

Une nouvelle méthode de Galerkin Discontinu en maillages orthogonaux non-conformes pour les équations de Maxwell

Nicolas Canouet, Loula Fatima Fezoui, Serge Piperno

▶ **To cite this version:**

Nicolas Canouet, Loula Fatima Fezoui, Serge Piperno. Une nouvelle méthode de Galerkin Discontinu en maillages orthogonaux non-conformes pour les équations de Maxwell. RR-4750, INRIA. 2003. inria-00071837

HAL Id: inria-00071837
https://inria.hal.science/inria-00071837

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Une nouvelle méthode de Galerkin Discontinu en maillages orthogonaux non-conformes pour les équations de Maxwell

Nicolas Canouet - Loula Fezoui - Serge Piperno

N° 4750

Février 2003

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4750--FR

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Une nouvelle méthode de Galerkin Discontinu en maillages orthogonaux non-conformes pour les équations de Maxwell

Nicolas Canouet - Loula Fezoui - Serge Piperno

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 4750 — Février 2003 — 28 pages

Résumé : On propose dans ce rapport un schéma explicite basé sur la formulation Galerkin Discontinu capable de traiter des grilles structurées non-conformes. On utilise un schéma temporel de type saute-mouton auquel on associe un calcul de flux centré dépendant d'un paramètre α. Ce paramètre nous permet de maîtriser la dispersion même lorsque le taux de raffinement est élevé. De plus, cette méthode conserve une énergie discrète sur des maillages non-conformes nous assurant ainsi la stabilité.

Mots-clés : Équations de Maxwell 3D - Galerkin Discontinu - Maillage non-conforme - Conservation de l'énergie

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

A New Discontinuous Galerkin method for 3D Maxwell's equations on non-conforming orthogonal mesh

Abstract: In this report, we propose an explicit scheme based on the Discontinuous Galerkin (DG) formulation which is able to deal with structured non-conforming grids. We use a leap-frog time scheme coupled with a centered flux formula depending on a parameter α. Although the refinement rate is high, the dispersion is very small. This method provides the conservation of a discrete energy on non-conforming grids ensuring the stability of the scheme

Key-words: Maxwell's equations 3D - Discontinuous Galerkin - Non-conforming mesh - Energy conserving

Table des matières

1 Présentation de la méthode **6**

2 Une condition suffisante de stabilité **8**

3 Analyse de la dispersion **15**

4 Stratégie sur une grille raffinée **17**

5 Résultats numériques dans le cas mono-dimensionnel **18**
5.1 Grille régulière 18
5.2 Un cas hétérogène 18
5.3 Un exemple de raffinement : couches minces de matériaux 20

6 Résultats numériques dans le cas tri-dimensionnel **20**
6.1 Grilles régulières 20
6.2 Grilles non-conformes 22
6.3 Évolution d'un mode propre sur une grille fortement raffinée 24

Bibliographie **28**

Introduction

On s'intéresse à la résolution numérique du système de Maxwell dans le domaine temporel. Pour celle-ci, on dispose de plusieurs méthodes aux avantages différents. Les plus utilisées sont les méthodes éléments finis, volumes finis ou encore la méthode des différences finies qui est de nos jours la plus populaire. Toutes ces méthodes éprouvées se heurtent toutefois dans des problèmes de diffraction à des difficultés liées à la géométrie de l'objet diffractant. L'objet peut être par exemple de très petite taille par rapport au domaine de calcul. Dans le cas du schéma de Yee qui nécessite l'emploi d'une grille régulière, ceci donne lieu à des calculs de taille prohibitive. Des problèmes analogues apparaissent lorsque la section de l'objet est faible par rapport aux longueurs d'onde impliquées (cas d'antennes filaires). La modélisation de l'objet conduit alors à un choix de pas d'espace très petit générant alors un problème de trop grande taille.

Une solution classique dans ces cas est l'emploi de grilles localement raffinées. Plusieurs travaux ont été menés pour étendre le schéma de Yee à ce type de maillages. Citons parmi d'autres les travaux de Kim et Hoefer [6], de Prescott et Shuley [8], de Chevalier et al. [2]. Aucun de ces travaux ne présente de méthode dont la stabilité est garantie. Joly et Fouquet[5] ont proposé une nouvelle méthode de raffinement spatio-temporel en trois dimensions d'espace garantissant un raccord stable entre les grilles basée sur la conservation d'une énergie électromagnétique discrète. Les résultats numériques présentés dans [5] montrent cependant que la qualité des solutions se dégrade dès que le niveau de raffinement est supérieur à deux. Pour procéder à des raffinements supérieurs, on doit utiliser des raffinements successifs de rapport deux. De plus cette méthode nécessite la résolution d'un système linéaire sur tout raccord de grilles.

Le schéma VFC (Volume Fini Centré) introduit par Remaki [10] peut a priori traiter ce type de problème : la conservation d'une énergie discrète nous assure la stabilité. Malheureusement, tout comme le schéma de Yee, ce schéma se révèle très dispersif dès lors que le pas de temps est éloigné du pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité. Les résultats numériques obtenus sur des grilles raffinées sont alors fortement dégradés.

Pour remédier à ces difficultés nous proposons ici un schéma totalement explicite dont l'approximation spatiale est basée sur la méthode de Galerkin Discontinu. Cette dernière a été introduite en 1973 par Reed et Hill [9] pour résoudre l'équation de transport des neutrons et a été analysée par Lesaint et Raviart [4] en 1974. Sous l'impulsion de Cockburn en particulier, on assiste dans les les années 90 à un essor conséquent de cette méthode avec de nombreux travaux d'étude théorique et d'applications numériques principalement en mécanique des fluides. On trouvera un historique relativement exhaustif de ces travaux dans [3]. Les applications aux équations de Maxwell en domaine temporel sont peu nombreuses et la plupart des travaux sinon tous (voir [11] et [13] par exemple) utilisent d'une part des formules de quadrature dans l'approximation spatiale et des schémas de type Runge-Kutta pour l'intégration en temps. Ces choix ont pour conséquence d'accroître sensiblement le coût de la méthode d'une part et de ne pas garantir la conservation de l'énergie électromagnétique discrète d'autre part. Le schéma que nous présentons ici utilise un ensemble particulier de fonctions de base choisi pour minimiser le coût mémoire (4 fonctions de base locales pour un maillage en cubes), une approximation centrée des intégrales de surface et un schéma temporel de type saute-mouton d'ordre deux. Cette approche nous permet de démontrer la conservation d'une énergie discrète. Nous introduisons de plus un

paramètre pour contrôler les phénomènes de dispersion. Le schéma résultant s'est révélé particulièrement apte à traiter des grilles fortement raffinées qu'elle soient conformes on non-conformes. Cet aspect reflétant la faible dépendance de la méthode par rapport au maillage constitue à notre avis l'un des principaux attraits de la méthode de Galerkin Discontinu.

1 Présentation de la méthode

On s'intéresse à la résolution du système de Maxwell dans un milieu linéaire sans charge ni courant:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathrm{rot}(\mathbf{H}), \\ \mu \dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = -\mathrm{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ désignent respectivement le champ électrique et le champ magnétique, ε et μ sont les permittivité électrique et la perméabilité magnétique variant éventuellement en espace. On considère des maillages orthogonaux raffinés de façon conforme ou non conforme et constitués de parallélépipèdes notés V.
Nous rappelons que dans la méthode de Galerkin Discontinu le choix des fonctions de base locale est libre et nous considérons ici sur chaque élément V, les fonctions de base suivantes:

$$\begin{cases} \varphi_V^1(X) = 1, \\ \varphi_V^2(X) = x - x_{G_V}, \\ \varphi_V^3(X) = y - y_{G_V}, \\ \varphi_V^4(X) = z - z_{G_V}, \end{cases}$$

où $X = {}^t(x,y,z)$ et $G_V = {}^t(x_{G_V},y_{G_V},z_{G_V})$, désigne le centre de l'élément V Avec une telle représentation nous avons 4 degrés de liberté pour chaque composante des champs ($\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$) par élément alors qu'une approximation continue (éléments finis Q1) nécessiterait le double. On suppose de plus que la i^{eme} composante de chaque champ est constante dans sa direction ce qui diminue encore le nombre d'inconnues et on a finalement trois plus de degrés de liberté que le schéma de Yee [14] ou le schéma VFC [10].
Sur chaque élément du maillage la composante U_r du champ $\mathbf{U}$ s'écrit :

$$U_r(X) = \sum_{k=1}^{4} U_r^k \varphi_V^k(X)$$

où $\mathbf{U}$ désigne $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{H}$ et $r = x,y$ ou z.

