Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques

Frédéric Alauzet, Pascal Frey

▶ **To cite this version:**

Frédéric Alauzet, Pascal Frey. Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques. [Rapport de recherche] RR-4759, INRIA. 2003. inria-00071827

HAL Id: inria-00071827
https://inria.hal.science/inria-00071827

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques

Frédéric Alauzet — Pascal J. Frey

N° 4759

10 mars 2003

THÈME 4

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4759--FR

Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques

Frédéric Alauzet [*] , Pascal J. Frey [†]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4759 — 10 mars 2003 — 43 pages

Résumé : Ce rapport traite de l'adaptation de maillages anisotropes non structurés. Il présente en détails un estimateur d'erreur géométrique *a posteriori* basé sur une majoration de l'erreur d'interpolation. A l'aide de cet estimateur on construit une carte de métriques (définie aux sommets du maillage) basée sur une approximation discrète du hessien de la solution. Le maillage est adapté en utilisant cette carte de métriques, ce qui revient à construire un maillage unité vis-à-vis de cette carte de métriques. Quelques exemples analytiques seront présentés dans la seconde partie de ce rapport pour illustrer l'approche proposée.

Mots-clés : Adaptation de maillage, maillage anisotrope, estimateur d'erreur *a posteriori*, erreur d'interpolation, métrique, maillage unité.

[*] Email : Frederic.Alauzet@inria.fr
[†] Email : Pascal.Frey@inria.fr

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Téléphone : +33 1 39 63 55 11 — Télécopie : +33 1 39 63 53 30

Geometric error estimate and anisotropic metrics for mesh adaptation. Part 1: theoritical aspects

Abstract: This report deals with anisotropic unstructured mesh adaptation. It presents in details an *a posteriori* geometric error estimate based on a majoration of the interpolation error. Then, using this error estimate, a metric map (defined at the mesh vertices) based on a discrete approximation of the Hessian of the solution is constructed. The mesh is adapted with respect to this metric map leading to an adapted unit mesh. Several analytical examples will be presented in the second part of this report to demonstrate the proposed approach.

Key-words: Mesh adaptation, anisotropic mesh, *a posteriori* error estimate, interpolation error, metric, unit mesh.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Opérations sur les métriques **8**
2.1 Notion de métrique, de produit scalaire et de distance 8
2.2 Intersection de métriques 10
2.3 Interpolation de métriques 12

3 Estimateur d'erreur géométrique **18**
3.1 Majoration de l'erreur d'interpolation 18
3.1.1 Cas de la dimension deux 18
3.1.2 Cas de la dimension trois 21
3.2 Estimation de l'erreur d'interpolation 24
3.3 Interprétation de l'étude 25

4 Application à l'adaptation de maillage **27**
4.1 Formulation du problème 27
4.2 Construction de la métrique 28
4.3 Notion de longueur et maillage unité 30
4.4 Evaluation de la matrice hessienne 32
4.5 Intersection de métriques 33
4.6 Exemples numériques 33

5 Conclusion et perspectives **34**

A Démonstrations des résultats **37**
A.1 Vecteur inclus dans un élément 37
A.2 Propriétés de la réduction simultanée 38

1 Introduction

Dans le contexte des simulations numériques par des méthodes d'éléments ou de volumes finis, l'adaptation de maillages non structurés a largement prouvé son efficacité. Cette technique permet en effet en théorie, (i) de réduire notablement le coût du calcul (en réduisant le nombre de degrés de liberté) et (ii) d'atteindre la solution numérique à la précision souhaitée. Ceci a eu pour effet, conjointement avec l'accroissement de la puissance de calcul des stations de travail, d'autoriser la simulation de phénomènes complexes en dimension trois (avec une précision raisonnable) sans recourir à de lourds moyens de calcul (architectures et algorithmes parallèles, par exemple).

Dans son principe, une méthode d'adaptation repose sur l'estimation de l'erreur commise lors de l'étape de calcul et sur la traduction de cette erreur en une information numérique pertinente pour les autres étapes du schéma d'adaptation. Plus spécifiquement, si on s'intéresse aux h-méthodes, cette information correspond à des contraintes relatives à la taille locale des éléments du maillage. On établit ainsi une corrélation *a posteriori* entre l'erreur de la solution numérique et la taille locale des éléments. Ainsi, en ajustant localement cette taille (*i.e.*, en adaptant le maillage), l'objectif est d'équi-répartir cette erreur sur le maillage adapté. En itérant ce procédé, on converge progressivement vers un maillage "limite" correspondant à une solution numérique à la précision désirée.

Dans cette étude, on s'intéresse précisément à la construction d'un estimateur d'erreur "géométrique" d'application générale (indépendant de l'opérateur du problème), permettant de définir une carte de métriques anisotrope. Les spécifications de tailles dans chaque direction de cette carte vont alors servir à gouverner les algorithmes d'adaptation de maillages.

Formulation du problème

On considère un problème d'EDP sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ (avec $d = 2$ ou 3) et on note u sa solution exacte. Sa résolution s'effectue par une méthode numérique classique (éléments ou volumes finis) basée sur une discrétisation spatiale (*i.e.*, un maillage) $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω. On note u_h la solution approchée obtenue à l'aide de cette méthode.

Dans le contexte de l'adaptation de maillage, à chaque étape i du schéma, le problème consiste à calculer l'écart $e_h^i = u - u_h^i$, entre la solution exacte u et la solution calculée u_h^i sur $\mathcal{T}_h^i$, représentant l'erreur sous-jacente à la solution obtenue par la méthode numérique. Cet écart est communément appelé l'*erreur d'approximation*. Par cette évaluation, on cherche à contrôler (en général par une approximation de cet écart) la génération d'un maillage $\mathcal{T}_h^{i+1}$, dérivé de $\mathcal{T}_h^i$, tel que l'erreur d'approximation e_h^i, estimée sur $\mathcal{T}_h^{i+1}$, soit bornée par un seuil donné.

En général, la solution u_h obtenue avec la méthode numérique n'est pas interpolante (*i.e.*, la solution obtenue aux nœuds de $\mathcal{T}_h$ ne coïncide pas avec la valeur exacte de u en ces nœuds). En outre, il n'est pas possible de garantir que la solution u_h coïncide avec u en au moins un point, pour tout élément du maillage. Ce qui rend donc difficile de quantifier

explicitement l'écart e_h. Une autre difficulté liée au calcul de e_h est que celui-ci est propre à chaque type d'équation à résoudre.

Pour s'abstraire du problème physique (de l'opérateur), on préconise ici une approche indirecte pour approcher cet écart. Désignons par $\Pi_h u$, l'interpolé linéaire de u par élément de $\mathcal{T}_h$ et par $\widetilde{e}_h = u - \Pi_h u$, l'écart entre u et $\Pi_h u$, encore appelé l'*erreur d'interpolation* sur u suivant $\mathcal{T}_h$. La solution numérique étant connue pour converger vers la solution exacte lorsque la taille h des éléments de $\mathcal{T}_h$ tend vers zéro, on en déduit que l'erreur d'approximation e_h tend vers l'erreur d'interpolation $\widetilde{e}_h$. D'après le lemme de Céa, on sait de plus que [14] :

$$\|u - u_h\| \leq c \, \|u - \Pi_h u\| \, .$$

On en déduit qu'un contrôle de l'erreur d'interpolation permet un contrôle de l'erreur d'approximation. Ainsi, l'erreur d'interpolation $\widetilde{e}_h$ peut être utilisée pour quantifier e_h, de manière approchée. Ce qui revient maintenant à formuler le problème de la façon suivante : «étant donnée une interpolation linéaire $\Pi_h u$ de u suivant un maillage $\mathcal{T}_h$, construire un maillage $\mathcal{T}_h{}'$ (éventuellement différent de $\mathcal{T}_h$) sur lequel l'erreur d'interpolation $\widetilde{e}_h$ est bornée par un seuil donné, dans toutes les directions».

En pratique, ce problème revient à s'intéresser successivement à :

- la construction d'un estimateur de l'erreur d'interpolation,
- la définition d'une carte de métriques anisotrope,
- l'adaptation du maillage courant aux requis de la carte de métriques.

Etat de l'art

Dans le contexte de la construction d'estimateurs d'erreur, l'étude directe de l'erreur d'approximation a fait l'objet de nombreux travaux. Une synthèse des principaux travaux est proposée dans [22]. En revanche, relativement peu d'études ont porté sur la construction d'estimateurs basés sur l'erreur d'interpolation. Dans toutes ces études, les mesures couramment utilisées pour quantifier l'erreur d'interpolation relèvent essentiellement de deux classes : une mesure continue (cf. [4, 5, 12], par exemple) et une mesure discrète (cf. [2, 6, 17], par exemple). Dans ces études, l'examen d'une "mesure" de l'erreur d'interpolation permet d'exhiber des contraintes liées aux tailles des éléments du maillage. Néanmoins, dans le cas des mesures continues, la taille des mailles est supposée tendre vers zéro.

Les études faites sur l'erreur d'interpolation montrent (expérimentalement) que le lien entre l'erreur d'interpolation et l'erreur d'approximation est beaucoup plus fort que la majoration donnée par le lemme de Céa. Et par conséquent, l'erreur d'interpolation fournit un bon estimateur d'erreur [10].

L'adaptation de maillage à des contraintes de tailles (plus communément appelée h-méthode) a longtemps été mise en œuvre à l'aide de techniques de raffinement/déraffinement [15, 20]. Celles-ci consistent à découper (resp. regrouper) récursivement les éléments jugés trop grands (resp. petits) de manière à satisfaire grossièrement l'estimateur d'erreur. Cependant, une telle approche ne permet ni de contrôler précisément le nombre de degrés de

liberté du problème, ni surtout de tenir compte de requis anisotropes (où des tailles variables selon les directions de l'espace sont spécifiées). *A contrario*, des études plus récentes ont tenté de pallier ces limitations par le biais de méthodes de maillage gouvernées par des cartes de tailles anisotropes [7, 9, 19, 21]. Ces approches reposent sur la construction d'une métrique locale (discrète) destinée à modifier le calcul des longueurs dans les générateurs de maillage. Ceci permet d'équi-répartir l'erreur d'interpolation sur le maillage dans toutes les directions, et conduit à la création d'un maillage "unité" dans la métrique spécifiée.

Notre approche

Comme on l'a indiqué précédemment, notre approche est fondée sur la construction d'un estimateur de l'erreur d'interpolation en vue de définir une carte discrète de métriques anisotrope servant à gouverner l'adaptation de maillage dans le souci d'équi-répartir dans chaque direction l'erreur évaluée sur le maillage. Pour définir un estimateur d'erreur anisotrope, qui contrôle à la fois les directions et les tailles dans ces directions, on utilise une approche basée sur le hessien des variables du problème. Actuellement, cette approche est la seule solution jugée raisonnable pour traiter ce problème [13].

On cherche d'abord à obtenir une majoration de cette erreur d'interpolation sur chaque élément du maillage à l'aide d'un développement de Taylor. De cette majoration, on exhibe une mesure discrète de l'erreur dans laquelle apparaissent des contraintes de tailles liées aux arêtes du maillage dans toutes les directions et le hessien de la variable considérée. Ensuite, un champ de métrique discret est construit à partir de cet estimateur d'erreur. La métrique ainsi définie est de nature anisotrope, ce qui permet de modifier le produit scalaire usuel qui sous-tend la notion de distance utilisée dans le générateur de maillage. Finalement, le maillage adapté désiré est un maillage "unité" dans cette métrique, sur lequel l'erreur d'interpolation est bornée par le seuil prescrit.

La spécificité de cette approche réside notamment dans les points suivants :

- au niveau de l'estimateur d'erreur :
  - son analyse n'est pas asymptotique, c'est-à-dire que h ne tend pas vers zéro, ce qui traduit des préoccupations concrètes,
  - il est basé sur le hessien de la solution,
  - il est de nature anisotrope,
  - il est indépendant de la nature de l'opérateur et donc valable pour tout type d'équation;
- au niveau du contrôle précis des tailles :
  - il est basé sur un champ de métriques anisotrope,
  - il s'assimile à la construction d'éléments équilatéraux (ou réguliers), c'est-à-dire dont les arêtes sont de longueur un, dans la métrique. Un tel maillage est appelé *maillage unité*.

L'appellation de "géométrique" vient du fait que la solution sur un maillage peut être vue comme une surface cartésienne, on cherche alors à definir une métrique géométrique

permettant de contrôler l'écart à cette surface. De la sorte, il apparaît encore plus clairement que l'estimateur d'erreur est indépendant du type de problème à résoudre.

Plan de l'exposé

Le plan du rapport reprend et détaille les principaux points évoqués ci-dessus. Section 2, on fait quelques rappels sur la notion de métrique et de produit scalaire associé à une métrique, on donne une définition de l'intersection de métriques et on propose plusieurs schémas d'interpolation de métriques. Ensuite, Section 3, on donne une majoration de l'erreur d'interpolation en dimensions deux et trois et on introduit notre estimateur d'erreur anisotrope géométrique. Section 4, on indique comment construire une métrique anisotrope en vue d'adapter un maillage. En particulier, on propose une méthode d'évaluation numérique du hessien d'une solution. Puis, on indique sommairement pourquoi et comment construire en pratique un maillage unité. Dans la partie II de ce rapport, des exemples analytiques seront proposés pour illustrer les différentes étapes de notre démarche.

2 Opérations sur les métriques

Dans cette section, on rappelle d'abord la notion de métrique et de produit scalaire associé. Ensuite, on introduit une définition consistante de l'intersection de deux métriques. Enfin, on propose plusieurs schémas d'interpolation de métrique sur un segment.

2.1 Notion de métrique, de produit scalaire et de distance

La notion de longueur dans un espace métrique est liée à la notion de métrique et donc à une définition adéquate du produit scalaire dans l'espace vectoriel considéré.

