right].$$

**Remarque 11** Pour un ensemble de longueurs d'onde  $\Sigma$ , on construit la matrice de sensibilité de l'application  $F_\Sigma \circ P_{2G}$  pour voir le comportement de cet ensemble via la paramétrisation  $P_{2G}$ .

**Remarque 12** Des cas particuliers de cette paramétrisation sont envisagés, par exemple quand  $\alpha_{T,1} = \alpha_{T,2}$  et  $x_{T,1} = l - x_{T,2}$  (pareil pour la concentration), ou bien quand on a une symétrie totale :  $\alpha_{T,1} = \alpha_{T,2}$ ,  $x_{T,1} = l - x_{T,2}$ , et  $\Delta T_1 = \Delta T_2$  (de même pour la concentration).

**Remarque 13** Autre paramétrisation issue de celle-là consiste à remplacer  $\Delta T$  par  $T_{max} - T_\infty$ , de même pour la concentration. L'utilité de cette paramétrisation se lit sur les vecteurs singuliers associés (voir section 3.4).

## 2.4 Identification

On dispose d'un ensemble des longueurs d'onde  $\Sigma$ , et des mesures des luminances  $L_\Sigma^{mes}$  associées à  $\Sigma$ . Nous allons donner un poids positif à chaque longueur d'onde, exprimant l'importance qu'on donne au rôle de la mesure associée dans le problème d'identification. Le vecteur des poids est noté  $W$ . L'application  $F_\Sigma$  définie par (12) est établie numériquement.

### 2.4.1 Fonction coût

**Définition 14** Pour une paramétrisation des profils  $p \mapsto P(p)$  définie sur un domaine  $\Omega$ , on définit la fonction coût associée aux mesures  $L_\Sigma^{mes}$  par :

$$\begin{aligned} J(p) &= \frac{1}{2} \|F_\Sigma \circ P(p) - L_\Sigma^{mes}\|_W^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I W(i) (f_{\sigma_i} \circ P(p) - L_{\sigma_i}^{mes})^2. \end{aligned}$$

L'objectif est de trouver les paramètres  $p_s \in \Omega$ , qui minimisent la fonction coût  $J$  sur  $\Omega$ . C'est un problème d'optimisation, avec des contraintes de borne simples.

Pour un paramètre  $p_j$ , la dérivée partielle de  $J$  est donnée par :

$$\frac{\partial J}{\partial p_j}(p) = \sum_{i=1}^I \frac{\partial f_{\sigma_i} \circ P}{\partial p_j}(p) W(i) (f_{\sigma_i} \circ P(p) - L_{\sigma_i}^{mes}).$$

### 2.4.2 Stratégie d'inversion

Une première étape est de choisir l'ensemble des longueurs d'onde  $\Sigma$  permettant de retrouver le plus d'information sur les profils. On dispose d'un profil de température et d'un profil de concentration et on utilise la paramétrisation physique normalisée, qui est la paramétrisation la plus riche, pour faire l'étude de sensibilité. Ainsi pour un niveau de bruit de 1%, et pour plusieurs choix des ensembles des longueurs d'ondes, une estimation du nombre  $i_1$ , représentant la quantité d'information pouvant être retrouvée, est obtenue. Ce nombre  $i_1$  évalue la quantité d'information de l'ensemble  $\Sigma$  relativement à l'ensemble de toutes les longueurs d'onde. De plus  $i_1$  associé à  $\Sigma$  détermine le nombre maximal des paramètres identifiables, en conséquence le choix de la paramétrisation des profils est contraint par ce nombre. Après paramétrisation, une nouvelle étude de sensibilité par rapport aux nouveaux paramètres permet d'évaluer  $i_P$  le nombre des paramètres identifiables pour le même niveau de bruit 1%. La paramétrisation est intéressante si la perte  $(i_1 - i_P)$  en régularisant est relativement petite. En fonction de  $i_P$ , un choix des paramètres les plus "importants" à retrouver est fait. Les outils sont maintenant prêts pour faire l'inversion par optimisation sur des données synthétiques ou réelles associées à l'ensemble  $\Sigma$ , et issues de même type de profils.

### 3 Résultats Numériques

**Préliminaires** Ici nous présentons quelques règles pour lire les figures que l'on trouve dans cette section :

- Les valeurs singulières sont en ordre décroissant donc le rapport  $-(\lambda_i/\lambda_1)_{dB}$  est croissant. Pour la présentation des valeurs singulières, on s'est restreint à 10 valeurs maximum. Un trait correspondant à un bruit de 1% est tracé (exemple figure 16).
- Les huit premiers vecteurs singuliers sont représentés de gauche à droite et de haut en bas. Une ligne verticale coupant parfois les vecteurs singuliers en deux parties, la première correspond aux paramètres de la température, et la seconde correspond à ceux de la concentration (exemple figure 2).
- Dans les tests de l'identification, les courbes bleues, correspondent aux quantités cherché (données synthétiques ou données réelles), les courbes vertes correspondent aux quantités initiales, et courbes rouges correspondent aux quantités trouvées par optimisation (exemple figure 3).

#### 3.1 Paramètres physiques non normalisés

L'ensemble des longueurs d'onde  $\Sigma$  est formé de toutes les longueurs d'ondes dans l'intervalle  $[2379, 2397] \text{ cm}^{-1}$ , faisant 901 longueurs d'onde.

Les paramètres sont  $T = (T_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,  $C = (C_i)_{1 \leq i \leq N}$  associés à une subdivision de l'intervalle  $[0, l]$ . Les profils de température et de concentration sont ceux de la figure 5 et la figure 6 représente la luminance  $F_\Sigma(T, C)$  engendrée.

##### 3.1.1 Analyse de sensibilité

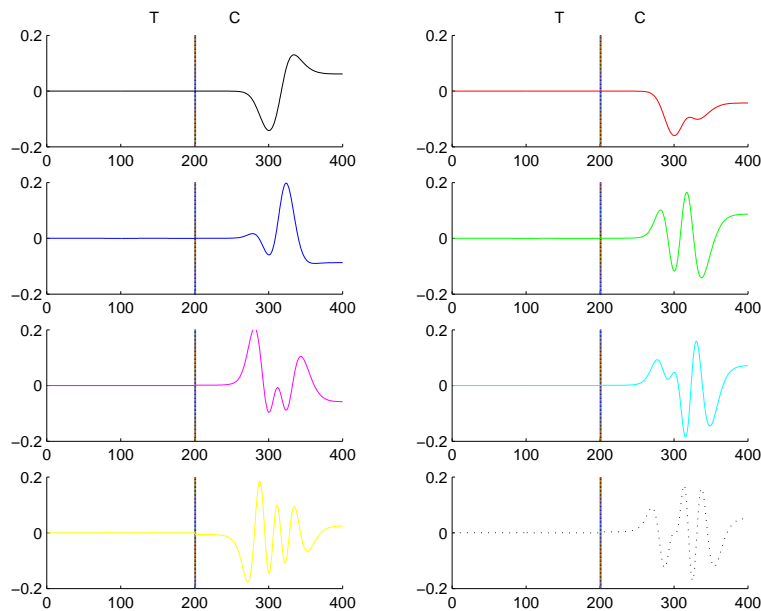


FIG. 2: Vecteurs singuliers dans l'espace des paramètres physiques non normalisés.

On constate sur la figure 2 que les composantes des vecteurs singuliers correspondants à la concentration sont dominantes, ce qui implique une perte de l'information portée par les composantes associées à la température.

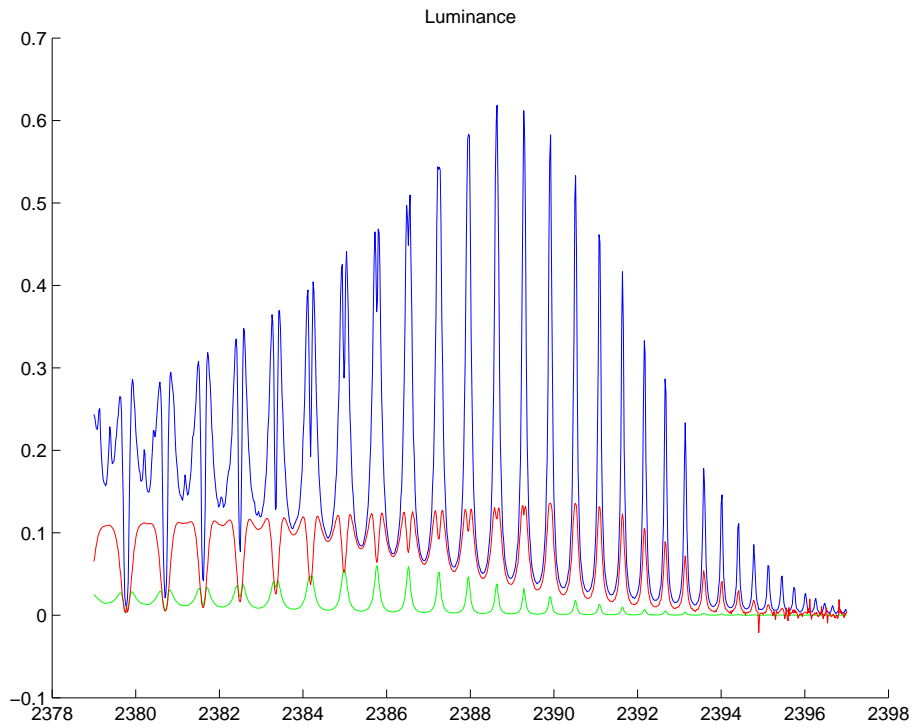


FIG. 3: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge).*

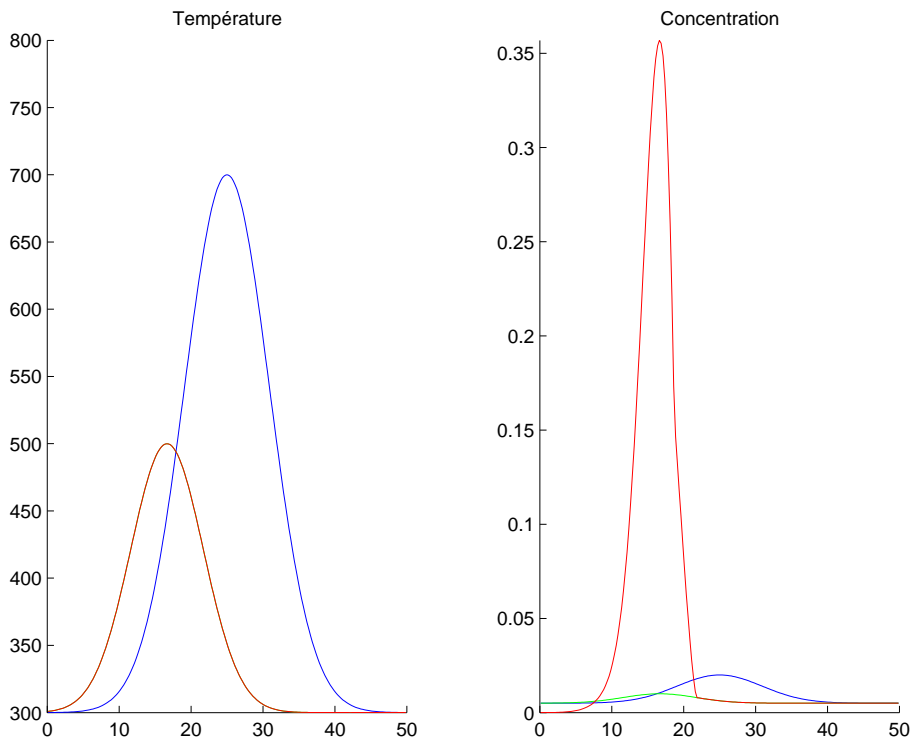


FIG. 4: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge).*

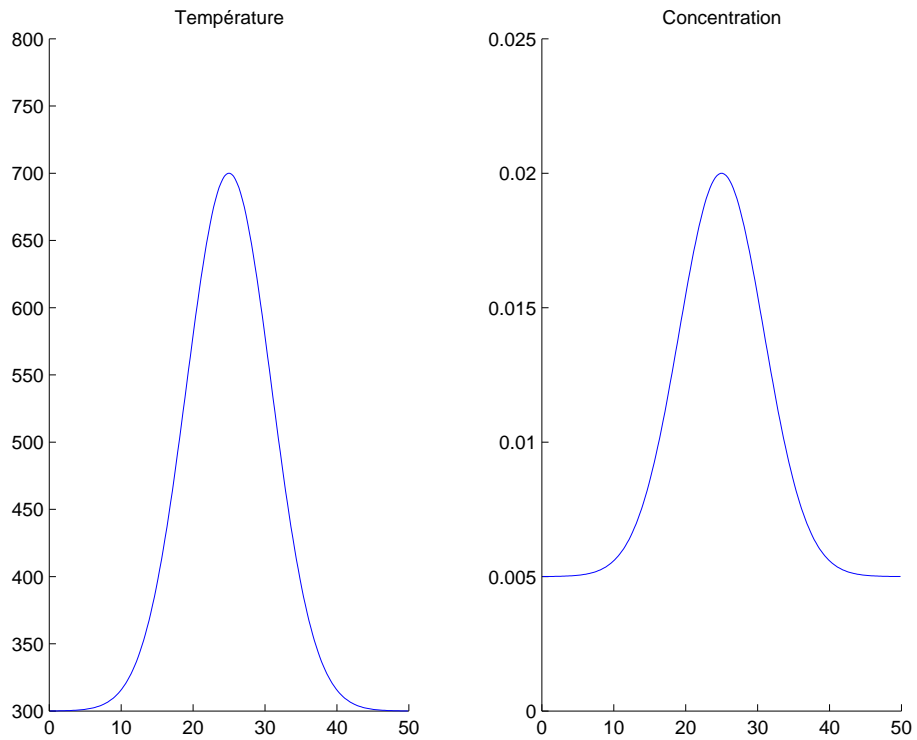


FIG. 5: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) de type gaussien.*

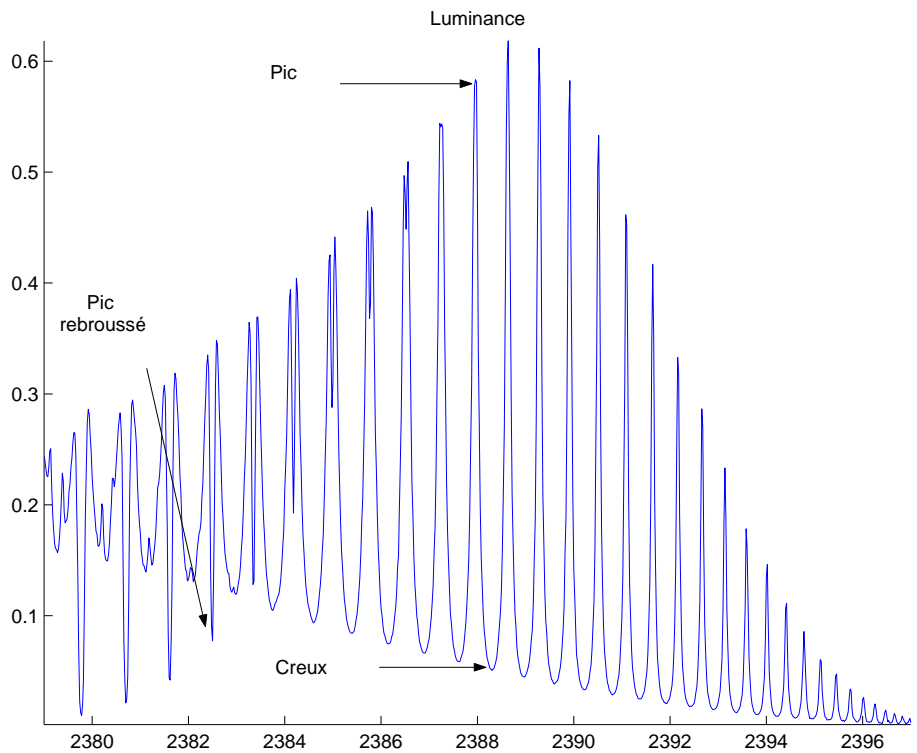


FIG. 6: *Luminances correspondant aux profils de la figure 5. Définition des pics, creux et rebroussements.*

### 3.1.2 Identification

La perte d'information lue précédemment sur les vecteurs singuliers implique une mauvaise identification. Le profil de température trouvé (figure 4) coïncide au profil initial, cela est dû au manque de sensibilité par rapport à la température, en conséquence l'optimiseur n'arrive pas à identifier le spectre d'émission (figure 3).

**Conclusion 15** *Cette paramétrisation n'est pas convenable pour le problème étudié. Pour la suite la normalisation des paramètres est indispensable.*

## 3.2 Choix d'un ensemble de longueurs d'onde

La paramétrisation physique, étant la plus riche en paramètres, sera utilisée pour analyser, en un point  $(t, c)$ , l'information contenue dans un ensemble de longueurs d'onde  $\Sigma$ . cette analyse est effectuée sur des spectres synthétiques obtenues à partir de plusieurs profils de température et de concentration afin de voir l'influence de leur forme sur le contenu de cette analyse.

### 3.2.1 Spectres générés par des profils gaussiens centrés

Les profils de température et de concentration sont données par la figure 5 et la luminance engendrée est donnée par la figure 6.

**Les "Pics"** Dans l'intervalle  $[2379, 2387] \text{ cm}^{-1}$ , on voit que les pics ont tendance à rebrousser, passant de maximum local au minimum local ( $\mathfrak{P}_1$ ) donc des nouveaux maxima locaux ( $\mathfrak{P}_2$ ) sont apparus, situés de part et d'autre de chaque pic rebroussé. Ici nous comparons la sensibilité associée à  $\mathfrak{P}_1$  et à  $\mathfrak{P}_2$ . La figure 6 montre ce phénomène.

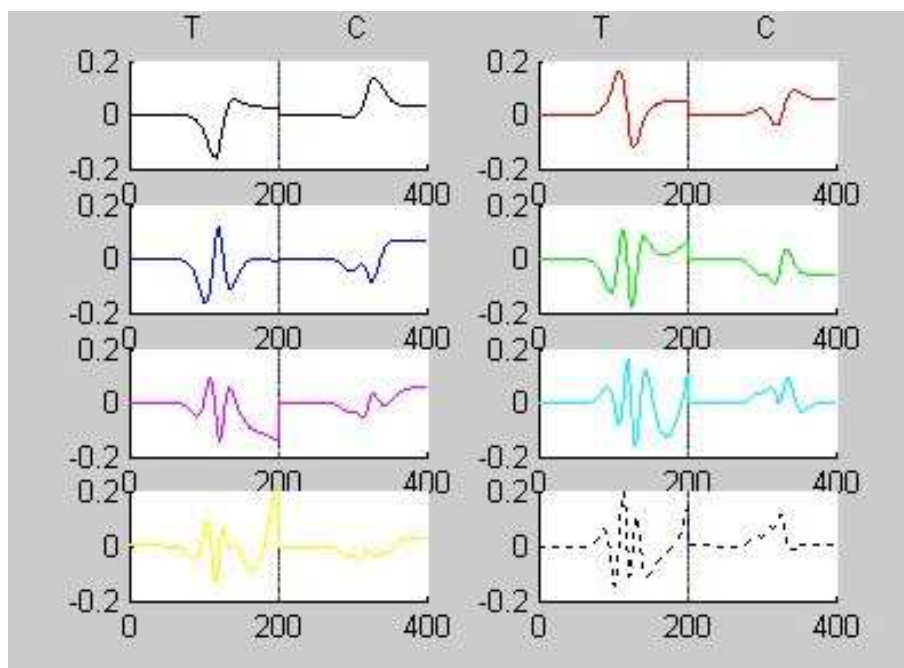


FIG. 7: Vecteurs singuliers pour les mesures correspondant aux pics rebroussés  $\mathfrak{P}_1$ .

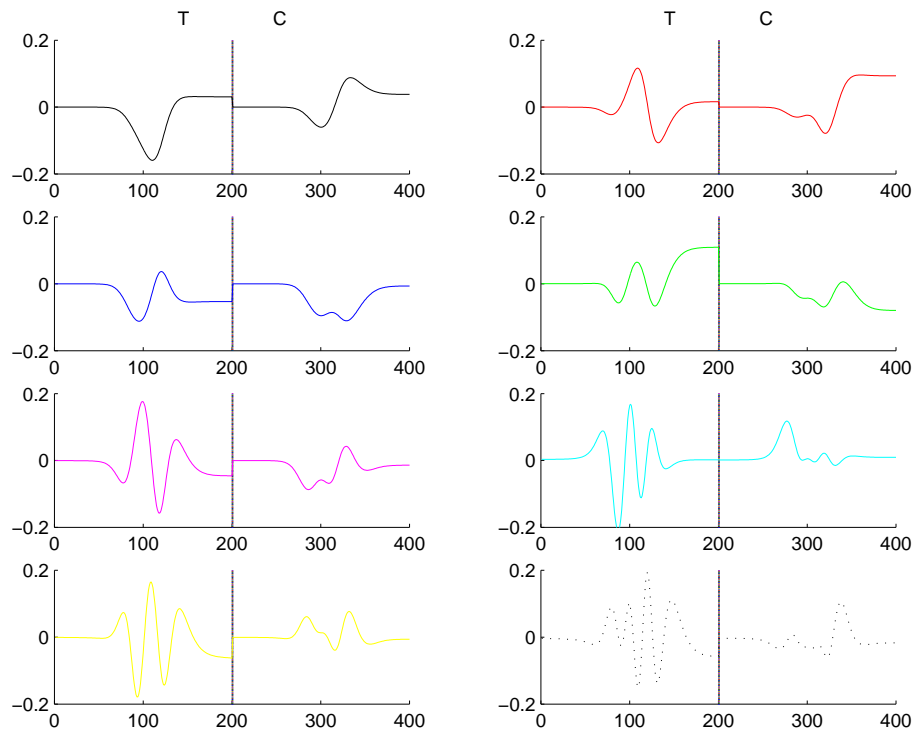


FIG. 8: Vecteurs singuliers pour les mesures correspondant aux maxima locaux de luminance  $\mathfrak{P}_2$ .

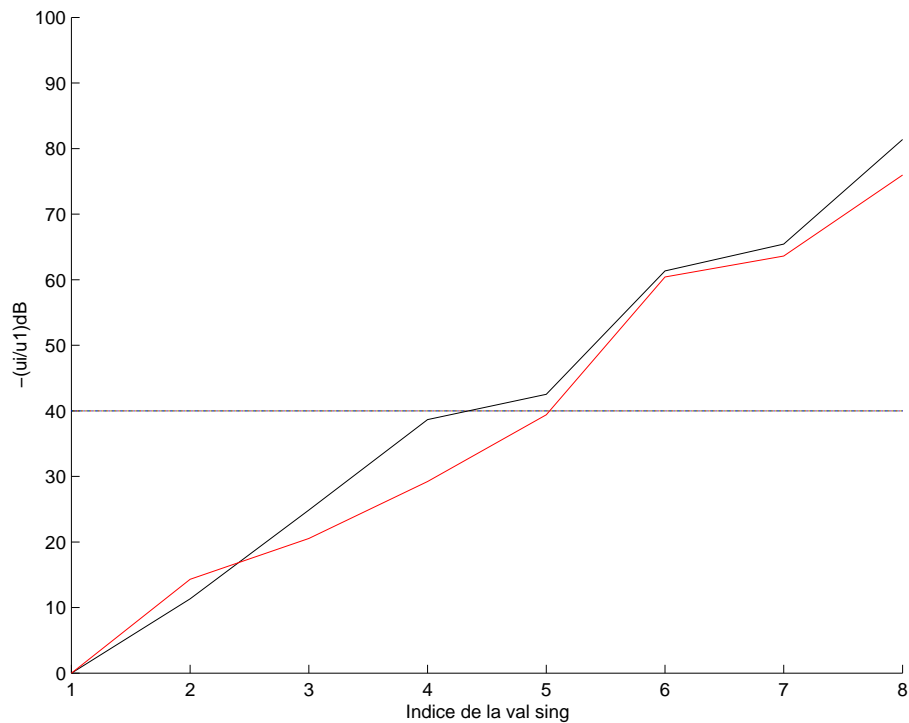


FIG. 9: Valeurs singulières pour les Pics (comparaison des pics rebroussés et des maxima locaux de luminance).

D'après la figure 7 on remarque que le premier vecteur singulier des  $\mathfrak{P}_1$  pointe mieux vers le maximum de la concentration, tandis que le nombre des paramètres identifiables associés au niveau de bruit de 40dB favorise l'ensemble  $\mathfrak{P}_2$  (figure 9).

**Conclusion 16** *On utilisera désormais  $\mathfrak{P}_1$  comme ensemble des Pics dans l'intervalle  $[2379, 2387] \text{ cm}^{-1}$ .*

**Les "Creux"** Les Creux sont les longueurs d'onde correspondantes aux minima locaux de la luminance. Le phénomène de rebroussement fait apparaître des nouveaux creux, et nous allons voir si ces creux vont ajouter de l'information.

On note  $\mathfrak{C}_1$  les creux sans les pics rebroussés, et  $\mathfrak{C}_2$  l'ensemble de  $\mathfrak{C}_1$  et des pics rebroussés.

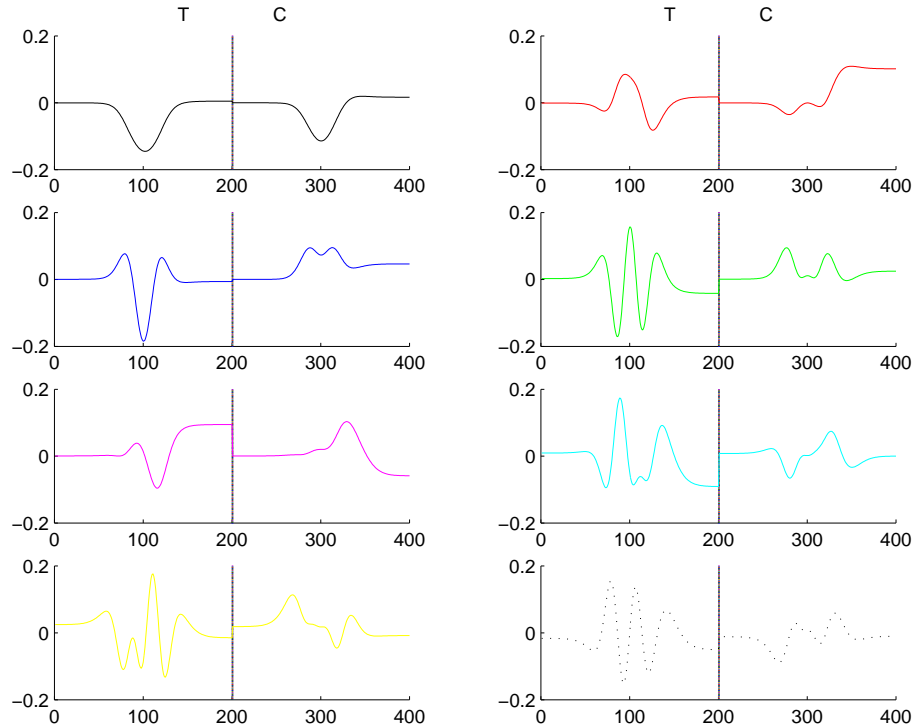


FIG. 10: Vecteurs singuliers pour les mesures correspondant aux creux  $\mathfrak{C}_1$ .

En comparant les figures 7 et 11, nous remarquons que les pics rebroussés imposent l'allure du premier vecteur singulier, ce vecteur pour les  $\mathfrak{C}_1$  pointe mieux vers les maxima de température et de concentration. Par contre, l'information est mieux répartie sur les valeurs singulières pour  $\mathfrak{C}_2$  que pour  $\mathfrak{C}_1$  vu la figure figure 12.