Remarque 1 *Si U_r est un polynôme de degré un sur un volume V, les degrés de liberté de U_r sont respectivement la valeur au centre de gravité de V les dérivées dans les directions x,y et z. Si U_r est quelconque, les degrés de liberté sont alors des approximations à l'ordre 1 de ces quantités.*

On multiplie le système (1) par les fonctions de base φ_V^k $(k = 1,..4)$ et on intègre sur chaque élément V en supposant constants ε et μ sur l'élément, on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon_V \displaystyle\int_V \varphi_V^k \frac{d\mathbf{E}}{dt} = -\int_V \nabla\varphi_V^k \times \mathbf{H} + \int_{\partial V} \varphi_V^k \ \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \\ \mu_V \displaystyle\int_V \varphi_V^k \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \int_V \nabla\varphi_V^k \times \mathbf{H} - \int_{\partial V} \varphi_V^k \ \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \end{cases}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à V.
Les termes volumiques sont calculés en utilisant la représentation des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ dans la base locale de l'élément. Cette représentation étant discontinue, une approximation est nécessaire au calcul des intégrales de bord à l'interface entre deux éléments.
On propose ici une formule d'interpolation utilisant les valeurs (bien définies) des champs de part et d'autre de l'interface :

$$\int_{\partial V} \varphi_V^k \ \mathbf{n} \times \mathbf{U} = \sum_{V' \in \mathcal{V}(V)} \int_{\partial V \cap \partial V'} \varphi_V^k \ \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{U}_{VV'} + \mathbf{U}_{V'V}}{2} \right)$$

où

$$\mathbf{U}_{VV'} = \mathbf{U}_V^1 + \alpha \begin{pmatrix} {}^t(U_{xV}^2, U_{xV}^3, U_{xV}^4).\overrightarrow{G_V G_{VV'}} \\ {}^t(U_{yV}^2, U_{yV}^3, U_{yV}^4).\overrightarrow{G_V G_{VV'}} \\ {}^t(U_{zV}^2, U_{zV}^3, U_{zV}^4).\overrightarrow{G_V G_{VV'}} \end{pmatrix},$$

$G_{VV'}$ désigne le centre de la face commune aux éléments V et V' et α un paramètre réel. Choisir $\alpha = 0$ revient à imposer une représentation des champs constante par éléments (ie P0) alors que choisir $\alpha = 1$ revient à supposer une variation linéaire (P1 discontinu) plus classique. Nous montrerons par la suite qu'un choix judicieux de α permet de contrôler les phénomènes de dispersion.
On note M_V la matrice de masse dont les coefficients sont donnés par $M_V(i,j) = \int_V \varphi_V^i \varphi_V^j \ dV$ $(i,j = 1,..,4)$ et on pose :

$$\int_{\partial V \cap \partial V'} \varphi_V^k \ \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{E}_{VV'} + \mathbf{E}_{V'V}}{2} \right) = \vec{\mathcal{F}}_k(\mathbf{E}_{VV'}, \mathbf{E}_{V'V}),$$

$$\int_{\partial V \cap \partial V'} \varphi_V^k \ \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{H}_{VV'} + \mathbf{H}_{V'V}}{2} \right) = \vec{\mathcal{G}}_k(\mathbf{H}_{VV'}, \mathbf{H}_{V'V}).$$

On peut remarquer que les fonctions de base que nous avons choisies sont orthogonales. Ainsi, pour tout élément V, les matrices M_V sont diagonales.
En utilisant un schéma saute-mouton d'ordre deux pour la discrétisation en temps, le schéma, que nous appelons Galerkin Pondéré (GP), peut s'écrire sur chaque élément du maillage, (en omettant l'indice V, k variant de 1 à 4 et r désignant x,y et z) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu M \dfrac{{\mathbf{H}_\mathbf{r}}^{n+\frac{1}{2}} - {\mathbf{H}_\mathbf{r}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(\displaystyle\int \nabla \varphi^k \times \mathbf{E}^n - \sum_{V' \in \mathcal{V}(V)} \vec{\mathcal{F}}_k(\mathbf{E}_{VV'}^n, \mathbf{E}_{V'V}^n) \right)_r , \\ \varepsilon M \dfrac{{\mathbf{E}_\mathbf{r}}^{n+1} - {\mathbf{E}_\mathbf{r}}^{n}}{\Delta t} = \left(-\displaystyle\int \nabla \varphi^k \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{V' \in \mathcal{V}(V)} \vec{\mathcal{G}}_k(\mathbf{H}_{VV'}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_{V'V}^{n+\frac{1}{2}}) \right)_r . \end{array} \right. \tag{2}$$

A la surface d'un conducteur parfait, la condition aux limites s'écrit $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Pour tout volume V ayant une face métallique F, on prend en compte cette condition de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_F \varphi_V \ \mathbf{n} \times \mathbf{E} & = & 0, \\ \displaystyle\int_F \varphi_V \ \mathbf{n} \times \mathbf{H} & = & \displaystyle\int_F \varphi_V \ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_\mathrm{m}, \end{array} \tag{3}$$

où

$$\mathbf{H_m} = \begin{pmatrix} H_x^1 \\ H_y^1 \\ H_z^1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} {}^t(H_{xV}^2, H_{xV}^3, H_{xV}^4).\overrightarrow{G_V G_F} \\ {}^t(H_{yV}^2, H_{yV}^3, H_{yV}^4).\overrightarrow{G_V G_F} \\ {}^t(H_{zV}^2, H_{zV}^3, H_{zV}^4).\overrightarrow{G_V G_F} \end{pmatrix}.$$

G_F est le centre de gravité de la face F.

Remarque 2 *Pour $\alpha = 0$ et une représentation des champs constants par éléments (ie P0) on retrouve le schéma volumes finis centrés (VFC) [7].*

Remarque 3 *Nous rappelons que la ième composante est supposée constante dans sa direction ce qui ramène le nombre de degrés de liberté à 3 par composante et par élément au lieu de 4. Le tableau 1 résume le nombre de degrés de liberté nécessaires à la méthode GP comparé au schéma VFC pour les cas 1D, 2D et 3D.*

	VFC	GP
1D	2	4
2D	3	7
3D	6	18

TAB. 1 – *Nombre de degrés de liberté*

2 Une condition suffisante de stabilité

Proposition 1 *Le schéma GP conserve sur tout maillage orthogonal (conforme ou non-conforme) un équivalent discret de l'énergie électromagnétique dont l'expression à l'instant $n\Delta t$ est donnée par :*

$$\mathcal{E}^n = \sum_V a_{1,V} \left(E_V^{1,n} + H_V^{1,n} \right) + \alpha \sum_V \sum_{i=2}^{4} a_{i,V} \left(E_V^{i,n} + H_V^{i,n} \right) \tag{4}$$

où

$$\begin{cases} a_{i,V} &= \displaystyle\int_V {\varphi_V^i}^2 dV, \\ E_V^{i,n} &= \epsilon_V \left({E_{x,V}^{i,n}}^2 + {E_{y,V}^{i,n}}^2 + {E_{z,V}^{i,n}}^2 \right), \\ H_V^{i,n} &= \mu_V \left(H_{x,V}^{i,n+1/2} H_{x,V}^{i,n-1/2} + H_{y,V}^{i,n+1/2} H_{y,V}^{i,n-1/2} + H_{z,V}^{i,n+1/2} H_{z,V}^{i,n-1/2} \right). \end{cases}$$

Preuve : Pour plus de lisibilité, on propose une démonstration dans les cas bi-dimensionnel. La démonstration est identique dans le cas tri-dimensionnel. On considère donc le système

de Maxwell 2D dans la polarisation TE :

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} + \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \epsilon \dfrac{\partial E_x}{\partial t} - \dfrac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\ \epsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

On se donne un maillage orthogonal infini (conforme ou non-conforme). Chaque élément C_i est donc un carré de taille $(\Delta x_i, \Delta y_i)$. On note ϵ_i et μ_i respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu sur l'élément C_i.
On appelle interface l'intersection de deux éléments lorsqu'il s'agit d'arêtes. On les note $a_{ij} = C_i \bigcap C_j$. Sur chaque interface a_{ij}, on note $\overrightarrow{n_{ij}} = {}^t(n_{ijx}, n_{ijy})$ l'intégrale de la normale unitaire orientée de C_i vers C_j le long de a_{ij}. On note enfin $\overrightarrow{\widetilde{n}_{ij}}$ le vecteur unitaire associé et $\mathcal{V}_j$ l'ensemble des éléments C_j voisins de C_i (ie $C_i \bigcap C_j \neq \emptyset$).
Pour toute grille orthogonale conforme ou non-conforme, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \vec{n_{ij}} = 0 \\ \vec{n_{ij}} = -\vec{n_{ji}} \\ \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ijx}| = 2\Delta y_i \text{ et } \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ijy}| = 2\Delta x_i. \end{cases} \tag{5}$$

Trois degrés de liberté par composante de champs sont nécessaires. Pour la composante H_z, on désigne par $\mathbf{H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}} = {}^t(H_{zi}^1, H_{zi}^2, H_{zi}^3)$ le vecteur constitué des 3 degrés de liberté à l'instant $n + 1/2$.
On rappelle qu'avec la représentation choisie, $E_{xi}^2 = 0$ et $E_{yi}^3 = 0$. Le schéma GP (2) peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} \mu_i M_i \dfrac{\mathbf{H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}} - \mathbf{H_{zi}^{n-\frac{1}{2}}}}{\Delta t} = -M_i^y \mathbf{E_{xi}^{n+1}} + M_i^x \mathbf{E_{yi}^{n+1}} + \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} -(K_{ij} + K_{ji}) n_{ijx} + (G_{ij} + G_{ji}) n_{ijy} \\ -\Delta x_i (K_{ij} + K_{ji}) |n_{ijx}|/2 \\ \Delta y_i (G_{ij} + G_{ji}) |n_{ijy}|/2 \end{pmatrix} \\ \epsilon_i M_i \dfrac{\mathbf{E_{xi}^{n+1}} - \mathbf{E_{xi}^{n}}}{\Delta t} = -M_i^y \mathbf{H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}} + \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji}) n_{ijy} \\ 0 \\ \Delta y_i (F_{ij} + F_{ji}) |n_{ijy}|/2 \end{pmatrix} \\ \epsilon_i M_i \dfrac{\mathbf{E_{yi}^{n+1}} - \mathbf{E_{yi}^{n}}}{\Delta t} = M_i^x \mathbf{H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}} - \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji}) n_{ijy} \\ \Delta x_i (F_{ij} + F_{ji}) |n_{ijx}|/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{6}$$

où les flux entre les éléments C_i etC_j ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{ij} = \dfrac{H^1_{zi}}{2} + \alpha \dfrac{\Delta x_i}{4} \widetilde{n}_{ijx} H^2_{zi} + \alpha \dfrac{\Delta y_i}{4} \widetilde{n}_{ijy} H^3_{zi} \\ G_{ij} = \dfrac{E^1_{xi}}{2} + \alpha \dfrac{\Delta y_i}{4} \widetilde{n}_{ijy} E^3_{xi} \\ K_{ij} = \dfrac{E^1_{yi}}{2} + \alpha \dfrac{\Delta x_i}{4} \widetilde{n}_{ijx} E^2_{yi} \ . \end{array} \right.$$

Dans le cas 2D, les matrices M_i, M_i^x et M_i^y ont l'expression suivante :

$$M_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_i^3 \Delta y_i/12 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_i^3 \Delta x_i/12 \end{pmatrix},$$

$$M_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_i^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit la matrice d'énergie $M_i^\alpha = \begin{pmatrix} \Delta x_i \Delta y_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta x_i^3 \Delta y_i/12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta y_i^3 \Delta x_i/12 \end{pmatrix}$.