Notion de métrique. Définir *un tenseur de métrique* en un point P (resp. sur un élément K) d'un maillage $\mathcal{T}_h$ c'est se donner une matrice $\mathcal{M}$, ($d \times d$) symétrique définie positive (*i.e.*, non dégénérée). Par exemple, en trois dimensions, on considère :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix},$$

telle que $a > 0$, $d > 0$, $f > 0$ et $det(\mathcal{M}) = adf + 2bce - c^2d - e^2a - b^2f > 0$, pour $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Noter que ces valeurs dépendent de P (resp. de K), *i.e.*, $a = a(P)$ (resp. $a = a(K)$), etc..

Produit scalaire. On définit *le produit scalaire* de deux vecteurs dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^d$ pour une métrique $\mathcal{M}$ de la manière suivante :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{M}} = {}^t\vec{u}\,\mathcal{M}\,\vec{v} \in \mathbb{R}.$$

C'est un produit scalaire car $\mathcal{M}$ est symétrique définie positive (ce résultat peut être démontré à l'aide des formes quadratiques sous-jacentes, cf. [11]).

Notion de distance. On peut alors définir *la norme euclidienne* pour cette métrique $\mathcal{M}$:

$$\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathcal{M}}} = \sqrt{{}^t\vec{u}\,\mathcal{M}\,\vec{u}},$$

qui n'est autre que la longueur du vecteur $\vec{u}$, qui mesure la distance entre les extrémités de ce vecteur.

Soit A et B deux points de $\mathbb{R}^d$, on définit alors *la distance* entre A et B dans l'espace euclidien classique pour la métrique $\mathcal{M}$ par :

$$d_{\mathcal{M}}(A, B) = l_{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\,\mathcal{M}\,\overrightarrow{AB}}.$$

Remarque 2.1 *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on retrouve les définitions usuelles de produit scalaire euclidien et norme euclidienne en considérant $\mathcal{M} = I_d$, la matrice identité.*

Décomposition de la métrique. Le tenseur $\mathcal{M}$ est diagonalisable car il est symétrique. Alors, $\mathcal{M}$ peut s'écrire $\mathcal{M} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1}$, où $\mathcal{R}$ est la matrice des vecteurs propres et Λ la matrice des valeurs propres de $\mathcal{M}$. Il est à noter que cette décomposition n'est pas unique, en effet on peut prendre n'importe quel vecteur propre du sous-espace propre associé à une des valeurs propres ou bien il suffit d'inverser des colonnes de $\mathcal{R}$ et de Λ.

On peut rendre cette décomposition unique en imposant des conditions sur les vecteurs propres. Par exemple dans le cas de la dimension deux, si on a une valeur propre double égale à λ, on a $\mathcal{M} = \lambda\, Id$. Il suffit de toujours prendre $\mathcal{R} = Id$ et $\Lambda = \mathcal{M}$. Si on a deux valeurs propres disctintes alors $\mathcal{R}$ peut être vu comme une matrice de rotation (matrice orthogonale) d'angle θ et la condition $\theta \in [0, \Pi/2[$ est suffisante pour traiter tous les cas. De même, en dimension trois $\mathcal{R}$ peut être vu comme la composée de matrices de rotation.

Représentation géométrique. Un tenseur de métrique peut être représenté géométriquement par sa boule unité. Soit P un sommet du maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω et soit $\mathcal{M}$ un tenseur de métrique défini au point P. Alors, la boule unité dans la métrique $\mathcal{M}$ de centre P est le lieu géométrique des points satisfaisant la relation :

$$\|\overrightarrow{PM}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{PM}\,\mathcal{M}\,\overrightarrow{PM}} = 1\,,$$

L'ensemble des points qui satisfont cette relation décrit un ellipsoïde en dimension trois (une ellipse en dimension deux). Les axes principaux sont donnés par les vecteurs propres de $\mathcal{M}$ et les rayons de chaque axe par la racine carrée de l'inverse des valeurs propres de $\mathcal{M}$ correspondantes (Figure 1).

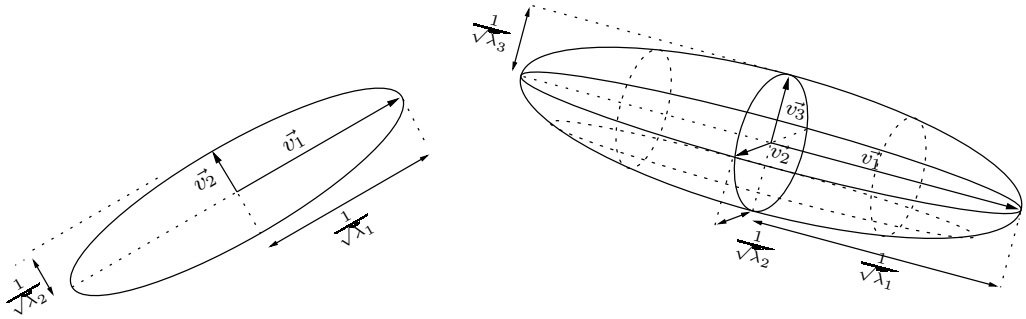

FIG. 1 – *Ellipse et ellipsoïde représentant une métrique anisotrope.*

Maintenant, si on se donne un ellipsoïde (resp. une ellipse) de centre P alors il existe un *unique* tenseur de métrique $\mathcal{M}$ tel que le lieu géométrique des points satisfaisant la relation :

$$\|\overrightarrow{PM}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{PM}\,\mathcal{M}\,\overrightarrow{PM}} = 1\,,$$

décrit cet ellipsoïde (resp. ellipse). De même, les axes principaux sont donnés par les vecteurs propres et les rayons de chaque axe par la racine carrée de l'inverse des valeurs propres de $\mathcal{M}$ correspondantes.

Donc, ces deux notions sont équivalentes. Analyser un tenseur de métrique c'est analyser sa boule unité dans la métrique ou par abus de langage l'ellipsoïde (resp. l'ellipse) qui lui est associé.

Remarque 2.2 *Si les valeurs propres de $\mathcal{M}$ sont toutes identiques, égale à λ, alors on obtient la sphère (resp. le cercle) de rayon $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et réciproquement.*

2.2 Intersection de métriques

Fréquemment, on est amené à travailler avec plusieurs métriques, comme on le verra à la Section 4.5. Dans le cas où plusieurs métriques sont spécifiées en un même point du maillage, on cherche à définir une métrique unique qui prend en compte toutes ces métriques, c'est-à-dire à définir la métrique donnée par l'intersection de toutes ces métriques.

Pour définir l'intersection de deux métriques, on utilise le fait qu'un tenseur de métrique est représenté géométriquement par une ellipse en dimension deux ou un ellipsoïde en dimension trois. Il est à noter que l'intersection de deux métriques n'est pas une intersection géométrique car l'intersection de deux ellipses n'est pas nécessairement une ellipse. Or, dans le contexte de cette étude, on veut que l'intersection de deux métriques donne une métrique et donc une ellipse ou un ellipsoïde.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux tenseurs de métrique représentés par leurs ellipses (resp. ellipsoïdes) respectives $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_1}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_2}$. Alors l'ellipse (resp. ellipsoïde) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ de surface (resp. volume) maximale incluse dans l'intersection (géométrique) des ellipses (resp. ellipsoïdes) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_1}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_2}$ définit le tenseur de métrique $\mathcal{M}$ intersection des métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ (voir Figure 2).

Plus formellement, soient $\mathbf{M_d} = \{\mathcal{M} \,|\, \mathcal{M} \text{ tenseur de métrique}\}$ l'ensemble des tenseurs de métriques et P un sommet du maillage du domaine. On définit les ellipses (resp. ellipsoïdes) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_j} = \{M | \sqrt{{}^t\overrightarrow{PM}\,\mathcal{M}_i\,\overrightarrow{PM}} = 1\}$ pour $j = 1, 2$, associées aux métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Alors la métrique $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ est définie par l'ellipse (resp. ellipsoïde) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ qui verifie la relation :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = \sup_{\mathcal{M}_i \in \mathbf{M_d}} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_i} = \sup_{\mathcal{M}_i \in \mathbf{M_d}} \left\{ M \,|\, \sqrt{{}^t\overrightarrow{PM}\,\mathcal{M}_i\,\overrightarrow{PM}} = 1 \right\} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{M}_1} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{M}_2}\,.$$

Remarque 2.3 *La définition précédente ne garantit pas que l'on puisse garder les vecteurs propres de l'une des métriques (cf. Figure 2, à gauche).*

Remarque 2.4 *On constate que si on considère deux métriques anisotropes antagonistes alors on perd en général leurs propriétés d'anisotropie, c'est-à-dire qu'on obtient une métrique isotrope (cf. Figure 2, à droite).*

Si on considère des métriques isotropes, le problème peut alors être simplifié. En effet, les deux métriques sont représentées par leurs cercles (resp. sphères), il suffit donc de prendre celui qui est inclus dans l'autre. Plus précisément, si on se donne $\mathcal{M}_1 = diag(\lambda_1)$ et

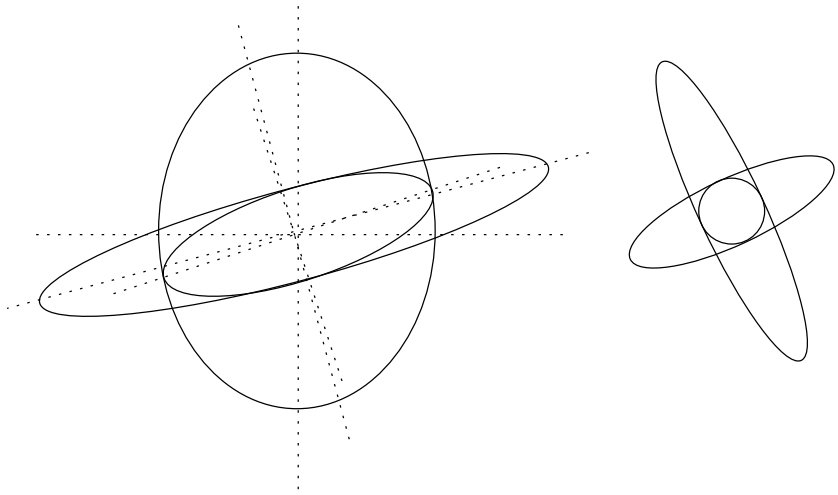

FIG. 2 – *Exemples d'intersection de métriques anisotropes en dimension deux.*

$\mathcal{M}_2 = diag(\lambda_2)$ deux tenseurs de métriques isotropes, d'après la remarque 2.2, la métrique intersectée $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ est définie par :

$$\mathcal{M} = diag(\lambda)\,, \quad \text{où} \quad \lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)\,.$$

En pratique, l'intersection de deux métriques est obtenue au moyen de la réduction simulanée des deux formes quadratiques correspondant aux deux métriques (elle est possible car elles sont définies positives). Les résultats donnés par cette approche sont illustrés en dimension deux et trois sur les Figures 3 et 4. On démontre (Annexe A.2) que la réduction simultanée donne l'ellipse (resp. ellipsoïde) de plus grande aire (resp. volume) incluse dans l'intersection des deux ellipses (resp. ellipsoïdes). Dans la suite, on va présenter la méthode de réduction simultanée en dimension trois.

L'idée est de trouver une base (e_1, e_2, e_3) (pas forcément orthogonale) telle que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ soient diagonales dans cette base, puis on en déduit la métrique intersectée. Pour cela, on introduit la matrice $\mathcal{N}$ définie par :

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2\,.$$

$\mathcal{N}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car elle est symétrique dans la métrique $\mathcal{M}_1$ (Annexe A.2). La base en question est donnée par les vecteurs propres normalisés de $\mathcal{N}$ que l'on note e_1, e_2 et e_3 (ils forment une base car $\mathcal{N}$ est diagonalisable). On trouve les valeurs propres de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dans cette base à l'aide du quotient de Rayleigh :

$$\lambda_i = {}^t e_i \mathcal{M}_1 e_i \quad \text{et} \quad \mu_i = {}^t e_i \mathcal{M}_2 e_i\,, \quad \text{pour} \quad i = 1, 3\,.$$

On pose $\mathcal{P} = (e_1\, e_2\, e_3)$ la matrice 3×3 dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres $\{e_i\}_{i=1,3}$ de $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ est inversible car (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\mathcal{M}_1 = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}.$$

La métrique intersection $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ est alors donnée par :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & \max(\lambda_3, \mu_3) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}.$$

Remarque 2.5 *Dans le cas où $\mathcal{N}$ a une valeur propre triple, que l'on note α, alors si $\alpha \leq 1$ on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ et si $\alpha > 1$ on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2$. En effet, dans ce cas on a :*

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2 = \alpha\, Id \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}_2 = \alpha\, \mathcal{M}_1\,,$$

et donc un des deux ellipsoïdes est toujours inclus dans l'autre.

On constate aisément que $\mathcal{M}$ est symétrique et que $\mathcal{M}$ est définie positive car $\det \mathcal{M} = (\det \mathcal{P}^{-1})^2 \det \Lambda$ où $\Lambda = diag(\max(\lambda_i, \mu_i))$. Par conséquent, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ est bien un tenseur de métrique.

2.3 Interpolation de métriques

On considère à présent le problème suivant : soient $\gamma = [P_1, P_2]$ un segment (par exemple une arête d'un maillage) et $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux métriques associées aux extrémités, on cherche à trouver une métrique interpolée $\mathcal{M}(t)$ définie sur le segment paramétré $\gamma(t) = P_1P_2$ pour tout $t \in [0, 1]$. On souhaite en outre que cette métrique varie de manière monotone sur $[P_1, P_2]$. La construction de cette métrique revient à interpoler les métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Ceci s'avère utile car en général le champ de métrique est discret (défini aux nœuds) et l'interpolation permet ainsi d'obtenir un champ continu sur tout le domaine.