**Conclusion 17** *Désormais on considère  $\mathfrak{C}_1$  comme l'ensemble des Creux et on le note  $\mathfrak{C}$ .*

**Comparaison des Pics, Creux, Pics et Creux, et Toutes les longueurs d'onde** On citera ici les vecteurs singuliers associés aux ensembles Pics (figure 13), Pics et Creux (figure 14) et Toutes les longueurs d'onde (figure 15), pour les Creux on fait référence à la figure 10.

**Conclusion 18** *Le premier vecteur singulier des Creux pointe le mieux vers les maxima de température et de concentration. D'après la figure 16 les longueurs d'onde Pics, Pics et Creux, et Toutes les longueurs d'onde ont un comportement similaire, tandis que les Creux sont distinguées par le fait que les premières valeurs singulières sont dominantes vu la croissance de leur courbe. On peut prévoir que les Pics (ou bien un des deux ensembles Pics et Creux, et Toutes les longueurs d'onde) avantagent une recherche d'un nombre des paramètres plus grand que celui accessibles par les Creux.*



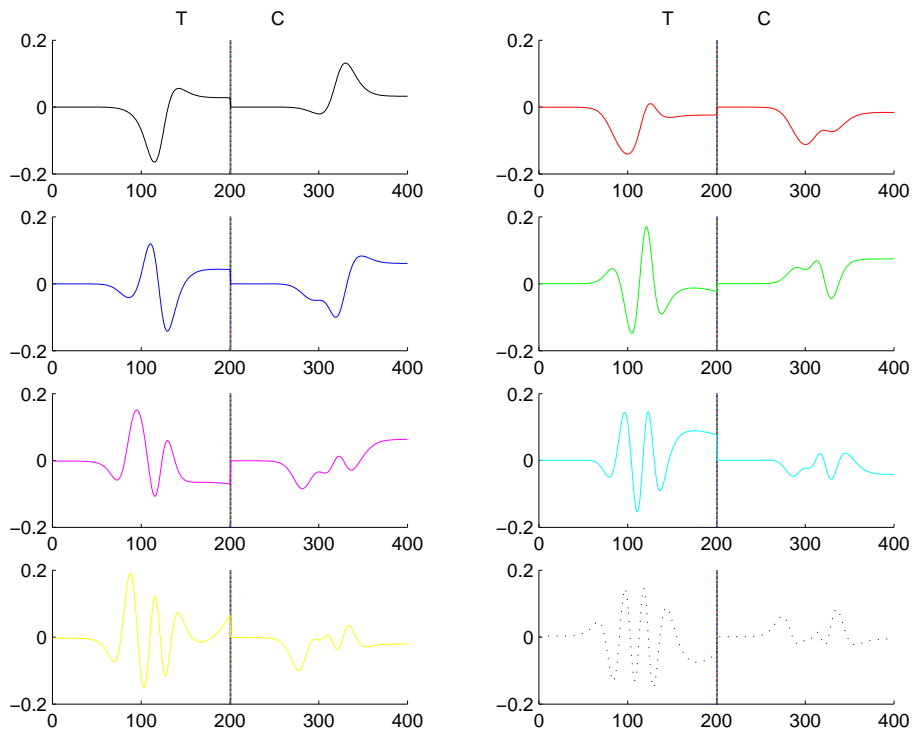


FIG. 11: Vecteurs singuliers pour les mesures correspondant aux creux et aux pics rebroussés  $\mathcal{C}_2$ .

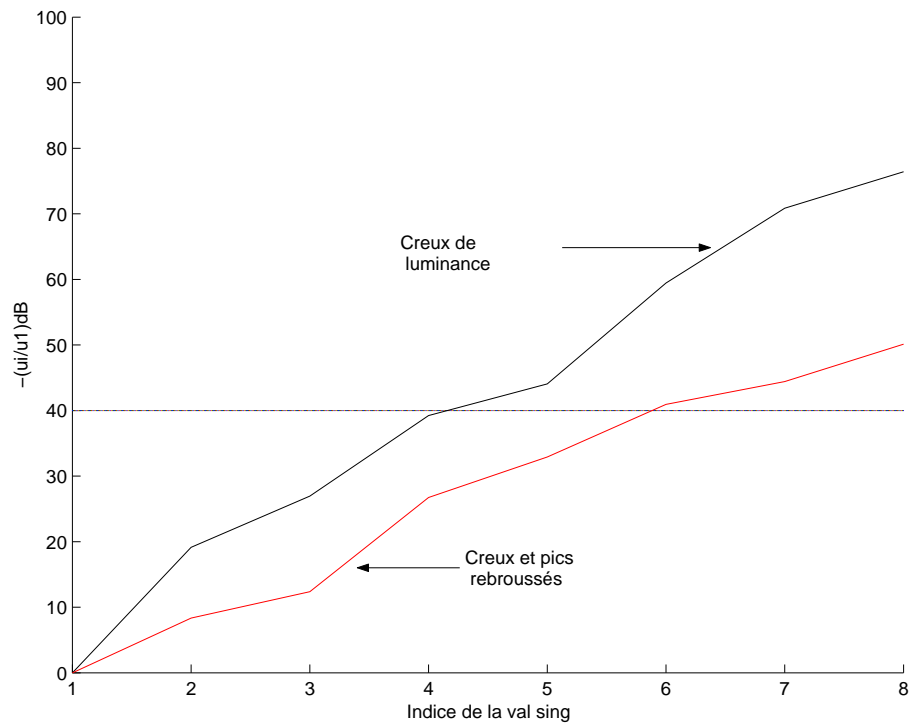


FIG. 12: Valeurs singulières pour les Creux (comparaison des creux seuls et des creux associés aux pics rebroussés).

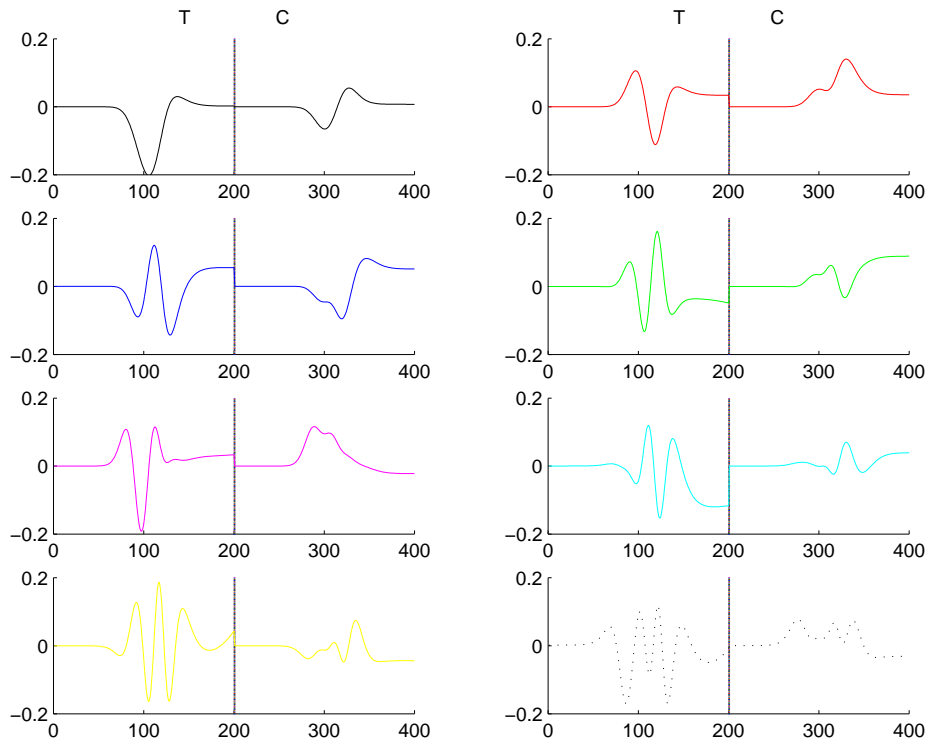


FIG. 13: *Vecteurs singuliers associés aux Pics.*

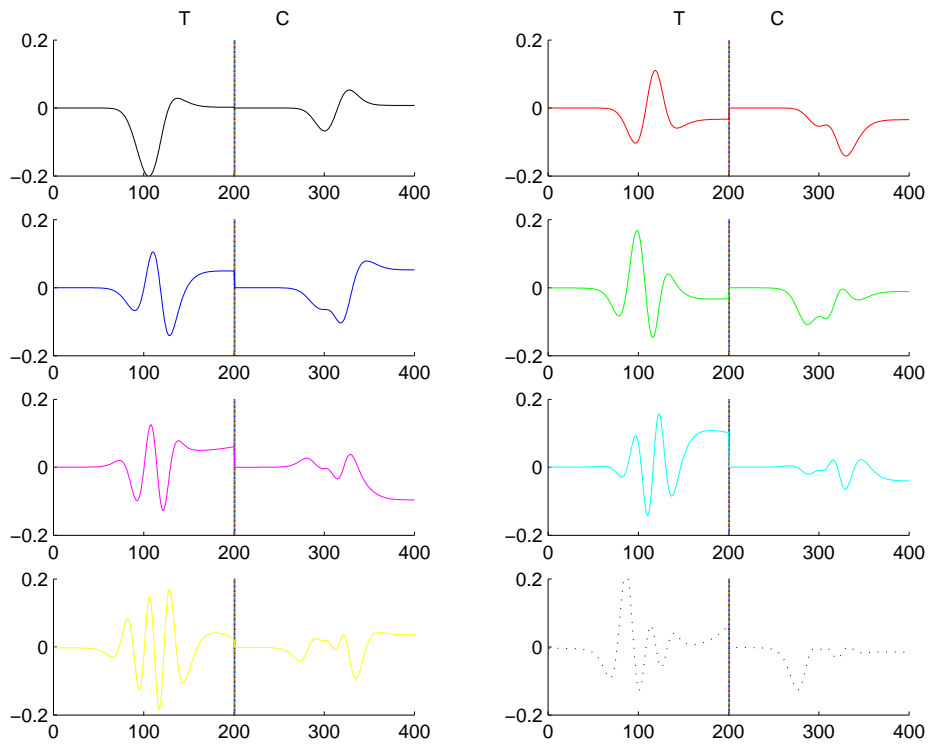


FIG. 14: *Vecteurs singuliers associés aux Pics et Creux.*

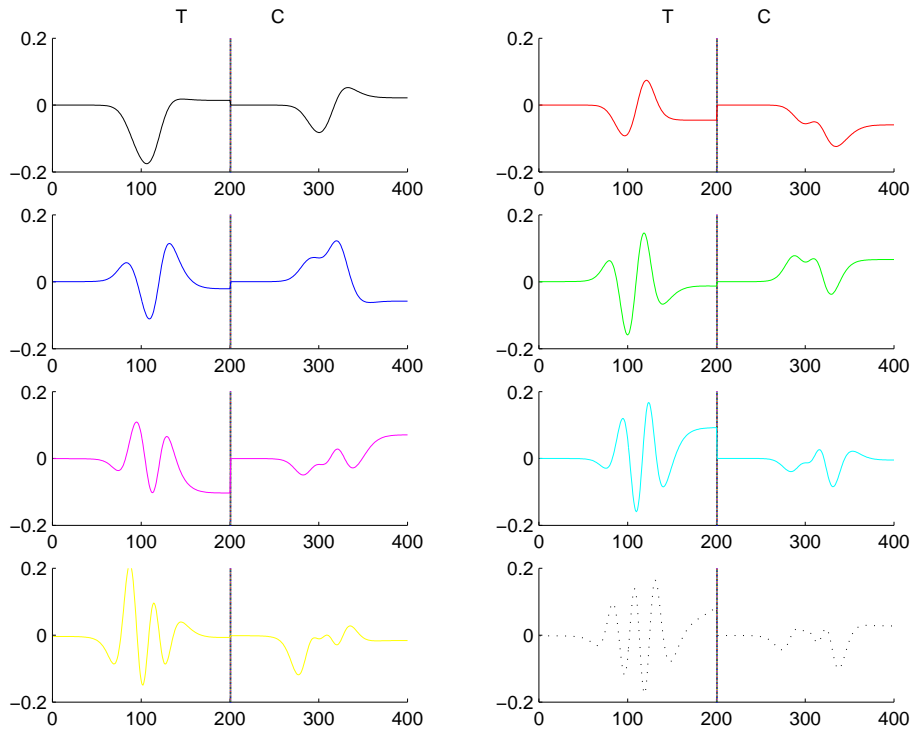


FIG. 15: Vecteurs singuliers pour toutes les longueurs d'onde.

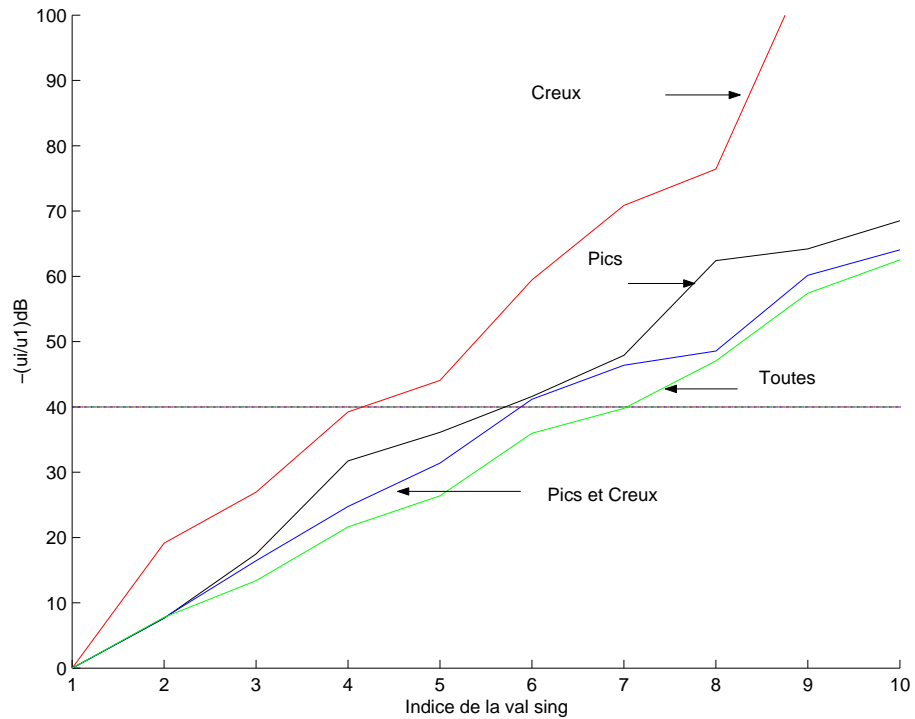


FIG. 16: Valeurs singulières pour les différents ensembles de longueurs d'onde (Pics, Creux, Pics et Creux, Toutes).

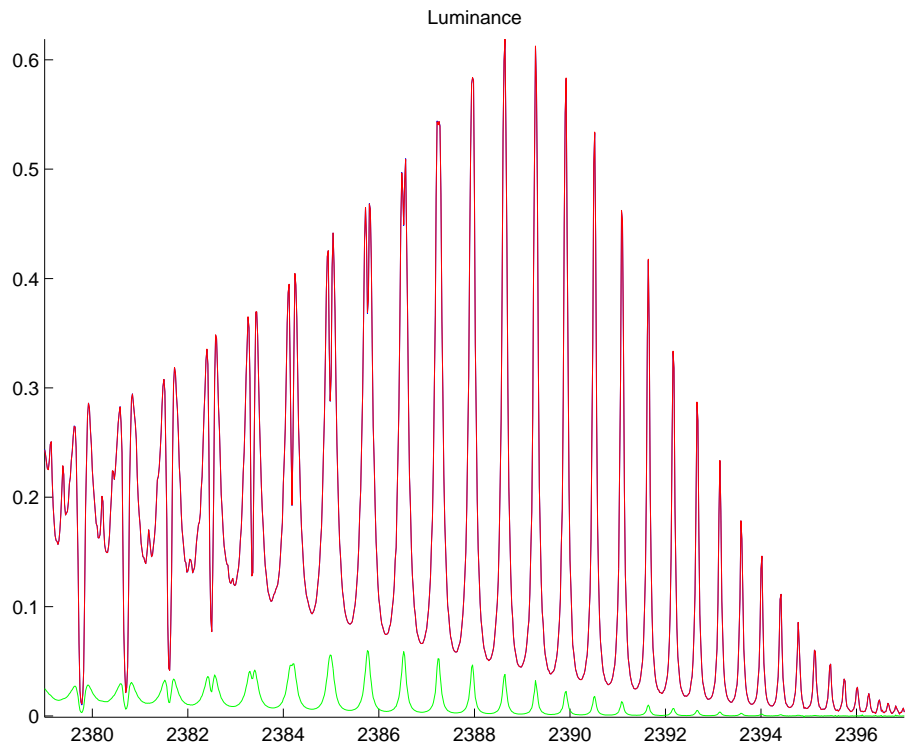


FIG. 17: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge).

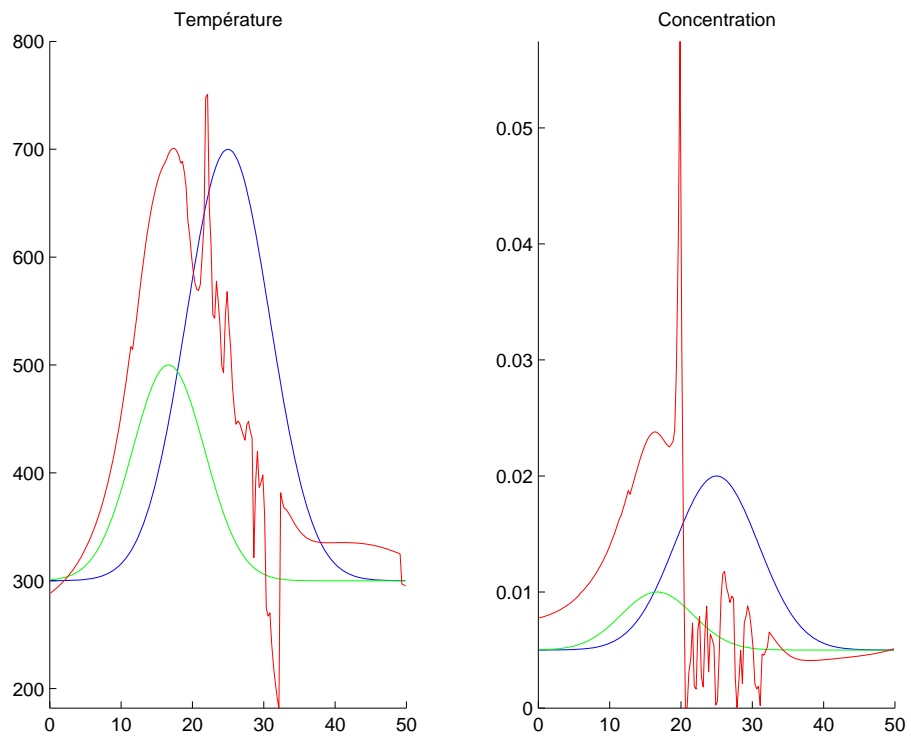


FIG. 18: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge).

**Identification** Bien que le nombre des paramètres ici (400 paramètres, 200 paramètres par profil) est beaucoup plus grand que le nombre des paramètres identifiables (7 paramètres) obtenu par l'étude de sensibilité, on effectue une minimisation sur des données synthétiques engendrées par les profils figure 5, et les résultats sont donnés dans les figures 17 et 18.

La normalisation a amélioré la sensibilité par rapport à la température. Pourtant, le nombre des paramètres à trouver (400 paramètres) est très loin pour être atteint.

**Conclusion 19** *La régularisation par paramétrisation est indispensable pour diminuer le nombre des paramètres cherchés.*

### 3.2.2 Spectres générés par des profils gaussiens excentrés

Les profils de température et de concentration sont donnés par la figure 19, et les spectres de luminance sont donnés à la figure 20.

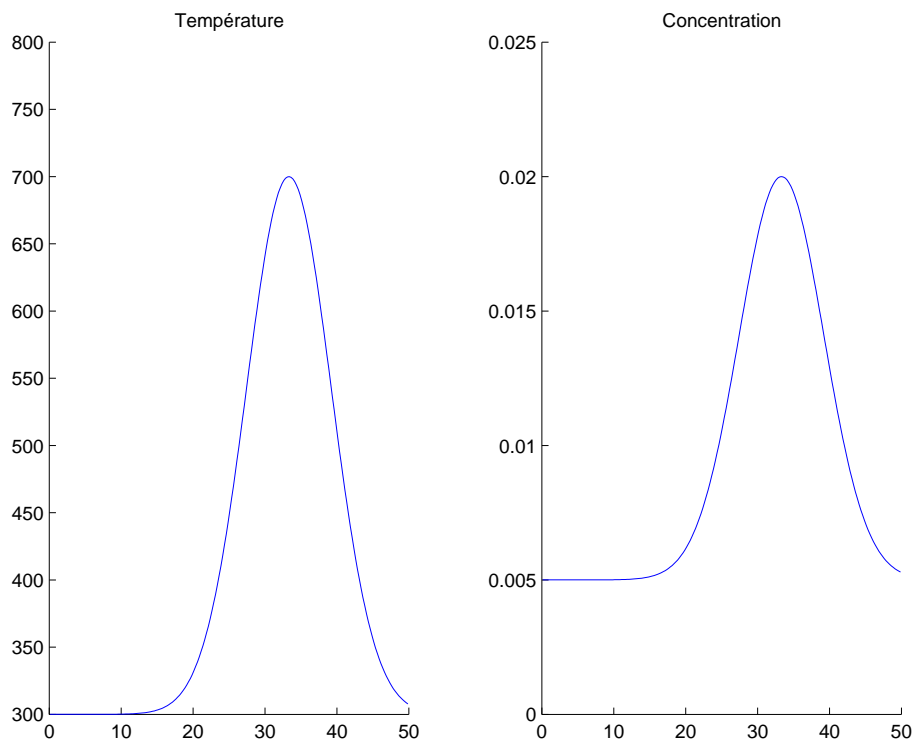


FIG. 19: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) de type gaussien excentré.*

**Comparaison des Pics, Creux, Pics et Creux, et Toutes les longueurs d'onde** La figure 21 contient les courbes représentant la croissance des valeurs singulières pour les différents ensembles des longueurs d'onde. Par contre les vecteurs singuliers sont omis car leur comportement est similaire au cas précédent. Le premier vecteur singulier continue à pointer vers les maxima de température et de concentration donc décalés un peu plus vers la droite par rapport au cas dernière.

**Conclusion 20** *On a la même conclusion que précédemment.*

### 3.2.3 Spectres générés par des profils à deux maxima

Les profils et leurs luminance sont représentés aux figures 22 et 23.

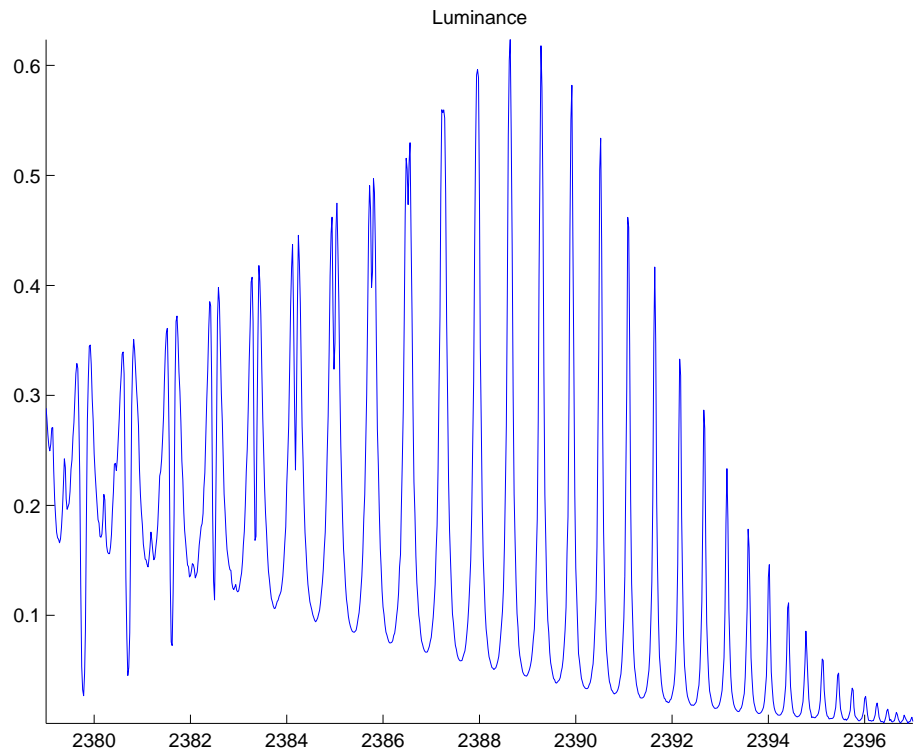


FIG. 20: Luminances pour les profils gaussiens excentrés de la figure 19.

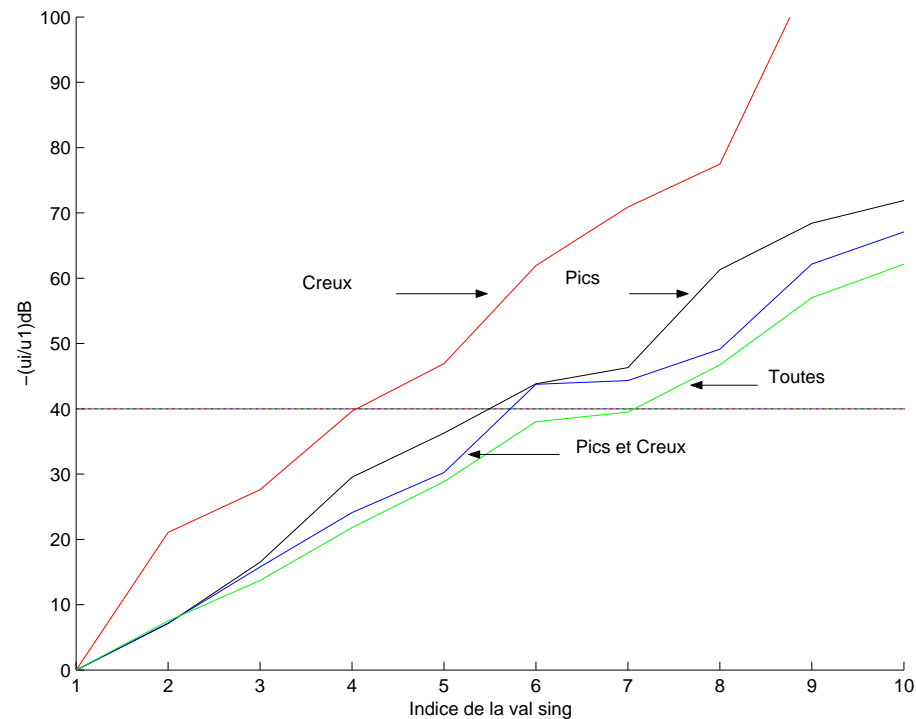


FIG. 21: Valeurs singulières dans le cas des profils gaussiens excentrés pour les différents ensembles de longueurs d'onde (comparaison des Pics, Creux, Pics et Creux, Toutes).