On définit alors l'énergie discrète

$$\mathcal{E}^n = \sum_i \epsilon_i \ {}^t\mathbf{E^n_{xi}} M_i^\alpha \mathbf{E^n_{xi}} + \epsilon_i \ {}^t\mathbf{E^n_{yi}} M_i^\alpha \mathbf{E^n_{yi}} + \mu_i \ {}^t\mathbf{H^{n+\frac{1}{2}}_{zi}} M_i^\alpha \mathbf{H^{n-\frac{1}{2}}_{zi}}.$$

La variation d'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \sum_i ({}^t\mathbf{E^{n+1}_{xi}} + {}^t\mathbf{E^n_{xi}}) \epsilon_i M_i^\alpha (\mathbf{E^{n+1}_{xi}} - \mathbf{E^n_{xi}}) \\ &\quad + ({}^t\mathbf{E^{n+1}_{yi}} + {}^t\mathbf{E^n_{yi}}) \epsilon_i M_i^\alpha (\mathbf{E^{n+1}_{yi}} - \mathbf{E^n_{yi}}) + {}^t\mathbf{H^{n+\frac{1}{2}}_{zi}} \mu_i M_i^\alpha (\mathbf{H^{n+\frac{3}{2}}_{zi}} - \mathbf{H^{n-\frac{1}{2}}_{zi}}). \end{aligned}$$

Le système (6) permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i M_i^\alpha \dfrac{\mathbf{H^{n+\frac{1}{2}}_{zi}} - \mathbf{H^{n-\frac{1}{2}}_{zi}}}{\Delta t} = -\alpha M_i^y \mathbf{E^{n+1}_{xi}} + \alpha M_i^x \mathbf{E^{n+1}_{yi}} + \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} -(K_{ij} + K_{ji}) n_{ijx} + (G_{ij} + G_{ji}) n_{ijy} \\ -\alpha \Delta x_i (K_{ij} + K_{ji}) |n_{ijx}|/2 \\ \alpha \Delta y_i (G_{ij} + G_{ji}) |n_{ijy}|/2 \end{pmatrix} \\ \epsilon_i M_i^\alpha \dfrac{\mathbf{E^{n+1}_{xi}} - \mathbf{E^n_{xi}}}{\Delta t} = -\alpha M_i^y \mathbf{H^{n+\frac{1}{2}}_{zi}} + \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji}) n_{ijy} \\ 0 \\ \alpha \Delta y_i (F_{ij} + F_{ji}) |n_{ijy}|/2 \end{pmatrix} \\ \epsilon_i M_i^\alpha \dfrac{\mathbf{E^{n+1}_{yi}} - \mathbf{E^n_{yi}}}{\Delta t} = \alpha M_i^x \mathbf{H^{n+\frac{1}{2}}_{zi}} - \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \begin{pmatrix} (F_{ij} + F_{ji}) n_{ijy} \\ \alpha \Delta x_i (F_{ij} + F_{ji}) |n_{ijx}|/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

En notant $\mathbf{E_{xi}} = \mathbf{E_{xi}^{n+1}} + \mathbf{E_{xi}^{n}}$, $\mathbf{E_{yi}} = \mathbf{E_{yi}^{n+1}} + \mathbf{E_{yi}^{n}}$ et $\mathbf{H_{zi}} = \mathbf{H_{zi}^{n+\frac{1}{2}}}$, on peut alors évaluer la variation d'énergie :

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta t(a+b+c+d),$$

$$\begin{aligned}
a &= \sum_i \sum_{j\in\mathcal{V}_i} n_{ijy}E^0_{xi}H^0_{zi} - n_{ijx}E^0_{yi}H^0_{zi} + \frac{\alpha^2}{4}\sum_i \sum_{j\in\mathcal{V}_i} n_{ijy}E^2_{xi}H^2_{zi} - n_{ijx}E^1_{yi}H^1_{zi} \\
b &= \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\in\mathcal{V}_i} n_{ijy}E^0_{xi}H^0_{zj} - n_{ijx}E^0_{yi}H^0_{zj} n_{ijy}H^0_{zi}E^0_{xj} - n_{ijx}H^0_{zi}E^0_{yj} \\
c &= \frac{\alpha^2}{8}\sum_i \sum_{j\in\mathcal{V}_i} \Delta x_i\Delta x_j n_{ijx}(E^1_{yi}H^1_{zj} + H^1_{zi}E^1_{yj}) - \Delta y_i\Delta y_j n_{ijy}(E^2_{xi}H^2_{zj} + H^2_{zi}E^2_{xj}) \\
d &= \sum_i \alpha\Delta x_i\Delta y_i(H^1_{zi}E^0_{yi} - H^2_{zi}E^0_{xi} - E^2_{xi}H^0_{zi} + E^1_{yi}H^0_{zi}) \\
&\quad + \sum_i \sum_{j\in\mathcal{V}_i} \alpha\frac{\Delta y_i|n_{ijy}|}{2}(E^0_{xi}H^2_{zi} + E^2_{xi}H^0_{zi}) - \alpha\frac{\Delta x_i|n_{ijx}|}{2}(E^0_{yi}H^1_{zi} + E^1_{yi}H^0_{zi})
\end{aligned}$$

Nous avons :

- $a = 0$ car $\sum_{j\in\mathcal{V}_i} n_{ijx} = 0$ et $\sum_{j\in\mathcal{V}_i} n_{ijy} = 0$.
- $b = 0$.

  Vérifions le pour par exemple les termes en $E^0_x H^0_z$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\in\mathcal{V}_i} n_{ijy}E^0_{xi}H^0_{zj} + n_{ijy}H^0_{zi}E^0_{xj} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a_{ij}} n_{ijy}E^0_{xi}H^0_{zj} + n_{ijy}H^0_{zi}E^0_{xj} + n_{jiy}E^0_{xj}H^0_{zi} + n_{jiy}H^0_{zj}E^0_{xi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

  car $n_{ijx} = -n_{jix}$ et $n_{ijy} = -n_{jiy}$.
- $c = 0$ pour les mêmes raisons.
- $d = 0$ car $\forall i, \sum_{j\in\mathcal{V}_i} |n_{ijx}| = 2\Delta y_i$ et $\sum_{j\in\mathcal{V}_i} |n_{ijy}| = 2\Delta x_i$.

Finalement $\Delta\mathcal{E} = 0$.

Proposition 2 *Sous la condition (7) et $\alpha > 0$, l'énergie $\mathcal{E}^n$ est une forme quadratique définie positive bornée des inconnues numériques. La condition (7) nous assure donc la stabilité du schéma.*

$$\begin{cases}
\dfrac{\Delta t^2}{d^2_{min}} < \dfrac{4}{25}\min\limits_{i,j\in\mathcal{V}_i}(\epsilon_i\mu_j,\epsilon_j\mu_i), \\
\dfrac{\Delta t^2 d^2_{min}}{d^4_{min}} < \dfrac{2}{75\alpha}\min\limits_{i,j\in\mathcal{V}_i}(\epsilon_i\mu_j,\epsilon_j\mu_i), \\
\dfrac{\Delta t^2}{d^2_{min}} < \dfrac{16}{225\alpha^2}\min\limits_{i,j\in\mathcal{V}_i}(\epsilon_i\mu_j,\epsilon_j\mu_i),
\end{cases} \tag{7}$$

où $d_{min} = \min_i(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$, $d_{max} = \max_i(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$, et $\mathcal{V}_i$ l'ensemble des cellules voisines de la cellule i.