Dans le cadre de l'adaptation de maillage, les métriques nous permettent de calculer des longueurs, comme on l'a vu dans la Section 2.1. Le schéma d'interpolation pour l'adaptation de maillage doit donner une variation (linéaire, par exemple) sur les longueurs h, ce qui est "équivalent" à une variation (linéaire) des $\mathcal{M}^{-1/2}$ par analogie au cas isotrope (cf. Remarque 2.2). On en déduit un schéma d'interpolation linéaire pour lequel, la métrique anisotrope au point d'abcisse t est donnée par :

$$\mathcal{M}(t) = \left((1-t)\mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} + t\mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}, \quad 0 \leq t \leq 1\,. \tag{1}$$

Par calculer la métrique interpolée, on doit d'abord exprimer les deux métriques dans une base dans laquelle les matrices associées sont diagonales, c'est-à-dire faire la réduction

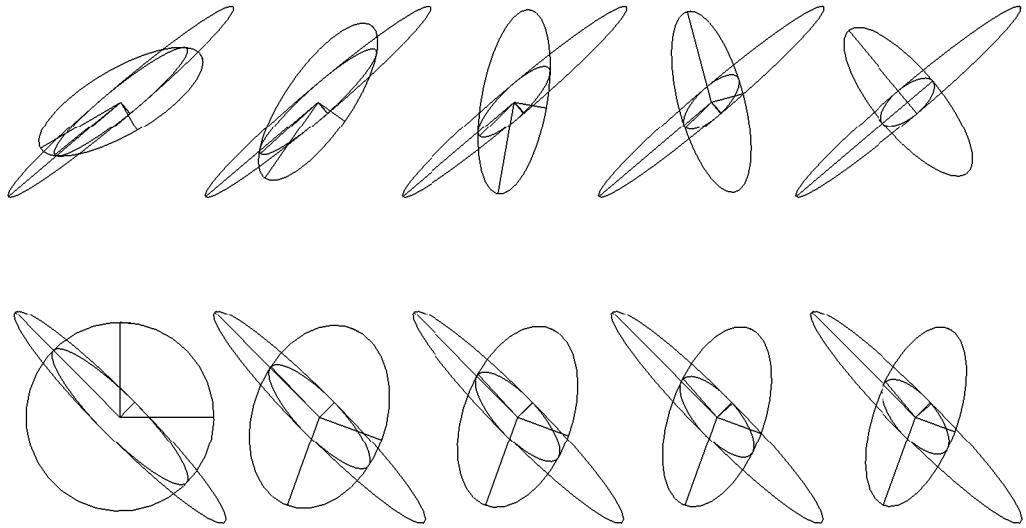

FIG. 3 – *Intersection de deux métriques par la méthode de réduction simultanée en dimension deux. En haut, on fait tourner une des deux métriques, l'autre étant fixée. En bas, on réduit une des deux métriques, l'autre étant encore fixée.*

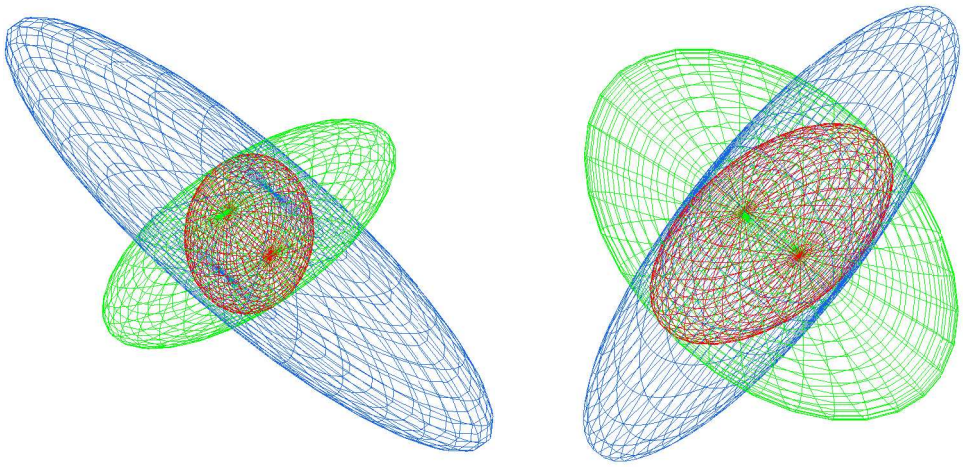

FIG. 4 – *Deux vues, illustrant l'intersection de deux métriques (bleue et verte) par la méthode de réduction simultanée en dimension trois. En rouge (au centre) la métrique résultante.*

simultanée des formes quadratiques associées, puis appliquer le schéma d'interpolation ci-dessus.

Comme précédemment, on considère $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1}\,\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{P} = (e_1\,e_2\,e_3)$ la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de $\mathcal{N}$. On calcule $(\lambda_i)_{i=1,3}$ et $(\mu_i)_{i=1,3}$ les valeurs propres de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ respectivement dans la base (e_1, e_2, e_3). On définit alors $(h_{1,i} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}})_{i=1,3}$ et $(h_{2,i} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}})_{i=1,3}$. Par suite, la métrique interpolée entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ est donnée par :

$$\mathcal{M}(t) = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{H_1^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_2^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_3^2(t)} \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}\,, \quad 0 \le t \le 1\,,$$

où $H_i(t)$, $i = 1, 3$, sont des fonctions linéaires telles que $H_i(t) = (1-t)h_{1,i} + t h_{2,i}$ (et on a $H_i(0) = h_{1,i}$ et $H_i(1) = h_{2,i}$).

Remarque 2.6 *La valeur $h_{1,i}$ (resp. $h_{2,i}$) est la longueur du vecteur unité e_i dans la métrique $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$).*

Remarque 2.7 *Si on considère un schéma d'interpolation géométrique :*

$$\mathcal{M}(t) = \left(\mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}}}{\mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}}} \right)^t \right)^{-2}, \quad 0 \le t \le 1\,, \tag{2}$$

on est amené à prendre $H_i(t) = h_{1,i} \left(\dfrac{h_{2,i}}{h_{1,i}} \right)^t$, pour $i = 1, 3$. Ce schéma peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_1^{(1-t)}\,\mathcal{M}_2^t\,, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

On constate que ce schéma favorise les petites tailles par rapport au schéma (1) (cf. Figures 5 et 6).

On remarque que ces deux schémas d'interpolation (linéaire et géométrique) nécessitent l'extraction de valeurs propres. Pour éviter cette opération assez coûteuse et numériquement délicate en dimension trois, on peut alors considérer un schéma du type :

$$\mathcal{M}(t) = \left((1-t)\mathcal{M}_1^{-1} + t\mathcal{M}_2^{-1} \right)^{-1}, \quad 0 \le t \le 1\,. \tag{3}$$

Contrairement au schéma géométrique, ce schéma favorise les grandes tailles par rapport au schéma (1) (Figures 5 et 6).

Remarque 2.8 *Les schémas (2) et (3) peuvent être étendus pour interpoler la métrique en un sommet inclus dans un élément du maillage, de la manière suivante :*

$$\mathcal{M}(t) = \prod_{i=1,4} \mathcal{M}_i^{\alpha_i} \quad \textit{ou} \quad \mathcal{M}(t) = \left(\sum_{i=1,4} \alpha_i \mathcal{M}_i^{-1} \right)^{-1},$$

où les α_i *pour* $i = 1, 4$ *sont les barycentriques verifiant* $0 \leq \alpha_i \leq 1$ *et* $\sum_i \alpha_i = 1$.

On pourrait également considérer une interpolation linéaire sur chaque terme des tenseurs de métriques (une interpolation termes à termes), c'est-à-dire :

$$\mathcal{M}(i,j)(t) = (1-t)\mathcal{M}_1(i,j) + t\mathcal{M}_2(i,j)\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,,$$

pour $i, j = 1, 3$. Toutefois, on constate que cette interpolation donne des métriques intermédiaires qui sont (presque) isotrope et donnent de petites tailles (Figures 5 et 6). Dans le contexte de l'adaptation de maillages, cet effet est indésirable. En effet, lorsqu'une arête est subdivisée en son milieu, un tel schéma conduit rapidement à une perte de l'anisotropie dans le domaine. Par conséquent, on préfèrera un schéma du type (1), (2) ou (3) pour l'interpolation de métriques.

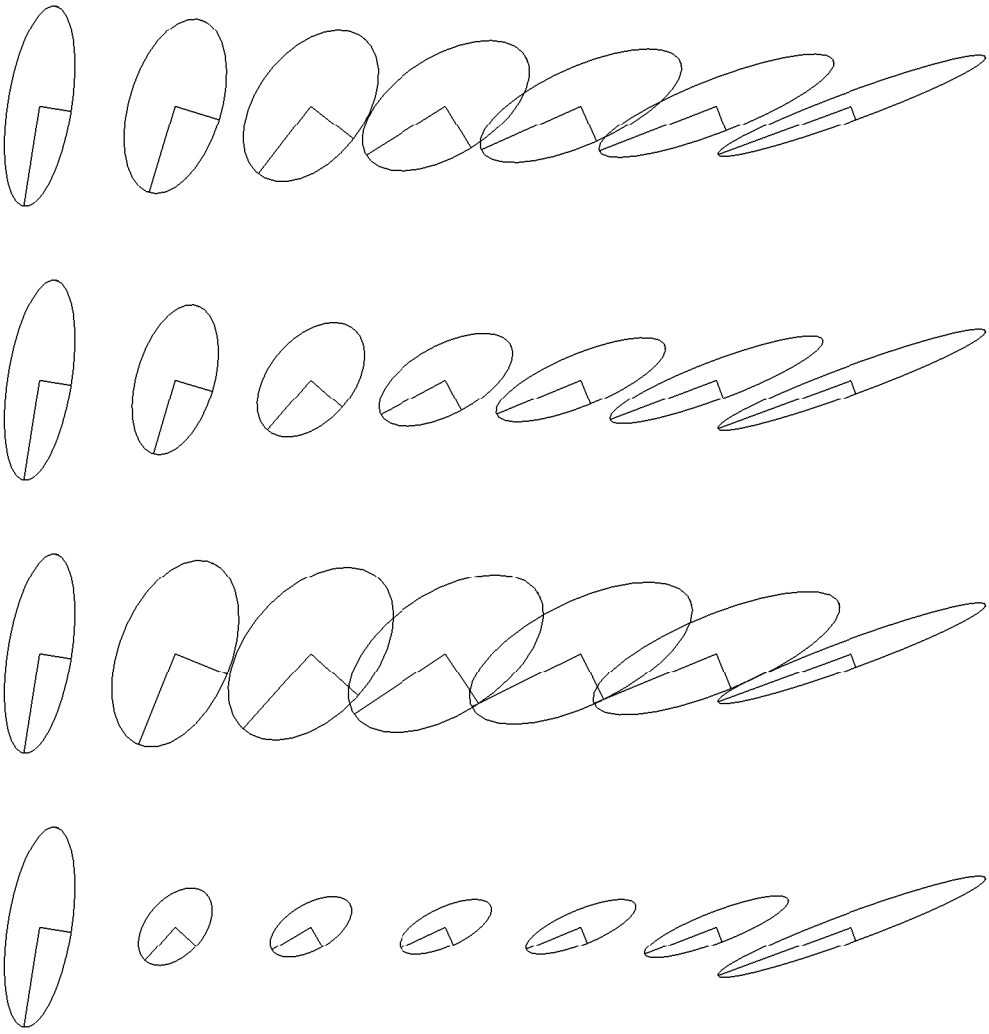

FIG. 5 – *Comparaison des divers schémas d'interpolation en dimension deux. De haut en bas on a, le schéma linéaire (1), le schéma géométrique (2), le schéma linéaire en $\mathcal{M}^{-1}$ (3) et l'interpolation termes à termes. Dans le contexte de l'adaptation de maillages, on préfèrera l'un des trois premiers schémas pour l'interpolation de métriques.*

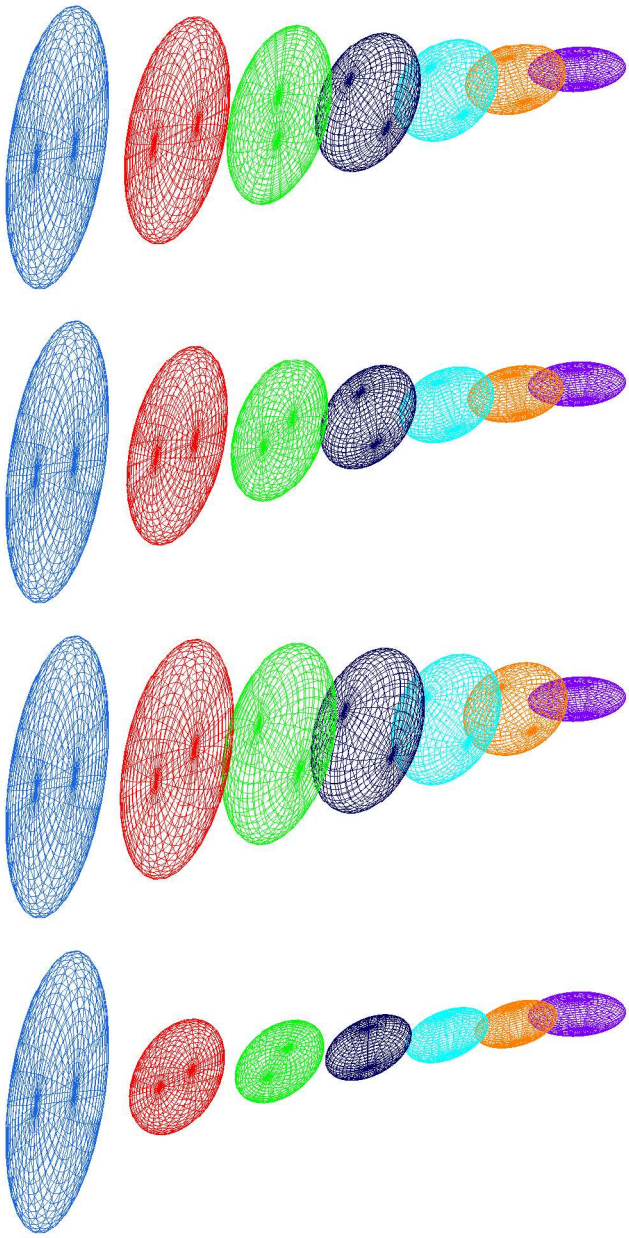

FIG. 6 – *Comparaison des divers schémas d'interpolation en dimension trois. De haut en bas on a, le schéma linéaire (1), le schéma géométrique (2), le schéma linéaire en $\mathcal{M}^{-1}$ (3) et l'interpolation termes à termes. Dans le contexte de l'adaptation de maillages, on préfèrera l'un des trois premiers schémas pour l'interpolation de métriques.*

3 Estimateur d'erreur géométrique

Dans cette section, en s'appuyant sur l'étude effectuée par Anglada *et al.* [2], on indique une majoration de l'erreur d'interpolation anisotrope pour des éléments linéaires simpliciaux en dimensions deux et trois. On montre comment cette majoration permet de caractériser les éléments d'un maillage (adapté). Ensuite, on donne une estimation de l'erreur d'interpolation plus générale et plus pratique dans le contexte des méthodes de maillages. Cet estimateur d'erreur est de nature géométrique, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du problème que l'on résout et donc peut être utilisé pour différents types d'équations (advection-diffusion, Navier-Stokes, chaleur, ondes,...) et s'applique pour toutes les variables du problème considéré. Plus précisément, la solution exacte du problème et la solution numérique sont considérées comme des surfaces de $\mathbb{R}^{d+1}$ et on essaie de borner l'écart entre ces deux surfaces. Cet estimateur d'erreur est donné sans supposer que la taille h des éléments du maillage tend vers zéro. Cette hypothèse est raisonnable en pratique, car lorsqu'on génère un maillage h ne tend pas vers zéro !