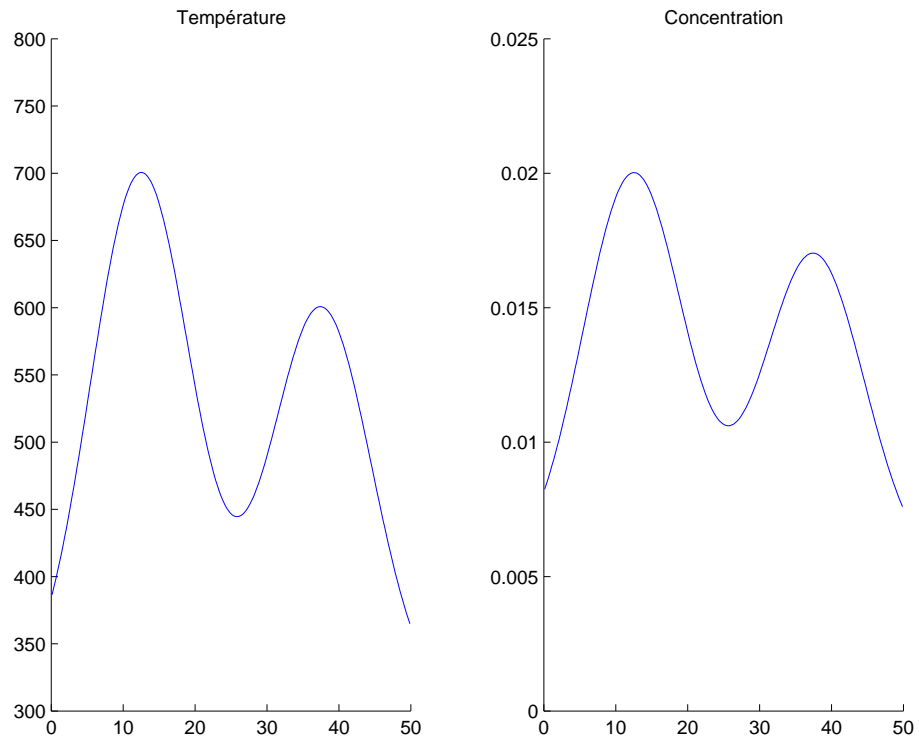


FIG. 22: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) de type à deux maxima.*

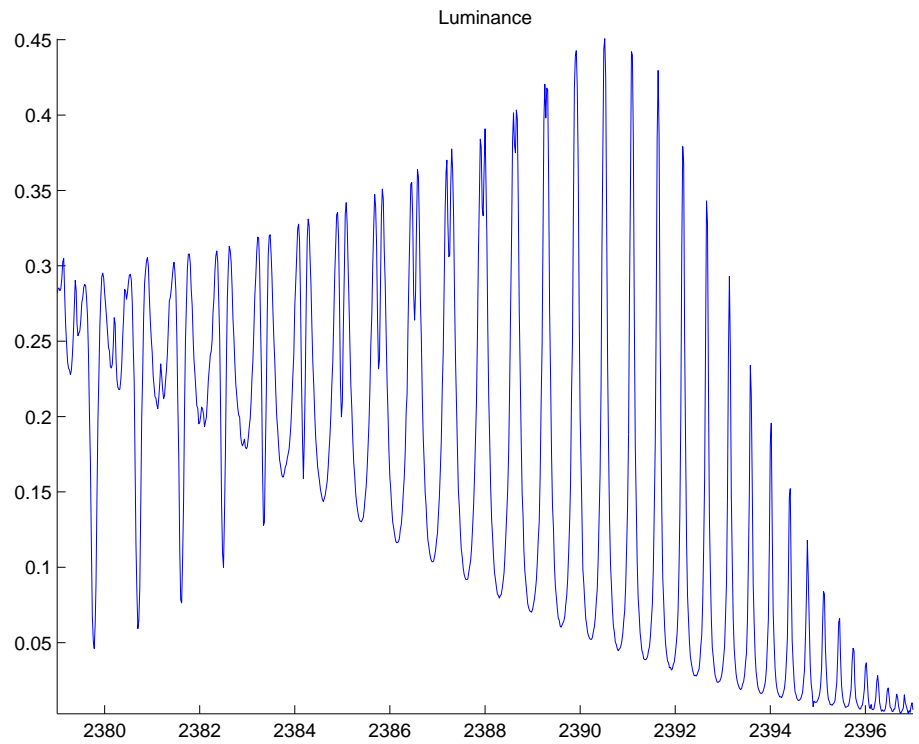


FIG. 23: *Luminances pour les profils à deux maxima de la figure 22.*

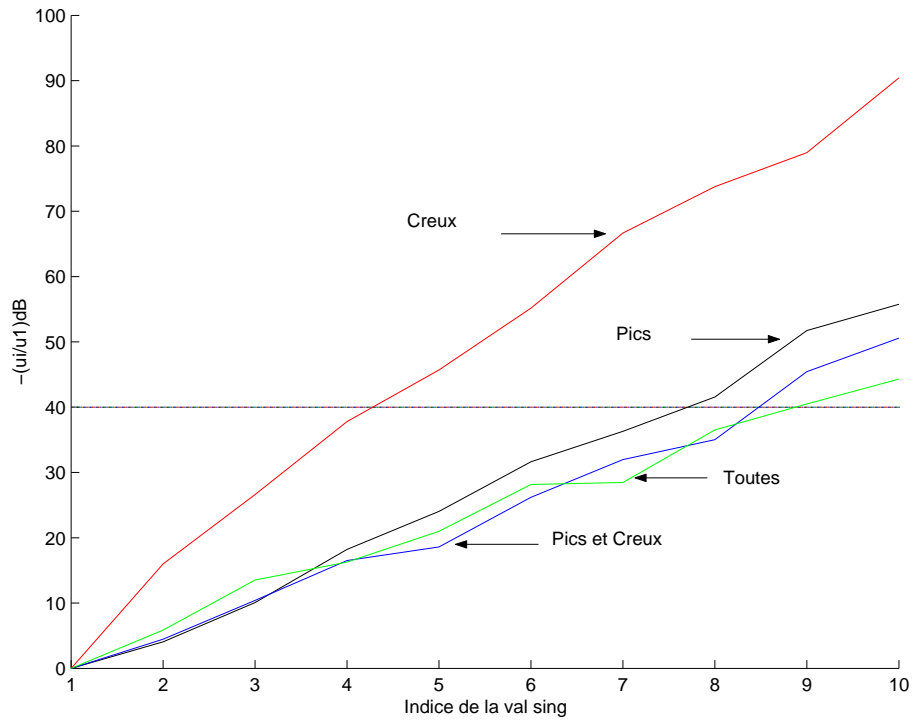


FIG. 24: Valeurs singulières dans le cas des profils à deux maxima pour les différents ensembles de longueurs d'onde (Pics, Creux, Pics et Creux, Toutes).

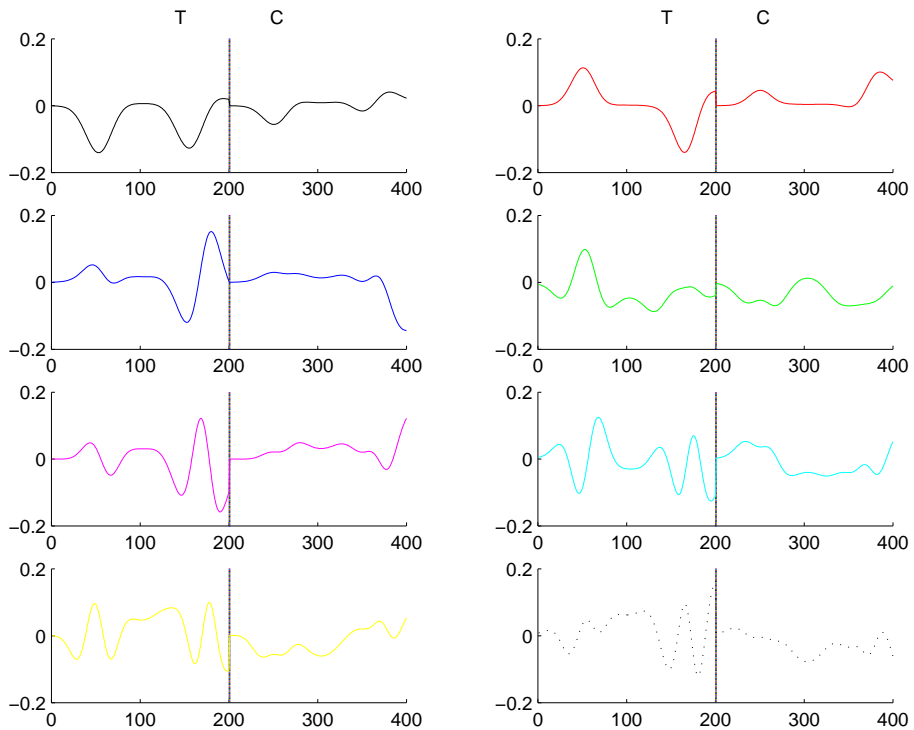


FIG. 25: Vecteurs singuliers pour les Pics et Creux.



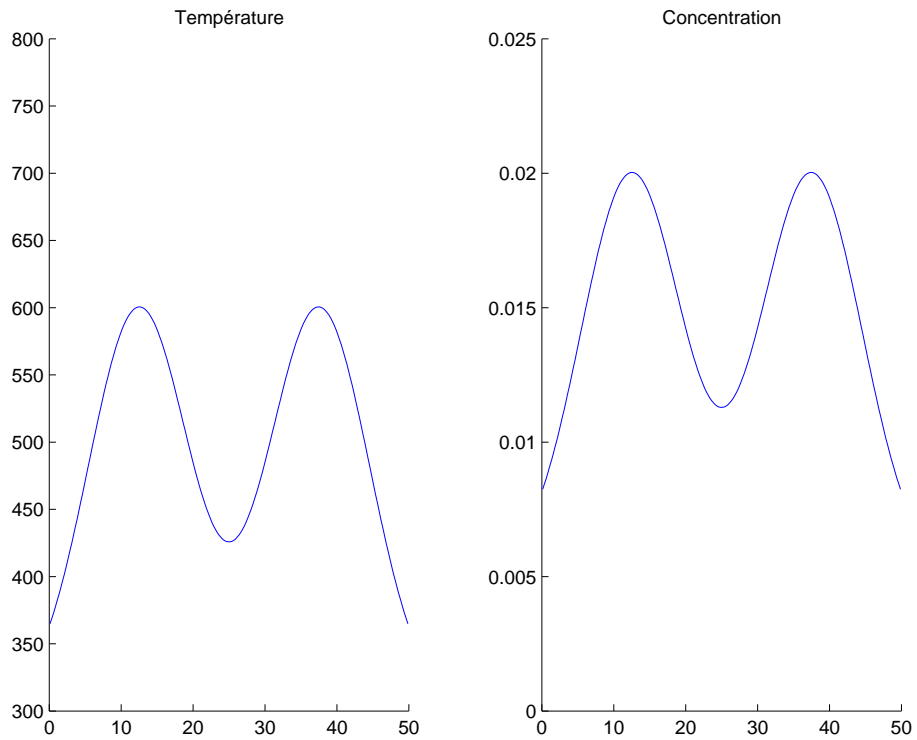


FIG. 26: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) de type à deux maxima symétriques.*

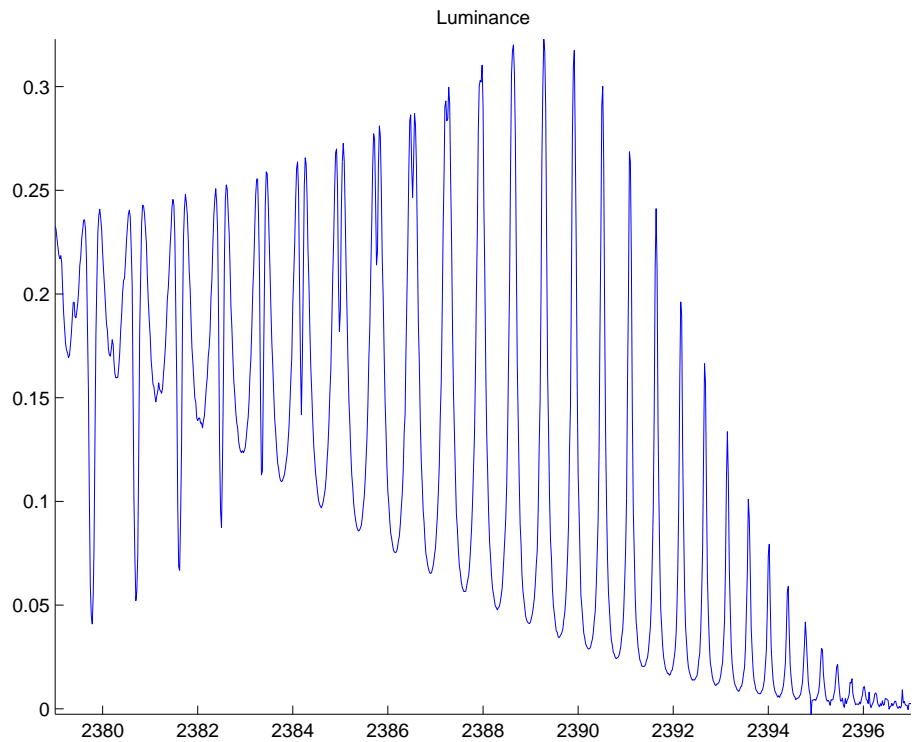


FIG. 27: *Luminances pour les profils à deux maxima symétriques de la figure 26.*

**Analyse de sensibilité** La complexité plus grande des profils de température et de concentration semble engendrer des données contenant plus d'information (presque 9 paramètres pour le cas Pics et Creux, figure 24).

**Conclusion 21** *Les Pics et Creux ont un bon comportement.*

Les vecteurs singuliers des Pics et Creux sont représentés à la figure 25. Le premier vecteur singulier pointe toujours vers les valeurs maximales de température et de concentration.

### 3.2.4 Spectres générés par des profils à deux maxima parfaitement symétriques

Les profils sont représentés à la figure 26 et les luminances à la figure 27. Ayant constaté le même comportement des longueurs d'onde que précédemment pour ces profils, on ne cite pas ici les courbes correspondantes.

## 3.3 Paramétrisation par des gaussiennes

Les profils et la luminance sont donnés par les figures 5 et 6. On fait référence à la section Paramétrisation pour les formules utilisées.

### 3.3.1 Analyse de sensibilité pour le premier jeu de 8 paramètres

Pour la première paramétrisation, les paramètres sont  $(\Delta T, T_\infty, \alpha_T, x_T, \Delta C, C_\infty, \alpha_C, x_C)$ . La figure 28 décrit les comportements des différents groupes de longueurs d'onde. Vu le nombre de longueurs d'onde dans chacun des ensembles précédents, cette comparaison avantage les Pics et Creux et les Pics.

Les vecteurs singuliers des Pics et Creux pour cette paramétrisation sont donnés à la figure 29. L'allure du premier vecteur singulier montre que l'action de notre opérateur est la plus forte dans la direction de  $T_{max} = T_\infty + \Delta T$

### 3.3.2 Analyse de sensibilité pour le second jeu de 8 paramètres

Pour la seconde paramétrisation pour laquelle  $\Delta T$  est remplacé par  $T_{max}$ , on trouve des résultats similaires au cas précédent pour les courbes des valeurs singulières (voir la figure 30).

L'effet de cette paramétrisation se voit sur l'allure des vecteurs singuliers, on voit dans la figure 31 que ceux-ci pointent mieux vers les valeurs maximales de la température et de la concentration.

### 3.3.3 Analyse de sensibilité pour 4 paramètres

Une réduction du nombre des paramètres s'avère indispensable. La figure 32 montre pour les quatre paramètres  $(T_{max}, \alpha_T, C_{max}, \alpha_C)$  le comportement des différents ensembles de longueurs d'onde.

Pour les Pics et Creux, on a tracé les vecteurs singuliers dans la figure 33 pour avoir une idée préliminaire des directions principales de l'action de notre opérateur.

### 3.3.4 Identification de 8 paramètres

L'ensemble des longueurs d'onde choisi est Pics et Creux, le résultat de l'identification montre que c'est relativement difficile de retrouver la position des maxima, et que l'identification des paramètres de température est plus satisfaisante que celle de concentration. Un bruit aléatoire est engendré et ajouté au signal, dont l'amplitude maximale est un pourcentage de la valeur maximale de luminance.

Pour un bruit nul, l'optimiseur a retrouvé les valeurs de  $T_{max}$  et  $T_\infty$ , les valeurs des autres paramètres ne sont pas retrouvées (figures 34 et 35).

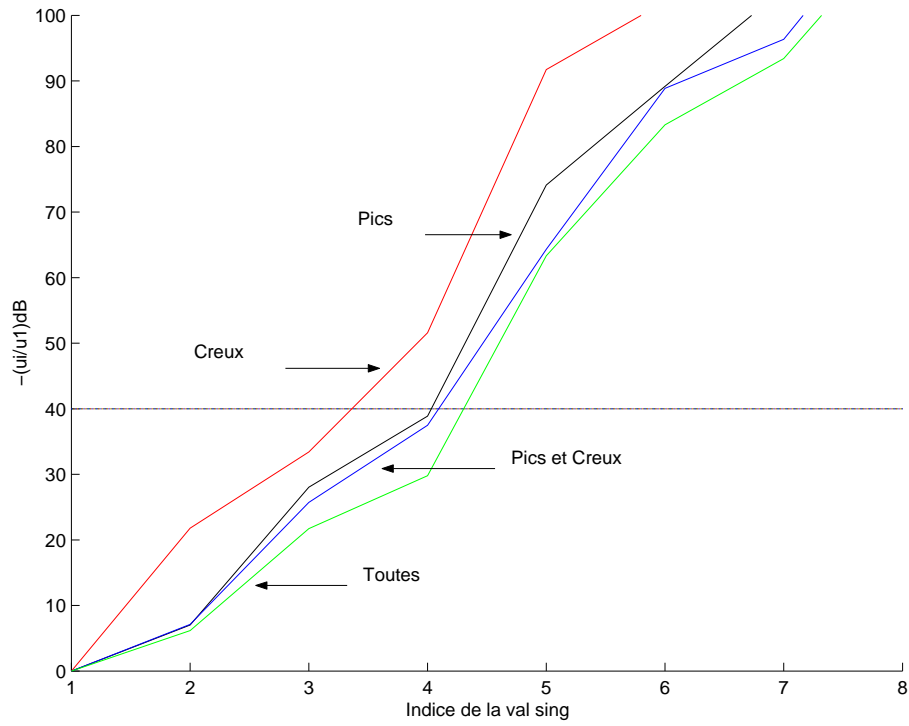


FIG. 28: Valeurs singulières pour la première paramétrisation par des gaussiennes.

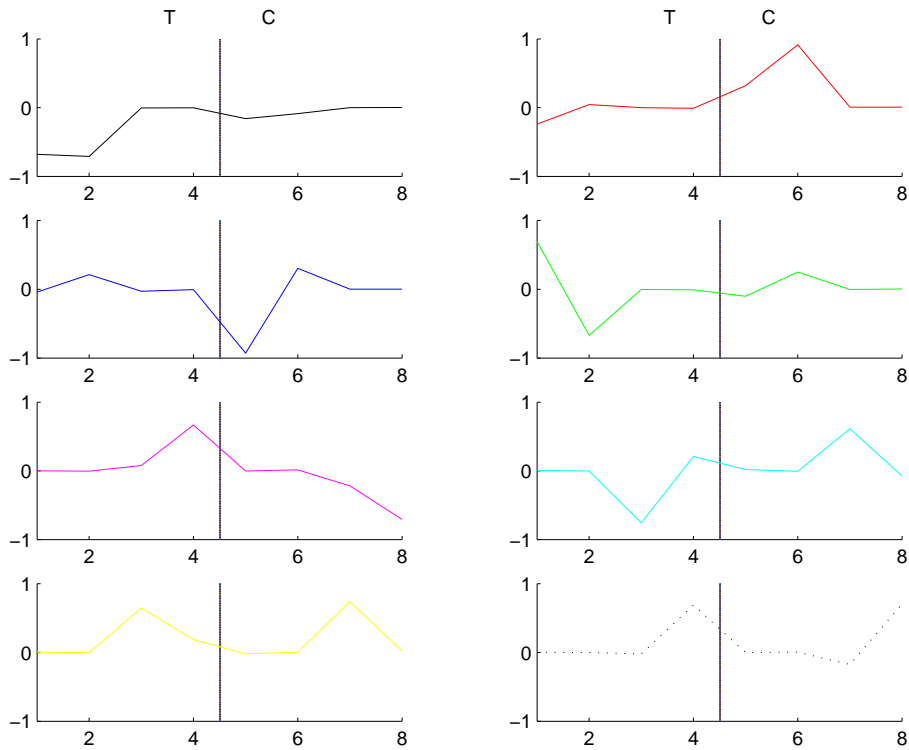


FIG. 29: Vecteurs singuliers pour la première paramétrisation par des gaussiennes pour les Pics et Creux.

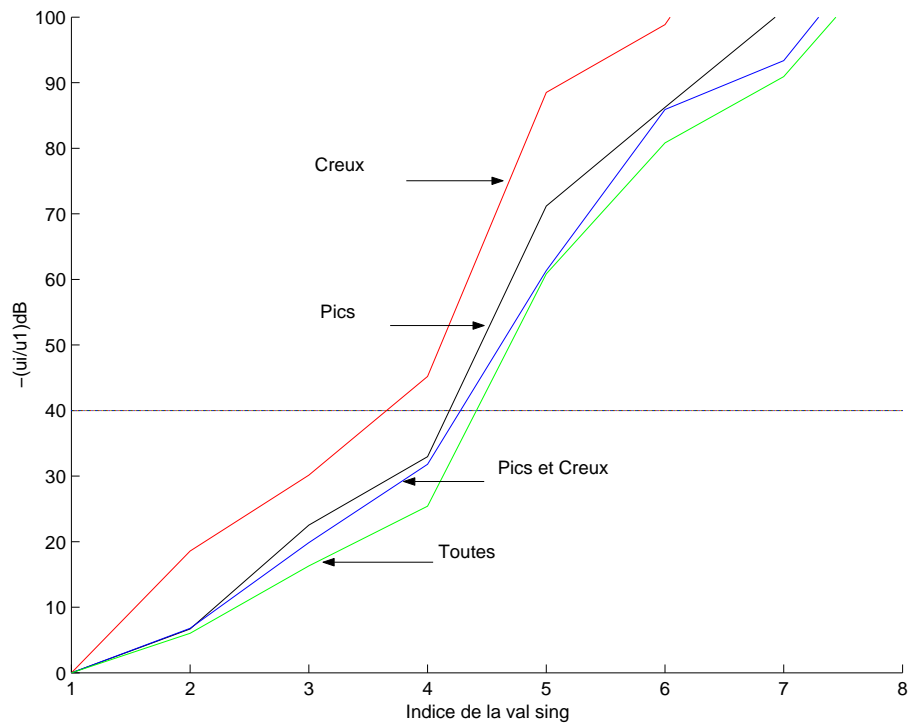


FIG. 30: Valeurs singulières pour la seconde paramétrisation par des gaussiennes.

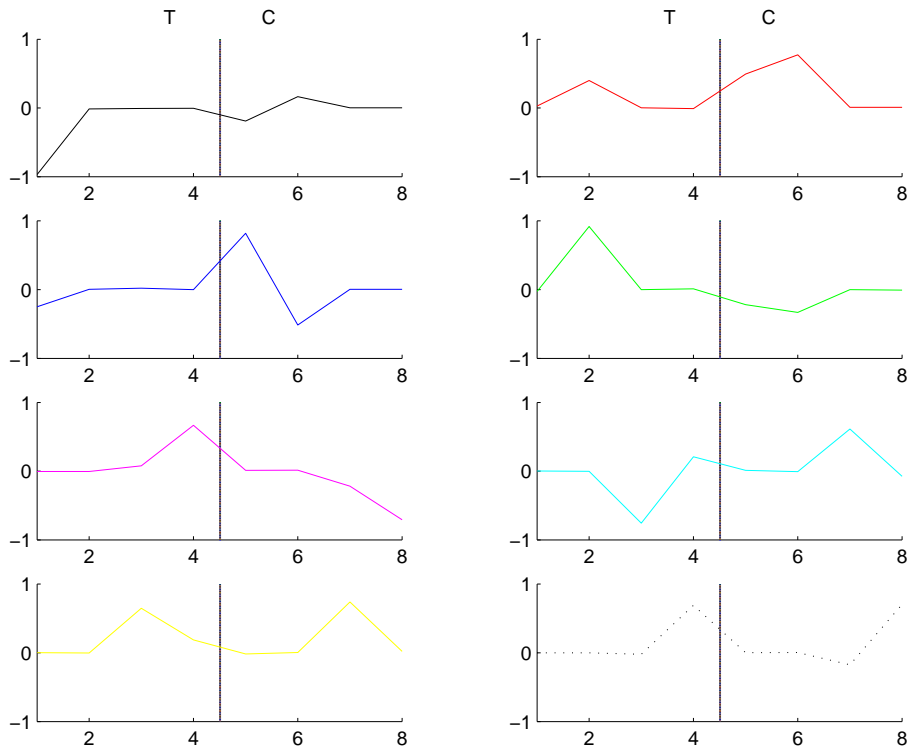


FIG. 31: Vecteurs singuliers pour la seconde paramétrisation par des gaussiennes pour les Pics et Creux.

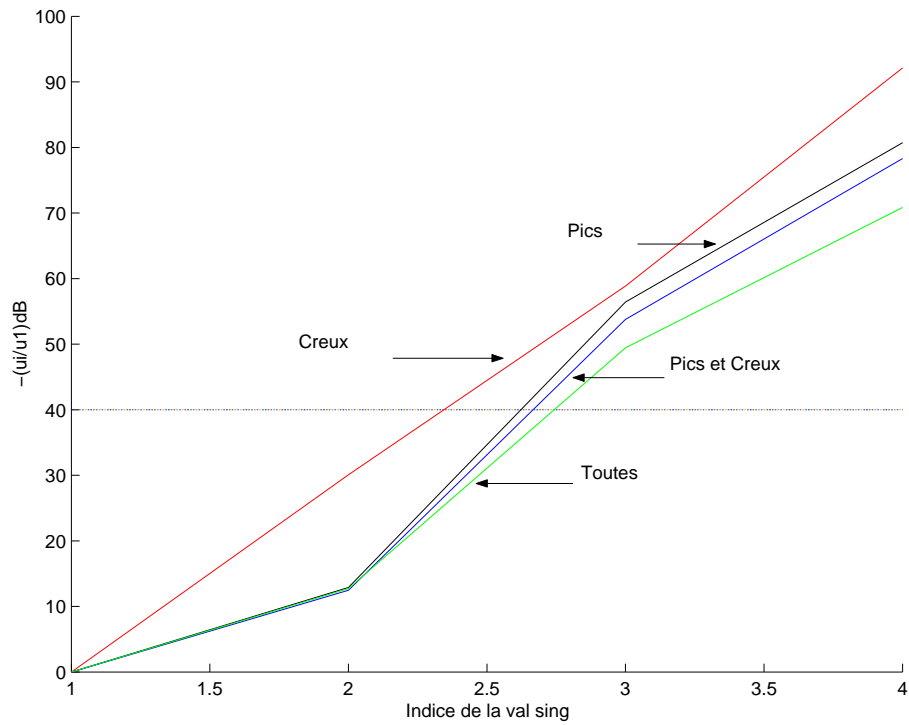


FIG. 32: Valeurs singulières pour la sous-paramétrisation par des gaussiennes.