Preuve :
On considère un maillage infini constitué de cellules $I_{i,j,k}$ de taille $(\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k)$. On note $V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. On introduit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
E_m^n(i,j,k) &= \epsilon_{i,j,k}(E_{x,m}^n(i,j,k)^2 + E_{y,m}^n(i,j,k)^2 + E_{z,m}^n(i,j,k)^2) \\
H_m^n(i,j,k) &= \mu_{i,j,k}(H_{x,m}^{n-1/2}(i,j,k)H_{x,m}^{n+1/2}(i,j,k) + H_{y,m}^{n-1/2}(i,j,k)H_{y,m}^{n+1/2}(i,j,k) \\
&\quad + H_{z,m}^{n-1/2}(i,j,k)^2 H_{z,m}^{n+1/2}(i,j,k)^2) \\
B_m^n(i,j,k) &= \mu_{i,j,k}(H_{x,m}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + H_{y,m}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + H_{z,m}^{n-1/2}(i,j,k)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x(\mathbf{E_x^n}) &= \frac{\Delta y_j \Delta z_k \Delta t}{2}(E_{x,1}^n(i+1,j,k) - E_{x,1}^n(i-1,j,k) + \alpha \Delta x_i E_{x,2}^n(i,j,k) \\
&\quad - \alpha \frac{\Delta x_{i+1}}{2} E_{x,2}^n(i+1,j,k) - \alpha \frac{\Delta x_{i-1}}{2} E_{x,2}^n(i-1,j,k)) \\
f_y(\mathbf{E_x^n}) &= \frac{\Delta x_i \Delta z_k \Delta t}{2}(E_{x,1}^n(i,j+1,k) - E_{x,1}^n(i,j-1,k) + \alpha \Delta y_j E_{x,3}^n(i,j,k) \\
&\quad - \alpha \frac{\Delta y_{j+1}}{2} E_{x,3}^n(i,j+1,k) - \alpha \frac{\Delta y_{j-1}}{2} E_{x,3}^n(i,j-1,k)) \\
f_z(\mathbf{E_x^n}) &= \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta t}{2}(E_{x,1}^n(i,j,k+1) - E_{x,1}^n(i,j,k-1) + \alpha \Delta z_k E_{x,4}^n(i,j,k) \\
&\quad - \alpha \frac{\Delta z_{k+1}}{2} E_{x,4}^n(i,j,k+1) - \alpha \frac{\Delta z_{k-1}}{2} E_{x,4}^n(i,j,k-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_x(\mathbf{E_x^n}) &= \frac{V_{i,j,k}\Delta t}{4}(E_{x,1}^n(i+1,j,k) + E_{x,1}^n(i-1,j,k) - 2E_{x,1}^n(i,j,k) - \\
&\quad - \alpha \frac{\Delta x_{i+1}}{2} E_{x,2}^n(i+1,j,k) + \alpha \frac{\Delta x_{i-1}}{2} E_{x,2}^n(i-1,j,k)) \\
g_y(\mathbf{E_x^n}) &= \frac{V_{i,j,k}\Delta t}{4}(E_{x,1}^n(i,j+1,k) + E_{x,1}^n(i,j-1,k) - 2E_{x,1}^n(i,j,k) - \\
&\quad - \alpha \frac{\Delta y_{j+1}}{2} E_{x,3}^n(i,j+1,k) + \alpha \frac{\Delta y_{j-1}}{2} E_{x,3}^n(i,j-1,k)) \\
g_z(\mathbf{E_x^n}) &= \frac{V_{i,j,k}\Delta t}{4}(E_{x,1}^n(i,j,k+1) + E_{x,1}^n(i,j,k-1) - 2E_{x,1}^n(i,j,k) - \\
&\quad - \alpha \frac{\Delta z_{k+1}}{2} E_{x,4}^n(i,j,k+1) + \alpha \frac{\Delta z_{k-1}}{2} E_{x,4}^n(i,j,k-1))
\end{aligned}$$

On note enfin :

$$\begin{aligned}
a_1(i,j,k) &= \int_{I_{i,j,k}} \Phi_{i,j,k}^1 \Phi_{i,j,k}^1 \; dx\, dy\, dz \\
a_m(i,j,k) &= \alpha \int_{I_{i,j,k}} \Phi_{i,j,k}^m \Phi_{i,j,k}^m \; dx\, dy\, dz, \; 2 \le m \le 4.
\end{aligned}$$

Avec ces notations, l'énergie s'écrit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^n &= \sum_{i,j,k}\sum_{m=1}^{4} a_m(E_m^n(i,j,k)+H_m^n(i,j,k)) \\
&= \sum_{i,j,k}\sum_{m=1}^{4} a_m(E_m^n(i,j,k)+B_m^n(i,j,k)) \\
&\quad +\sum_{i,j,k} H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)\left(f_z(\mathbf{E_y^n})-f_y(\mathbf{E_z^n})\right)+H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)g_z(\mathbf{E_y^n})-H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)g_y(\mathbf{E_z^n}) \\
&\quad +\sum_{i,j,k} H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)\left(f_x(\mathbf{E_z^n})-f_z(\mathbf{E_x^n})\right)+H_{y,2}^{n-1/2}(i,j,k)g_x(\mathbf{E_z^n})-H_{y,4}^{n-1/2}(i,j,k)g_z(\mathbf{E_x^n}) \\
&\quad +\sum_{i,j,k} H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)\left(f_y(\mathbf{E_x^n})-f_x(\mathbf{E_y^n})\right)+H_{z,3}^{n-1/2}(i,j,k)g_y(\mathbf{E_x^n})-H_{z,2}^{n-1/2}(i,j,k)g_x(\mathbf{E_y^n})
\end{aligned}
$$

On scinde la somme en 6 termes :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1^n &= \sum_{i,j,k} H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)f_z(\mathbf{E_y^n})+H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)g_z(\mathbf{E_y^n})+\frac{a_1}{2}\mu_{i,j,k}H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad +a_3\mu_{i,j,k}H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2\frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j,k+1}E_{y,1}^n(i,j,k+1)^2+\frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j,k-1}E_{y,1}^n(i,j,k-1)^2 \\
&\quad +\frac{a_1}{10}\epsilon_{i,j,k}E_{y,1}^n(i,j,k)^2+\frac{2a_4}{5}\epsilon_{i,j,k+1}E_{y,4}^n(i,j,k+1)^2 \\
&\quad +\frac{2a_4}{5}\epsilon_{i,j,k-1}E_{y,4}^n(i,j,k-1)^2+\frac{a_4}{5}\epsilon_{i,j,k}E_{y,4}^n(i,j,k)^2 \\
\mathcal{E}_2^n &= \sum_{i,j,k} -H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)f_y(\mathbf{E_z^n})-H_{x,3}^{n-1/2}(i,j,k)g_y(\mathbf{E_z^n})+\frac{a_1}{2}\mu_{i,j,k}H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad +a_4\mu_{i,j,k}H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2+\frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j+1,k}E_{z,1}^n(i,j+1,k)^2+\frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j-1,k}E_{z,1}^n(i,j-1,k)^2 \\
&\quad +\frac{a_1}{10}\epsilon_{i,j,k}E_{z,1}^n(i,j,k)^2+\frac{2a_3}{5}\epsilon_{i,j+1,k}E_{z,3}^n(i,j+1,k)^2 \\
&\quad +\frac{2a_3}{5}\epsilon_{i,j-1,k}E_{z,3}^n(i,j-1,k)^2+\frac{a_3}{5}\epsilon_{i,j,k}E_{z,3}^n(i,j,k)^2 \\
\mathcal{E}_3^n &= \sum_{i,j,k} H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)f_x(\mathbf{E_z^n})+H_{x,2}^{n-1/2}(i,j,k)g_x(\mathbf{E_z^n})+\frac{a_1}{2}\mu_{i,j,k}H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad +a_2\mu_{i,j,k}H_{y,2}^{n-1/2}(i,j,k)^2\frac{a_1}{5}\epsilon_{i+1,j,k}E_{z,1}^n(i+1,j,k)^2+\frac{a_1}{5}\epsilon_{i-1,j,k}E_{z,1}^n(i-1,j,k)^2 \\
&\quad +\frac{a_1}{10}\epsilon_{i,j,k}E_{z,1}^n(i,j,k)^2+\frac{2a_2}{5}\epsilon_{i+1,j,k}E_{z,2}^n(i+1,j,k)^2 \\
&\quad +\frac{2a_2}{5}\epsilon_{i-1,j,k}E_{z,2}^n(i-1,j,k)^2+\frac{a_2}{5}\epsilon_{i,j,k}E_{z,2}^n(i,j,k)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_4^n &= \sum_{i,j,k} - H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k) f_z(\mathbf{E}_\mathbf{x}^\mathbf{n}) - H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k) g_z(\mathbf{E}_\mathbf{x}^\mathbf{n}) + \frac{a_1}{2}\mu_{i,j,k} H_{y,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad + a_4 \mu_{i,j,k} H_{y,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j,k+1} E_{x,1}^n(i,j,k+1)^2 + \frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j,k-1} E_{x,1}^n(i,j,k-1)^2 \\
&\quad + \frac{a_1}{10}\epsilon_{i,j,k} E_{x,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_4}{5}\epsilon_{i,j,k+1} E_{x,4}^n(i,j,k+1)^2 \\
&\quad + \frac{2a_4}{5} E_{x,4}^n(i,j,k-1)^2 + \frac{a_4}{5} E_{x,4}^n(i,j,k)^2 \\
\mathcal{E}_5^n &= \sum_{i,j,k} H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k) f_y(\mathbf{E}_\mathbf{x}^\mathbf{n}) + H_{z,3}^{n-1/2}(i,j,k) g_y(\mathbf{E}_\mathbf{x}^\mathbf{n}) + \frac{a_1}{2}\mu_{i,j,k} H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad + a_3 \mu_{i,j,k} H_{z,3}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j+1,k} E_{x,1}^n(i,j+1,k)^2 + \frac{a_1}{5}\epsilon_{i,j-1,k} E_{x,1}^n(i,j-1,k)^2 \\
&\quad + \frac{a_1}{10}\epsilon_{i,j,k} E_{x,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_3}{5}\epsilon_{i,j+1,k} E_{x,3}^n(i,j+1,k)^2 \\
&\quad + \frac{2a_3}{5} E_{x,3}^n(i,j-1,k)^2 + \frac{a_3}{5} E_{x,3}^n(i,j,k)^2 \\
\mathcal{E}_6^n &= \sum_{i,j,k} - H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k) f_x(\mathbf{E}_\mathbf{y}^\mathbf{n}) - H_{z,2}^{n-1/2}(i,j,k) g_x(\mathbf{E}_\mathbf{y}^\mathbf{n}) + \frac{a_1}{2}\mu_{i,j,k} H_{z,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 \\
&\quad + a_2 \mu_{i,j,k} H_{z,2}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{5}\epsilon_{i+1,j,k} E_{y,1}^n(i+1,j,k)^2 + \frac{a_1}{5}\epsilon_{i-1,j,k} E_{y,1}^n(i-1,j,k)^2 \\
&\quad + \frac{a_1}{10}\epsilon_{i,j,k} E_{y,1}^n(i,j,k)^2 + \frac{2a_2}{5}\epsilon_{i+1,j,k} E_{y,2}^n(i+1,j,k)^2 \\
&\quad + \frac{2a_2}{5}\epsilon_{i-1,j,k} E_{x,2}^n(i-1,j,k)^2 + \frac{a_2}{5}\epsilon_{i,j,k} E_{y,2}^n(i,j,k)^2
\end{aligned}
$$