3.1 Majoration de l'erreur d'interpolation

On regarde d'abord le cas de la dimension deux avant d'aborder le cas de la dimension trois. On montrera ensuite que l'on obtient en fait une formulation de la majoration de l'erreur d'interpolation en toute dimension.

3.1.1 Cas de la dimension deux

On se place dans le cas d'un maillage composé de triangles et dans le cadre de la résolution d'un problème donné par une méthode numérique (éléments finis P^1, par exemple). Dans cette section :

- on regarde $K = [a, b, c]$ un élément du maillage, un triangle tout sauf petit (si h_{max} est le diamètre de K , c'est-à-dire le plus grand côté de K, h_{max} ne tend pas vers zéro),
- on considère u, une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, fonction inconnue supposée assez régulière,
- on note $\Pi_h u$, l'interpolé linéaire de u sur K,
- on suppose que u et $\Pi_h u$ coïncident aux sommets de K.

Par suite, K est la maille analysée, u est la solution inconnue du problème étudié et $\Pi_h u$ est l'interpolé P^1 de u par le maillage défini sur l'élément K par la paramétrisation $\Pi_h u = (1 - \lambda - \mu)u(a) + \lambda u(b) + \mu u(c)$ avec $0 \leq \lambda + \mu \leq 1$. Le but est de majorer $u - \Pi_h u$ sur $K = [a, b, c]$.

On va se baser sur un développement de Taylor de $u - \Pi_h u$ dans une direction particulière. On note : $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, ∇ le gradient et H_u le hessien de la

variable u et on pose $e = u - \Pi_h u$. On écrit le développement de Taylor avec reste intégral de e en un sommet de K, ici en a, par rapport à un point x quelconque dans K :

$$\begin{aligned}(u-\Pi_h u)(a) &= (u-\Pi_h u)(x) + \langle \overrightarrow{xa}\,,\, \nabla(u-\Pi_h u)(x)\rangle \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle\, dt\,. \end{aligned} \tag{4}$$

On cherche à majorer $u - \Pi_h u$, donc on cherche un *extremum* de cette fonction ou encore un point x où cet *extremum* est atteint. Si x est strictement dans K (l'autre situation où x appartient à la frontière de K étant décrite plus loin), alors x est tel que :

$$\nabla(u-\Pi_h u)(x) = 0\,,$$

soit encore,

$$\langle\, \vec{v}\,,\, \nabla(u-\Pi_h u)(x)\rangle = 0\,, \quad \text{pour tout } \vec{v} \subset K \ (\text{ou } \vec{v} \subset \mathbb{R}^2)\,. \tag{5}$$

En reprenant le développement (4) et comme $e(a) = (u-\Pi_h u)(a) = 0$, on obtient, en ce point x précis :

$$e(x) = -\int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle\, dt\,, \tag{6}$$

$$|e(x)| = |\int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle\, dt|\,.$$

On suppose que le sommet a de K est le *site* de x (*i.e.,* x est plus près de a que de b ou c) le point où l'écart maximum est atteint. On suppose de plus que x est dans $\overset{\circ}{K}$ (et donc non atteint sur une arête). On note alors a' le point intersection de la droite support de ax avec l'arête opposée à a (c'est-à-dire l'arête bc de K). Il existe donc un scalaire λ tel que : $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{aa'}$, d'où :

$$|e(x)| \;=\; |\int_0^1 (1-t)\,\lambda^2\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(a+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{aa'}\rangle\, dt\,|\,.$$

Comme a est le site de x, le scalaire λ est plus petit que $\dfrac{2}{3}$ et on a :

$$\begin{aligned}|e(x)| &\le \frac{4}{9}\,|\int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(a+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{aa'}\rangle\, dt\,|\,, \\ &\le \frac{4}{9}\,\max_{t\in[0,1]}\,|\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(a+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{aa'}\rangle\,|\,|\int_0^1 (1-t)\,dt\,|\,,\end{aligned}$$

donc :

$$|e(x)| \le \frac{2}{9}\,\max_{y\in aa'}\,|\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{aa'}\rangle\,|\,,$$

ou encore :

$$|e(x)| \leq \frac{2}{9} \max_{y \in K} |\langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle| .$$

On a obtenu une majoration globale de e en x. Considérons maintenant la norme L_∞ de l'erreur d'interpolation, $\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} = \max_{x \in K} |(u - \Pi_h u)(x)|$, on a :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{9} \max_{y \in K} |\langle \overrightarrow{aa'}, H_u(y) \overrightarrow{aa'} \rangle| .$$

On cherche maintenant à faire intervenir un tenseur de métrique dans la majoration précédente, *i.e.*, la matrice qui intervient dans la majoration doit être définie positive. La matrice hessienne étant symétrique, on peut la décomposer sous la forme :

$$H_u = \mathcal{R}\,\Lambda\,\mathcal{R}^{-1}, \quad \text{où } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{R}$ est la matrice des vecteurs propres et Λ la matrice des valeurs propres (qui sont toujours réelles). Alors, si on désigne par $|H_u|$ la matrice symétrique définie positive suivante :

$$|H_u| = \mathcal{R}\,|\Lambda|\,\mathcal{R}^{-1}, \quad \text{où } |\Lambda| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix}, \tag{7}$$

on obtient la majoration suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{9} \max_{y \in K} \langle \overrightarrow{aa'}, |H_u(y)| \overrightarrow{aa'} \rangle . \tag{8}$$

En effet, si on se place dans la base propre de cette matrice et si on note (x, y) les composantes d'un vecteur $\vec{v}$, on a : $|\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2| \leq |\lambda_1 x^2| + |\lambda_2 y^2|$, on en déduit : $|\langle \vec{v}, H_u \vec{v} \rangle| \leq \langle \vec{v}, |H_u| \vec{v} \rangle$.

On remarque que $|H_u(y)|$ est un tenseur de métrique, donc le membre de droite peut s'écrire aussi : $\langle \overrightarrow{aa'}, |H_u(y)| \overrightarrow{aa'} \rangle = \|\overrightarrow{aa'}\|^2_{|H_u(y)|}$.

La majoration (8) fait intervenir un *extremum* qui n'est pas connu *a priori*, ce qui rend l'expression peu commode à utiliser en pratique. On va se placer dans un cadre plus général où la formulation que l'on va obtenir est indépendante des *extremums*. On introduit donc la majoration suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{9} \max_{y \in K} \max_{\vec{v} \subset K} \langle \vec{v}, |H_u(y)| \vec{v} \rangle . \tag{9}$$

Cette majoration, plus grossière que celle de (8), ne fait plus intervenir les points a et a' et donc ne dépend plus de l'*extremum* x. On remarque que l'on arrive à la même majoration en supposant que le site de l'*extremum* est b ou c.

Traitons maintenant le cas où l'*extremum* x n'est pas atteint dans $\overset{\circ}{K}$ et montrons que l'on aboutit à une majoration unique de l'erreur d'interpolation (ce qui est bien pratique!). Alors, nécessairement, il correspond à une arête de K, par exemple ab. En prenant les développements de Taylor avec reste intégral de e en a et b par rapport à un x quelconque de l'arête ab et en les ajoutant, d'après l'équation (6), il vient :

$$\begin{aligned} 2e(x) &= -\int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle\,dt - \int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{bx}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xb})\,\overrightarrow{bx}\rangle\,dt\,, \\ &= -\int_0^1 (1-t)\,(\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle \;+\; \langle \overrightarrow{bx}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xb})\,\overrightarrow{bx}\rangle\,)\,dt\,. \end{aligned}$$

Comme x appartient à l'arête ab, il existe un scalaire $\lambda \in [0,1]$ tel que : $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{bx} = (1-\lambda)\overrightarrow{ba}$, en suivant le raisonnement précédent on a :

$$\begin{aligned} |e(x)| &\leq \frac{1}{2}\,|\,\lambda^2 \max_{y\in ab}\langle \overrightarrow{ab}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{ab}\rangle + (1-\lambda)^2 \max_{y\in ab}\langle \overrightarrow{ab}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{ab}\rangle\,|\,|\int_0^1 (1-t)\,dt\,|\,, \\ &= \frac{1}{4}(\,\lambda^2 + (1-\lambda)^2\,)\,\max_{y\in ab}|\langle \overrightarrow{ab}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{ab}\rangle\,|\,. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (7) et comme $P(\lambda) = \lambda^2 + (1-\lambda)^2$ atteint son maximum en $\lambda = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$|e(x)| \leq \frac{1}{8}\,\max_{y\in ab}\langle \overrightarrow{ab}\,,\, |H_u(y)|\,\overrightarrow{ab}\rangle\,.$$

On peut donc donner la majoration de l'erreur d'interpolation en norme L_∞ :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{8}\,\max_{y\in ab}\langle \overrightarrow{ab}\,,\, |H_u(y)|\,\overrightarrow{ab}\rangle\,. \tag{10}$$

Cette majoration peut formellement s'écrire comme la relation (9) (en notant que l'on a $\frac{1}{8} < \frac{2}{9}$), donc on va par la suite toujours utiliser (9) pour estimer l'erreur d'interpolation.

3.1.2 Cas de la dimension trois

Par analogie avec le cas de la dimension deux, on se place dans le cas d'un maillage simplicial (composé de tétraèdres) et on considère la résolution d'un problème par une méthode numérique. Dans cette section :

- on prend $K = [a,b,c,d]$ un élément du maillage, un tétraèdre tout sauf petit (si h_{max} est le diamètre de K , c'est-à-dire le plus grand côté de K, h_{max} ne tend pas vers zéro),
- on considère u, une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, fonction inconnue supposée assez régulière qui est la solution du problème étudié,

- on note $\Pi_h u$, l'interpolée linéaire de u par le maillage défini sur l'élément K par la paramétrisation $\Pi_h u = (1-\lambda-\mu-\nu)u(a) + \lambda u(b) + \mu u(c) + \nu u(d)$ avec $0 \leq \lambda+\mu+\nu \leq 1$,
- on suppose que u et $\Pi_h u$ coïncident aux sommets de K.

Le but est de majorer $e = u - \Pi_h u$ sur $K = [a,b,c,d]$. En suivant le raisonnement décrit en dimension deux, on trouve les trois cas possibles :

1. le point x où le maximum est atteint est strictement dans K,
2. ce point est sur une face de K,
3. ce point est sur une arête de K.