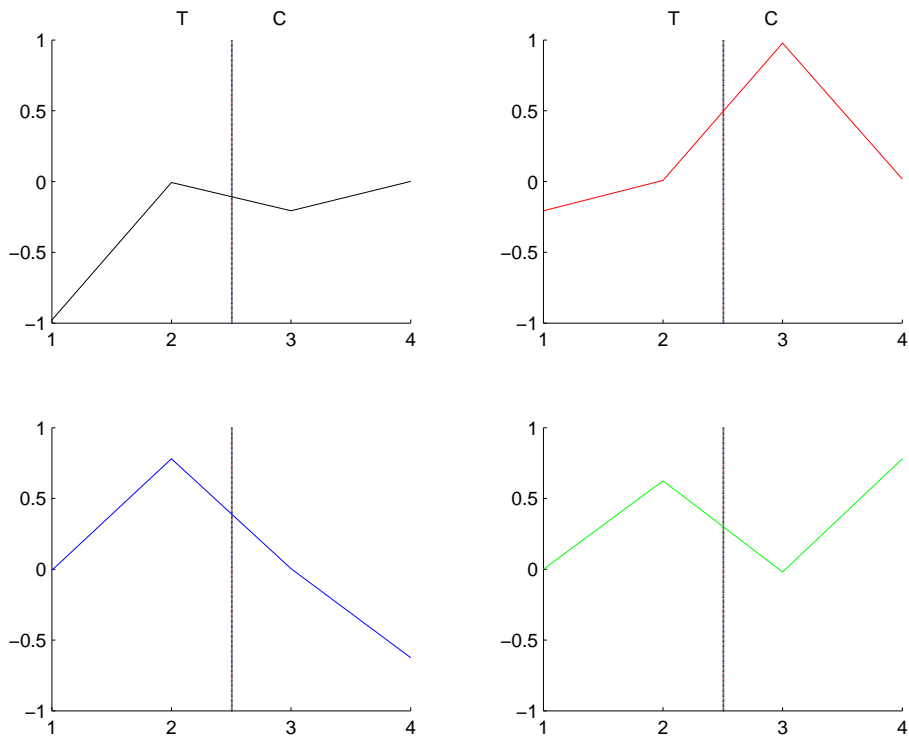


FIG. 33: Vecteurs singuliers pour la sous-paramétrisation par des gaussiennes pour les Pics et Creux.

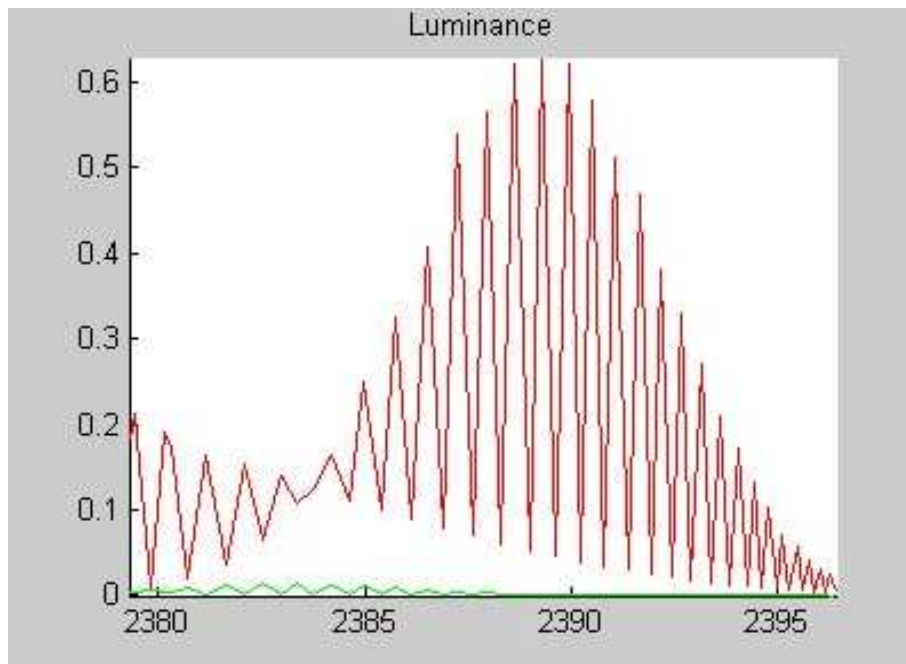


FIG. 34: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit nul.

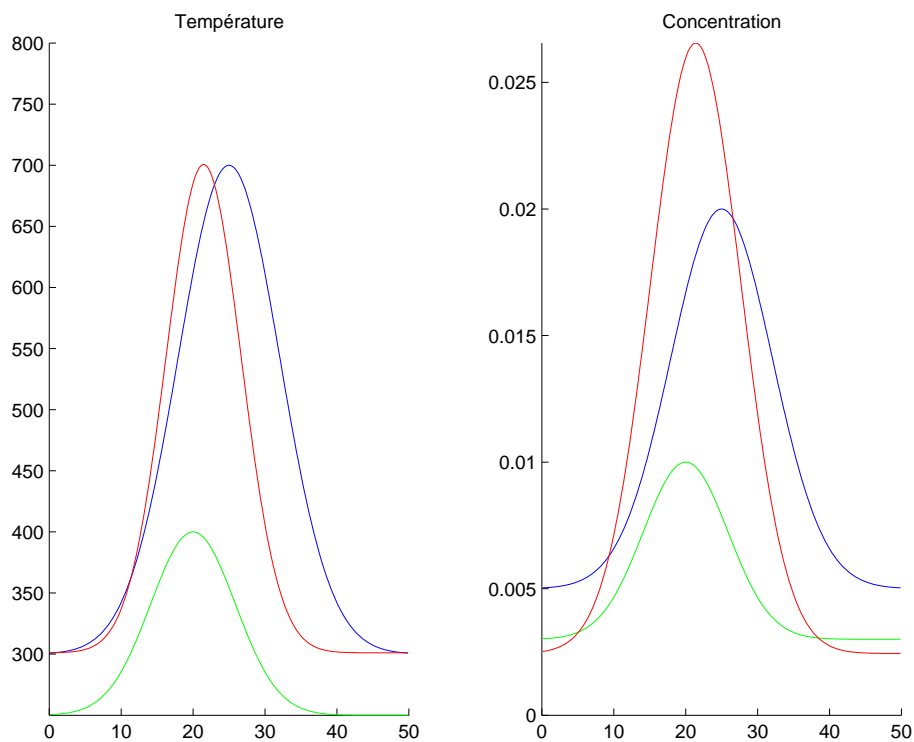


FIG. 35: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit nul.

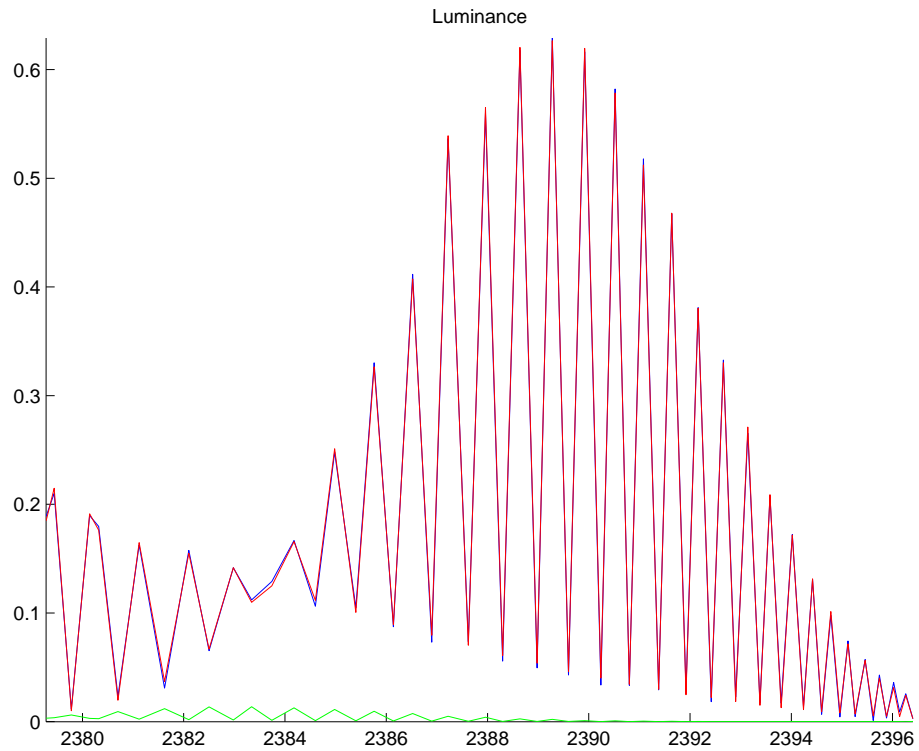


FIG. 36: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 1%.*

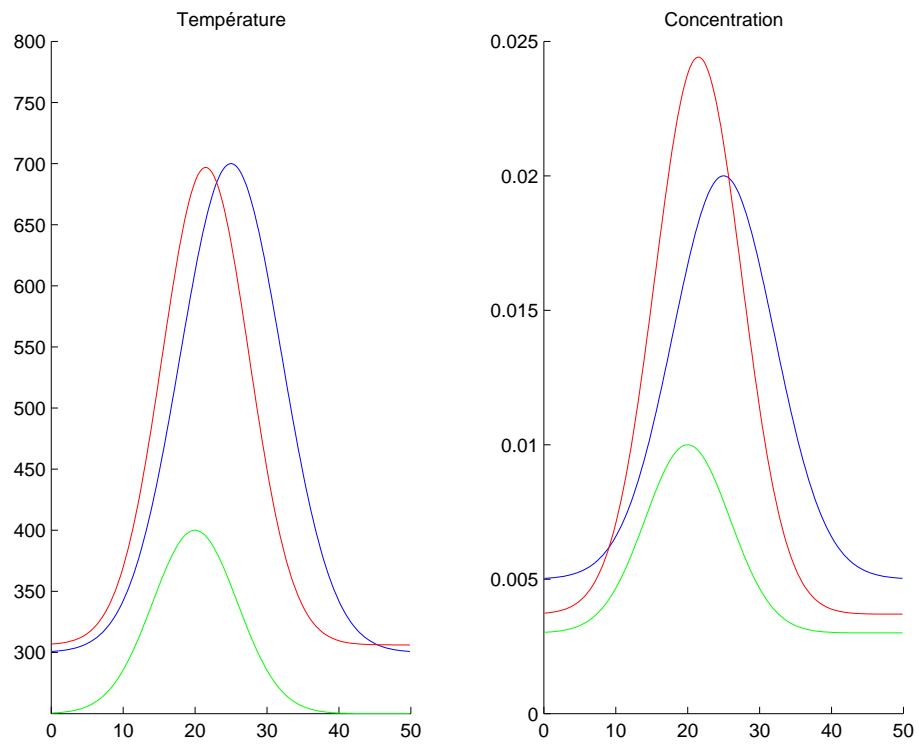


FIG. 37: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 1%.*

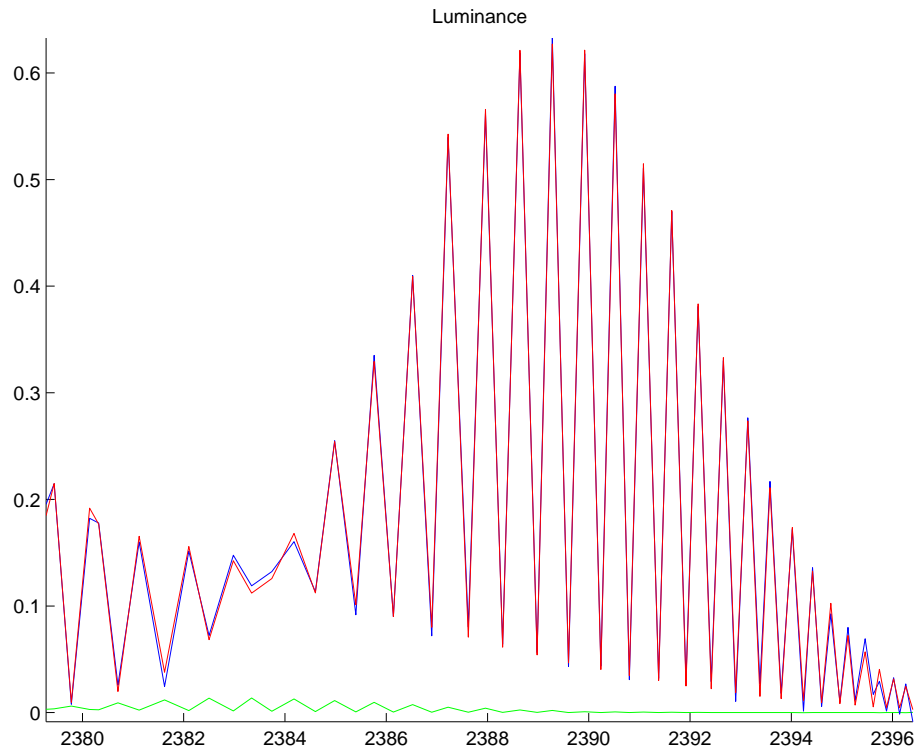


FIG. 38: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 2%.

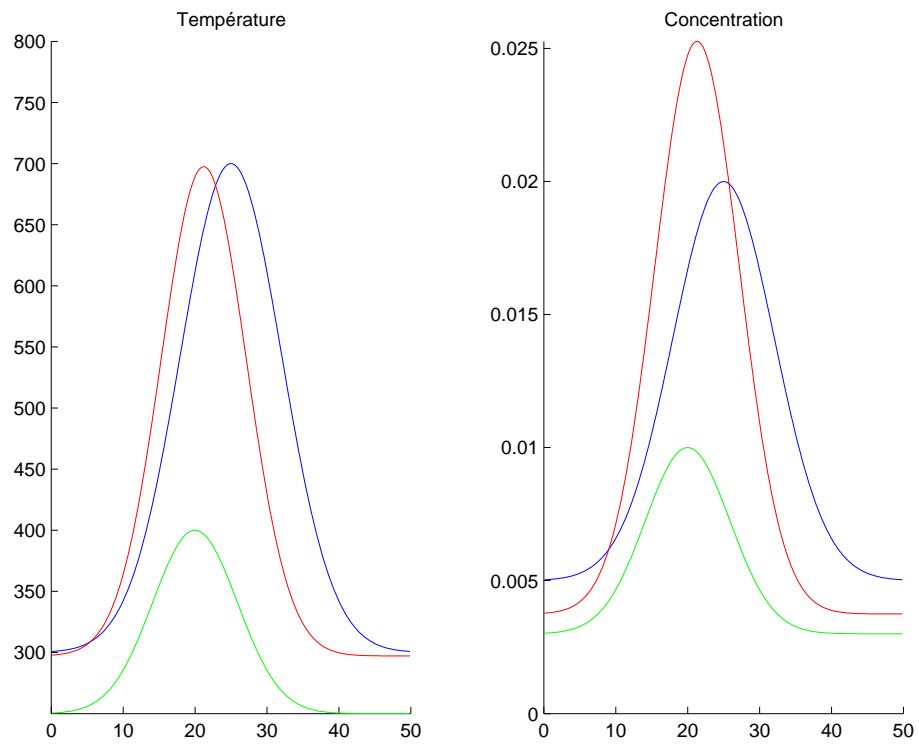


FIG. 39: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 2%.



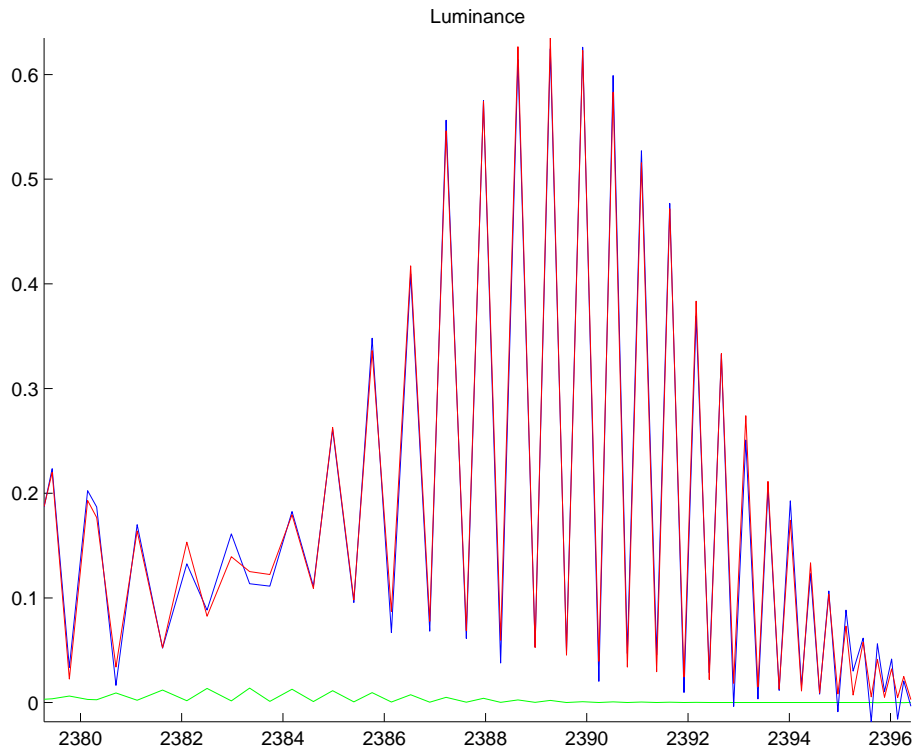


FIG. 40: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 4%.*

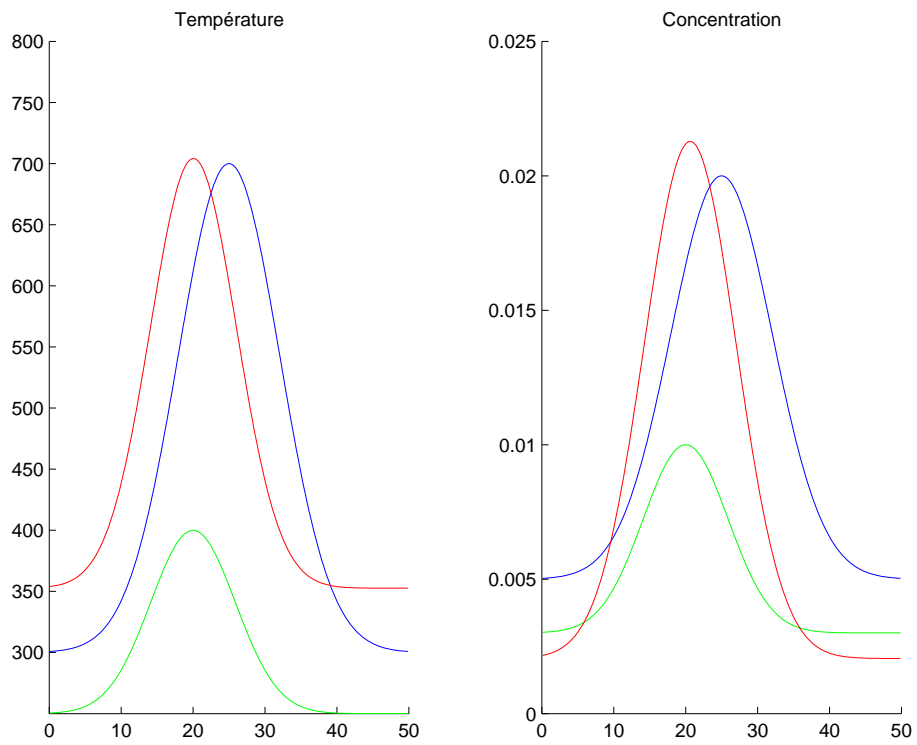


FIG. 41: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 4%.*

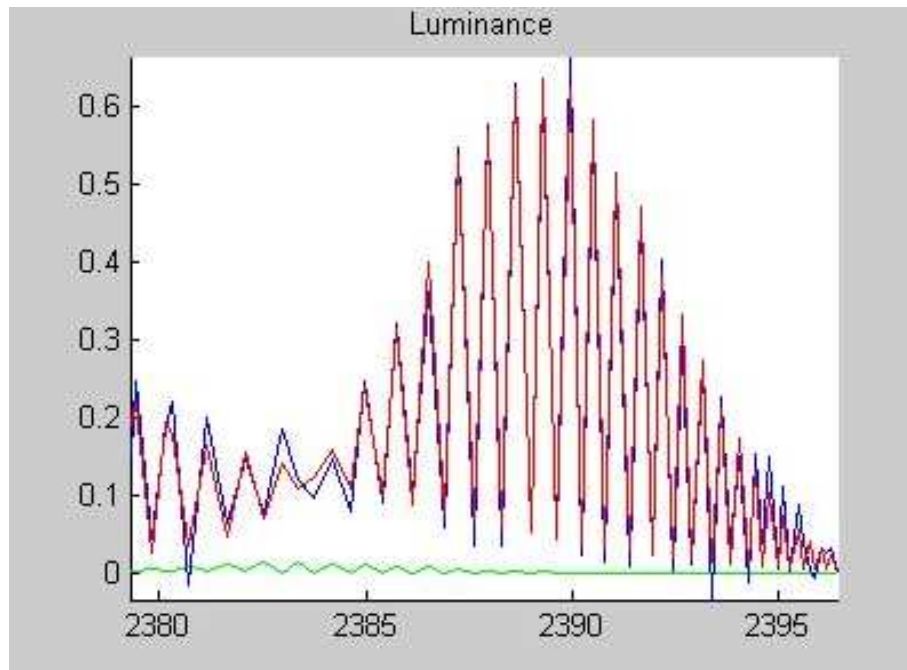


FIG. 42: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 8%.

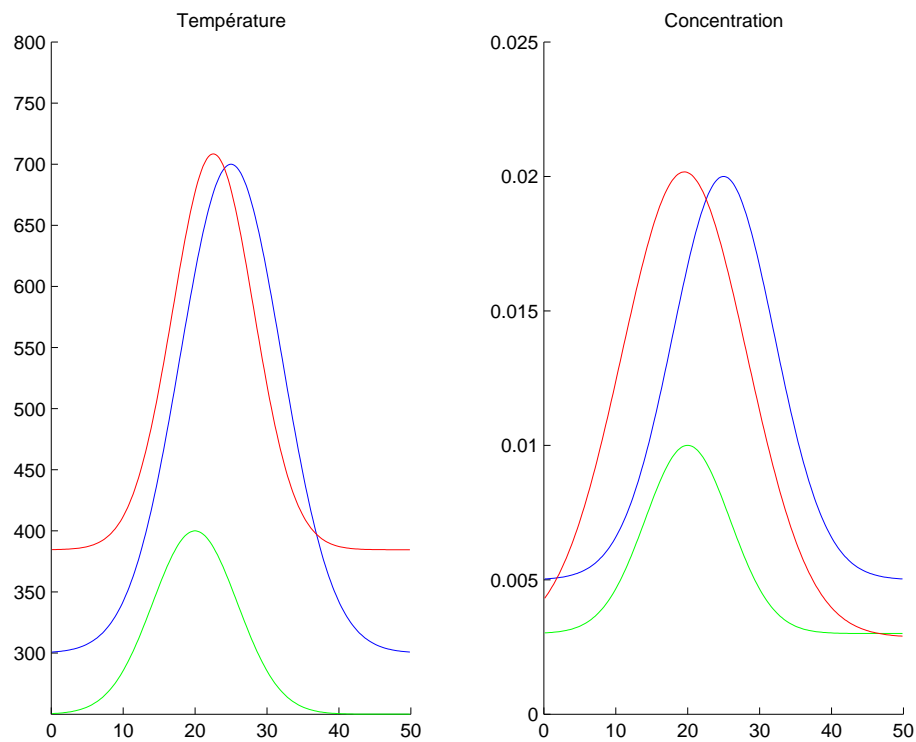


FIG. 43: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 8%.

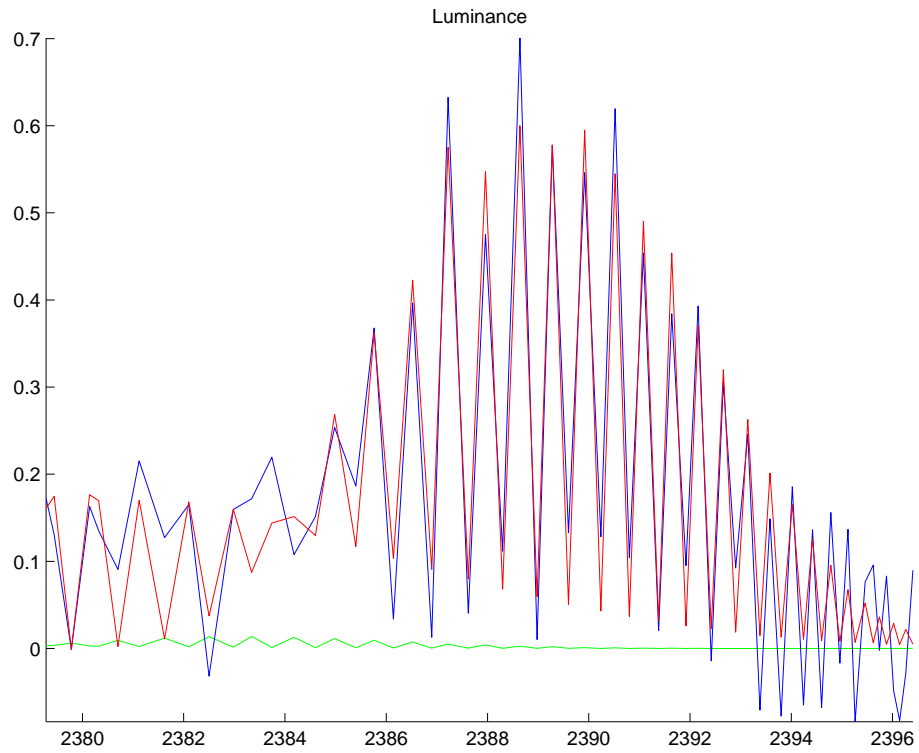


FIG. 44: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 16%.*

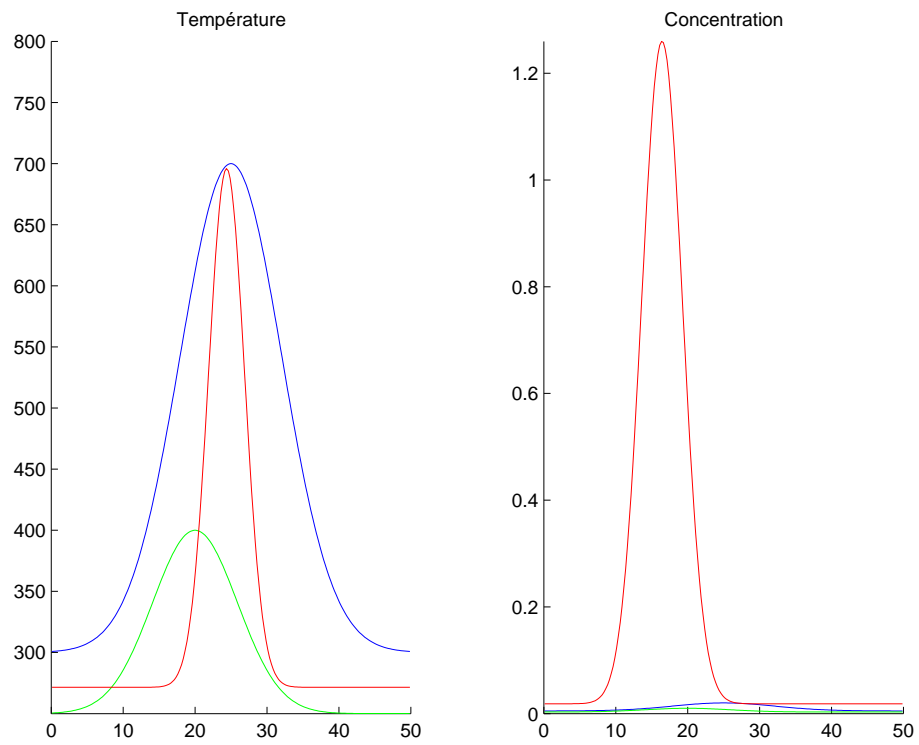


FIG. 45: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 16%.*

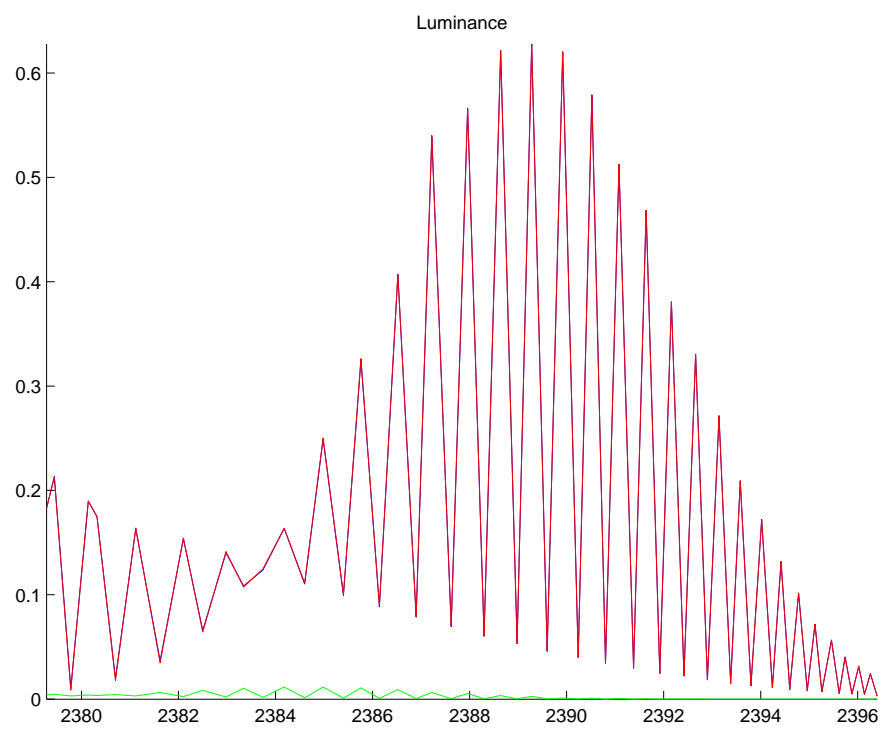


FIG. 46: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit nul.