On a

$$\mathcal{E}^n = \sum_{i=1}^{6} \mathcal{E}_i^n. \tag{8}$$

On peut minorer chacun de ces 6 termes de manière identique. Ainsi, pour $\mathcal{E}_1^n$, nous avons (en notant $\mu = \mu_{i,j,k}$ et $\epsilon = \min_{l=-1,0,1} \epsilon_{i+l,j+l,k+l}$) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1^n \geq & \sum_{i,j,k} \frac{a_1}{10}\mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{10}\epsilon E_{y,1}^n(i,j,k+1)^2 - \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta t}{2}|H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,1}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_1}{10}\mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{10}\epsilon E_{y,1}^n(i,j,k-1)^2 - \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta t}{2}|H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,1}^n(i,j,k-1)| \\
& + \frac{a_1}{10}\mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_4}{5}\epsilon E_{y,4}^n(i,j,k)^2 - \frac{\alpha \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \Delta t}{2}|H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,4}^n(i,j,k)| \\
& + \frac{a_1}{10}\mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_4}{5}\epsilon E_{y,4}^n(i,j,k+1)^2 - \frac{\alpha \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{k+1} \Delta t}{4}|H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,4}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_1}{10}\mu H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_4}{5}\epsilon E_{y,4}^n(i,j,k-1)^2 - \frac{\alpha \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{k+1} \Delta t}{4}|H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,4}^n(i,j,k-1)| \\
& + \frac{a_4}{5}\mu H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{10}\epsilon E_{y,1}^n(i,j,k+1)^2 - \frac{V_{i,j,k}\Delta t}{4}|H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,1}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_4}{5}\mu H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{10}\epsilon E_{y,1}^n(i,j,k-1)^2 - \frac{V_{i,j,k}\Delta t}{4}|H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,1}^n(i,j,k-1)| \\
& + \frac{a_4}{5}\mu H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_1}{10}\epsilon E_{y,1}^n(i,j,k)^2 - \frac{V_{i,j,k}\Delta t}{2}|H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,1}^n(i,j,k)| \\
& + \frac{a_4}{5}\mu H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_4}{5}\epsilon E_{y,4}^n(i,j,k+1)^2 - \alpha\frac{V_{i,j,k}\Delta z_{k+1}\Delta t}{8}|H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,4}^n(i,j,k+1)| \\
& + \frac{a_4}{5}\mu H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)^2 + \frac{a_4}{5}\epsilon E_{y,4}^n(i,j,k-1)^2 - \alpha\frac{V_{i,j,k}\Delta z_{k-1}\Delta t}{8}|H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k)||E_{y,4}^n(i,j,k-1)|
\end{aligned}
$$

On note $d_{min} = \min_i(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ et $d_{max} = \max_i(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$. On vérifie que $\mathcal{E}_1^n \geq 0$ et que $\mathcal{E}_1^n = 0 \Longrightarrow \forall (i,j,k), E_{y,1}^n(i,j,k) = 0$, $E_{y,4}^n(i,j,k) = 0$, $H_{x,1}^{n-1/2}(i,j,k) = 0$ et $H_{x,4}^{n-1/2}(i,j,k) = 0$ si Δt est tel que

$$
\begin{cases}
\dfrac{\Delta t^2}{d_{min}^2} < \dfrac{4}{25} \min\limits_{i,j\in\mathcal{V}_i}(\epsilon_i\mu_j, \epsilon_j\mu_i), \\
\dfrac{\Delta t^2 d_{min}^2}{d_{min}^4} < \dfrac{2}{75\alpha} \min\limits_{i,j\in\mathcal{V}_i}(\epsilon_i\mu_j, \epsilon_j\mu_i), \\
\dfrac{\Delta t^2}{d_{min}^2} < \dfrac{16}{225\alpha^2} \min\limits_{i,j\in\mathcal{V}_i}(\epsilon_i\mu_j, \epsilon_j\mu_i).
\end{cases}
$$

Des minorations identiques sur les cinq autres termes de (8) nous permettent de vérifier que sous la condition (7) l'énergie discrète est une forme quadratique définie positive. Elle est de plus bornée (proposition 1). Le schéma est donc stable.

3 Analyse de la dispersion

Proposition 3 *Pour toute onde plane dont le vecteur d'onde k est colinéaire à* ${}^t(1,1,1)$, *le schéma GP vérifie sur une grille constituée de cubes la relation de dispersion à l'ordre 4*

si et seulement si

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{4} \right) - \alpha + \frac{1}{3} - \frac{\nu^2}{12} = 0, \tag{9}$$

où $\nu = \Delta t * \sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}} = \sqrt{3}\Delta t/\Delta x$.

Preuve :
On considère une grille régulière telle que $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. On cherche une solution du schéma GP sous la forme d'une onde plane de vecteur d'onde colinéaire à ${}^t(1,1,1)$ soit :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{\mathbf{n+\frac{1}{2}}}_{\mathbf{j,m,p}} = \mathbf{H_0} e^{i(\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t + \sqrt{3}k\Delta x(j+m+p))} \\ \mathbf{E}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j,m,p}} = \mathbf{E_0} e^{i(\omega n \Delta t + \sqrt{3}k\Delta x(j+m+p))}. \end{cases}$$

Quelques notations :

$$\mathbf{V^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{\mathbf{n+\frac{1}{2}}}_{\mathbf{j,m,p}} \\ \mathbf{E}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j,m,p}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{i \sin(\sqrt{3}k\Delta x)}{\Delta x} \\ b = \dfrac{\alpha}{2}\left(1 - cos(\sqrt{3}k\Delta x)\right) \\ c = \dfrac{3}{\Delta x^2}\left(2cos(\sqrt{3}k\Delta x) - 2\right) \\ d = \dfrac{-3\alpha i \sin(\sqrt{3}k\Delta x)}{\Delta x} \end{cases}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d & 0 \\ -c & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{V^n}$ vérifie alors :

$$\frac{2i}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \mathbf{V^n} = P\mathbf{V^n}.$$

On cherche à calculer les valeurs propres de P afin d'obtenir une relation de dispersion discrète. A l'ordre 1, on obtient les 18 valeurs propres suivantes :

$$\begin{cases} ik & \text{(multiplicité 2)} \\ -ik & \text{(multiplicité 2)} \\ 0 & \text{(multiplicité 2)} \\ i\sqrt{3}\alpha k & \text{(multiplicité 6)} \\ -i\sqrt{3}\alpha k & \text{(multiplicité 6)} \end{cases}$$

Supposons $\alpha \neq \pm 1/\sqrt{3}$. Les deux seules valeurs propres consistantes sont celles dont le terme d'ordre 0 est ik ou $-ik$. Un développement limité à l'ordre 2 sur ces valeurs propres

nous permet d'écrire la relation de dispersion discrète suivante :

$$\omega^2 = k^2c^2 + k^4c^4\frac{\Delta x^2}{18}\left(\frac{\nu^2}{2} + \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 2}{3\alpha^2 - 1}\right) + O(\Delta^4).$$

Le terme d'ordre 2 est donc nul si et seulement si

$$\alpha^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{4}\right) - \alpha + \frac{1}{3} - \frac{\nu^2}{12} = 0. \tag{10}$$

Le polynôme (10) possède deux racines ($\alpha_1 \leq \alpha_2$). On vérifie que ces deux racines sont réelles. De plus, si $\nu \in [0,1]$ alors $\alpha_1 \in [1/3,1 - \sqrt{3}/3]$ et $\alpha_2 \in [1,1 + \sqrt{3}/3]$. Ces deux racines sont donc différentes de $\pm 1/\sqrt{3}$.
Supposons à présent $\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$. Les valeurs propres dont le terme d'ordre 0 est $i\sqrt{3}\alpha k$ ou $-i\sqrt{3}\alpha k$ sont aussi consistantes. La relation de dispersion discrète est alors :

$$\omega^2 = k^2c^2 + k^4c^4\frac{\Delta x^2}{18}\left(\frac{\nu^2}{2} + \sqrt{3} - 2\right) + O(\Delta^4).$$

En aucun cas le terme d'ordre 2 ne peut s'annuler. La relation de dispersion ne peut donc être vérifiée à l'ordre 4 lorsque $\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$.

4 Stratégie sur une grille raffinée

Le polynôme (9) possède deux racines réelles ($\alpha_1 \leq \alpha_2$) données par :

$$\begin{cases} \alpha_1(\nu) = \dfrac{1}{1 + \nu^2/2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{4 - 2\nu^2 + \nu^4}{12}}\right) \\ \alpha_2(\nu) = \dfrac{1}{1 + \nu^2/2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{4 - 2\nu^2 + \nu^4}{12}}\right). \end{cases}$$

On constate numériquement sur une grille régulière que le schéma GP est stable lorsque

$$\nu \leq 1 \text{ et } \alpha = \alpha_1(\nu)$$
$$\nu \leq 1/2 \text{ et } \alpha = \alpha_2(\nu).$$

On considère à présent une grille orthogonale constituée de cellules i de taille $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$. On note :

$$\begin{cases} d_{min} = \min\limits_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} \\ d_{max} = \max\limits_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}. \end{cases}$$

Nous avons les deux choix suivants

$$\begin{cases} \Delta t = d_{min} \\ \alpha = \alpha_1(\Delta t/d_{max}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Delta t = d_{min}/2 \\ \alpha = \alpha_2(\Delta t/d_{max}) \end{cases}.$$

Nous sommes ainsi assurés dans les deux cas que sur la grille grossière, toute onde plane de vecteur d'onde colinéaire à ${}^t(1,1,1)$ solution du schéma GP satisfait la relation de dispersion à l'ordre 4. Dans la grille fine, la relation de dispersion est satisfaite à l'ordre 2. Pour $\alpha = \alpha_2$ et $\nu = 1/2$, ce terme d'ordre 2 est majoré par :

$$c^2 k^4 \frac{\Delta x_{\min}^2}{144} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), \text{ où } r = \frac{\Delta x_{\max}}{\Delta x_{\min}}.$$

On rappelle que le schéma de Yee vérifie aussi la relation de dispersion à l'ordre 2. Par exemple, pour une onde plane de vecteur d'onde colinéaire à ${}^t(1,0,0)$, ce terme d'ordre 2 est donné par $(\nu = 1)$:

$$c^2 k^4 \frac{\Delta x^2}{12} \left(\sqrt{3} - 1\right).$$

La méthode que nous proposons est donc très peu dispersive.