Cas 1 : $x \in \overset{\circ}{K}$**.** On suppose dans un premier temps que l'écart maximum est atteint en un point x qui est strictement dans K et dont le site est le sommet a de K. On écrit le développement de Taylor avec reste intégral de e en a à partir de x :

$$\begin{aligned}(u-\Pi_h u)(a) &= (u-\Pi_h u)(x) + \langle \overrightarrow{xa}\,,\, \nabla(u-\Pi_h u)(x)\rangle \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle\, dt\,.\end{aligned}$$

Comme u et $\Pi_h u$ sont identiques en a et que x est un *extremum* de $u-\Pi_h u$, d'après l'égalité (5), on a :

$$|e(x)| = |\int_0^1 (1-t)\,\langle \overrightarrow{ax}\,,\, H_u(x+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{ax}\rangle\, dt\,|\,.$$

Soit a' le point intersection de la droite support de ax avec la face opposée à a. Il existe alors un scalaire λ tel que : $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{aa'}$. Comme a est le site de x, le scalaire λ est plus petit que $\dfrac{3}{4}$. En faisant le même raisonnement que celui fait dans la section précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}|e(x)| &= |\int_0^1 (1-t)\,\lambda^2\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(a+t\overrightarrow{xa})\,\overrightarrow{aa'}\rangle\, dt\,|\,, \\ &\leq \frac{9}{16}\max_{y\in aa'} |\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{aa'}\rangle\,|\,|\int_0^1 (1-t)\,dt\,|\,,\end{aligned}$$

donc :

$$|e(x)| \leq \frac{9}{32}\max_{y\in K} |\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{aa'}\rangle\,|\,.$$

On peut donc considérer la norme L_∞ de l'erreur d'interpolation :

$$\|u-\Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{9}{32}\max_{y\in K} |\,\langle \overrightarrow{aa'}\,,\, H_u(y)\,\overrightarrow{aa'}\rangle\,|\,.$$

Comme précédemment, on considère la matrice symétrique définie positive (qui définit donc un tenseur de métrique) :

$$|H_u| = \mathcal{R}\,|\Lambda|\,\mathcal{R}^{-1}, \quad \text{où } |\Lambda| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| \end{pmatrix}, \tag{11}$$

où $\mathcal{R}$ est la matrice des vecteurs propres et $\{\lambda_i\}_{i=1...3}$ sont les valeurs propres de la matrice hessienne, et on obtient la majoration :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{9}{32} \max_{y\in K} \langle \overrightarrow{aa'}\,,\, |H_u(y)|\,\overrightarrow{aa'} \rangle\,. \tag{12}$$

La Relation (12) dépend de l'*extremum* x qui n'est pas connu *a priori*, ce qui rend l'expression peu pratique. On va se placer dans un cadre plus général en la rendant indépendante des *extremums*. La majoration (12) peut encore s'écrire :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{9}{32} \max_{y\in K} \max_{\vec{v}\subset K} \langle \vec{v}\,,\, |H_u(y)|\,\vec{v} \rangle\,. \tag{13}$$

Remarque 3.1 *Les résultats (9) et (13) obtenus en dimension deux et trois, suggèrent pour la constante, qui intervient dans la majoration de l'erreur d'interpolation, la formule de récurrence en dimension quelconque d suivante [6] :*

$$\lambda^2 \,|\, \int_0^1 (1-t)\,dt \,| = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d+1}\right)^2.$$

Cas 2 : x sur une face de K. Traitons maintenant les cas où l'*extremum* x n'est pas atteint dans K. Dans un premier temps, on suppose que cet *extremum* est atteint sur une face de K et non sur une arête, supposons que ce soit la face $[a, b, c]$. Par conséquent, en faisant un raisonnement identique à celui fait pour un *extremum* strictement inclus dans un triangle de la Section 3.1.1, on obtient :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{2}{9} \max_{y\in[a,b,c]} \max_{\vec{v}\subset[a,b,c]} \langle \vec{v}\,,\, |H_u(y)|\,\vec{v} \rangle\,. \tag{14}$$

Cas 3 : x sur une arête de K. Puis, on traite le dernier cas où l'*extremum* x est atteint sur une arête de K, par exemple l'arête ab. Le raisonnement est le même que celui fait pour un *extremum* sur une arête dans la Section 3.1.1. On trouve :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{8} \max_{y\in ab} \langle \overrightarrow{ab}\,,\, |H_u(y)|\,\overrightarrow{ab} \rangle\,. \tag{15}$$

Remarque 3.2 *Les deux majorations précédentes (14) et (15) peuvent formellement s'écrire comme la Relation (13), la Relation (13) étant plus globale et en notant que l'on a $\frac{1}{8} < \frac{2}{9} < \frac{9}{32}$. Par suite, on utilisera la Relation (13) pour estimer l'erreur d'interpolation sur un élément.*

3.2 Estimation de l'erreur d'interpolation

Dans la Section 3.1, on a donné une majoration globale de l'erreur d'interpolation (interpolant linéaire sur chaque élément) sur chaque élément d'un maillage composé de simplexes. Soit K un élément du maillage du domaine étudié, les majorations (9) et (13) s'écrivent en toutes dimensions :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{x \in K} \max_{\vec{v} \subset K} \langle \vec{v}, |H_u(x)| \vec{v} \rangle . \tag{16}$$

Cette majoration n'est pas exploitable car elle fait intervenir deux maxima qui ne peuvent être évalués numériquement. Dans un premier temps, on va faire intervenir les arêtes du maillage dans la majoration de l'erreur d'interpolation afin de supprimer le maximum associé aux vecteurs inclus dans K. On démontre (Annexe A.1) que tout vecteur $\vec{v} \subset K$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des arêtes de K. On en déduit que :

$$\forall \vec{v} \subset K, \quad \|\vec{v}\|_{|H_u(x)|} \leq \max_{e \in E_K} \|\vec{e}\|_{|H_u(x)|} ,$$

où E_K est l'ensemble des arêtes de l'élément K. Donc, on peut réécrire la majoration précédente sous la forme :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle .$$

En pratique, le terme de droite est toujours délicat pour estimer l'erreur d'interpolation sur l'élément K, le maximum sur le champ de métrique $|H_u|$ n'étant pas connu. Y remédier, suppose que l'on sache exhiber sur K un tenseur de métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$ vérifiant :

$$\max_{x \in K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle \leq \langle \vec{e}, \overline{\mathcal{M}}(K) \vec{e} \rangle , \quad \text{pour tout } e \in E_K ,$$

et telle que la région définie par : $\{ \langle \vec{v}, \overline{\mathcal{M}}(K) \vec{v} \rangle \,|\, \forall \vec{v} \subset K \}$ soit de volume minimal (surface minimale, en dimension deux). Dans la Section 4.2, on précisera comment on approche le champ de métrique $|H_u|$ et comment on construit le tenseur de métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$.

Remarque 3.3 *Si le hessien est linéaire sur l'élément $K = [a, b, c, d]$ (en dimension trois), on a immédiatement :* $\overline{\mathcal{M}}(K) = \max_{p \in \{a,b,c,d\}} |H_u(p)|$.

On obtient alors la majoration explicite suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{e \in E_K} \langle \vec{e}, \overline{\mathcal{M}}(K) \vec{e} \rangle .$$

Par conséquent l'erreur d'interpolation ε_K commise sur un élément K est estimée par la formule suivante :

$$\varepsilon_K = c \max_{e \in E_K} \langle \vec{e}, \overline{\mathcal{M}}(K) \vec{e} \rangle . \tag{17}$$

Cette relation signifie que l'erreur d'interpolation commise sur un élément K est donc proportionnel au carré de la plus grande longueur des arêtes de K (c'est-à-dire le diamètre de K), dans la métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$.

On constate que l'erreur d'interpolation dépend de la longueur des arêtes du maillage. Par conséquent, un contrôle sur les arêtes des éléments du maillage permet de contrôler l'erreur d'interpolation sur le maillage (en particuliers sur ses éléments), les autres variables étant fixées.

3.3 Interprétation de l'étude

Dans les paragraphes précédents, on a décrit la construction d'un estimateur d'erreur basé sur l'erreur d'interpolation dans le cas général d'une solution d'EDP. En fait, ce problème d'estimation d'erreur est équivalent à un calcul de l'écart entre une approximation linéaire par morceaux d'une surface (cartésienne) et la surface sous-jacente. Ce qui, *a posteriori*, justifie l'appellation d'estimateur d'erreur "géométrique".

D'autre part, l'estimateur d'erreur introduit permet de caractériser les éléments d'un maillage donné, de manière à borner l'erreur d'interpolation, et plus précisément, à indiquer quelle erreur est commise sur quel élément.

Estimateur géométrique

On va maintenant tenter de donner une interprétation plus concrète à l'estimateur d'erreur défini ci-dessus. Pour cela, on va d'abord analyser son comportement en dimension un.

Si on considère une solution linéaire en dimension un (*i.e.*, une droite), il suffit de deux points pour décrire exactement cette solution. En revanche, dans le cas d'une solution représentée par une courbe, le nombre de points requis pour la décrire exactement n'est pas fini. Pour décrire cette courbe avec une précision donnée, il est nécessaire de connaître les propriétés intrinsèques de cette courbe (coubure locale). En d'autres termes, la densité de nœuds doit être localement proportionnelle à la courbure; le coefficient de proportionnalité dépendant de la tolérance fixée. Plus précisément, répondre à ce problème nécessite de connaître la dérivée d'ordre un à la courbe (localisation des extrémums) ainsi que la variation de cette dérivée, par conséquent, la dérivée d'ordre deux.

En dimension deux, la solution du problème peut être assimilée à une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$: $\Sigma = (x, y, \sigma(x, y))$ (cf. Figure 7). Par analogie avec le cas de la dimension un, le contrôle de l'approximation linéaire de Σ impose une densité de nœuds localement proportionnelle aux courbures principales. Pour simplifier, on doit donc, au minimum, introduire le hessien de σ dans l'évaluation. Notons que dans ce cas, les dérivées d'ordre deux permettent d'obtenir une information de nature anisotrope.

Par extension, en dimension trois, on peut voir la solution comme une hypersurface de dimension trois dans $\mathbb{R}^4$. Par un raisonnement analogue, on doit également introduire les dérivées d'ordre deux dans l'estimation de l'erreur.

En résumé, ce type d'estimateur d'erreur peut être qualifié d'estimateur "géométrique".

Remarque 3.4 *Plus généralement, cette approche peut s'appliquer à tout type de champ scalaire défini aux nœuds d'un maillage de $\mathbb{R}^d$. C'est le cas par exemple de solutions d'EDP, des couleurs d'une image digitale, d'un terrain, etc.*

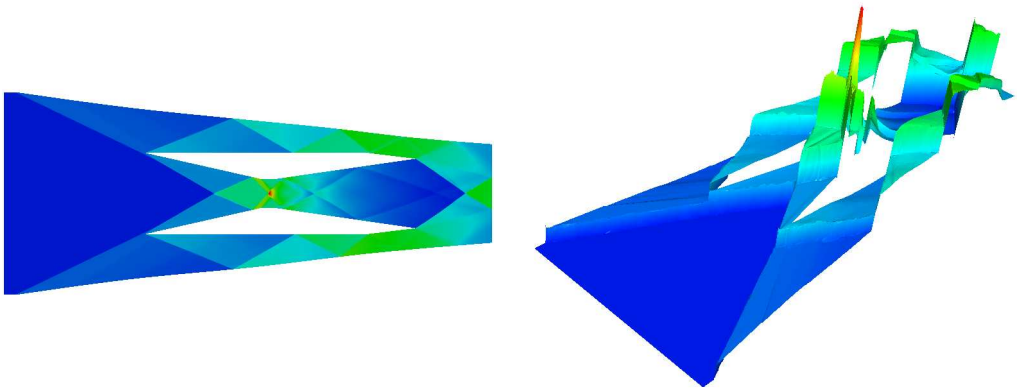

FIG. 7 – *A gauche, solution de la simulation d'un écoulement à mach 3 dans une configuration de type "scramjet". A droite, représentation de cette solution vue comme une surface cartésienne $\Sigma = (x, y, \sigma(x, y))$.*

Caractérisation pour l'adaptation de maillage

Dans la section précédente on a donné une estimation anisotrope de l'erreur d'interpolation sur chaque élément du maillage. Celle-ci permet en effet, étant donné un élément du maillage, d'évaluer l'erreur sur cet élément. Toutefois, dans le contexte de l'adaptation de maillage, il est habituel de fixer le seuil d'erreur *a priori* et d'en déduire alors une mesure de la taille optimale de l'élément garantissant que le seuil d'erreur est respecté. D'après la Relation (17), il suffit que la norme au carré dans la métrique $\mathcal{M}$ du plus grand vecteur inscrit dans l'élément soit proportionnelle au seuil. Il reste donc à présent à préciser comment construire de tels éléments et comment définir le tenseur de métrique $\mathcal{M}$.

4 Application à l'adaptation de maillage

Lorsque l'on utilise une méthode d'adaptation de maillage le problème est de déduire de l'estimation de l'erreur d'approximation un autre maillage tel que cette erreur sur ce nouveau maillage soit bornée par un seuil donné. Il s'agit donc de savoir comment utiliser cette estimation pour construire un tel nouveau maillage. Dans les sections précédentes, on a quantifié l'erreur d'approximation sur un élément du maillage en majorant cet écart à l'aide d'une estimation de l'erreur d'interpolation, Relation (17). On s'est donc ramené au problème suivant : construire un nouveau maillage tel que l'erreur d'interpolation soit bornée par un seuil donné. Dans la «mesure» de l'erreur d'interpolation donnée précédemment on voit clairement apparaître des contraintes liées aux éléments du maillage, plus précisément des contraintes de tailles pour les arêtes des éléments sont spécifiées. En pratique, deux approches sont couramment utilisées pour la construction des maillages adaptés.

La première évalue l'erreur d'interpolation (ou bien utilise un estimateur d'erreur équivalent) sur un élément (ou une arête) et la compare au seuil spécifié, alors suivant le cas, des techniques de raffinement/déraffinement sont utilisées sur l'élément [15, 20]. En général, les nouveaux points sont insérés au milieu des arêtes existantes, cette méthode équivaut à une dichotomie. On constate que les nouveaux maillages sont fortement influencés par la structure (topologie) des précédents.

Dans la deuxième approche qui est utilisée ici, on cherche à être plus précis. D'après la Relation (17), on constate que si l'erreur d'interpolation est fixée (ce qui est le cas en adaptation de maillage), seule la taille des arêtes du maillage peut être modifiée. On est donc amené à travailler avec les arêtes du maillage. Celles-ci peuvent être construites de telle sorte que l'erreur d'interpolation soit proche du seuil fixé, *i.e.*, tel que l'erreur d'interpolation soit équi-répartie sur le maillage. Pour cela on contrôle leurs longueurs par le biais d'une carte de métrique. Autrement dit, on essaie de construire un maillage "optimal", *i.e.*, d'obtenir l'erreur désirée avec un minimum de degrés de liberté sous les contraintes imposées [3]. Dans la suite nous allons décrire cette approche.