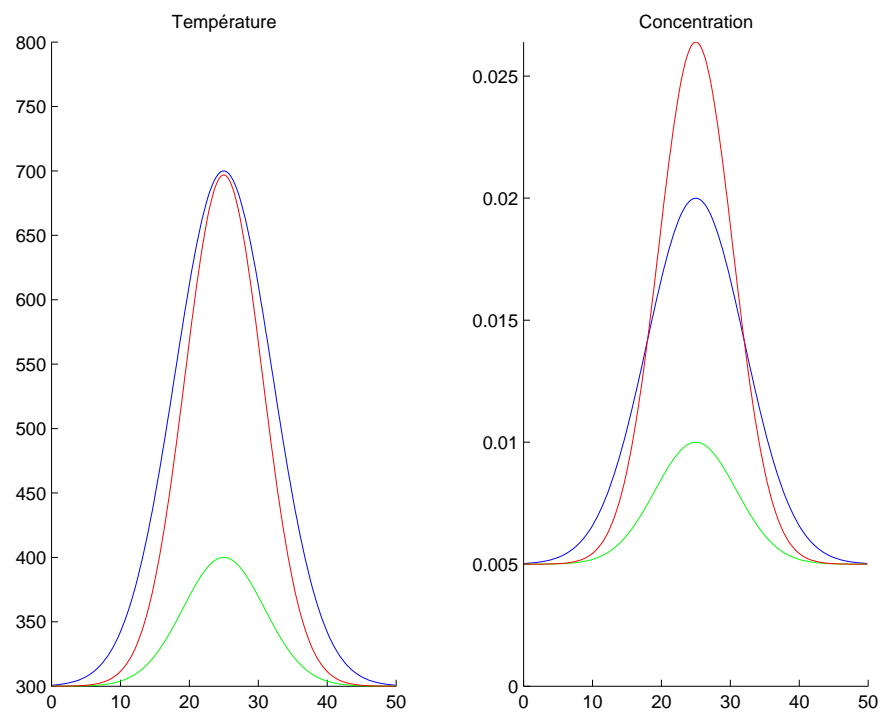


FIG. 47: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit nul.

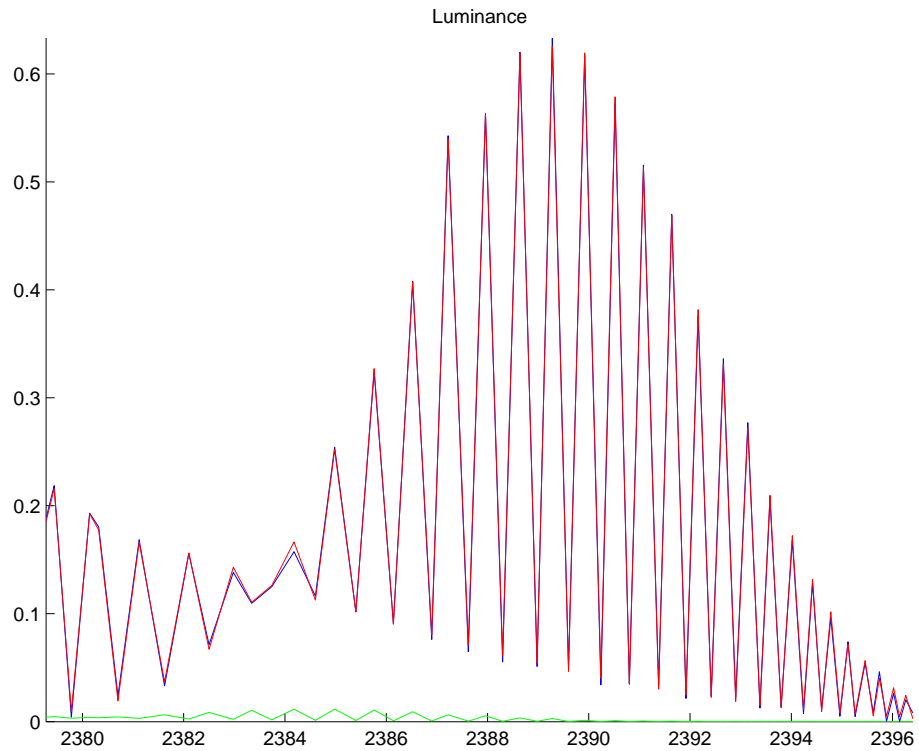


FIG. 48: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 1%.*

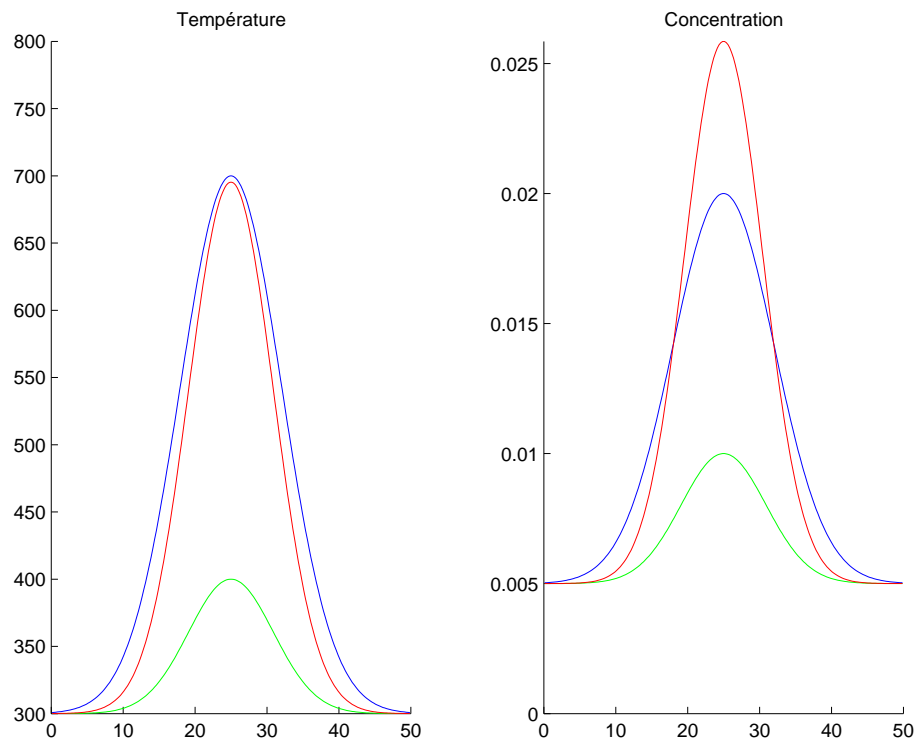


FIG. 49: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 1%.*

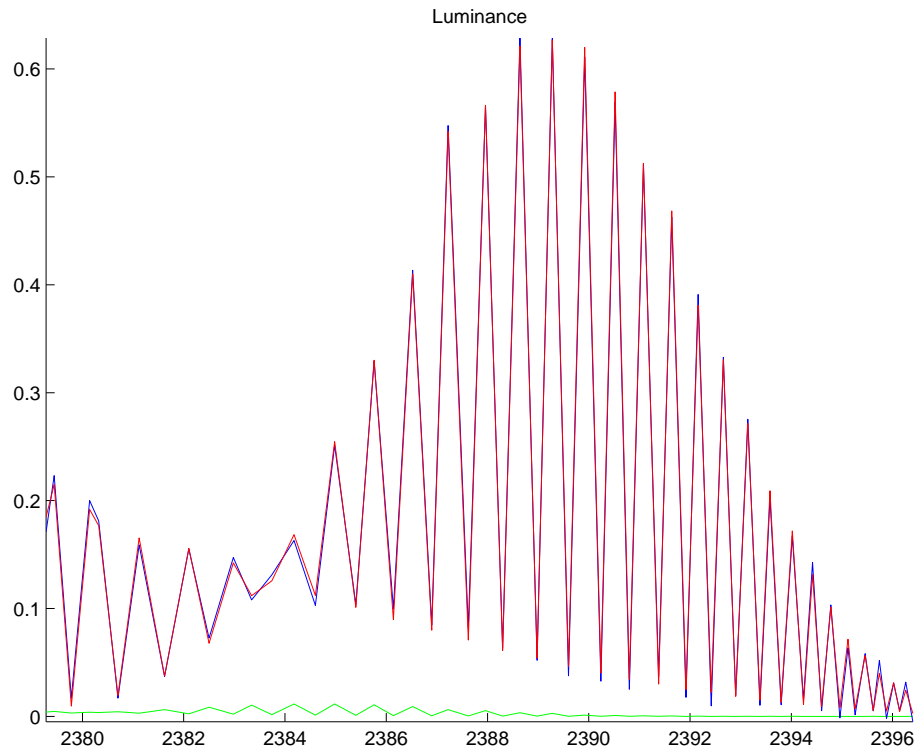


FIG. 50: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 2%.

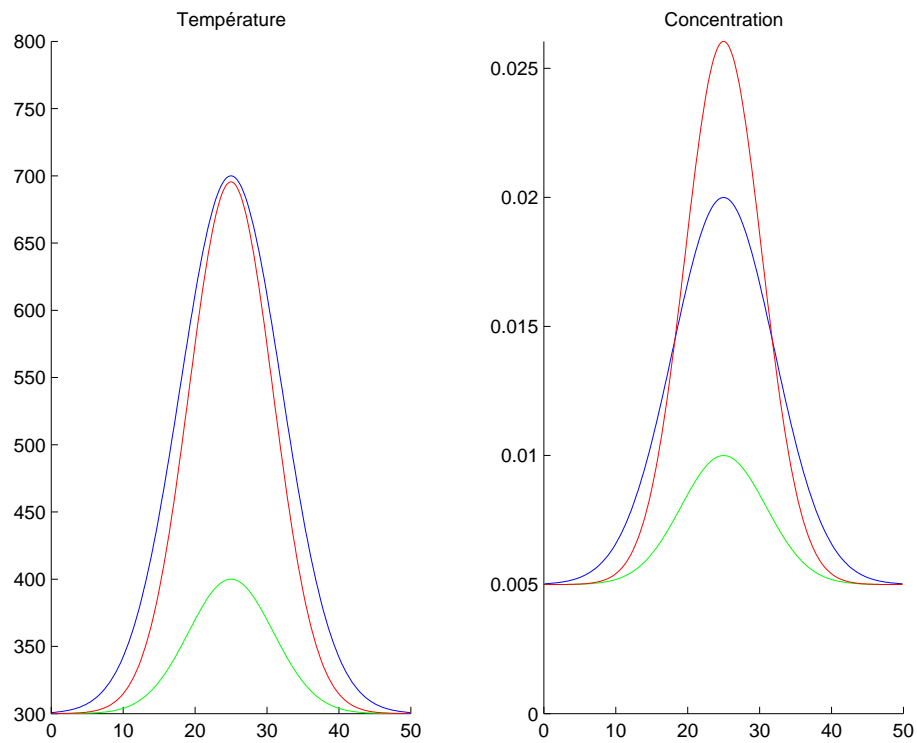


FIG. 51: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 2%.

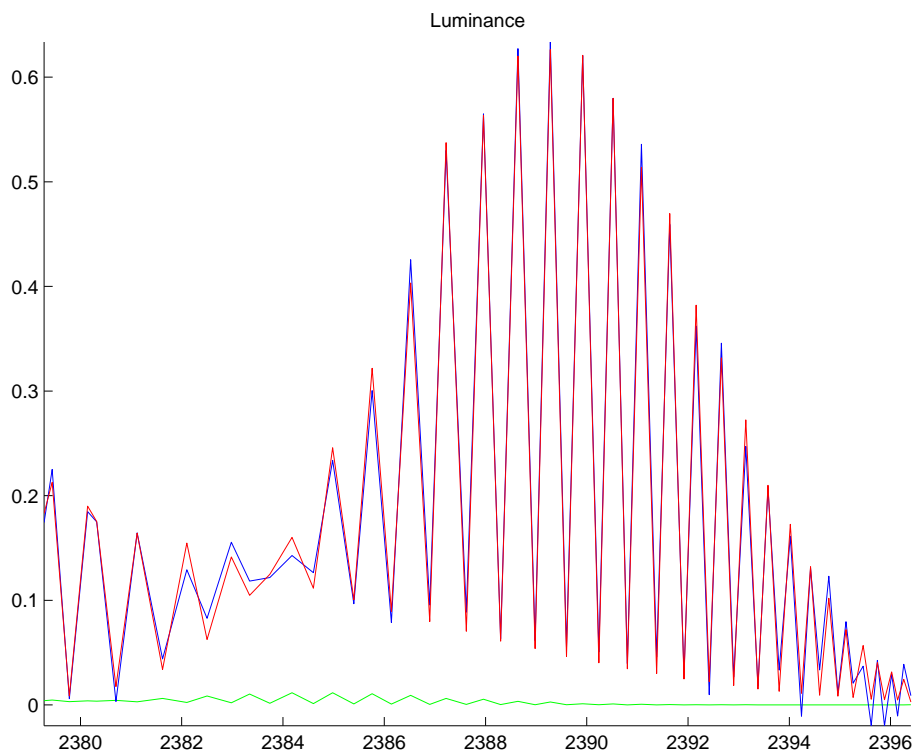


FIG. 52: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 4%.*

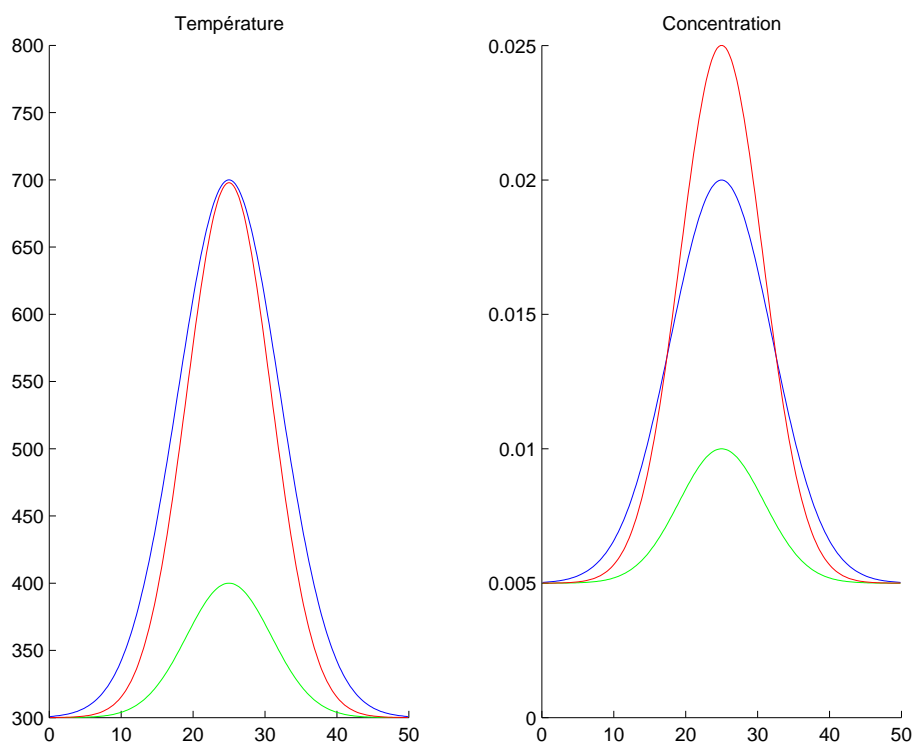


FIG. 53: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 4%.*

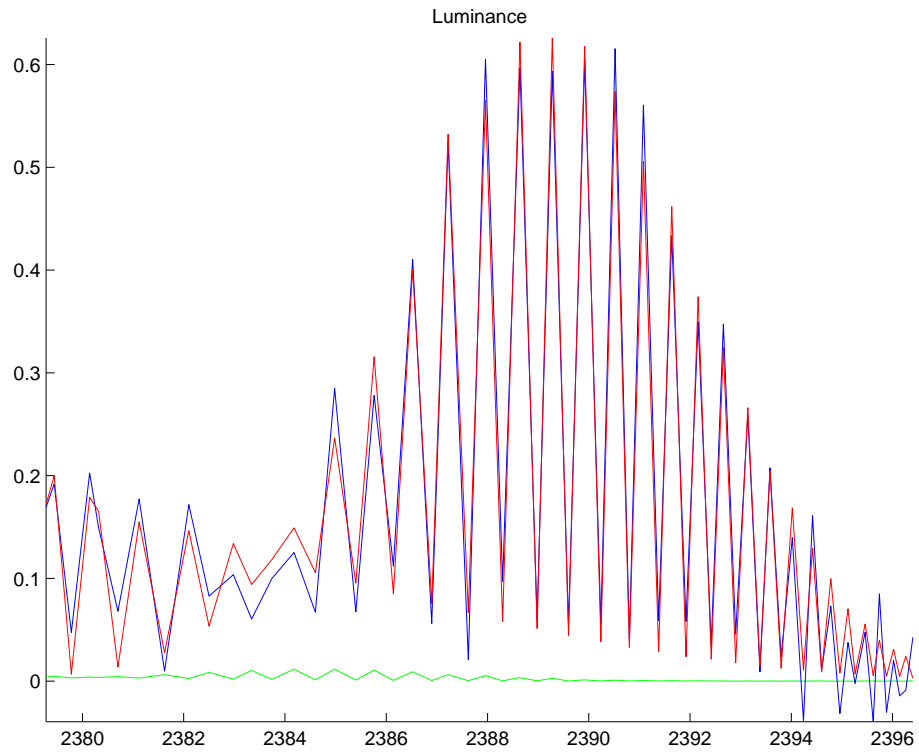


FIG. 54: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 8%.

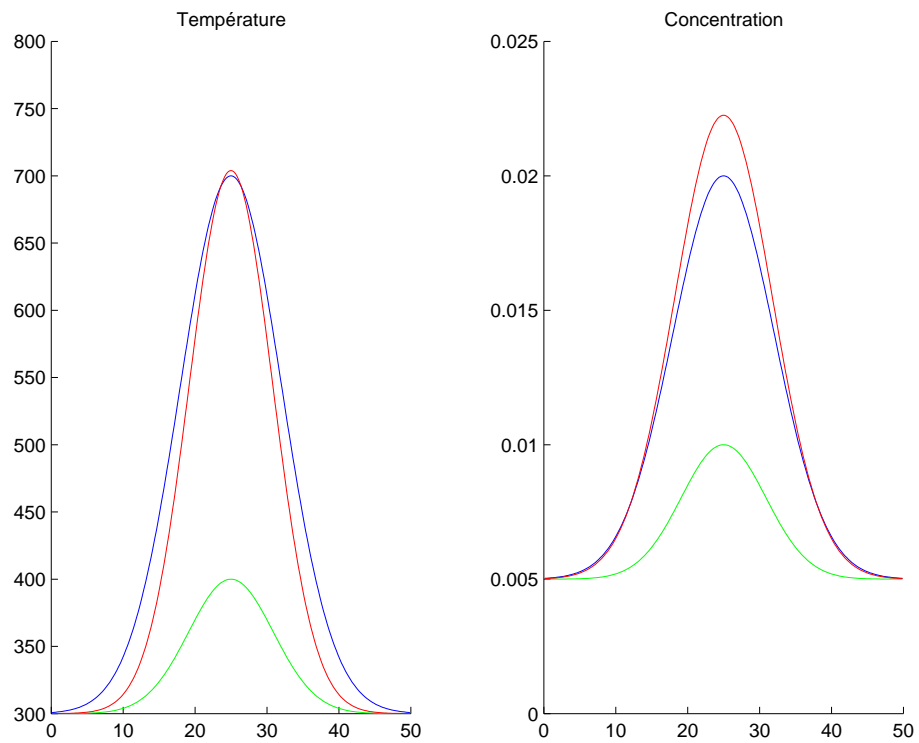


FIG. 55: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 8%.



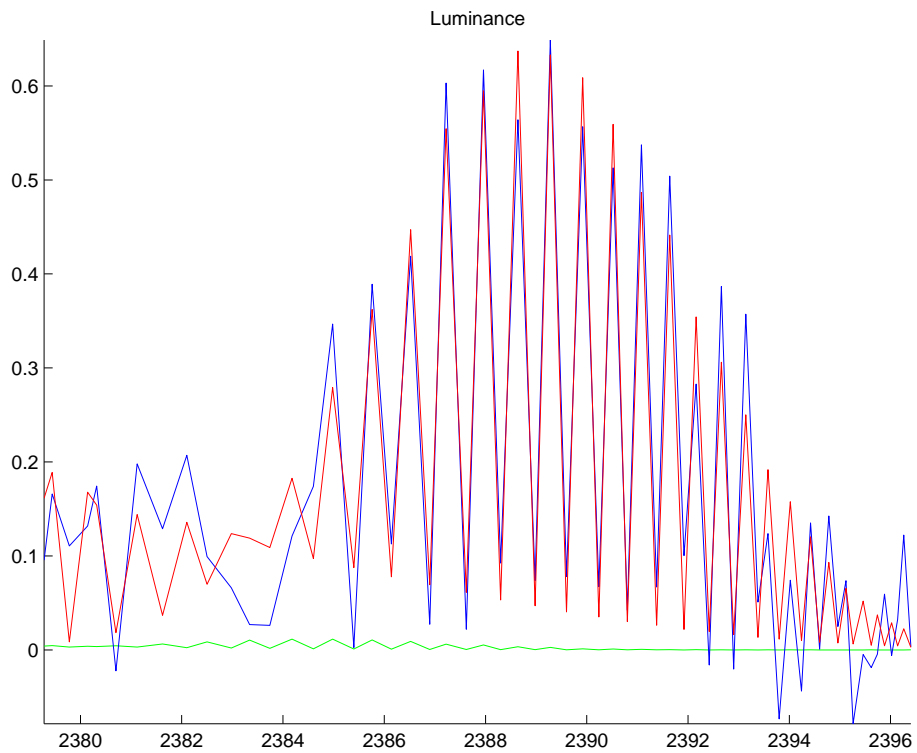


FIG. 56: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 16%.*

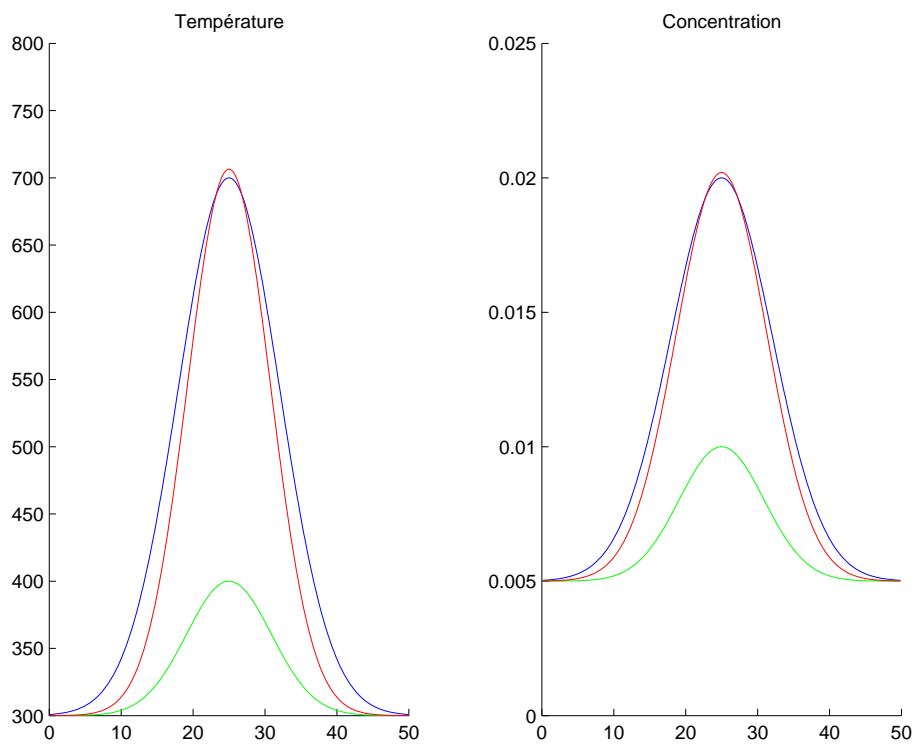


FIG. 57: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 16%.*

L'estimation du paramètre  $T_{max}$  correspondant à la valeur singulière la plus grande, est la plus stable par rapport au niveau du bruit (figures 37 à 44 pour un bruit de 1%, 2%, 4%, 8% et 16%).

### 3.3.5 Identification de 4 paramètres

Pour les mêmes longueurs d'onde Pics et Creux, pour un bruit nul sur les données synthétiques, la figure 47 montre que le profil de température est mieux identifié que celui de concentration.

Pour plusieurs niveaux de bruit, les figures 48 à 57 montrent l'effet du bruit sur les profils identifiés.

Une stabilité remarquable des valeurs identifiées des paramètres  $T_{max}$   $\alpha_T$  par rapport à la variation du niveau de bruit dans les mesures synthétiques. Par contre une influence plus perturbante du bruit sur les valeurs identifiées des paramètres  $C_{max}$ ,  $\alpha_C$ , malgré le résultat obtenu pour le niveau de bruit de 16%. Cela est en accord avec le résultat d'analyse de sensibilité pour ce choix des paramètres indiquant que le nombre des paramètres identifiables est 2 pour un niveau de bruit de 1% (même pour un niveau < 10%), ici on voit que ce sont les paramètres du profil de température  $T_{max}$  et  $\alpha_T$ .

### 3.4 Paramétrisation par des profils à “deux maxima”

La paramétrisation utilisée ici est expliquée dans la section 2.3.3 de ce rapport, on adopte les valeurs maximales comme paramètres vu l'amélioration obtenue sur l'allure des vecteurs singuliers, et on suppose afin de réduire le nombre des paramètres qu'il y ait une symétrie des positions des deux maxima, et égalité de leurs largeurs :

$$\begin{aligned}\alpha_{T,1} &= \alpha_{T,2} = \alpha_T, \alpha_{C,1} = \alpha_{C,2} = \alpha_C. \\ x_T &= x_{T,2} = l - x_{T,1}, x_C = x_{C,2} = l - x_{C,1}.\end{aligned}$$

Ce qui fait au total 10 paramètres indépendants, ce sont :

$$\{T_\infty, T_{max,1}, T_{max,2}, \alpha_T, x_T, C_\infty, C_{max,1}, C_{max,2}, \alpha_C, x_C\}.$$

Les profils et la luminance sont donnés par les figures 22 et 23.