5 Résultats numériques dans le cas mono-dimensionnel

Dans le cas mono-dimensionnel, on montre que le schéma GP vérifie la relation de dispersion à l'ordre 4 si et seulement si

$$\alpha = \frac{4 - \nu^2}{3\nu^2 + 6}. \tag{11}$$

On a noté $\nu = \Delta t/\Delta x$. On constate numériquement que le schéma GP issu de la formule (11) est stable dès lors que $\nu \leq 1$. Des résultats numériques illustrent ci-dessous ces propriétés.

5.1 Grille régulière

On simule l'évolution d'un pulse 1D dans une cavité métallique. On stoppe la simulation dès lors que le pulse a effectué 10 allers-retours. On a représenté sur les figures suivantes la solution en espace d'un des champs lorsque le calcul est terminé. On montre sur la figure (1) la solution obtenue par Galerkin P1 ($\alpha = 1$). pour le CFL maximal (qui est dans ce cas égal à 1/2). Les phénomènes de dispersion apparaissent clairement. Pour le même CFL (figure 2), la solution obtenue par GP ne présente pas de dispersion. On montre sur la figure (3) la solution obtenue par GP lorsque le CFL est égal à 1. La solution est à nouveau de très bonne qualité. Ainsi, sur des grilles régulières 1D, la pondération des flux nous permet de réduire considérablement les phénomènes de dispersion tout en disposant d'une condition de stabilité deux fois moins restrictive.

5.2 Un cas hétérogène

On simule la propagation d'un pulse dans un milieu hétérogène. Le pulse est initialisé dans le vide ($\epsilon = \epsilon_0$) et se propage vers le matériau ($\epsilon = 20\epsilon_0$). Le paramètre α est choisi de manière à satisfaire la relation de dispersion à l'ordre 4 dans le matériau. Malgré le fort saut d'indice, la solution obtenue (figure 4) se compare parfaitement à la solution exacte. Le maillage correspond à trente points dans le support de la gaussienne. La méthode GP est donc à même de traiter de fortes hétérogénéités.

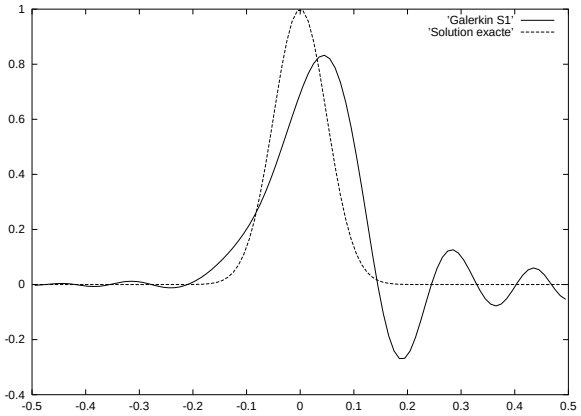


FIG. 1 – *Galerkin P1* ($\alpha = 1$) / $CFL = \frac{1}{2}$

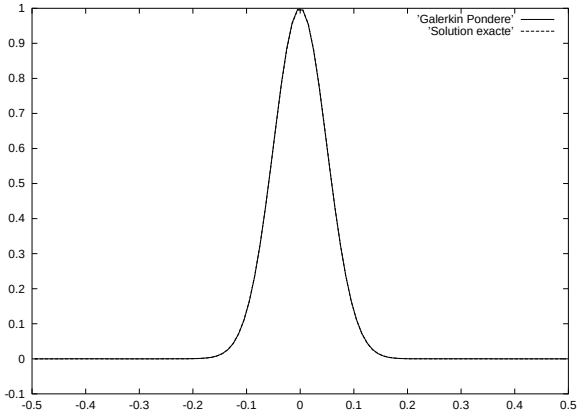


FIG. 2 – *Galerkin Pondéré* / $CFL = \dfrac{1}{2}$ $\left(\alpha = \dfrac{5}{9}\right)$

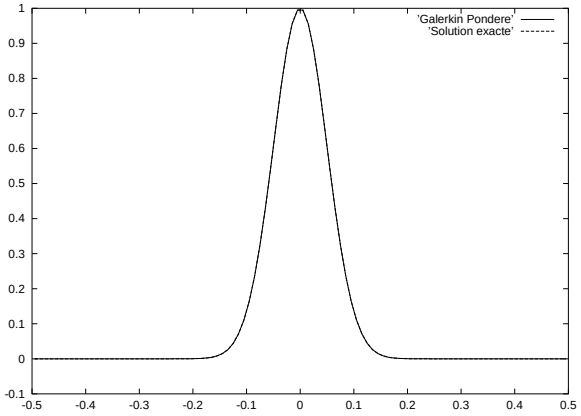


FIG. 3 – *Galerkin Pondéré* / $CFL = 1$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{3}\right)$

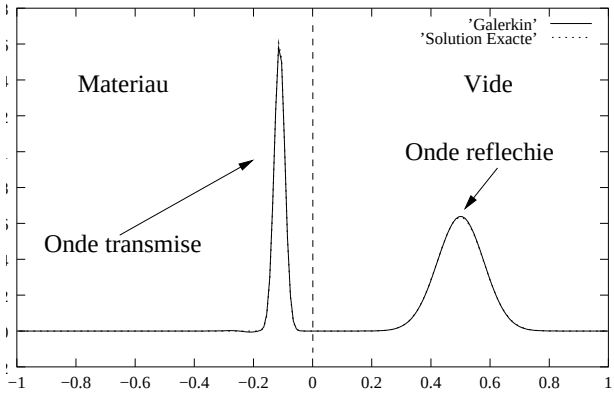


FIG. 4 – *Propagation d'un pulse dans un matériau :* $\epsilon = 20\epsilon_0$

5.3 Un exemple de raffinement : couches minces de matériaux

On propose de simuler la propagation d'un pulse dans un domaine constitué de vide et de deux couches minces de matériau (figure 5). La taille du domaine est 4 mètres. L'épaisseur de chacune des couches est de 2 centimètres. La permittivité du premier matériau est $\epsilon = 50\epsilon_0$ et celle du second est $\epsilon = 100\epsilon_0$. On stoppe la simulation à $t = 6{,}7$ ns. Les figures suivantes montrent la solution en espace du champ E à la fin du calcul. La finesse de chacune des couches nous incite à raffiner localement le maillage autour des couches. La figure 6 montre qu'on obtient de très bons résultats avec le schéma Galerkin Pondéré avec un maillage composé de 300 points (dont 100 points sur la grille fine autour des couches de matériaux). La solution est comparée à une solution de référence obtenue par le schéma de Yee avec 20000 points.
Le schéma VFC peut aussi traiter ce type de problème en utilisant des grilles raffinés. On considère maintenant un maillage deux fois plus fin (soit 600 points) que celui utilisé précédemment. Le nombre de degré de liberté est alors le même que précédemment (le schéma GP requiert en 1D deux fois plus de ddl que le schéma VFC). La figure 7 montre que les résultats obtenus sont bien moins bons que ceux obtenus avec la méthode Galerkin Pondéré. On obtient des résultats de qualité similaire avec le schéma VFC lorsque la grille est constituée de 1500 points (dont 500 sur le grille fine).
La figure 8 montre enfin le résultat obtenu avec le schéma de Yee sur une grille uniforme de 600 points. La grille est clairement trop grossière. Pour obtenir des résultats de qualité équivalente à ceux du schéma GP, 5000 points sont nécessaires. Le tableau 2 montre les coûts de ces différentes approches pour une qualité de résultats équivalente. Pour ce type de simulation, la méthode Galerkin Pondéré est la plus performante.

6 Résultats numériques dans le cas tri-dimensionnel

6.1 Grilles régulières

On simule l'évolution du mode propre (1,1,1) dans une cavité métallique cubique maillée de manière uniforme. Le CFL est ici égal à 1/4. On obtient des résultats identiques pour d'autres valeurs du CFL. La simulation porte sur 45 périodes. On montre l'évolution en

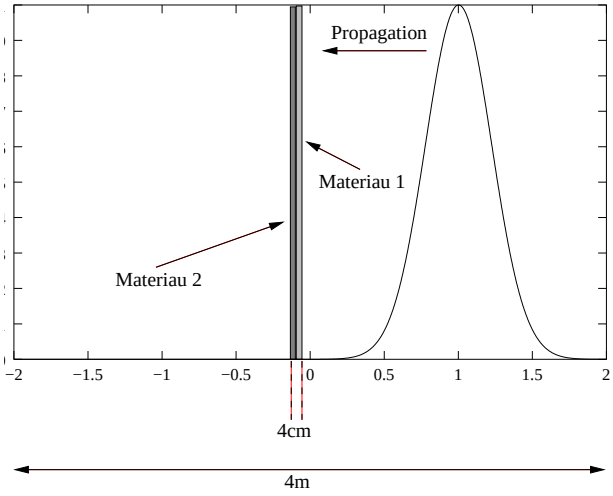


FIG. 5 – *Couches minces : diagramme de la simulation*

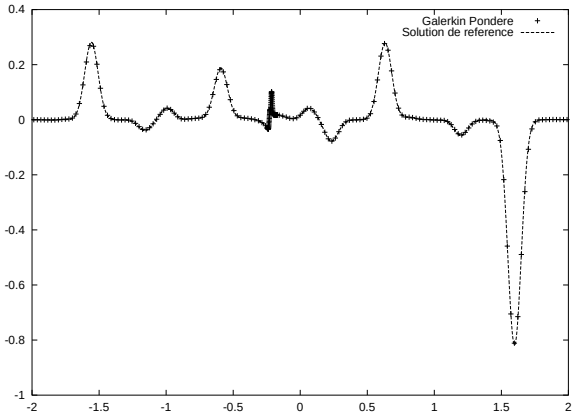


FIG. 6 – *Couches minces / Solution en espace du champ E à $t = 6{,}7$ ns : Galerkin pondéré et maillage raffiné (300 points)*