4.1 Formulation du problème

Dans le cadre de la génération de maillages, le but est d'équi-répartir dans chaque direction l'erreur d'interpolation sur les éléments du maillage afin de contrôler l'erreur de calcul. Soit ε le seuil d'erreur maximum autorisé sur chaque élément du maillage. On veut caractériser les éléments du maillage sous cette contrainte. Pour un élément K du maillage, d'après la Relation (17), les arêtes de K doivent vérifier l'égalité :

$$\varepsilon = c\,\langle \vec{e},\, \overline{\mathcal{M}}(K)\vec{e}\rangle\,, \quad \text{pour tout } e \in E_K\,,$$

où E_K est l'ensemble des arêtes de K. Ou encore si on définie le tenseur de métrique $\mathcal{M}(K) = \dfrac{c}{\varepsilon}\,\overline{\mathcal{M}}(K)$, elles doivent vérifier :

$$\langle \vec{e},\, \mathcal{M}(K)\,\vec{e}\rangle = 1 \iff (l_{\mathcal{M}(K)}(\vec{e}))^2 = 1\,, \quad \text{pour tout } e \in E_K\,. \tag{18}$$

d'après la définition de longueur dans la métrique $\mathcal{M}(K)$, section 2.1. Ce qui se traduit par : l'erreur d'interpolation sur un élément K est de l'ordre d'ε si la longueur des arêtes de K vaut 1, dans la métrique $\mathcal{M}(K)$.

On est donc conduit à modifier le produit scalaire qui sous-tend la notion de distance utilisée par les générateurs de maillages, à l'aide de la métrique anisotrope locale $\mathcal{M}$ qui remplace la métrique euclidienne usuelle. Puis, on cherche à construire un maillage avec des éléments équilatéraux (unités) dans la nouvelle métrique (qui sont anisotropes dans la métrique euclidienne usuelle). Plus précisément, on s'est ramené à la construction d'un maillage où les arêtes sont de longueur "unité" dans la métrique $\mathcal{M}$. Ceci est du plus grand intérêt, car en pratique on travaille avec les arêtes et non les éléments. En effet, dans la méthode de génération de maillages gouvernés par une carte de métrique, on peut assurer la conformité des éléments avec cette carte par un contrôle sur les longueurs d'arêtes. On précisera plus en détails l'intérêt d'un tel maillage dit "unité" dans la Section 4.3.

Mais en pratique, le tenseur $\mathcal{M}$ qui apparaît dans la Relation (18) n'est pas connu, il reste à préciser son évaluation. Pour cela, on va l'approximer aux sommets du maillage et montrer comment on va utiliser la métrique définie aux sommets lors de la construction des arêtes du maillage. Comme la construction de la métrique est liée au hessien des variables du problème, on va préciser son évaluation numérique. Finalement, on définira la notion d'intersection de métriques.

4.2 Construction de la métrique

Un champ de métriques sur un domaine Ω est une donnée de dimension infinie qui n'est pas exploitable numériquement. On va donc utiliser une approximation discrète de la métrique qui utilise comme support le maillage. En pratique selon les applications, la métrique $\mathcal{M}$ est en général définie aux sommets du maillage plutôt qu'aux éléments. On peut donner quelques exemples :

- dans une simulation numérique déterminer la métrique aux éléments n'est pas toujours "naturel", on travaille souvent avec les sommets du maillage ;
- si on se place dans le cadre de la génération de maillages, on travaille avec les arêtes et non les éléments et par conséquent on utilise une métrique définie aux sommets et non sur les éléments ;
- pour un maillage géométrique basé sur les propriétés intrinsèques d'une surface (courbures), la métrique est définie en tout sommet du maillage (il n'y a pas de courbure d'un élément).

Pour toutes ces raisons, on va travailler avec un champ de métriques défini aux sommets du maillage. Ce champ de métrique est rendu continu sur tout le domaine en utilisant un des schémas d'interpolation définis dans la Section 2.3.

Soit ε l'erreur d'interpolation que l'on désire commettre sur les éléments du maillage. On note h_{min} (resp. h_{max}) la longueur minimale (resp. maximale) autorisée pour les arêtes

du maillage. D'après les Sections 3.2 et 4.1, en chaque sommet du maillage on définit un tenseur de métrique en dimension trois de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}\,\tilde{\Lambda}\,\mathcal{R}^{-1}, \quad \text{où} \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda_3} \end{pmatrix} \tag{19}$$

et :

$$\tilde{\lambda_i} = \min\left(\max\left(\frac{c\,|\lambda_i|}{\varepsilon}, \frac{1}{h_{max}^2}\right), \frac{1}{h_{min}^2}\right),$$

où $\mathcal{R}$ est la matrice des vecteurs propres et les λ_i sont les valeurs propres de la matrice hessienne H_u, Relation (11), et c est la constante qui apparaît dans l'inégalité (13). Le tenseur de métrique que l'on vient de définir est de nature anisotrope. Les directions principales sont données par les vecteurs propres et les tailles relatives respectives par les $\tilde{\lambda_i}$.

On a introduit dans la définition de la métrique des longueurs d'arêtes minimale et maximale afin d'éviter des métriques "irréallistes". En effet, des éléments de très grande taille peuvent être prescrits dans les régions où la solution est linéaire et ainsi on obtient une longueur de maille infinie lorsque l'on a une valeur propre nulle. D'un autre côté, dans les régions proches des singularités des tailles très petites peuvent être obtenues, la taille minimale évite que trop d'éléments ne soient mis dans ces régions. En particulier, dans le contexte d'un calcul (schémas explicites) on impose une taille minimale pour ne pas avoir un pas de temps trop petit.

On remarque que le nouveau produit scalaire donné par la métrique est lié au hessien des variables du problème. Il est donc important d'avoir une bonne évaluation numérique de la matrice hessienne si on veut une métrique précise.

Métrique isotrope. Dans le cas où l'on construit un maillage adapté isotrope, la longueur euclidienne des arêtes d'un élément doit être la même dans chaque direction. Pour garantir que l'erreur d'interpolation sur un élément est majorée par ε, il suffit donc de prendre la plus petite longueur (euclidienne) d'arête donnée par la métrique dans chaque direction. De plus, comme aucune direction n'est privilégiée (l'ellipsoïde associée à un telle métrique est en fait une sphère), on peut prendre comme matrice de vecteurs propres la matrice identité (*i.e.,* les vecteurs de la base canonique). On obtient donc, en chaque sommet une métrique isotrope en prenant :

$$\tilde{\lambda} = \max_{i=1,3}(\tilde{\lambda_i}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Il est à noter que dans ce cas l'erreur d'interpolation est toujours bornée par ε mais elle n'est pas forcément équi-répartie.

Erreur relative. La Relation (9) en deux dimensions (resp. (13) en trois dimensions) donne une majoration absolue de l'erreur d'interpolation. Toutefois, en pratique on est souvent conduit à considérer plutôt une majoration relative de l'erreur d'interpolation et par suite une estimation de l'erreur relative.

En effet, les problèmes considérés mettent souvent en jeu plusieurs variables, de signification et de nature différentes, pour définir la métrique. On intersecte alors les métriques provenant de chaque variable (voir la section 2.2) pour obtenir la métrique résultante. Alors, se pose le problème de la dimension et de la nature des variables. Utiliser une estimation de l'erreur relative permet d'adimensionner les variables.

Donc, en normalisant la Relation (16) par la norme infinie de la variable u, on obtient :

$$\frac{\| u - \Pi_h u \|_{\infty,K}}{\|u\|_{\infty,\Omega}} \leq c \max_{x \in K} \max_{\vec{v} \subset K} \frac{\langle \vec{v}\,, |H_u(x)|\,\vec{v}\,\rangle}{\|u\|_{\infty,\Omega}}\,. \tag{21}$$

4.3 Notion de longueur et maillage unité

Comme on vient de le voir, on équi-répartit l'erreur d'interpolation dans chaque direction sur les éléments du maillage afin de contrôler l'erreur d'approximation. Pour cela, on modifie le produit scalaire qui sous-tend la notion de distance utilisée par le générateur de maillages à l'aide de la métrique anistrope définie en chaque sommet donnée par (19). Et, on construit le maillage en générant des arêtes de longueur "unité" dans cette métrique locale, Relation (18). On va dans un premier temps préciser l'interêt de la notion de longueur unité, puis donner la notion de longueur moyenne. Enfin on présentera la génération du maillage dit "unité".

Longueur unité. Le but est de trouver un moyen de calculer les longueurs dans le cas où diverses métriques sont spécifiées. Ainsi, avoir une expression de $\mathcal{M}$ différente en chaque point conduit à une expression différente pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{M}}$ en chaque point. Afin de simplifier les interactions entre métriques distinctes et au lieu de construire des arêtes de longueurs quelconques dans chaque métrique on va par convention toutes les construire de longueur 1. On remarque que cette notion de longueur unité a été donnée naturellement par la Relation (18).

Par définition, on dit que le vecteur $\vec{u}$ est de *longueur unité* dans la métrique $\mathcal{M}$ si et seulement si $\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}} = 1$.

Soient P est un sommet du maillage et $\mathcal{M}(P)$ la métrique en ce sommet. On veut construire l'arête PX, elle doit avoir une longueur égale (ou proche de) un dans la métrique $\mathcal{M}(P)$ c'est-à-dire :

$$l_{\mathcal{M}(P)}(PX) = \langle \overrightarrow{PX}\,,\, \overrightarrow{PX} \rangle^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{M}(P)} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{PX}\,\mathcal{M}(P)\,\overrightarrow{PX}} = 1\,.$$

Géométriquement, d'après la Section 2.1, ceci signifie que l'élément K doit être inclus dans l'ellipse (resp. l'ellipsoïde) en dimension deux (resp. trois) de centre P associée au

tenseur de métrique $\mathcal{M}(P)$ et de telle manière que les arêtes issues de P soient de longueur un dans la métrique $\mathcal{M}(P)$ (Figure 8).

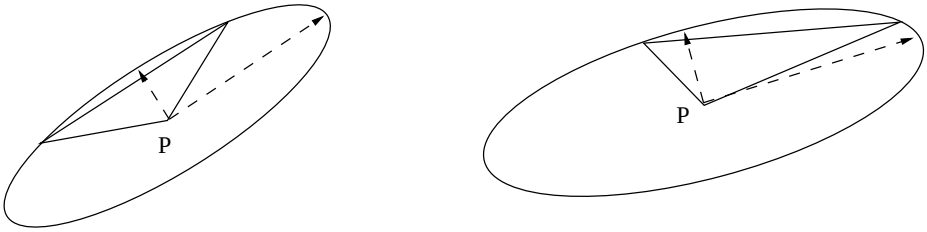

FIG. 8 – *Triangle inclus dans l'ellipse unité du sommet P tel que les arêtes soient de longueur un.*

Longueur moyenne. Si on considère que l'on a une métrique différente en chaque sommet, *i.e.*, dépendant de la position, et si on veut évaluer la distance entre deux sommets A et B alors on voudrait tenir compte à la fois de la métrique en A, de la métrique en B, ainsi que des métriques de tous les points intermédiaires.

Dans le cas où l'on a une métrique distincte en chaque point, si l'on désire évaluer la longueur d'une arête alors on voudrait prendre en compte la métrique associée à chaque point de l'arête. Pour cela, on définit la longueur moyenne sur toutes les métriques de la manière suivante :

$$l_{\mathcal{M}}(\overrightarrow{AB}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\,\mathcal{M}(A+t\overrightarrow{AB}\,)\,\overrightarrow{AB}}\;dt\,. \tag{22}$$

Remarque 4.1 *Cette notion de longueur moyenne au regard d'une métrique correspond à la notion de longueur d'un arc paramétré lorsqu'une structure riemannienne est induite sur le domaine par la métrique $\mathcal{M}$.*

Maillage unité. Partant des notions définies précédemment, on construit localement (en chaque sommet) un produit scalaire donné par la nouvelle métrique (19) qui remplace le produit scalaire usuel, sur lequel est basé la notion de distance (22) (distance moyenne) utilisée par le générateur de maillage. Puis, en construisant un maillage ayant des arêtes (proches) de la longueur unité dans la nouvelle métrique, *i.e.*, $l_{\mathcal{M}}(\vec{e_i}) \approx 1$ pour toute arête $\vec{e_i}$, l'erreur d'interpolation est équi-distribuée sur toutes les éléments du maillage d'après la Section 4.1.

Si on note ε l'erreur d'interpolation que l'on désire commettre sur chaque élément du maillage. D'après la définition de la métrique (19), on constate qu'elle est majorée par ε dans le cas où la taille h_{min} n'est pas atteinte.

4.4 Evaluation de la matrice hessienne

Un point clef dans la construction de la métrique est l'évaluation de la matrice hessienne, en effet elle intervient dans sa construction d'après la définition (19). On constate que construire une métrique raisonnable nécessite une bonne évaluation de la matrice hessienne. Plusieurs méthodes sont disponibles :

- méthode éléments finis [16],
- formule de Green [18],
- développement de Taylor et résolution du système linéaire associé par une approximation aux moindres carrés.

On va décrire ici, l'évaluation de la matrice hessienne en trois dimensions à l'aide d'un développement de Taylor et la résolution du système linéaire par une approximation au sens des moindres carrés.

Soit P un sommet du maillage $\mathcal{T}_h$ et u la variable utilisée pour définir la métrique. On note $\mathcal{B}(P)$ la boule du sommet P, *i.e.,* l'ensemble des sommets connectés à P. On suppose que : $Card(\mathcal{B}(P)) = n$ et que n est plus grand que 6 (ce qui est vrai en général). Pour chaque $P_i \in \mathcal{B}(P)$, à l'aide d'un développement de Taylor de u en P_i à partir de P, on obtient la relation suivante en tronquant les termes d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned} & u(Pi) = u(P) + \overrightarrow{PP_i} \,.\, \nabla u(P) + \frac{1}{2} \langle {}^t\overrightarrow{PP_i},\, H_u(P)\, \overrightarrow{PP_i} \rangle \\ \iff \quad & \frac{1}{2} \langle {}^t\overrightarrow{PP_i},\, H_u(P)\, \overrightarrow{PP_i} \rangle = u(Pi) - u(P) - \overrightarrow{PP_i} \,.\, \nabla u(P) \end{aligned}$$

ou encore en développant (par soucis de clarté $u = u(P)$ et $u_i = u(P_i)$) :

$$\frac{1}{2}(ax_i^2 + 2bx_iy_i + 2cx_iz_i + dy_i^2 + 2ey_iz_i + fz_i^2) = u_i - u - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)\,, \quad (23)$$

avec les notations : $\overrightarrow{PP_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$, $\nabla u(P) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $H_u(P) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.
On a alors un système linéaire sur-déterminé de la forme :

$$AX = B \quad \text{en notant : } {}^tX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix},$$

où A est une matrice $(n \times 6)$ fonction de (x_i, y_i, z_i) et B un vecteur de n lignes qui sont données par le membre de droite de la Relation (23) fonction de $(\alpha, \beta, \gamma, x_i, y_i, z_i, u, u_i)$.