#### 3.4.1 Analyse de sensibilité pour les 10 paramètres

Encore une fois, la figure 58 montre un bon comportement des Pics et Creux.

Les vecteurs singuliers associés à cet ensemble des longueurs d'onde (Pics et Creux) ne pointent pas parfaitement vers les directions principales dans l'espace des paramètres (voir la figure 59).

#### 3.4.2 Analyse de sensibilité pour 6 paramètres

On suppose connues les valeurs à l'infini et les positions des bosses (en réalité une estimation est possible). Les paramètres restant sont :

$$\{T_{max,1}, T_{max,2}, \alpha_T, C_{max,1}, C_{max,2}, \alpha_C\}.$$

Les valeurs singulières sont données dans la figure 60 et les vecteurs singuliers pour les mesures aux Pics et Creux sont donnés dans la figure 61.

#### 3.4.3 Identification de 10 paramètres

Dans cet essai on remarque qu'une bonne initialisation mène à bien identifier le profil de la température, par contre le profil de la concentration s'avère plus difficile à retrouver (figures 62 à 69).

Encore un fois les valeurs des paramètres  $T_{max,1}$ ,  $T_{max,2}$  sont les plus stables par rapport aux variations du niveau de bruit.

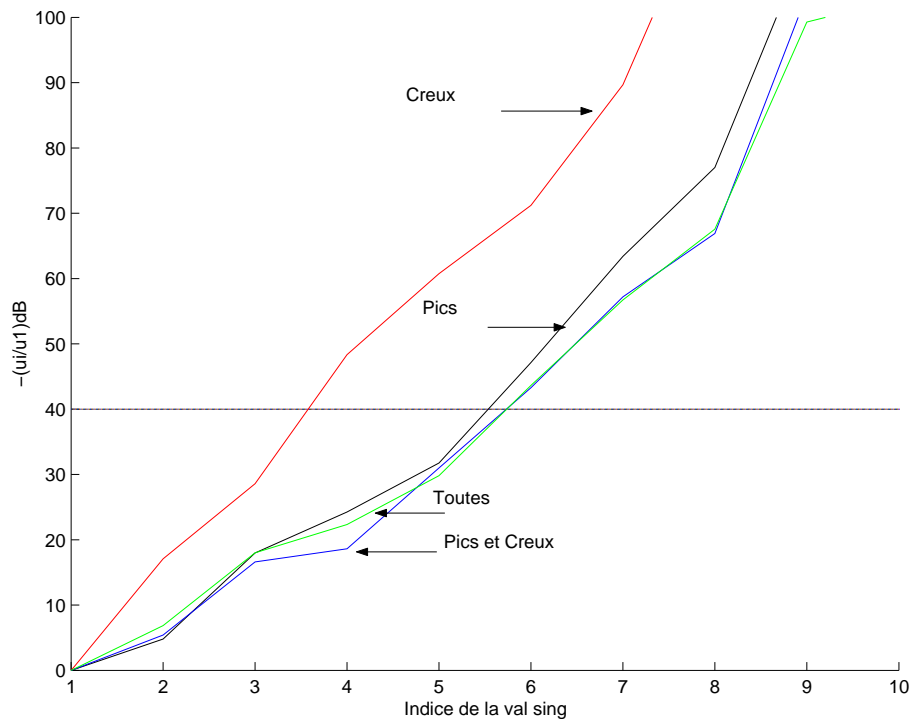


FIG. 58: Valeurs singulières pour la paramétrisation par des profils à deux maxima.

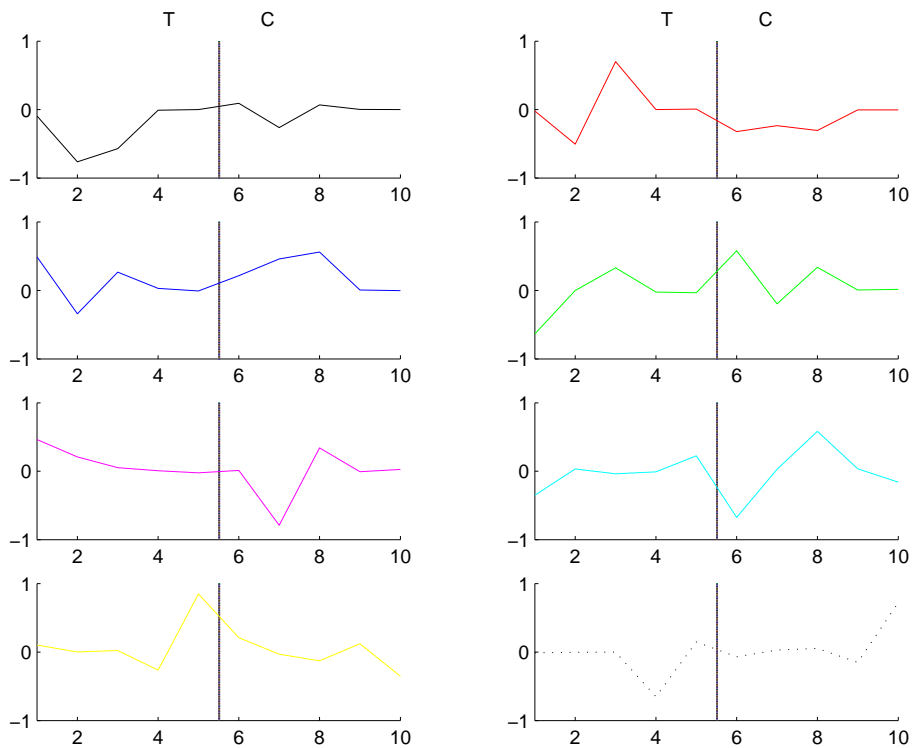


FIG. 59: Vecteurs singuliers pour la paramétrisation par des profils à deux maxima pour les Pics et Creux.

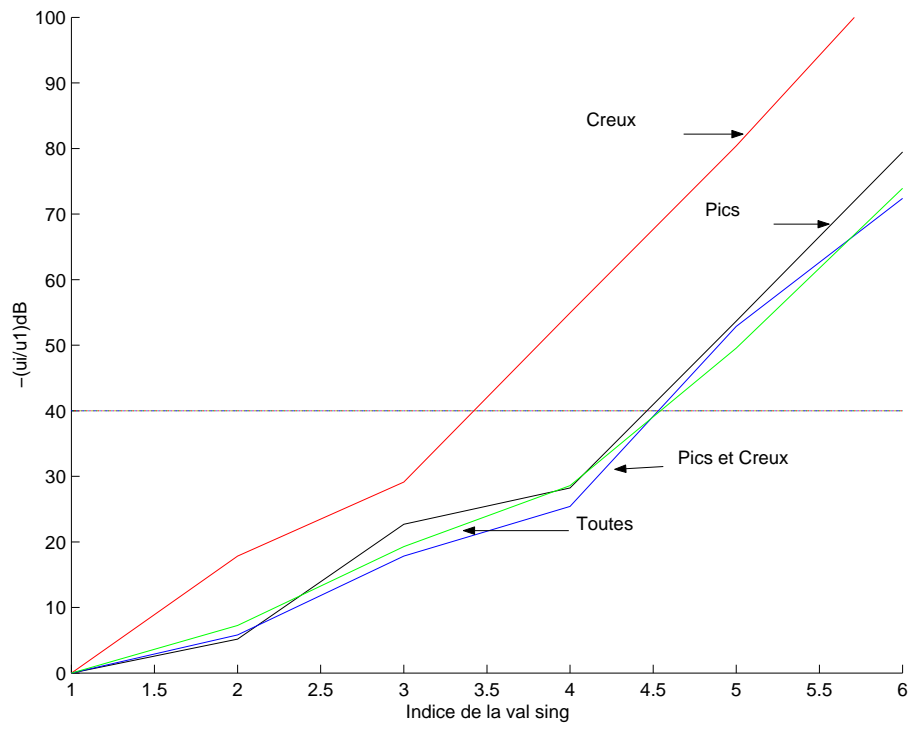


FIG. 60: Valeurs singulières pour la sous-paramétrisation par des profils à deux maxima.

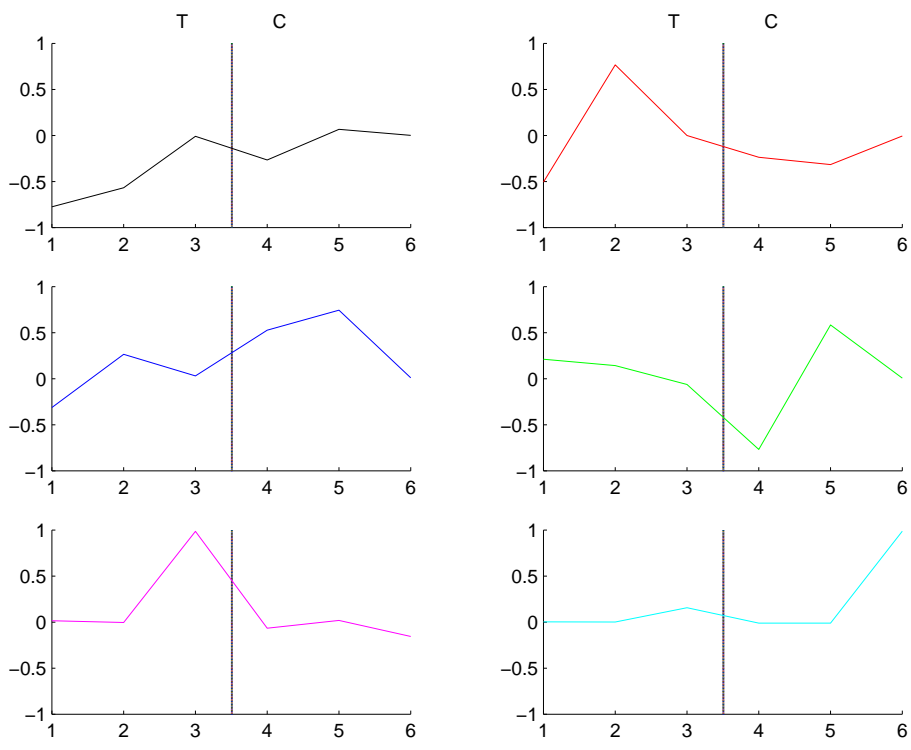


FIG. 61: Vecteurs singuliers pour la sous-paramétrisation par des profils à deux maxima pour les Pics et Creux.

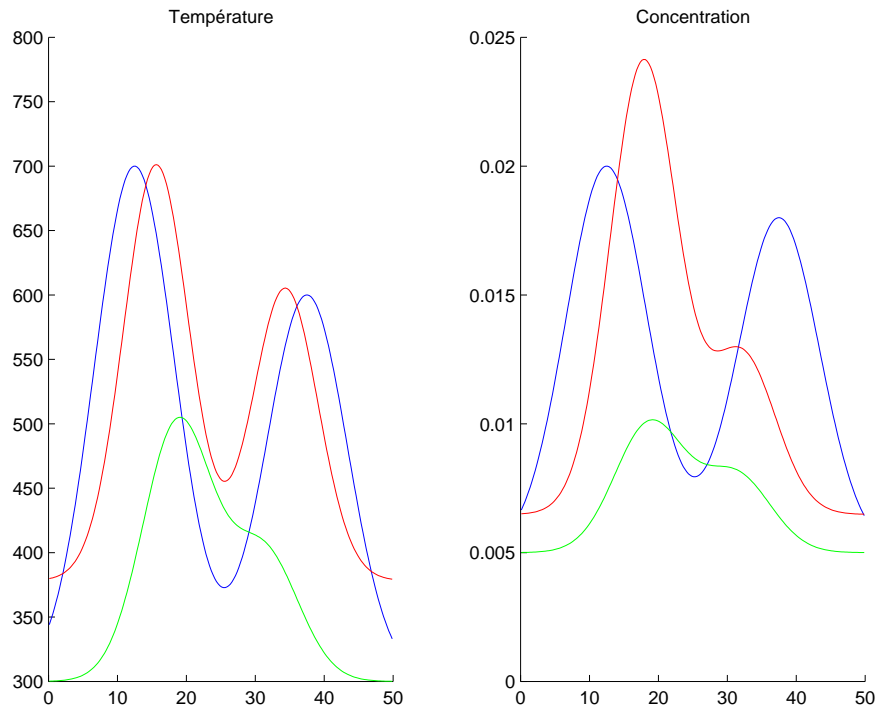


FIG. 62: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit nul.*

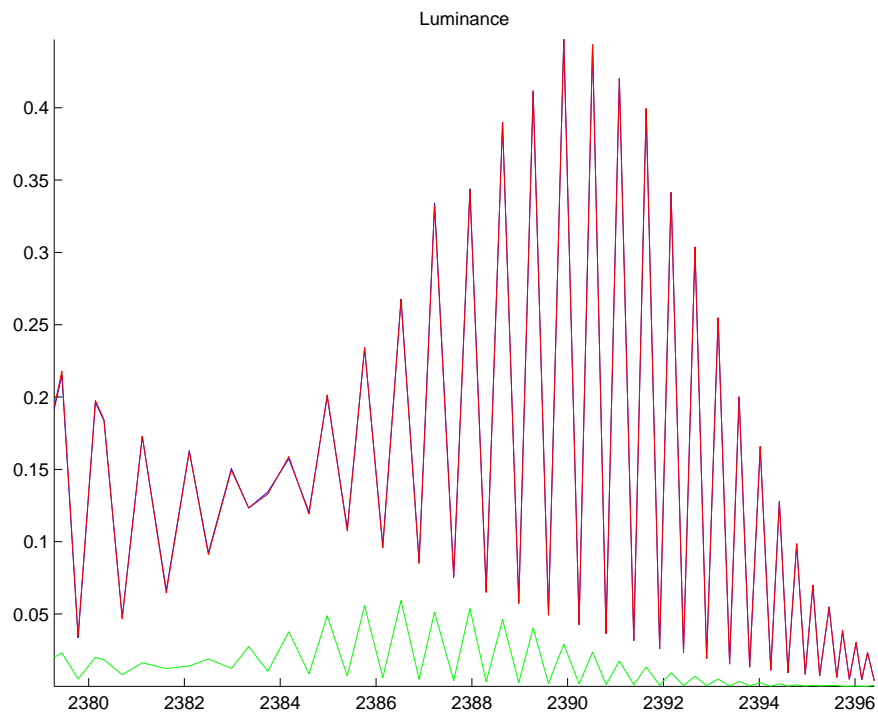


FIG. 63: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit nul.*

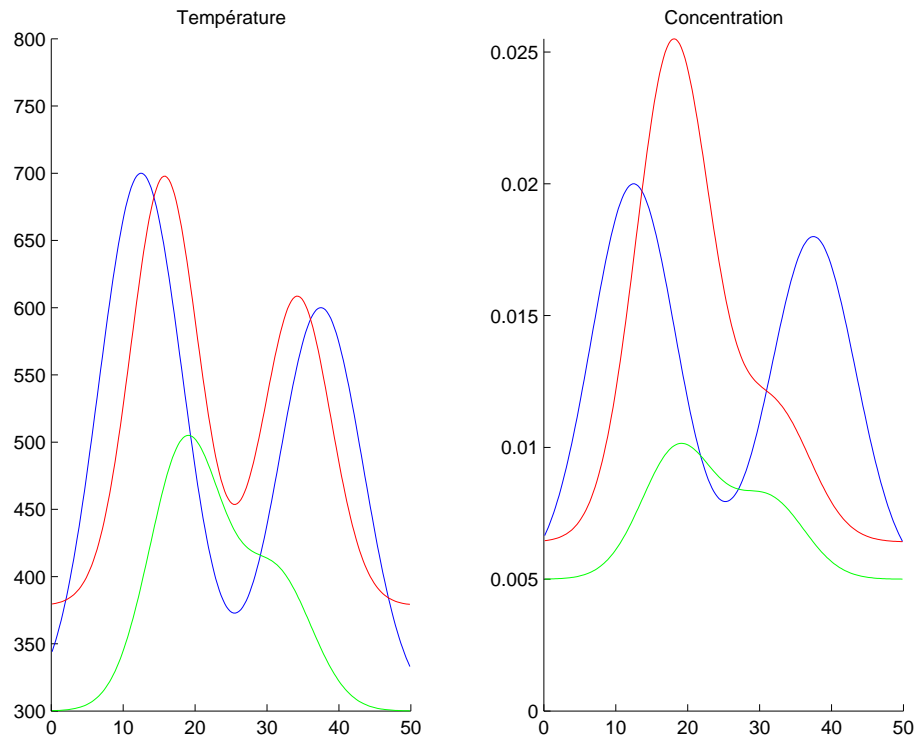


FIG. 64: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 1%.

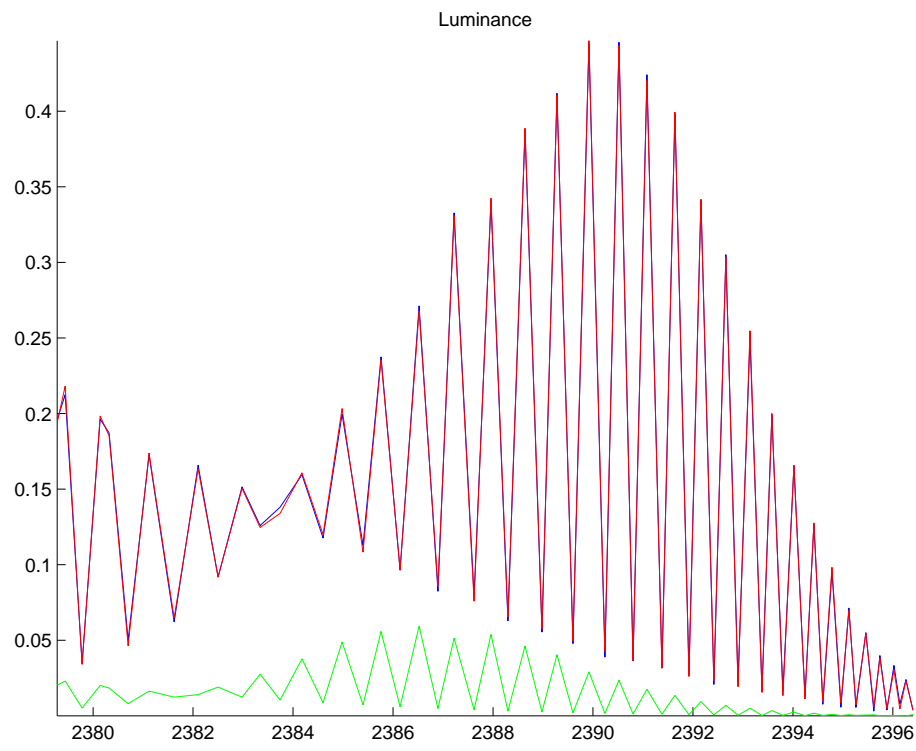


FIG. 65: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 1%.

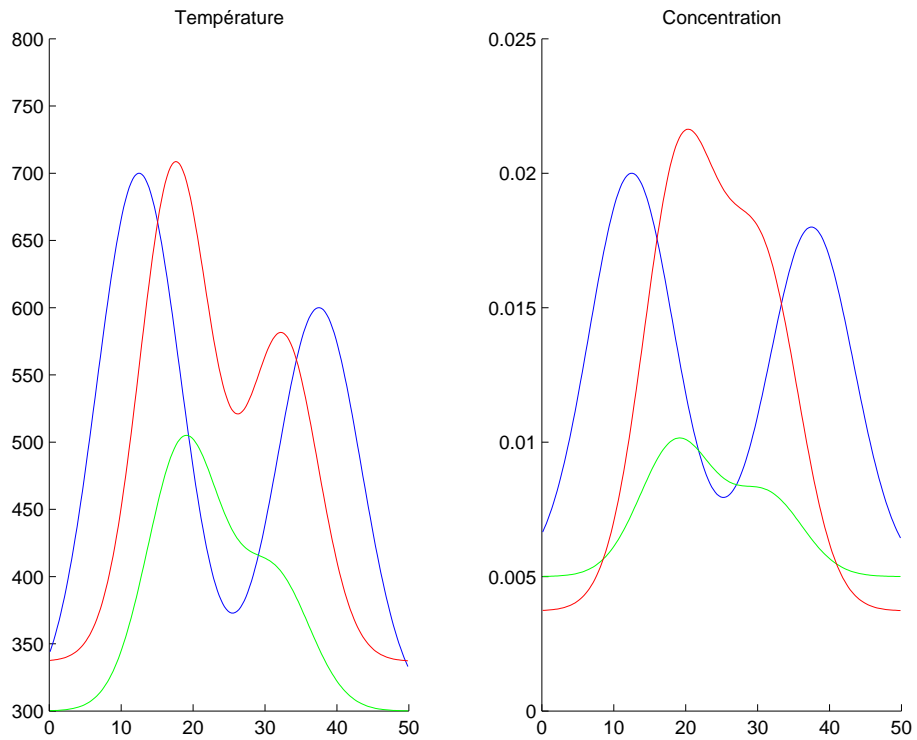


FIG. 66: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 2%.

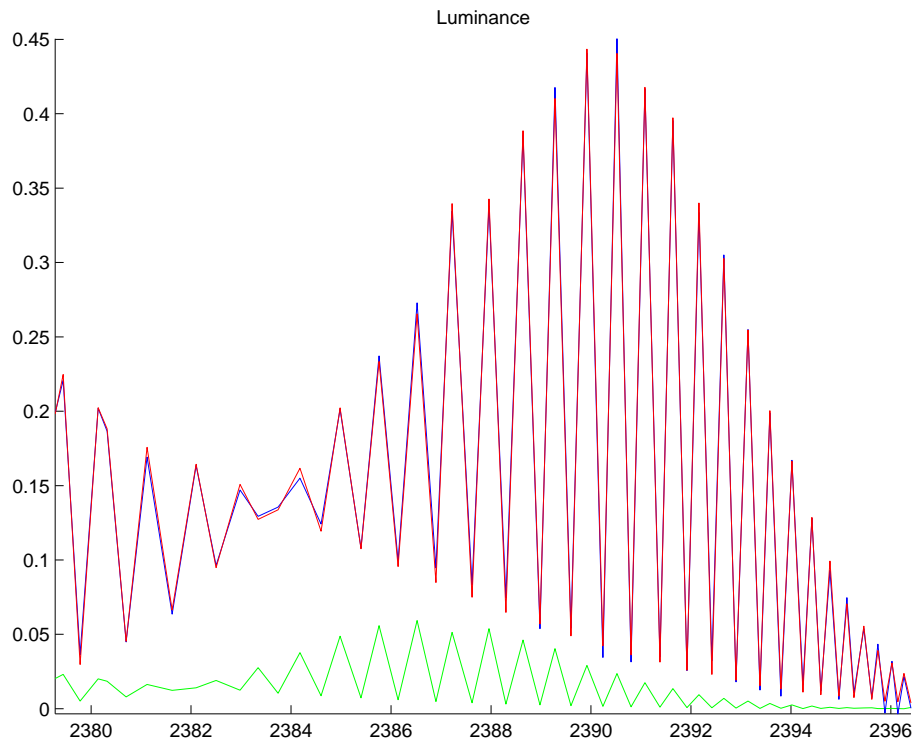


FIG. 67: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 2%.

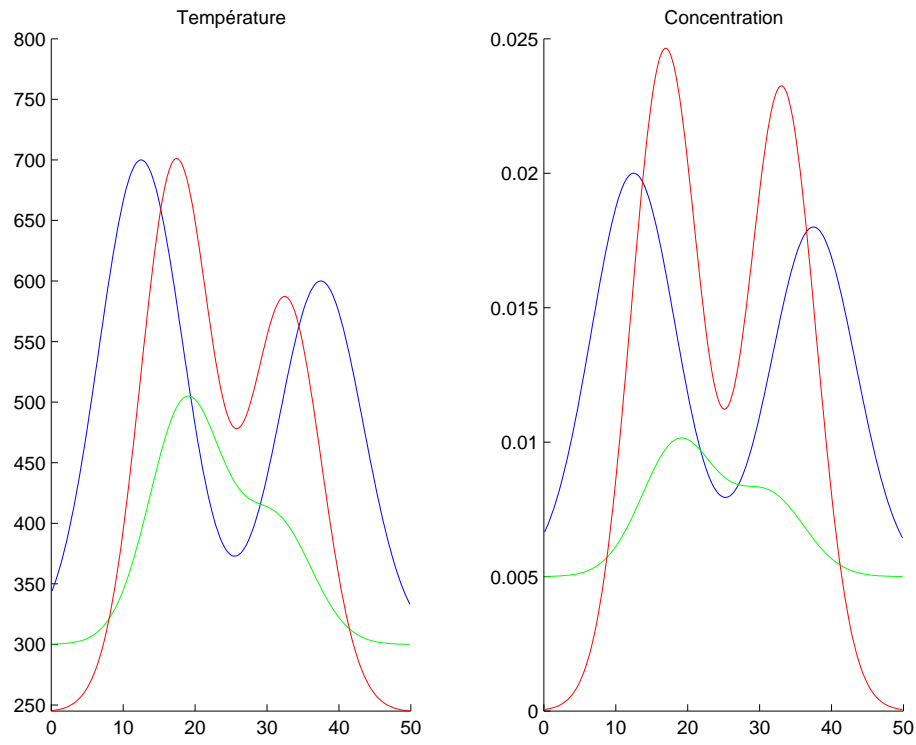


FIG. 68: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 4%.

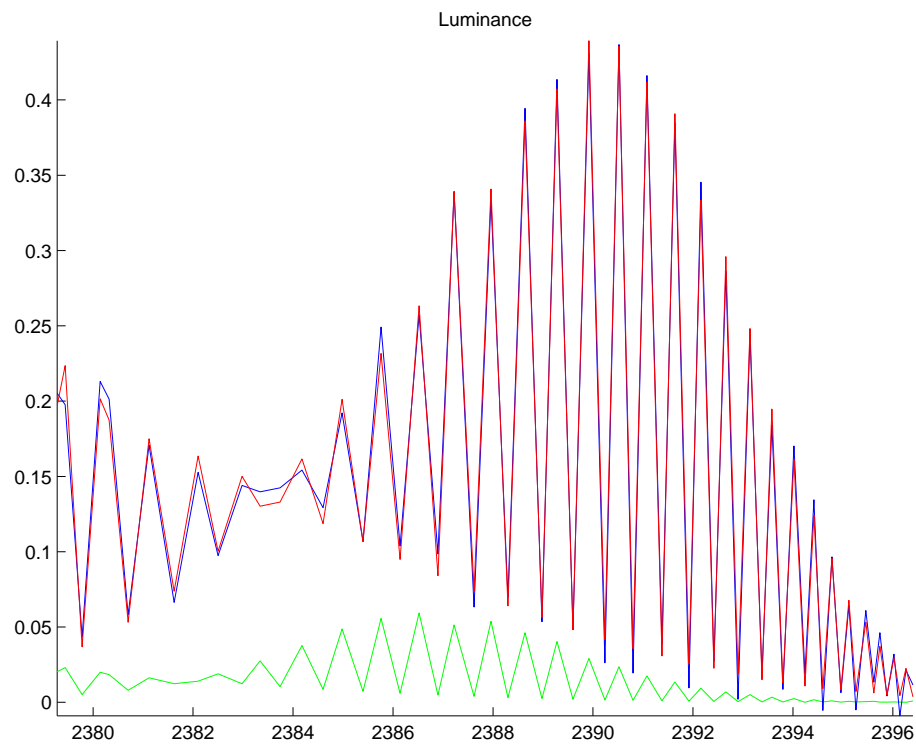


FIG. 69: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 4%.