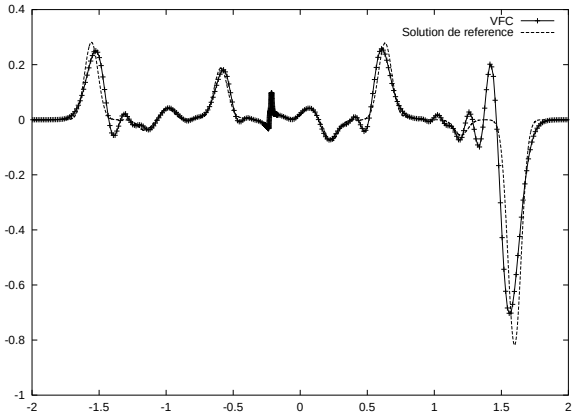


FIG. 7 – *Couches minces / Solution en espace du champ E à $t = 6{,}7$ ns : VFC et maillage raffiné (600 points)*

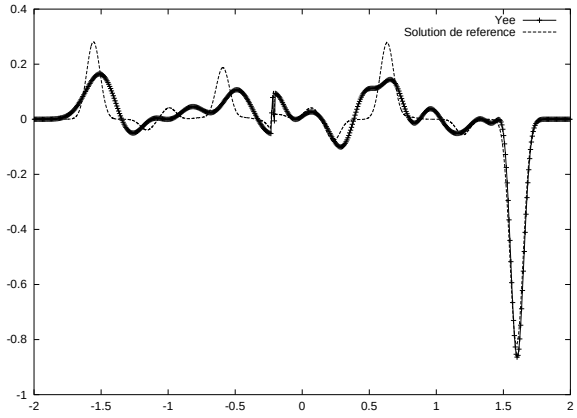


FIG. 8 – *Couches minces : / Solution en espace du champ E à $t = 6{,}7$ ns : Schéma de Yee (600 points)*

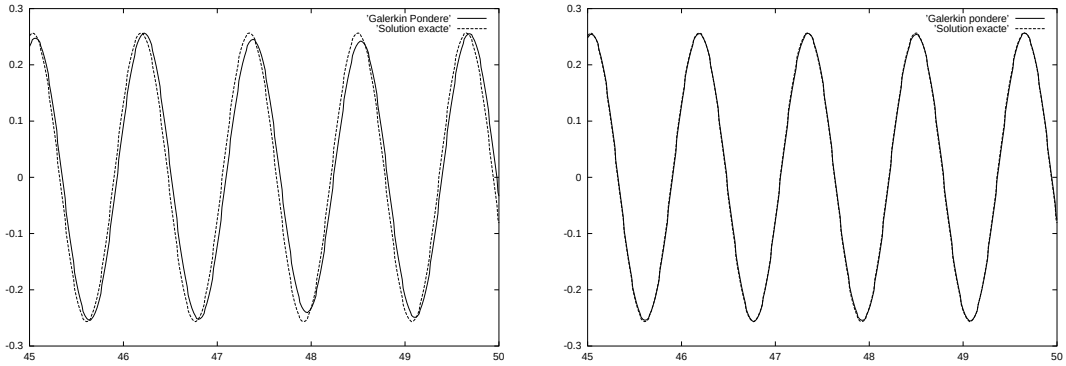
	Nbr de cellules	Nbr ddl	Itérations en temps	Temps CPU (sec)
GP (maillage raffiné)	300	1200	3124	0,6
VFC (maillage raffiné)	1500	3000	3518	1,6
Yee	5000	10000	2525	3,9

TAB. 2 – *Coût des méthodes en 1D pour une précision identique*

temps de la composante E_z en un point de la grille zoomée sur les 5 dernières périodes. La figure 9 montre les résultats obtenus pour les deux valeurs possibles de α sur un maillage à 7 points par longueur d'onde. Les résultats sont bien meilleurs pour $\alpha = \alpha_2$. Lorsque le maillage est plus fin (14 points par longueur d'onde), les résultats (figure 10) sont alors tout à fait comparables. La dispersion est dans les deux cas très faible.

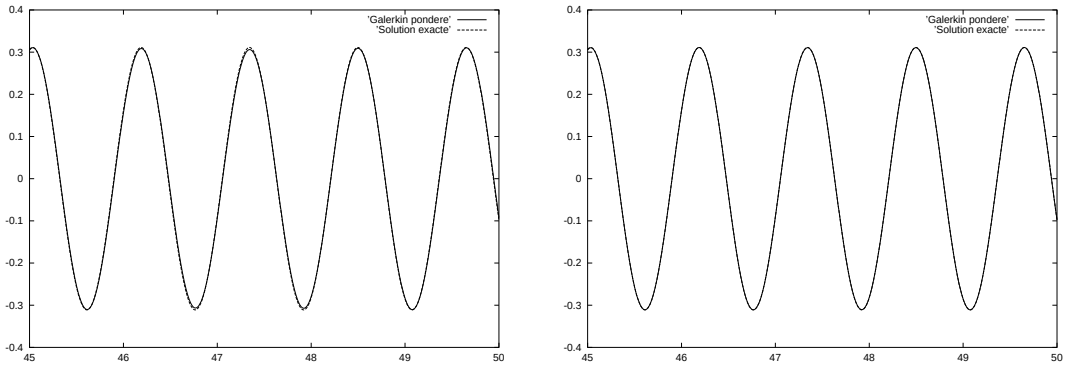
6.2 Grilles non-conformes

On présente ici des résultats numériques sur des grilles non-conformes pour les deux valeurs possibles de α. On parlera de raffinement 1:n lorsque le rapport entre la grille grossière et la grille fine est n. La figure 11 montre un exemple de raffinement 1:2 non-conforme. On simule l'évolution d'un mode propre dans une cavité métallique. Le maillage de la cavité est raffiné au milieu de manière non-conforme. Le taux de raffinement est 4. La simulation porte sur 45 périodes. On montre l'évolution en temps sur les 5 dernières périodes de la composante E_z.
Les résultats de la figure 12 sont ceux obtenus lorsque le maillage de la grille grossière correspond à 8 points par longueur d'onde. Comme dans le cas uniforme, les résultats sont meilleurs lorsque $\alpha = \alpha_2$. On rappelle que ce choix nécessite l'emploi d'un pas de temps deux fois plus petit que celui utilisé lorsque $\alpha = \alpha_1$. Le temps de calcul est alors deux fois plus long. Lorsque la grille grossière est maillée à 16 points par longueur d'onde (figure 13), les résultats pour les deux valeurs de α sont très proches. La dispersion est



(a) $\alpha = \alpha_1$ (b) $\alpha = \alpha_2$

FIG. 9 – *Composante E_z : évolution en temps / Maillage : $\lambda/7$*



(a) $\alpha = \alpha_1$ (b) $\alpha = \alpha_2$

FIG. 10 – *Composante E_z : évolution en temps / Maillage : $\lambda/14$*

parfaitement maîtrisée. On a représenté (figure 14) l'énergie au cours du temps pour la simulation relative à la figure 13. Comme prévu, l'énergie est parfaitement conservée sur des maillages non-conformes.

Le choix de la valeur de α dépend donc du problème que l'on a traiter. Supposons que l'on ait à traiter un fil d'épaisseur 0,6mm avec une longueur d'onde λ de 30cm. Le pas d'espace imposé par la taille du fil sera donc de $\lambda/500$. Si on utilise un raffinement 1:10, le pas d'espace de la grille grossière sera $\lambda/50$. Le maillage de la grille grossière sera donc suffisamment "fin" pour obtenir de très bons résultats avec $\alpha = \alpha_1$. Si comme sur la figure 12, la grille grossière est trop "grossière" (moins de 8 points par longueur d'onde), il faut choisir $\alpha = \alpha_2$. Le nombre d'itérations en temps est alors deux fois plus grand.