Puis, on résout ce système par une approximation au sens des moindres carrés, c'est-à-dire on essaie de minimiser l'écart entre les vecteurs AX et B de $\mathbb{R}^n$ en minimisant le carré de la norme euclidienne de leur différence :

$$\text{Trouver } X \in \mathbb{R}^6 \text{ tel que } \|AX - B\|^2 = \inf_{Y \in \mathbb{R}^6} \|AY - B\|^2 .$$

On montre que la solution de ce problème n'est autre que la solution du système linéaire (6×6) suivant [8] :

$$A^T A X = A^T B \, .$$

Ce système est appelé *système des équations normales*. On résoud alors ce système avec une méthode classique, par exemple celle de Gauss.

Dans le cas où $Card(\mathcal{B}(P)) < 6$, le système est sous-determiné. Pour obtenir assez d'information, on peut par exemple prendre en compte les sommets de la boule d'ordre deux, *i.e.*, l'ensemble des sommets connectés aux voisins de P.

4.5 Intersection de métriques

Pour obtenir une métrique qui prend en compte les métriques associées à chaque variable, on va toutes les intersecter en utilisant la définition donnée dans la Section 2. Par exemple, on veut pouvoir prendre en compte la métrique provenant de la géométrie et la métrique provenant d'un champ définie sur cette géométrie.

Ceci est consistant car d'après la Section 4.2 on a une estimation de l'erreur relative et non absolue pour chaque variable ce qui élimine le problème de la dimension des variables. Du point de vue de l'erreur, on veut garantir que l'erreur d'interpolation pour chaque variable est toujours bornée par le seuil donné après intersection. Or, avec cette définition, on garantit que le maillage est tel que pour chaque variable l'erreur d'interpolation est plus petite que le seuil fixé.

4.6 Exemples numériques

Des exemples d'adaptation de maillages basée sur des champs analytiques seront donnés dans la partie II de ce rapport [1]. Ils permettrons d'illustrer les différents points mentionnés.

5 Conclusion et perspectives

Dans ce rapport, on a proposé une méthode pratique de construction d'un estimateur d'erreur d'interpolation géométrique. C'est-à-dire qu'on a montré que ce problème peut être abordé sous l'angle du contrôle de l'écart entre une surface et une approximation linéaire par morceaux de celle-ci. Et, par conséquent, la métrique résultante est basée sur les propriétés géométriques intrinsèques de cette surface (*i.e.*, les courbures et les directions principales). Par extension, une telle approche peut s'appliquer à un champ scalaire discret quelconque défini aux nœuds (ou aux éléments) d'un maillage, par exemple la solution numérique d'une EDP, les couleurs d'une image digitale, etc..

D'autre part, nous avons présenté une définition consistante de l'intersection de métriques et la méthode pratique de calcul de cette intersection. En outre, plusieurs schémas d'interpolation de métriques ont été discutés.

Enfin, on a clairement établi les relations de cause à effet entre estimateur d'erreur, métrique et la notion de maillage unité qui en découle. On a indiqué comment construire en pratique un champ de métriques anisotrope et notamment comment évaluer le hessien d'un champ scalaire discret. Les exemples d'adaptation de maillages basée sur des champs analytiques sont donnés dans la partie II de ce rapport.

Dans ce rapport, on a volontairement omis de discuter la construction de maillages adaptés dans des cas réels. En effet, dans les applications concrètes, d'autres problèmes se font jour, liés notamment à la régularité du champ scalaire donné. Ces problèmes, ainsi que d'autres liés par exemple au contexte de simulation numérique de phénomènes instationnaires ou de faible amplitude, font l'objet d'une étude en cours.

Références

[1] F. ALAUZET ET P.J. FREY, Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillages. Partie II : applications, *Rapport de recherche INRIA*, mars 2003.

[2] M.V. ANGLADA, N.P. GARCIA AND P.B. CROSA, Directional adaptive surface triangulation, *Comput. Aided Des.*, Vol. 16, pp. 107-126, 1999.

[3] I. BABUŠKA AND W. RHEINBOLDT, A posteriori error estimates for the finite element method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 12, pp. 1597-1615, 1978.

[4] R.E. BANK AND R.K. SMITH, Mesh smoothinh using a posteriori error estimates, *Siam J. Numer. Anal.*, Vol. 34, n° 3, pp. 979-997, 1997.

[5] M. BERZINS, Solution-based Mesh Quality for Triangular and Tetrahedral Meshes, Proc. *6th International Meshing Roundtable, Sandia Lab.*, pp. 427-436, 1997.

[6] H. BOROUCHAKI, D. CHAPELLE, P.L. GEORGE, P. LAUG ET P.J. FREY, Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillage, dans Maillage et adaptation, P.L. George ed., Série Mécanique et Ingénierie des Matériaux, Méthodes Numériques, *Hermès Science, Paris*, 2001.

[7] M.J. CASTRO-DIAZ, F. HECHT, B. MOHAMMADI AND O. PIRONNEAU, Anisotropic Unstructured Mesh Adaptation for Flow Simulations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 25, pp. 475-491, 1997.

[8] P.G. CIARLET, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, *Masson, Paris*, 1982.

[9] J. DOMPIERRE, M.G. VALLET, M. FORTIN, Y. BOURGAULT AND W.G. HABASHI, Anisotropic mesh adaptation: towards a solver and user independent CFD, *AIAA paper* 97-0861, 1997.

[10] M. FORTIN, Estimation a posteriori et adaptation de maillages, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 9, n°4, 2000.

[11] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, Maillages : applications aux éléments finis, *Hermès Science, Paris*, 1999.

[12] M. KRIZEK, On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements, *Siam J. Numer. Anal.*, Vol. 29, n° 2, pp. 513-520, 1992.

[13] G. KUNERT, Anisotropic mesh construction and error estimation in the finite element method, *Research report Technische Universitat Chemnitz*, SFB 393, 2000.

[14] P.G. CIARLET, Basic error estimates for elliptic problems, in Handbook of numerical analysis Vol. II, P.G. Ciarlet and J.L. Lions ed., *North-Holland*, 1991.

[15] R. LÖHNER AND J.D. BAUM, Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 14, pp. 1407-1419, 1992.

[16] B. LUCQUIN ET O. PIRONNEAU, Introduction au calcul scientifique, *Masson, Paris*, 1996.

[17] C. MANZI, F. RAPETTI AND L. FORMAGGIA, Function approximation on triangular grids : some numerical results using adaptive techniques, *Appl. Numer. Math.*, Vol. 32, n° 4, pp. 389-399, 2000.

[18] B. MOHAMMADI, P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, 3D Mesh adaptation by metric control for CFD, *Revue Européene des Éléments Finis*, Vol. 9, n°4, pp. 439-449, 2000.

[19] C.C PAIN, A.P. HUMPLEBY, C.R.E. DE OLIVEIRA AND A.J.H. GODDARD, Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp. 3771-3796, 2001.

[20] W. SPEARES AND M. BERZINS, A 3D unstructured mesh adaptation algorithm for time-dependent shock-dominated problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 25, pp. 81-104, 1997.

[21] M.G. VALLET, Génération de maillages anisotropes adaptés - Application à la capture de couches limites, *Rapport de recherche INRIA 1360*, 1990.

[22] R. VERFÜRTH, A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, *Wiley & Teubner*, 1996.

A Démonstrations des résultats

A.1 Vecteur inclus dans un élément

Dans cette section, on démontre le résultat énoncé dans la Section 3.2.

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine. Soient K un élément de la triangulation (*i.e.,* un tétraèdre) et P_1, P_2, P_3, P_4 ses sommets. On note par convention, les arêtes de K de la manière suivante :

$$a_1 = P_1P_2,\ a_2 = P_2P_3,\ a_3 = P_3P_1,\ a_4 = P_1P_4,\ a_5 = P_2P_4,\ a_6 = P_3P_4\,.$$

Soit $E = \{\,\vec{a_i}\,\}_{i=1,6}$ où si on prend par exemple $i = 1$ on a $a_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ ou bien $a_1 = \overrightarrow{P_2P_1}$. On va démontrer la proposition suivante :

Proposition A.1 *Soit $\vec{v} \subset K$ alors il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 6$, vérifiant $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \leq 1$ tels que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \vec{a_i}$ et $\vec{a_i} \in E$, $i = 1, 6$, convenablement choisis.*

Démonstration : On se place dans un premier temps dans le cas particulier où $\vec{v}$ a pour origine un sommet de K, par exemple P_1. Le vecteur $\vec{v}$ s'écrit $\overrightarrow{P_1P} = P - P_1$ où $P \in K$. P peut être mis sous la forme : $P = \alpha_P\, P_1 + \beta_P\, P_2 + \gamma_P\, P_3 + \delta_P\, P_4$, où $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P, \delta_P \in \mathbb{R}_+$ vérifient $\alpha_P + \beta_P + \gamma_P + \delta_P = 1$ (coordonnées barycentriques de P dans K). Donc :

$$\begin{aligned}
\vec{v} = P - P_1 &= \alpha_P\, P_1 + \beta_P\, P_2 + \gamma_P\, P_3 + \delta_P\, P_4 - (\alpha_P + \beta_P + \gamma_P + \delta_P)\, P_1 \\
&= \beta_P\, \overrightarrow{P_1P_2} + \gamma_P\, \overrightarrow{P_1P_3} + \delta_P\, \overrightarrow{P_1P_4} \\
&= \beta_P\, \vec{a_1} + \gamma_P\, \vec{a_3} + \delta_P\, \vec{a_4}\,. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Maintenant, soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque dans K d'extrémités $P \in K$ et $Q \in K$. Soient $[P_1, P_2, P_3, P]$, $[P_1, P_2, P_4, P]$, $[P_1, P_3, P_4, P]$ et $[P_2, P_3, P_4, P]$ les tétraèdres inclus dans K. Un de ces tétraèdres contient $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, par exemple $[P_1, P_2, P_3, P]$. Alors, d'après (24) on a :

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha_Q\, \overrightarrow{PP_1} + \beta_Q\, \overrightarrow{PP_2} + \gamma_Q\, \overrightarrow{PP_3},\ \text{ avec } \alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q \leq 1\,.$$

Puis on utilise une nouvelle fois (24) avec les vecteurs $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$ et $\overrightarrow{PP_3}$ dans K. On obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \alpha_Q\, (\beta_P\, \overrightarrow{P_2P_1} + \gamma_P\, \overrightarrow{P_3P_1} + \delta_P\, \overrightarrow{P_4P_1}) \\
&\quad + \beta_Q\, (\alpha_P\, \overrightarrow{P_1P_2} + \gamma_P\, \overrightarrow{P_3P_2} + \delta_P\, \overrightarrow{P_4P_2}) \\
&\quad + \gamma_Q\, (\alpha_P\, \overrightarrow{P_1P_3} + \beta_P\, \overrightarrow{P_2P_3} + \delta_P\, \overrightarrow{P_4P_3})\,.
\end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= (\alpha_Q\, \beta_P - \beta_Q\, \alpha_P)\, \overrightarrow{P_2P_1} + (\alpha_Q\, \gamma_P - \gamma_Q\, \alpha_P)\, \overrightarrow{P_3P_1} + (\beta_Q\, \gamma_P - \gamma_Q\, \beta_P)\, \overrightarrow{P_3P_2} \\
&\quad + \alpha_Q\, \delta_P\, \overrightarrow{P_4P_1} + \beta_Q\, \delta_P\, \overrightarrow{P_4P_2} + \gamma_Q\, \delta_P\, \overrightarrow{P_4P_3}\,,
\end{aligned}$$

avec $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P, \delta_P \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha_P+\beta_P+\gamma_P+\delta_P = 1$. En supposant par exemple $\alpha_Q\,\beta_P - \beta_Q\,\alpha_P \geq 0$, $\alpha_Q\,\gamma_P - \gamma_Q\,\alpha_P \geq 0$ et $\beta_Q\,\gamma_P - \gamma_Q\,\beta_P \geq 0$, on en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} A &= \alpha_Q\,\beta_P - \beta_Q\,\alpha_P + \alpha_Q\,\gamma_P - \gamma_Q\,\alpha_P + \beta_Q\,\gamma_P - \gamma_Q\,\beta_P + \alpha_Q\,\delta_P + \beta_Q\,\delta_P + \gamma_Q\,\delta_P \\ &\leq \alpha_Q\,(\beta_P + \gamma_P + \delta_P) + \beta_Q\,(\gamma_P + \delta_P) + \gamma_Q\,\delta_P \\ &\leq \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q \leq 1\,. \end{aligned}$$

□

Proposition A.2 *Soit $\mathcal{M}$ un tenseur de métrique. On note $\langle u,\, v\rangle_{\mathcal{M}} = \langle u,\, Mv\rangle$ le produit scalaire dans la métrique $\mathcal{M}$ et $\|u\|_{\mathcal{M}} = \langle u,\, u\rangle_{\mathcal{M}}^{1/2}$ la norme associée à $\mathcal{M}$. Alors, on a :*

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{M}} \leq \max_{\vec{e}\in E} \|\vec{e}\|_{\mathcal{M}}\,, \quad \textit{pour tout } \vec{v} \subset K\,. \tag{25}$$

Démonstration : D'après la proposition précédente il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}_+,\ i = 1, 6$, vérifiant $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \leq 1$ tels que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \vec{a_i}$ et $\vec{a_i} \in E,\ i = 1, 6$, convenablement choisis. Donc, d'après l'inégalité de Minkowski on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{\mathcal{M}} &= \|\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \vec{a_i}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \|\vec{a_i}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq (\sum_{i=1}^{6} \alpha_i) \max_{\vec{e}\in E} \|\vec{e}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \max_{\vec{e}\in E} \|\vec{e}\|_{\mathcal{M}}\,. \end{aligned}$$

□

A.2 Propriétés de la réduction simultanée

Dans cette section, on va démontrer les résultats sur les propriétés de la réduction simultanée de deux métriques énoncés dans la Section 2.2.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux tenseurs de métriques, *i.e.*, deux matrices symétriques définies positives. On définit : $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2$.