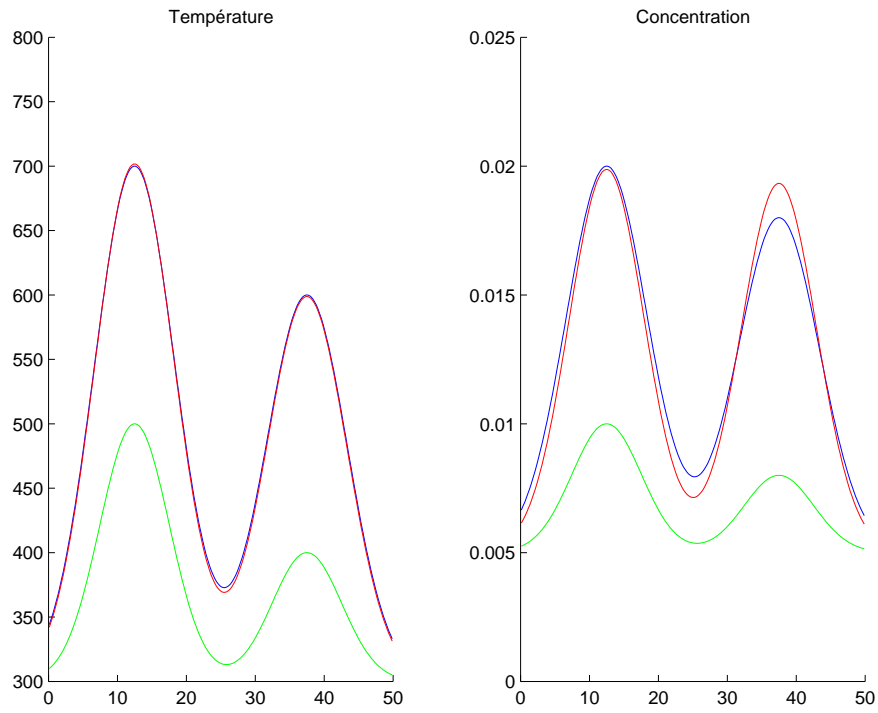


FIG. 70: *Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit nul.*

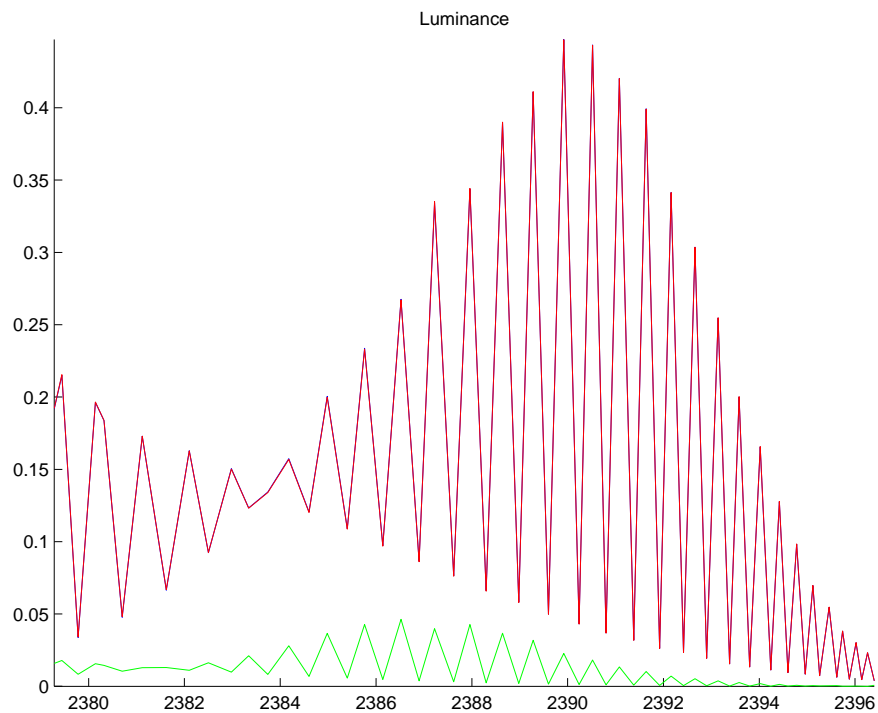


FIG. 71: *Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit nul.*

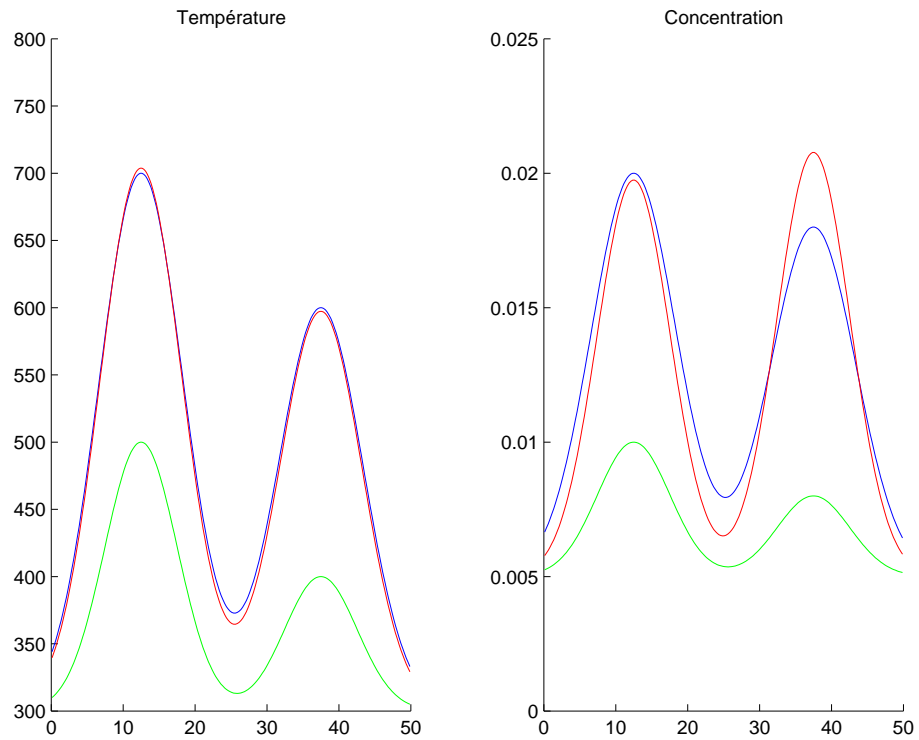


FIG. 72: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 1%.

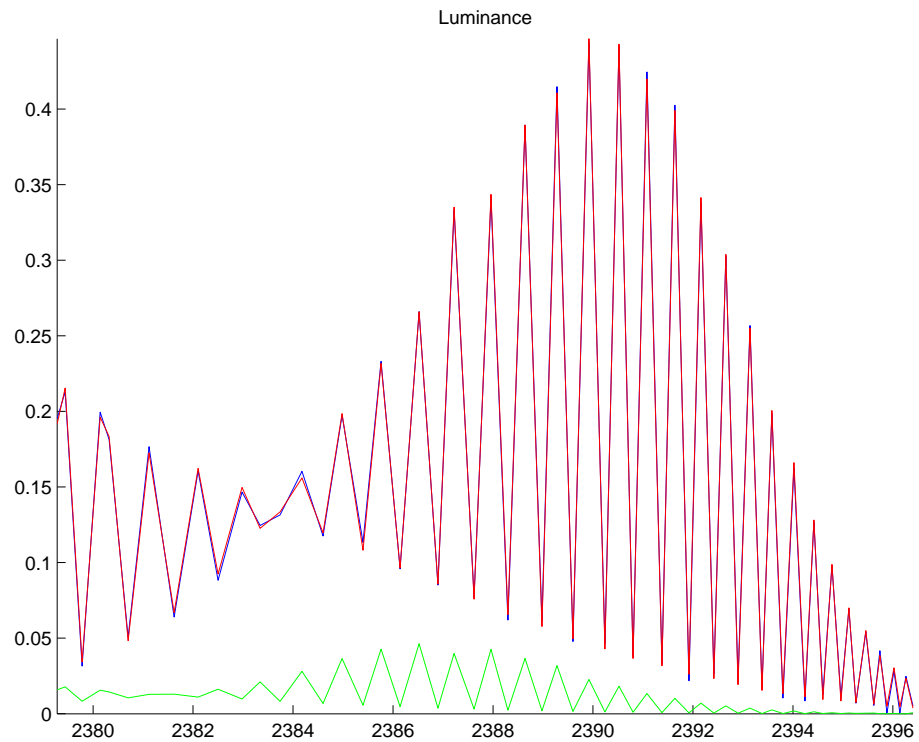


FIG. 73: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 1%.

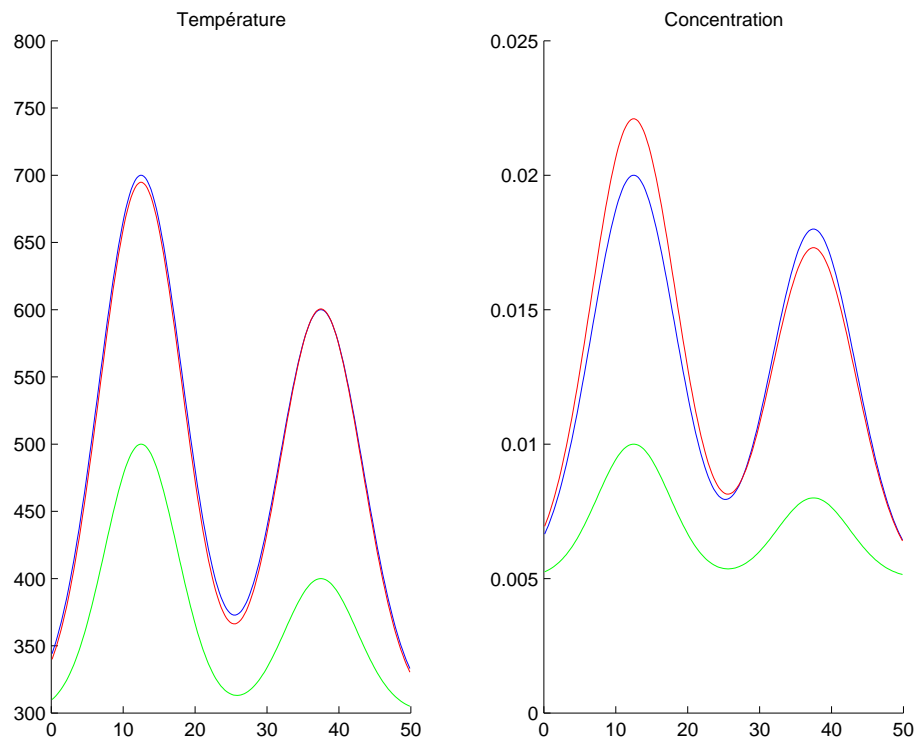


FIG. 74: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 2%.

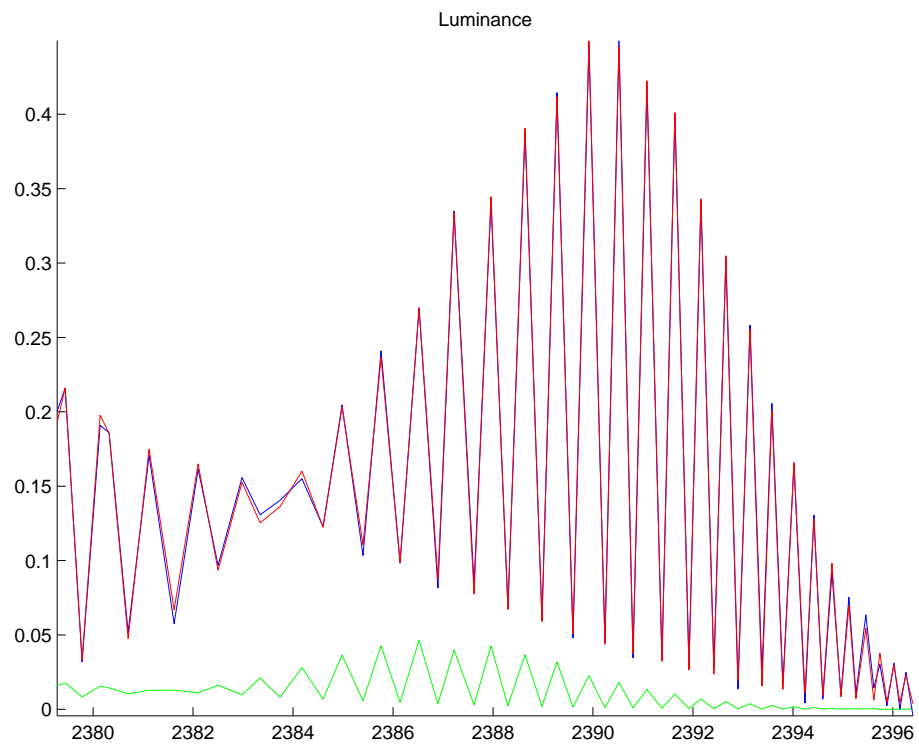


FIG. 75: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 2%.

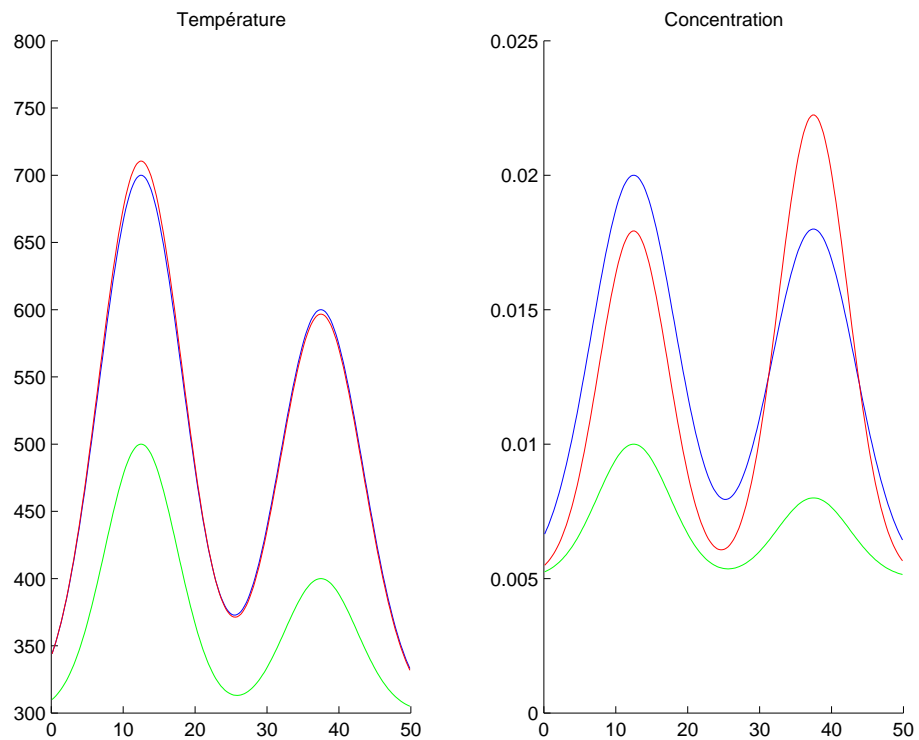


FIG. 76: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 4%.

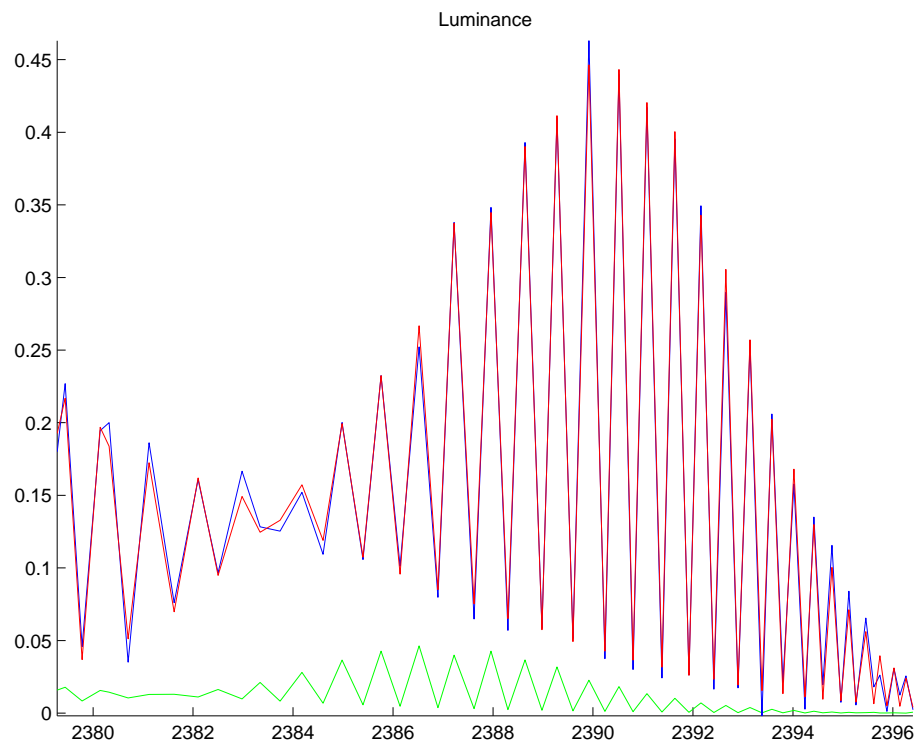


FIG. 77: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 4%.

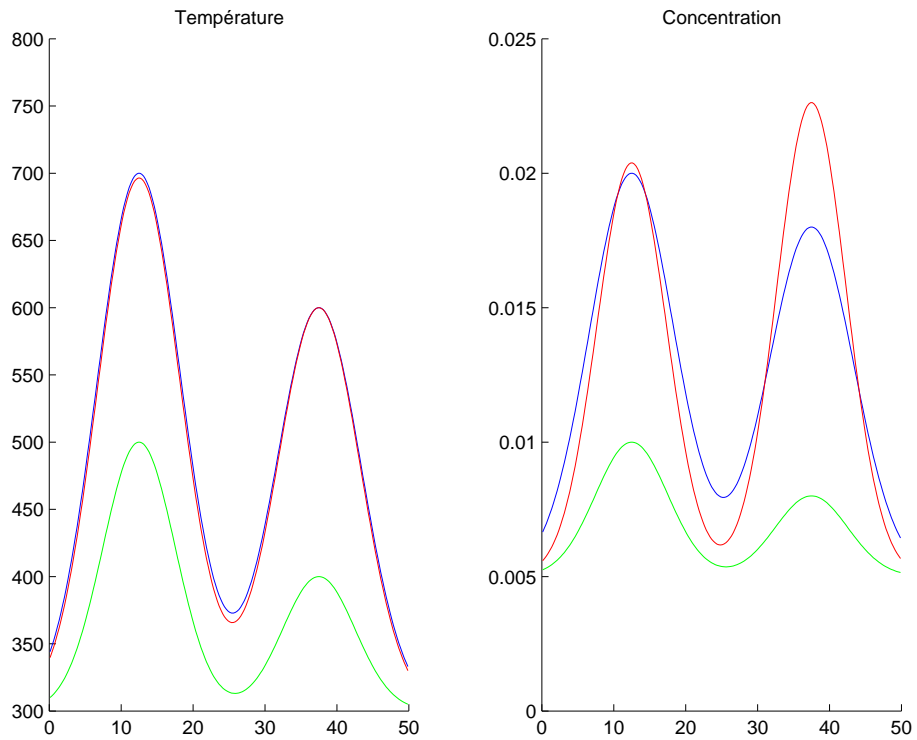


FIG. 78: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 8%.

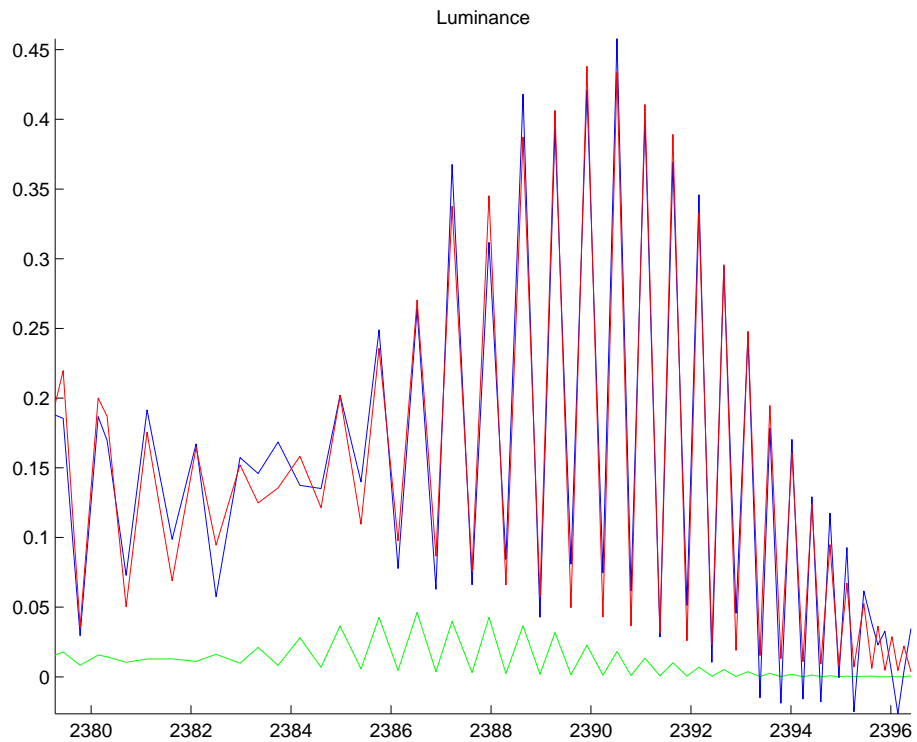


FIG. 79: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 8%.

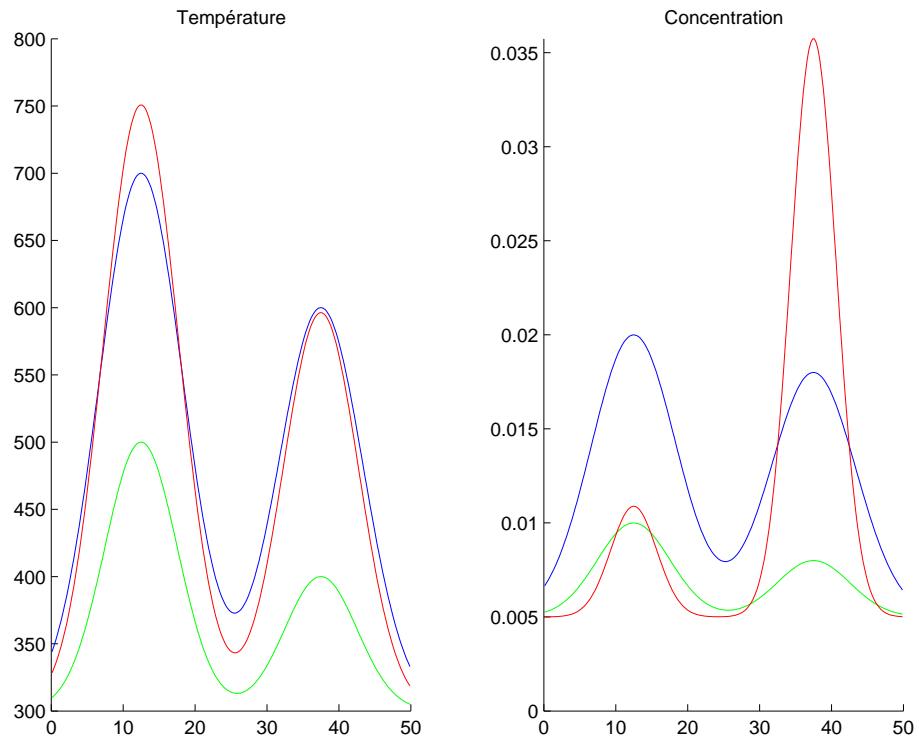


FIG. 80: Profils de température (à gauche) et de concentration (à droite) recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge), bruit 16%.

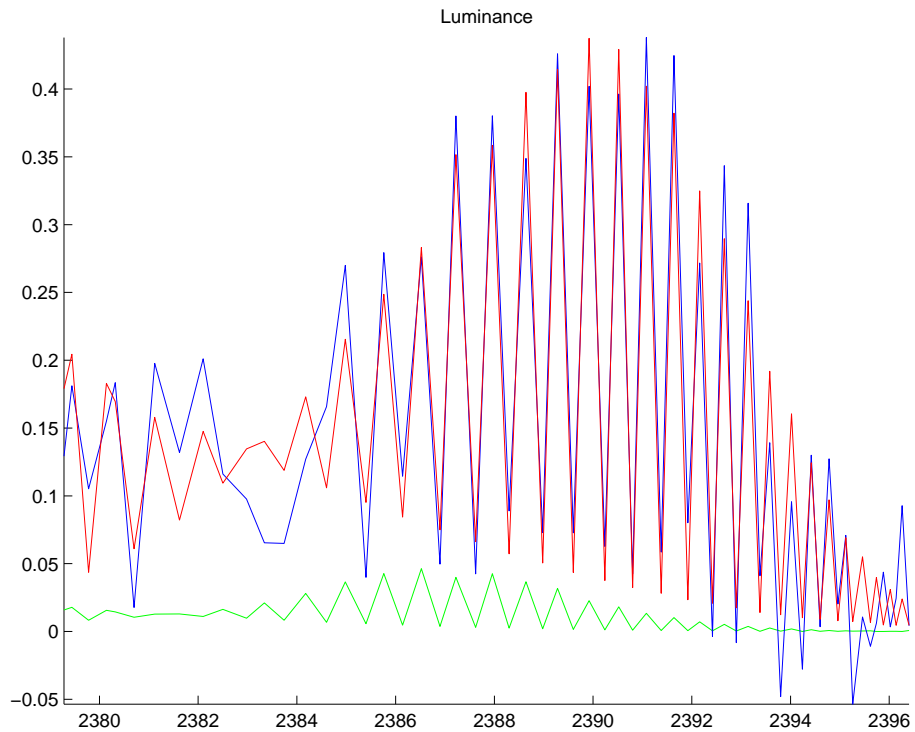


FIG. 81: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge), bruit 16%.

### 3.4.4 Identification de 6 paramètres

Les valeurs des paramètres  $T_{max,1}, T_{max,2}, \alpha_T, C_{max,1}, C_{max,2}, \alpha_C$  sont à retrouver par identification. Les autres paramètres sont initialisés par leurs valeurs exactes. Encore une fois l'identification de température est plus satisfaisante (figures 70 à 81).

D'après l'analyse de sensibilité associée à ce choix des paramètres, le nombre des paramètres identifiable pour le niveau de bruit 1% (ce résultat persiste pour un niveau de bruit  $< 10\%$ ) est 4 paramètres. La constatation ici est que ce même nombre représente le nombre des paramètres retrouvés par identification, ainsi on retrouve 3 paramètres pour le profil de température, qui est identifié parfaitement, et un quatrième pour celui de concentration.