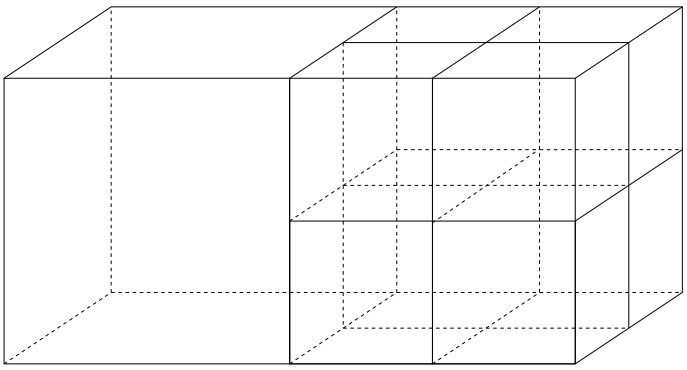
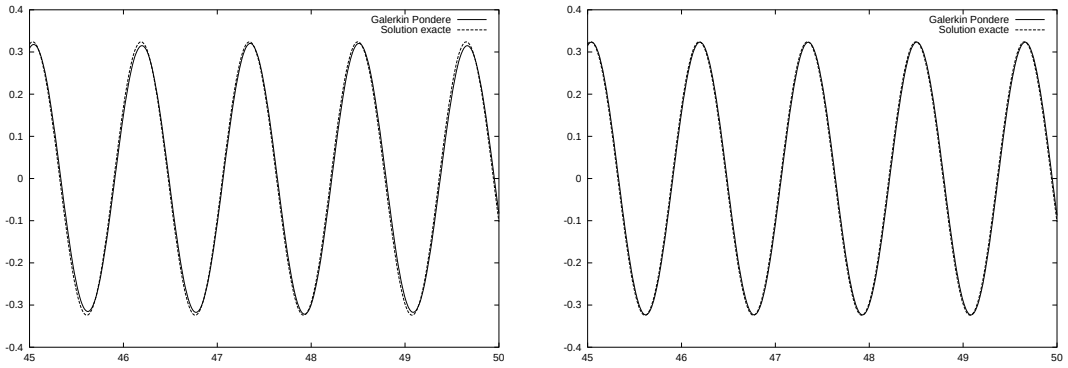


FIG. 11 – *Raffinement 1:2 non-conforme*

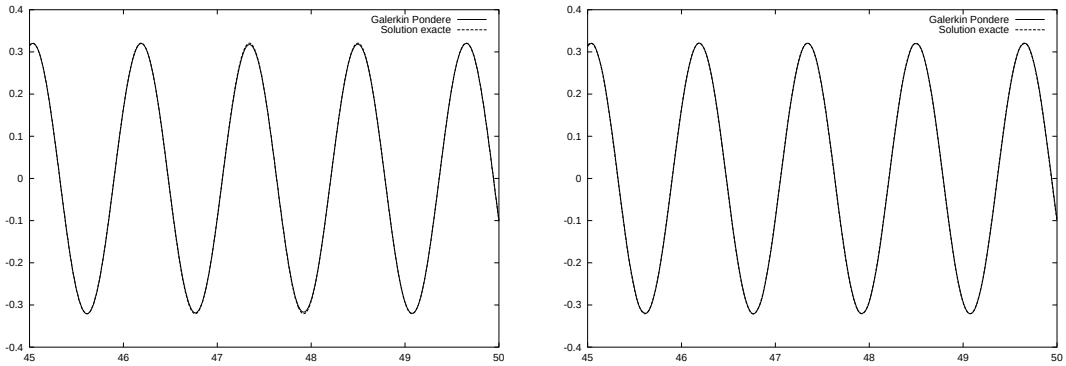


(a) $\alpha = \alpha_1$ (b) $\alpha = \alpha_2$

FIG. 12 – *Composante E_z : évolution en temps / Raffinement 1:4 / Maillage : $\lambda/8$*

6.3 Évolution d'un mode propre sur une grille fortement raffinée

On présente ici les résultats obtenus pour un mode propre (1,1,1) sur une grille raffiné non-conforme où le taux de raffinement est 10. Le maillage de la grille grossière est de 17 points par longueur d'onde. Celui de la grille fine correspond alors à 170 points par longueur d'onde. Nous avons choisi $\alpha = \alpha_2$. Le CFL vaut donc 1/2. La simulation est stoppée après 90 périodes. Il s'agit donc d'une simulation en temps long. Bien que le taux de raffinement soit élevé, les solutions obtenues ne sont pas dispersées (figure 15). La figure 16 montre une coupe du champ E_z à la fin du calcul projeté sur la grille grossière. La solution calculée se compare très bien à la solution exacte.



(a) $\alpha = \alpha_1$ (b) $\alpha = \alpha_2$

FIG. 13 – *Composante E_z : évolution en temps / Raffinement 1:4 / Maillage : $\lambda/16$*

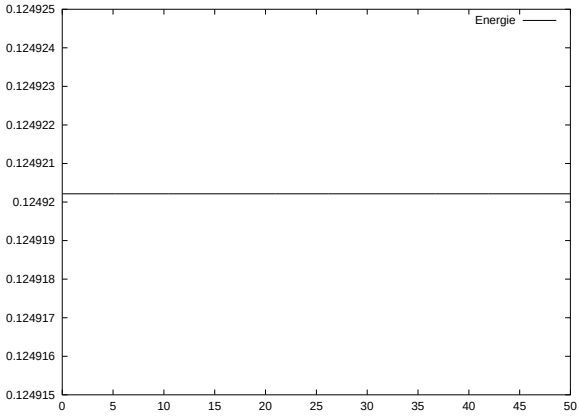


FIG. 14 – *Energie au cours du temps pour le raffinement 1:4*

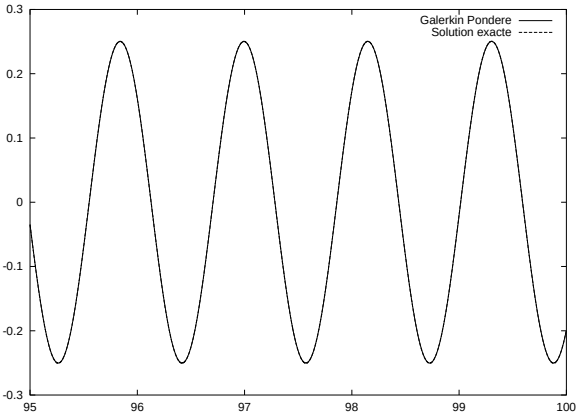


FIG. 15 – *Champ E_z : évolution en temps / Zoom sur les cinq dernières périodes / Raffinement 1:10*

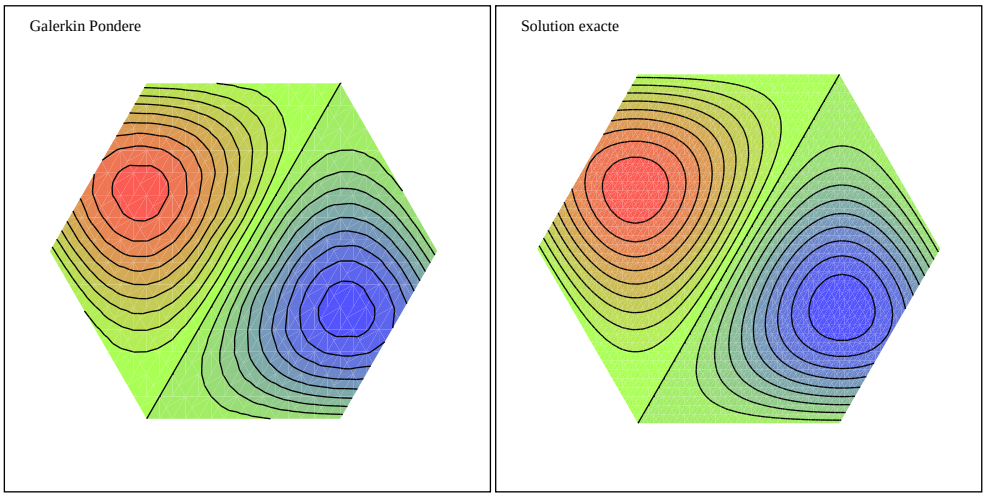


FIG. 16 – *Champ E_z calculé (gauche) et exact (droite) sur le plan d'équation $x+y+z = 3/2$ / Raffinement 1:10*

Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle méthode de Galerkin Discontinu capable de traiter les équations de Maxwell tridimensionnelles sur des maillages orthogonaux conformes ou non-conformes. La conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique nous assure la stabilité du schéma. Malgré la présence de trois fois plus de degrés de liberté que le schéma de Yee, les forts taux de raffinements autorisés rendent la méthode attrayante. Néanmoins, la version présentée ici n'a été validée en 3D que sur le cas du mode propre dans une cavité métallique. La connaissance de la solution exacte nous a permis de montrer le caractère peu dispersif du schéma sur des grilles fortement raffinées. Des tests complémentaires restent donc à réaliser pour valider totalement la méthode.

Références

[1] N. Canouet, L. Fezoui et S. Piperno *Méthode volumes finis pour la résolution du système de Maxwell 1D sur des grilles raffinées localement* Rapport Inria No 4301, 2001.

[2] M. W. Chevalier and R. J. Luebbers, *FDTD local grid with material tranverse* IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 45(3):411-421, March 1997.

[3] B. Cockburn, G.E. Karniadakis and C-W. Shu, *The Developement of Discontinuous Galerkin Methods*, Lecture Notes in Computationnal Science and Enginneering, volume 11, Springer, 2000.

[4] P. Lesaint, P.A. Raviart: *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspect of Finite Element in Partial Differential Equations, Academic Press, New York (1974)

[5] T. Fouquet *Raffinement de maillage spatio-temporel local pour les équations de Maxwell*, Thèse, Paris IX Dauphine, Juin 2000.

[6] I. S. Kim and W. J. R. Hoefer, *A local mesh refinement algorithm for the FD-TD method to solve Maxwell's equations.* IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 38(6):812-815, June 1990.

[7] S. Piperno, M.Remaki, L.Fezoui *A centered second-order finite volume scheme for heterogenous Maxwell equations in three dimensions on arbitrary unstructured meshes.* rapport INRIA No 4161, 2001

[8] D. T. Prescott and N. V. Shuley, *A method for incorporating different sized cells into the FD-TD analysis technique.* IEEE Microwave Guided Wave Lett. 2:434-436, Nov. 1992.

[9] W.H. Reed and T.R. Hill, *Triangular mesh methods for the neutron transport equation.* Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.

[10] M. Remaki , *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogènes.* Thèse ENPC, 1999.

[11] M. Remaki et L. Fezoui, *Une méthode de Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, rapport de recherche INRIA no 3531, janvier 1998.

[12] A. Taflove, *Computational electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain*, Artech House, Boston, 1995.

[13] T. Warburton, *Application of the Discontinuous Galerkin Method to Maxwell's Equations Using Unstructured Polymorphic hp-Finite Elements* , Lecture Notes in Computationnal Science and Enginneering, volume 11, Springer, 2000.

[14] K.S. YEE, *Numerical Solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media.* IEEE Trans. Ant. Propagat., Vol AP14, 1966.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399