Proposition A.3 *$\mathcal{N}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : $\mathcal{M}_1$ est symétrique définie positive, on a $\mathcal{M}_1 = P\Lambda P^{-1}$ avec P la matrice des vecteurs propres, qui est orthogonale, et $\Lambda = diag(\lambda_i)$ la matrice des valeurs propres de $\mathcal{M}_1$. On écrit $\mathcal{M}_1^{-1}$ sous la forme : $\mathcal{M}_1^{-1} = P\sqrt{\Lambda}^{-1}\sqrt{\Lambda}^{-1}P^{-1}$. La matrice $\mathcal{N}$ s'écrit dans la métrique $\mathcal{M}_1$:

$$\sqrt{\Lambda}P^{-1}\mathcal{N}P\sqrt{\Lambda}^{-1} = \sqrt{\Lambda}P^{-1}\mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2P\sqrt{\Lambda}^{-1} = \sqrt{\Lambda}^{-1}P^{-1}\mathcal{M}_2P\sqrt{\Lambda}^{-1}\,.$$

Or, ${}^t(\sqrt{\Lambda}^{-1}) = \sqrt{\Lambda}^{-1}$ car $\sqrt{\Lambda}^{-1}$ est diagonale et ${}^tP = P^{-1}$ car P est orthogonale. Donc :

$$ {}^t(\sqrt{\Lambda}^{-1}P^{-1}\mathcal{M}_2P\sqrt{\Lambda}^{-1}) = \sqrt{\Lambda}^{-1}P^{-1}\mathcal{M}_2P\sqrt{\Lambda}^{-1}. $$

Par conséquent, $\sqrt{\Lambda}P^{-1}\mathcal{N}P\sqrt{\Lambda}^{-1}$ est symétrique dans la métrique $\mathcal{M}_1$ donc diagonalisable. On en déduit que $\mathcal{N}$ est diagonalisable (en fait, on a fait le changement de base $P\sqrt{\Lambda}^{-1}$).

□

Soient $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_1}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_2}$ deux ellipses (resp. ellipsoïdes) de même centre. On va maintenant montrer que la réduction simultanée donne bien l'ellipse (resp. ellipsoïde) $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ de plus grande aire (resp. volume) incluse dans la région définie par l'intersection des ellipses (resp. ellipsoïdes) $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. On suppose que les ellipses (resp. ellipsoïdes) ne sont pas incluses l'une dans l'autre, sinon on a déjà le résultat, voir Section 2.2.

En dimension deux, la réduction simultanée nous donne une base $(e_i)_{i=1,2}$ (non orthogonale) dans laquelle $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont simultanément diagonales. Par définition, $\{e_i\}_{i=1,2}$ sont les vecteurs directeurs des tangentes communes à $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}$ respectivement. Ces tangentes forment un parallélogramme et par symétrie de l'ellipse, on en déduit que les ellipses sont tangentes aux milieux des cotés du parallélogramme. Ce parallélogramme contient la région définie par l'intersection des ellipses $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, Figure 9. De même en dimension trois, les ellipsoïdes sont tangents aux milieux des faces du parallélépipède qui est défini par les plans tangents aux ellipsoïdes qui sont donnés par les $\{e_i\}_{i=1,3}$. Ce parallélépipède contient la région définie par l'intersection des ellipsoïdes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

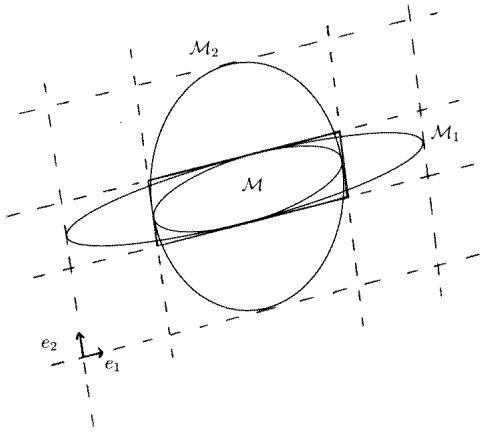

FIG. 9 – *Représentation de la base commune $(e_i)_{i=1,2}$ donnée par la réduction simultanée et du parallélogramme défini par $\{e_i\}_{i=1,2}$ contenant la région définie par l'intersection des ellipses $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.*

On va donc montrer que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ est la plus grande ellipse (resp. ellipsoïde) incluse dans ce parallélogramme (resp. parallélépipède). Premièrement, on se donne la transformation

affine qui transforme le parallélogramme en le carré de coté deux et de centre l'origine dont les arêtes sont alignées avec les axes, noté $\mathcal{K}_2$. Comme $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ est tangente aux milieux des quatre cotés du parallélogramme et que les transformations affines conservent les milieux et les tangentes, on en déduit que l'image de $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ par la transformation affine est le cercle de centre l'origine et de rayon un, noté $\mathcal{C}_2$. De même en dimension trois, avec la même transformation, le parallélépipède donne le cube de centre l'origine et dont les arêtes sont de longueurs deux et sont alignées avec les axes, que l'on note $\mathcal{K}_3$. Et $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ est transformée en la sphère de centre l'origine et de rayon un, que l'on note $\mathcal{C}_3$.

Donc pour démontrer le résultat, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition A.4 *Le cercle $\mathcal{C}_2$ est l'ellipse de plus grande aire incluse dans le carré $\mathcal{K}_2$. La sphère $\mathcal{C}_3$ est l'ellipsoïde de plus grand volume inclus dans le cube $\mathcal{K}_3$.*

Demonstration : Nous allons d'abord démontrer le résultat en dimension deux et faire un raisonnement analogue en dimension trois.

1. On se place en dimension deux, on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrons le lemme suivant :

Lemme : L'aire d'une ellipse $\mathcal{E}$ est donnée par la formule :

$$Aire(\mathcal{E}) = \pi\, B\, H\,,$$

où B est la "demi-base" et H la "hauteur", Figure 10.

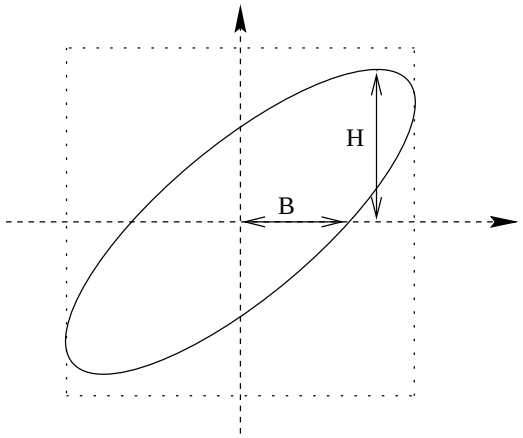

FIG. 10 – *Illustration d'une ellipse incluse dans le carré $\mathcal{K}_2$.*

L'équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$\mathcal{E}(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0 \tag{26}$$

ou bien sous forme matricielle :

$$^tXMX = 1\,, \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\,, \tag{27}$$

avec $a > 0$, $c > 0$ et $ac - b^2 > 0$. On sait que l'aire de l'ellipse est donnée par la formule $Aire(\mathcal{E}) = \dfrac{\pi}{\sqrt{\det M}}$.

D'après la Section 2.1, on sait que ${}^t(Be_1)M(Be_1) = 1$. Or ${}^t e_1 M e_1 = a$, on en déduit que $B = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Par défi nition, H n'est autre que l'ordonnée du point P qui admet pour tangente la droite d'équation $y = Cte$, donc $y = H$. En P, la normale est donnée par :

$$\vec{n}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial x}(x_p, y_p) \\ \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial y}(x_p, y_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_p + by_p \\ bx_p + cy_p \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ H \end{pmatrix},$$

d'après (26) ou encore sous écriture matricielle :

$$\vec{n}_p = M\,\overrightarrow{OP} = M \begin{pmatrix} x_p \\ H \end{pmatrix},$$

d'après (27). $\vec{n}_p$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, on en déduit :

$$ax + bH = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{bH}{a},$$

Puis en remplaçant x et y par leurs valeurs respectives dans (26), on obtient :

$$H^2 = \frac{a}{ac - b^2} \Longleftrightarrow H = \sqrt{\frac{a}{\det M}},$$

Par conséquent :

$$\pi\, B\, H = \pi \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a}{\det M}} = Aire(\mathcal{E}).$$

Le lemme est bien démontré.

Comme $\mathcal{E}$ doit être incluse dans $\mathcal{K}_2$, on en déduit les contraintes $B \leq 1$ et $H \leq 1$. Par suite, $Aire(\mathcal{E}) \leq \pi = Aire(\mathcal{C}_2)$. Donc le cercle $\mathcal{C}_2$ est bien l'ellipse de plus grande aire incluse dans le carré $\mathcal{K}_2$.

2. Démontrons maintenant le résutat en dimension trois. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme : Le volume d'un ellipsoïde $\mathcal{E}$ est donnée par la formule :

$$Aire(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\, B\, H,$$

où B est l'aire de la "base", *i.e.*, l'aire de l'ellipse $\mathcal{E}_B$ défi nit par l'intersection de $\mathcal{E}$ et du plan $\mathcal{P} = (e_1, e_2)$, et H la "hauteur" de $\mathcal{E}$ (suivant e_3).

L'équation de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 - 1 = 0, \tag{28}$$

ou sous forme matricielle :

$$ {}^tXMX = 1\,, \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \tag{29} $$

avec $a > 0$, $d > 0$, $f > 0$ et $\det M > 0$. On sait que l'aire de l'ellipsoïde est donnée par $Aire(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det M}}$. En effet, Pour un ellipsoïde d'équation :

$$ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et donc } M_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}, $$

on sait que l'aire est donnée par $Aire(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi abc$. Pour un ellipsoïde général $\mathcal{E}$, en se plaçant dans la base des vecteurs propres, on en déduit que $Aire(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det M_{\mathcal{E}}}}$.

Soit $\mathcal{E}_B$ l'ellipse donnée par l'intersection de $\mathcal{E}$ et du plan $\mathcal{P} = (e_1, e_2)$, c'est-à-dire $\mathcal{E}_B$ est défi nie par le tenseur :

$$ M_{\mathcal{E}_B} = {}^tRMR = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, $$

où R est la matrice dont les colonnes sont e_1 et e_2. On en déduit $B = \frac{\pi}{\sqrt{ad - b^2}}$.

Par défi nition H n'est autre que l'ordonnée du point P qui admet pour plan tangent le plan d'équation $z = Cte = H$. En P, la normale du plan tangent est donnée par :

$$ \vec{n}_p = \begin{pmatrix} ax_p + by_p + cz_p \\ bx_p + dy_p + ez_p \\ cx_p + ey_p + fz_p \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ H \end{pmatrix}, $$

d'après (28) ou encore sous écriture matricielle :

$$ \vec{n}_p = M \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}, $$

d'après (29). On en déduit :

$$ \begin{cases} ax_p + by_p + cH &= 0 \\ bx_p + dy_p + eH &= 0 \end{cases} $$

On trouve alors :

$$ x = H\,\frac{be - cd}{ad - b^2} = H\,\frac{\gamma_{1,3}(M)}{\gamma_{3,3}(M)} \quad \text{et} \quad y = H\,\frac{cb - ae}{ad - b^2} = H\,\frac{\gamma_{2,3}(M)}{\gamma_{3,3}(M)}\,, $$

où $\gamma_{i,j}(M)$ sont les cofacteurs de M.

Maintenant, on remplace x, y et z par leurs valeurs dans (28). Un calcul préliminaire donne :

$$ a\,(be - cd)^2 + 2b\,(be - cd)(cb - ae) + d\,(cb - ae)^2 = -c\,(be - cd)(ad - b^2) - e\,(cb - ae)(ad - b^2)\,. $$

Par suite,

$$H^2\left(c\left(be-cd\right)+e\left(cb-ae\right)+f\left(ad-b^2\right)\right)=\left(ad-b^2\right) \iff H=\sqrt{\frac{ad-b^2}{detM}}\,,$$

Par conséquent, on a bien :

$$\frac{4}{3}\,B\,H=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{ad-b^2}}\sqrt{\frac{ad-b^2}{detM}}=Aire(\mathcal{E})\,.$$

Comme $\mathcal{E}$ doit être incluse dans $\mathcal{K}_3$, on a les contraintes $H \leq 1$ et $B \leq \pi$ (car d'après la démonstration en dimension deux, dans le plan $\mathcal{P}=(e1,e2)$ l'ellipse de plus grande aire incluse dans $\mathcal{K}_2=\mathcal{K}_3\cap\mathcal{P}$ est le cercle $\mathcal{C}_2$). Par conséquent, $Aire(\mathcal{E}) \leq \frac{4}{3}\,\pi = Aire(\mathcal{C}_3)$. La sphère $\mathcal{C}_3$ est bien l'ellipsoïde de plus grand volume inclus dans le cube $\mathcal{K}_3$.

□

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifi que
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399