## 3.5 Données réelles

### 3.5.1 Prise en compte de la résolution spectrale de l'appareil de spectroscopie

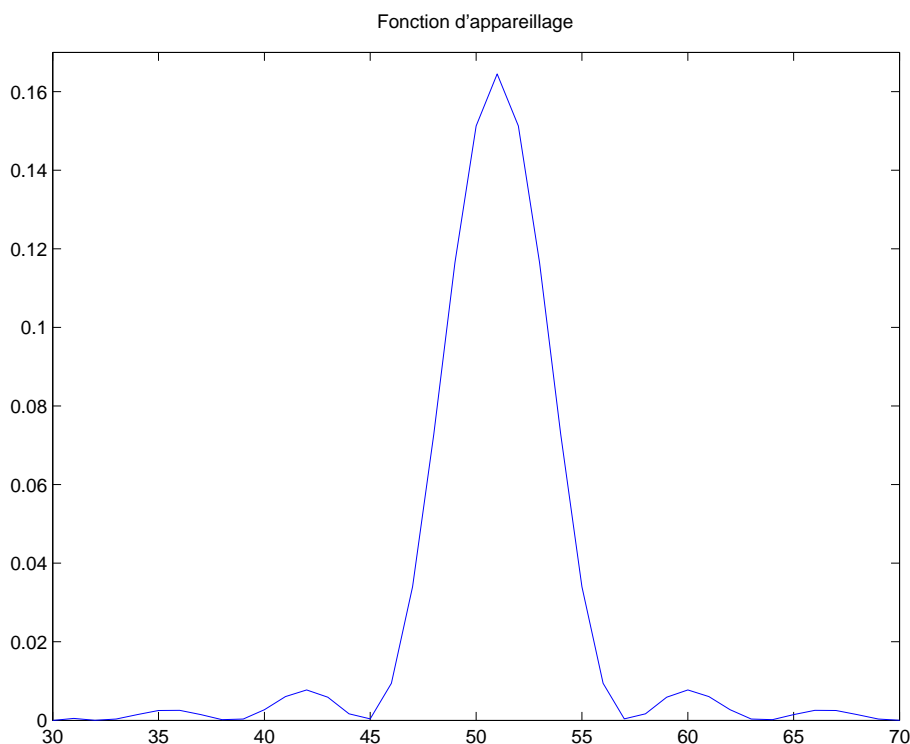


FIG. 82: *Fonction d'appareillage.*

On dispose d'un appareil de mesure spectrométrique dont l'effet est modélisé par une convolution du spectre avec la fonction d'appareillage qui est un sinus cardinal dont la forme est donnée dans la figure 82.

Cette convolution est une application linéaire, représentée par une matrice  $M$ , s'appliquant sur le spectre  $F_\Sigma$  pour toutes les longueurs d'onde entre  $2379\text{cm}^{-1}$  et  $2400\text{cm}^{-1}$  à pas de  $0.02\text{cm}^{-1}$ .

$$F_\Sigma^c(T, C) = MF_\Sigma(T, C).$$

D'où

$$DF_\Sigma^c(T, C) = MDF_\Sigma(T, C).$$

Un certain placement des détecteurs permet de mesurer la luminance pour des longueurs d'onde  $\Sigma_1$  associées à ce placement. Une projection de  $F_{\Sigma}^c$  sur l'espace associé à  $\Sigma_1$  définit la fonction  $F_{\Sigma_1}^c$ . Celle-là est utilisée pour identifier des profils de la température et de la concentration.

$$\begin{aligned} F_{\Sigma_1}^c(T, C) &= P_{\Sigma_1} \circ F_{\Sigma}^c(T, C), \\ DF_{\Sigma_1}^c(T, C) &= P_{\Sigma_1} DF_{\Sigma}^c(T, C). \end{aligned}$$

### 3.5.2 La quantité d'information extractible des mesures

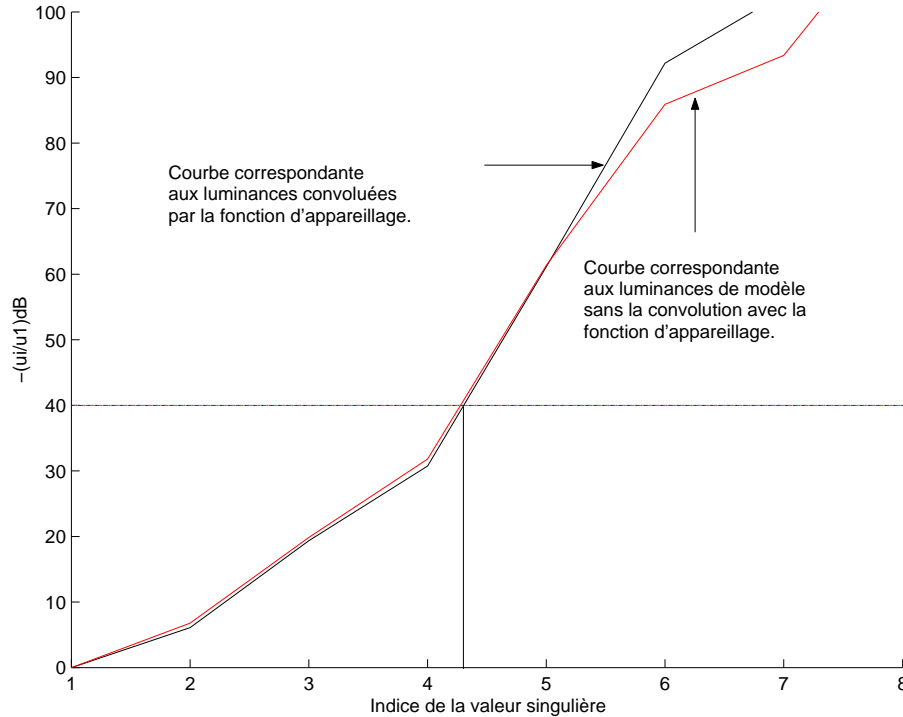


FIG. 83: Valeurs singulières, comparaison avec le cas "idéal".

La résolution d'un appareil détermine la qualité des mesures effectuées, et en conséquence la quantité d'information récupérable par identification. Une analyse de sensibilité est donc nécessaire pour savoir l'influence de cette résolution, et le nombre des paramètres identifiables associé. La figure 83 montre que l'appareil utilisé dont la résolution est  $0.5\text{cm}^{-1}$ , pour les Pics et Creux, permet pour des niveaux de bruit réels (supérieurs à 0.1%) de récupérer la même quantité d'information que le cas "idéal". Cela permet d'adopter toutes les conclusions faites précédemment pour le cas "idéal" pour les mesures réalisées par cet appareil.

### 3.5.3 Identification des profils

Les mesures situées en dehors de l'intervalle [2379, 2397] ne sont pas utilisées pour l'inversion car elles sont d'intensité inférieure au niveau de bruit. Les profils recherchés sont a priori gaussiens. D'après les résultats de la section 3.3 quatre paramètres sont identifiables, ainsi on espère retrouver la valeur maximale et la largeur par profil.

Des mesures intrusives (les profils associés sont tracés en bleu) indépendantes de nos mesures spectrales, ont été effectuées sur un moteur Rolls-Royce Spey d'un banc d'essai du DeRA, donnant les deux profils de température et de concentration, pour deux régimes de moteur (NH) :

- NH=65% régime ralenti.



– NH=91% régime correspondant au décollage.

Nous comparons dans les figures 84 à 92 les résultats de ces mesures avec ceux de l'inversion, et nous avons cité le résultat de l'inversion pour le régime NH=82.5%.

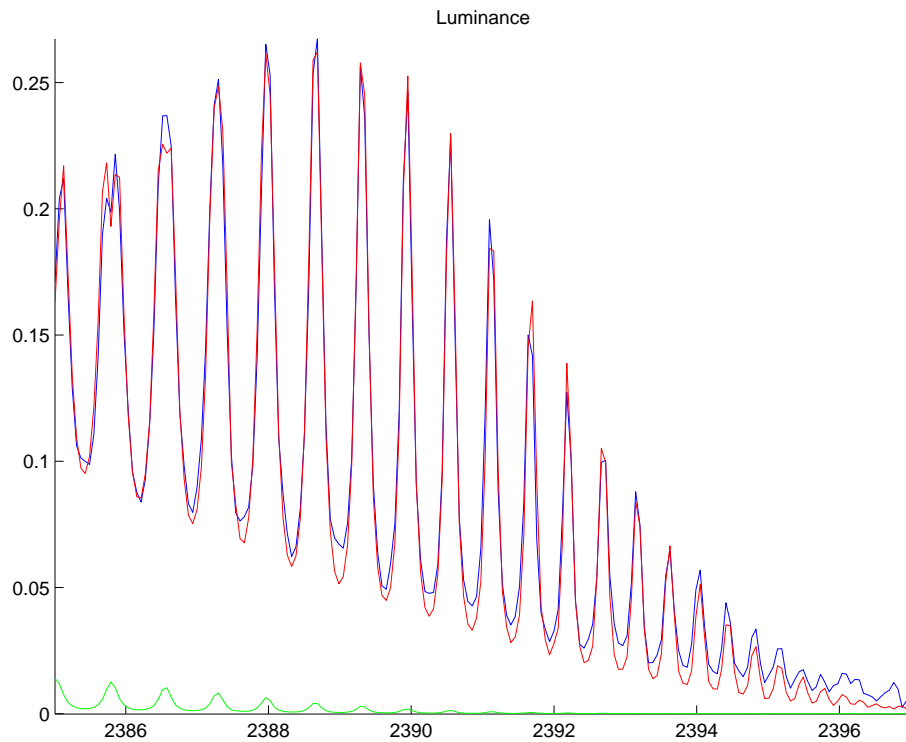


FIG. 84: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge) pour NH=65%.

**Conclusion 22** *La méthode est validée. Elle peut s'adapter à d'autres molécules et à plusieurs types de profils.*

## 4 Conclusion

L'inversion de données spectroscopiques relatives à l'émission du gaz carbonique ( $CO_2$ ) donne de bons résultats pour la reconstruction des profils de température et de concentration en  $CO_2$  quand une forme a priori de ces profils est utilisée comme régularisation de ce problème inverse mal posé. La technique de l'état adjoint accélère le calcul de la matrice jacobienne des dérivées nécessaire à la méthode de type Gauss-Newton avec régions de confiance utilisée pour minimiser la fonction objectif. Pour des niveaux de bruit élevés, le profil de température retrouvé est plus stable que celui pour la concentration, et reste proche de la solution. Pour le cas réel, les résultats d'inversion sont très proches des mesures intrusives, ce qui valide l'algorithme d'inversion et donne confiance dans la nouvelle méthode de mesure.

## Références

- [1] J. Vally. *Etude du spectre d'émission infrarouge des gaz de combustion : Application à la mesure de température de gaz et de  $CO_2$* . PhD thesis, Université de Paris 10, 1999.

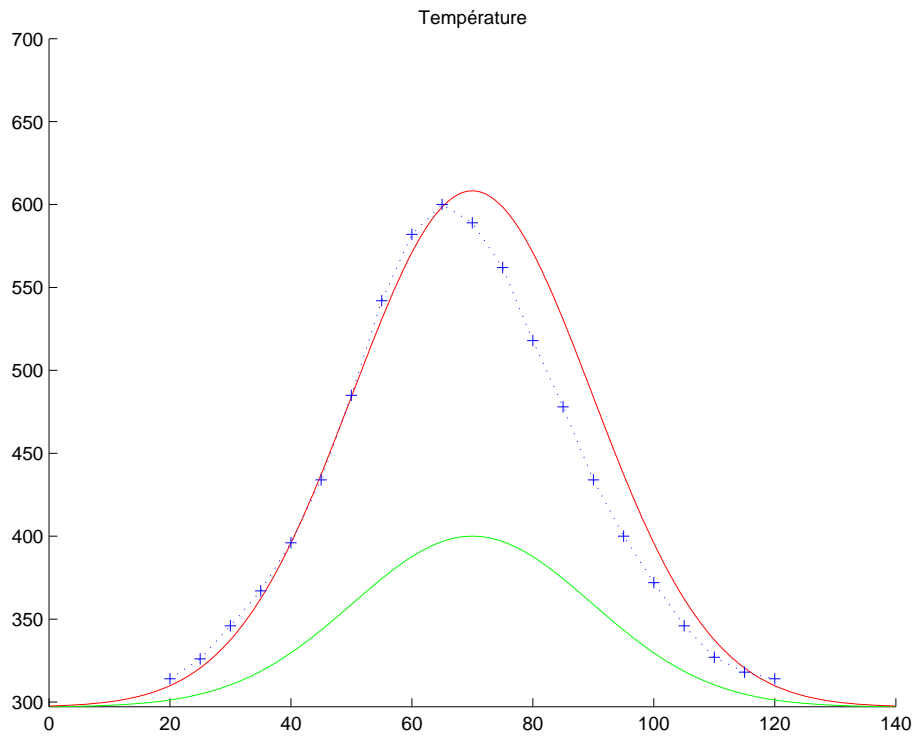


FIG. 85: Profils de température recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge) pour  $NH=65\%$ .

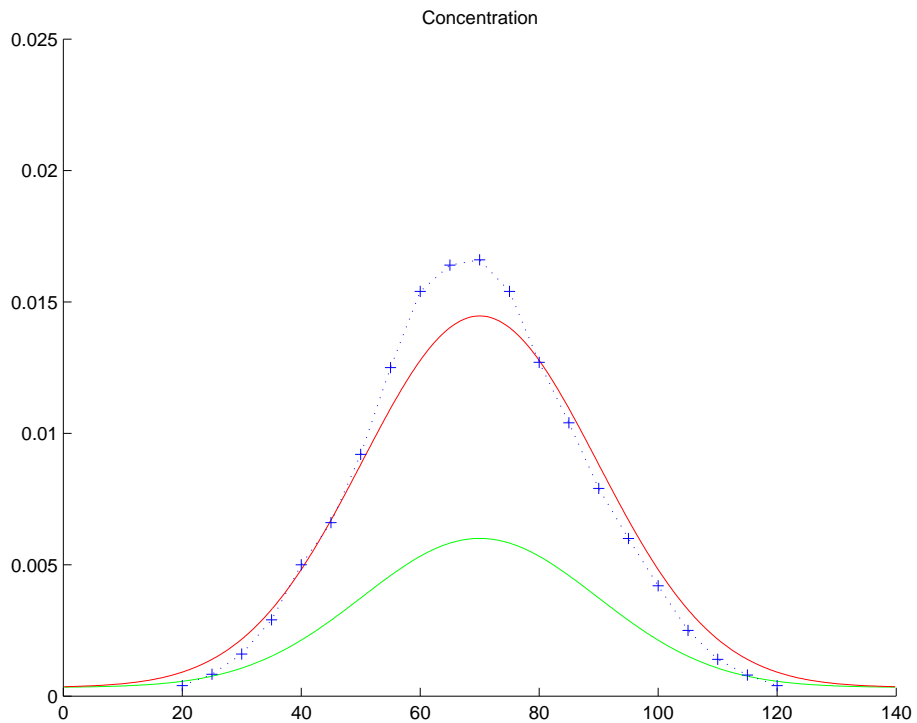


FIG. 86: Profils de concentration recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge) pour  $NH=65\%$ .

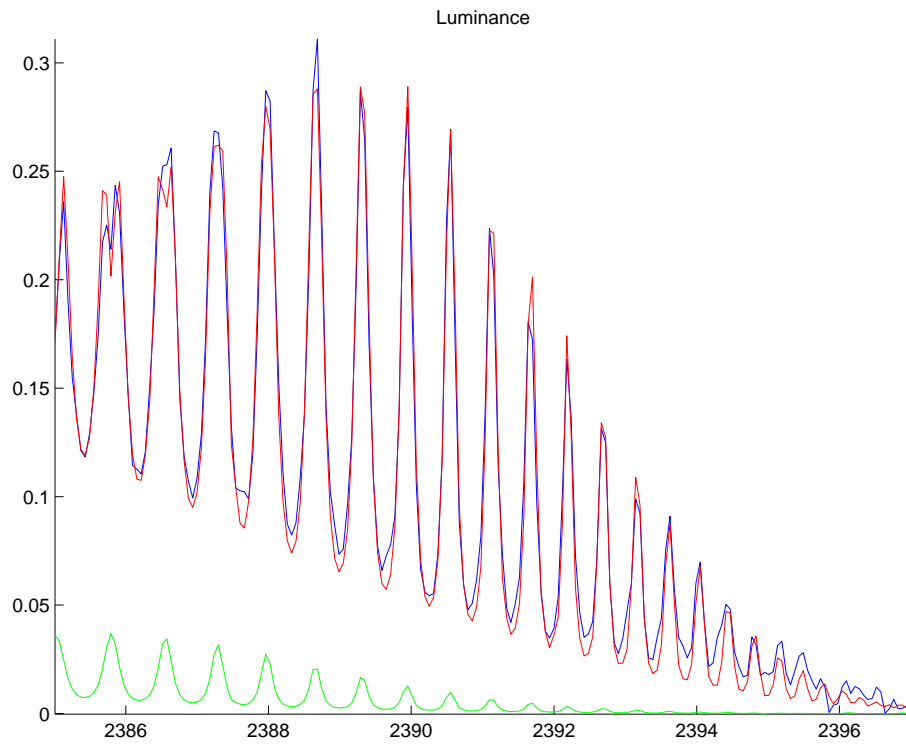


FIG. 87: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge) pour  $NH=82\%$ .

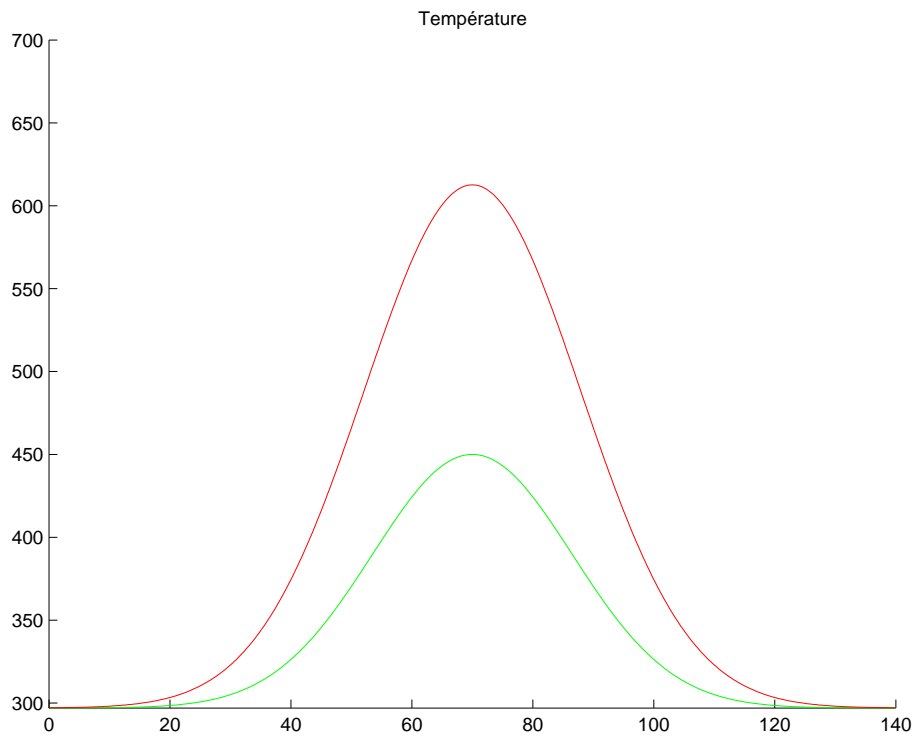


FIG. 88: Profils de température recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge) pour  $NH=82\%$ .

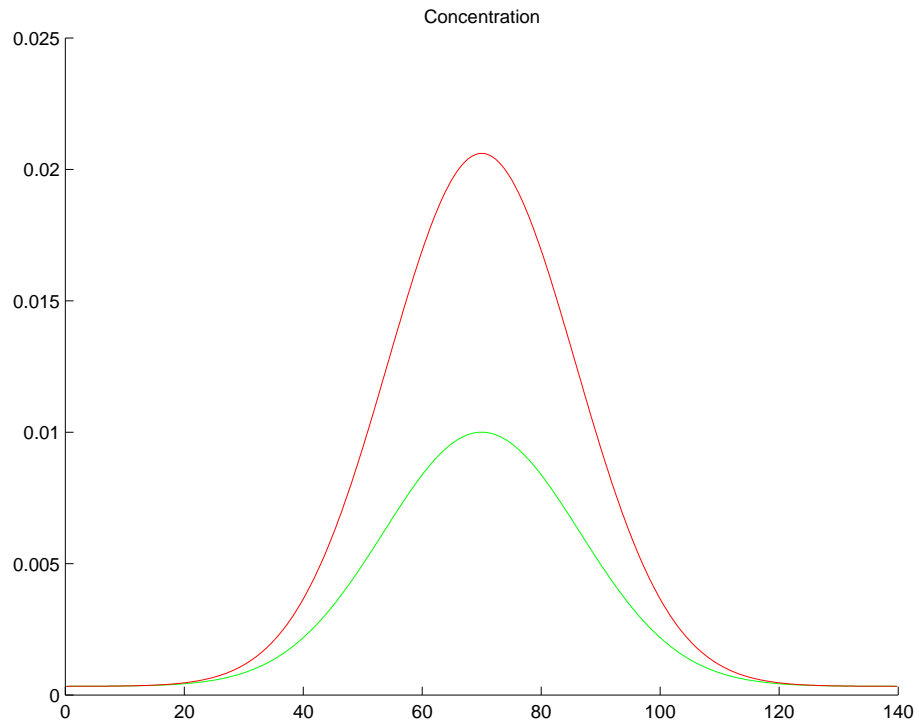


FIG. 89: Profils de concentration recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge) pour  $NH=82\%$ .

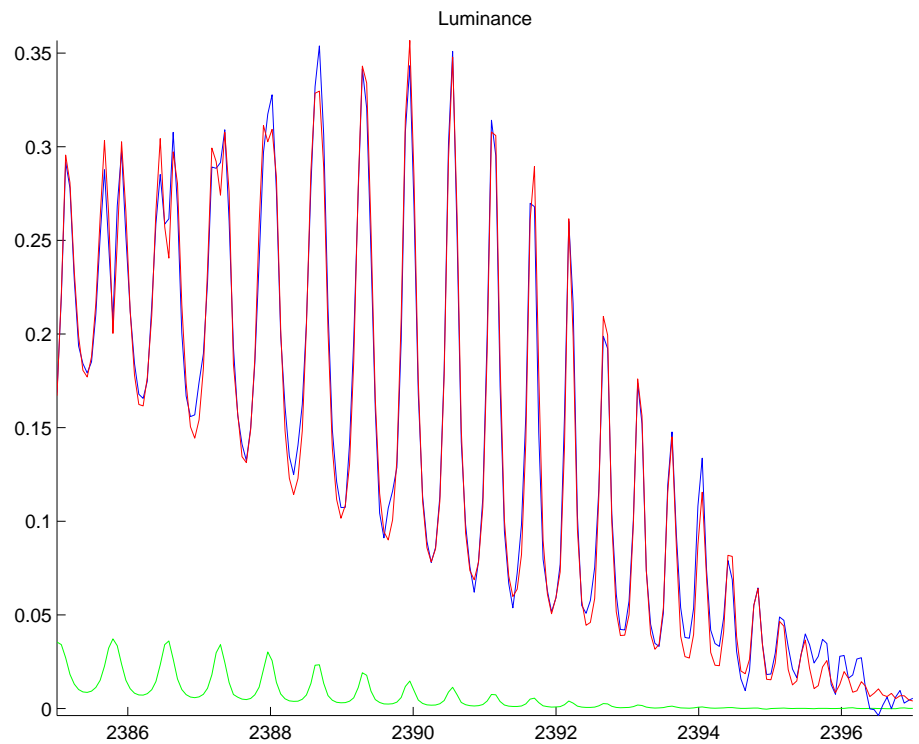


FIG. 90: Luminances données (en bleu), initiales (en vert) et retrouvées (en rouge) pour  $NH=91\%$ .

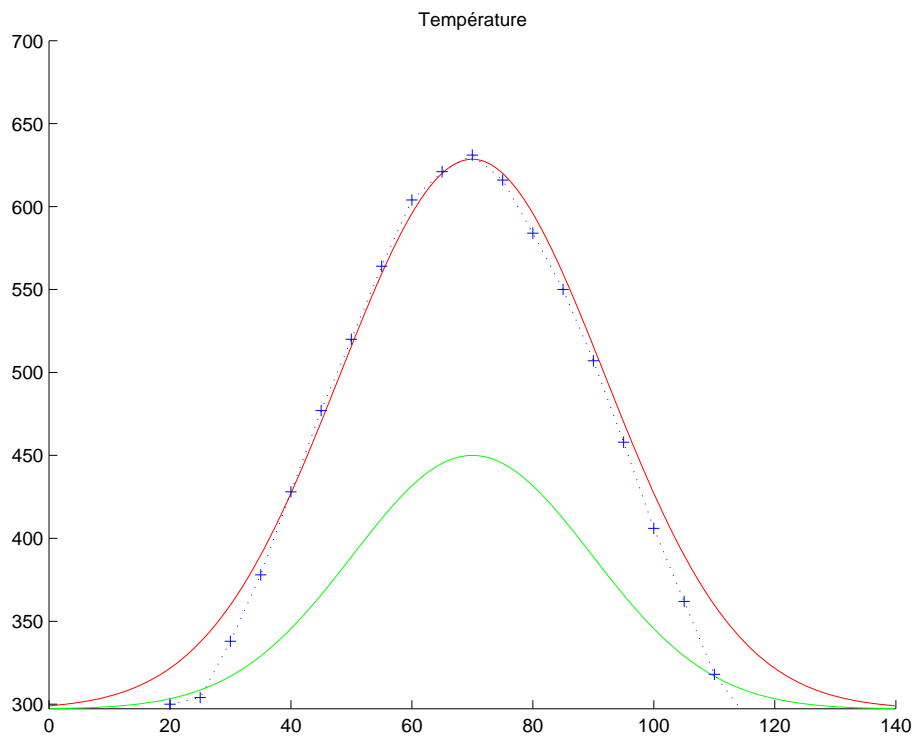


FIG. 91: Profils de température recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge) pour  $NH=91\%$ .

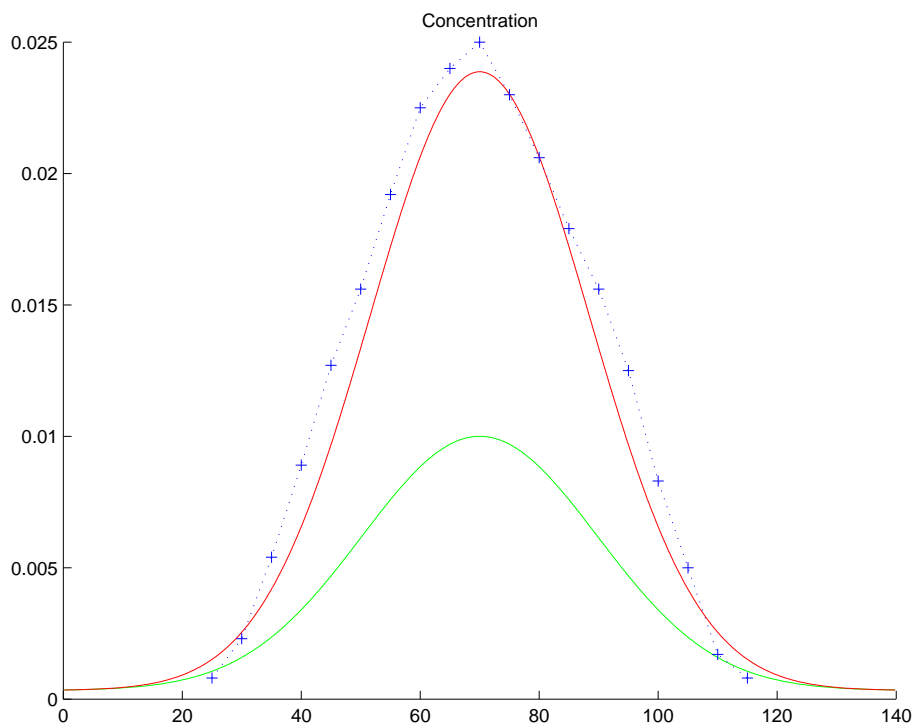


FIG. 92: Profils de concentration recherchés (en bleu), initiaux (en vert) et retrouvés (en rouge) pour  $NH=91\%$ .



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)  
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399