



**HAL**  
open science

# Une présentation mathématique de la méthode de Cagniard-de Hoop Partie I En dimension deux

Julien Diaz, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Julien Diaz, Patrick Joly. Une présentation mathématique de la méthode de Cagniard-de Hoop Partie I En dimension deux. [Rapport de recherche] RR-5824, INRIA. 2006, pp.89. inria-00070201

**HAL Id: inria-00070201**

**<https://inria.hal.science/inria-00070201>**

Submitted on 19 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Une présentation mathématique de la méthode de  
Cagniard-de Hoop*

*Partie I*

*En dimension deux*

Julien Diaz — Patrick Joly

**N° 5824**

Février 2006

\_\_\_\_\_ Thème NUM \_\_\_\_\_



*rapport  
de recherche*





# Une présentation mathématique de la méthode de Cagniard-de Hoop

## Partie I

### En dimension deux

Julien Diaz, Patrick Joly

Thème NUM — Systèmes numériques  
Projet Poems

Rapport de recherche n° 5824 — Février 2006 — 89 pages

**Résumé :** Dans ce rapport, nous effectuons une présentation mathématique détaillée de la méthode de Cagniard-de Hoop en dimension deux. Nous regroupons les résultats déjà connus et nous éclaircissons certaines difficultés mathématiques qui ne semblent pas avoir été traités jusqu'à maintenant .

**Mots-clés :** Cagniard-de Hoop, solutions analytiques, fonctions de Green, équation des ondes, acoustique, élastodynamique

# A mathematical presentation of the Cagniard-de Hoop method

## Part I

### In two dimensions

**Abstract:** In this report we present in details the Cagniard-de Hoop method in two dimensions. We bring together the already known results and we clarify some mathematical difficulties which does not seem to have been treated from now on.

**Key-words:** Cagniard-de Hoop, analytical solutions, Green functions, waves equation, acoustics, élastodynamics

Bien que la méthode de Cagniard-de Hoop cette méthode soit connue depuis longtemps (les travaux de Cagniard remontent à 1930), il n'existe pas, à notre connaissance, d'ouvrages synthétisant toutes les réponses aux problèmes mathématiques soulevés par cette méthode. Citons néanmoins le livre de van der Hijden [7] traitant le cas de milieux stratifiés isotropes ou anisotropes mais sans réellement aborder les détails numériques. Nous avons donc voulu regrouper dans ce rapport les résultats contenus dans la littérature et éclaircir certains points qui ne semblent pas avoir été traités (ou du moins pas publiés) jusqu'à maintenant.

Après avoir rappelé le principe de la méthode en l'appliquant à un problème très simple, la résolution de l'équation des ondes dans un milieu homogène infini, nous nous intéresserons à un milieu hétérogène composé de deux demi-plans homogènes, d'abord en considérant une source située sur l'interface, puis située à l'intérieur d'un des deux milieux. Nous étudierons ensuite le problème de l'interaction fluide-structure. Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques détails techniques pour le calcul numérique des fonctions de Green.

## Introduction

La méthode dite de Cagniard-de Hoop a été introduite par Cagniard en 1930 [2], pour obtenir des solutions exactes de l'équation des ondes élastodynamiques en dimension 2. Son extension aux problèmes tridimensionnels a été proposée vers 1960 par de Hoop [3].

Bien que destinée à l'origine à la résolution de l'équation des ondes élastiques, cette méthode peut être appliquée à tout problème de propagation d'onde transitoire (acoustique, électromagnétisme) dans des milieux stratifiés. Elle établit un lien entre les solutions dans le domaine temporel et les ondes planes et permet également de calculer séparément la contribution de chaque type d'onde (onde P, onde S, onde de tête ...).

Nous nous limiterons dans cette partie à l'application de la méthode aux **équations des ondes acoustiques et élastiques isotropes** en dimension 2 et nous nous intéresserons à l'extension en dimension 3 dans la partie deux. Pour fixer les idées nous considérons la fonction  $u(x, y, t)$ , solution fondamentale d'un problème de propagation d'onde dans un milieu stratifié composé de couches isotropes parallèles à un des axes du plan ( $(Ox)$  par exemple). Les étapes de la méthode de Cagniard-de Hoop sont les suivantes :

1. On transforme l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $u$  en une équation différentielle ordinaire suivant la variable d'espace  $y$  à coefficients constants dans chaque couche qui pourra être résolue explicitement. Pour cela on applique successivement à  $u$  :

- La transformation de **Laplace en temps** ( $s$  est la variable duale de  $t$ ):

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_0^{+\infty} u(x, y, t) e^{-st} dt, \quad (1.1)$$

- La transformation de **Fourier** suivant la **variable d'espace**  $x$  ( $k$  est la variable duale de  $x$ ):

$$\widehat{u}(k, y, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{u}(x, y, s) e^{ikx} dx. \quad (1.2)$$

2. On peut alors calculer explicitement  $\widehat{u}(k, y, s)$ . Nous verrons dans les sections suivantes que cette fonction peut se décomposer en une **somme** (éventuellement infinie dans le cas de milieux stratifiés de plus de trois couches ou bornés dans la direction  $y$ ) d'**ondes "élémentaires"** :

$$\widehat{u}(k, y, s) = \sum_{l=1}^N \widehat{u}_l(k, y, s) = \sum_{l=1}^N \mathcal{A}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c})}$$

où  $c_l$  représente la vitesse de propagation de l'onde  $l$ ,  $\mathbf{c} = [c_i]_{i=1..N}$  est le vecteur contenant les vitesses de propagation de chaque onde  $i$ ,  $\mathcal{A}_l$  est une fonction **homogène en  $s/c_l$  de degré  $-1$**  :

$$\mathcal{A}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) = \frac{c_l}{s} \mathcal{A}_l \left( \frac{k^2 c_l^2}{s^2}, 1, \mathbf{c} \right)$$

et  $\mathcal{F}_l$  une fonction affine en  $y$ , **homogène en  $s/c_l$  de degré 1** :

$$\mathcal{F}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c} \right) = a_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) y + b_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right)$$

et

$$\mathcal{F}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c} \right) = \frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l \left( \frac{k^2 c_l^2}{s^2}, 1, y, \mathbf{c} \right).$$

De plus  $\mathcal{F}_l$  est une fonction affine en  $y$ .

3. Pour tout  $l \in \{1..N\}$  on applique alors à  $\widehat{u}_l$  la transformation de **Fourier inverse** suivant  $x$  :

$$\widetilde{u}_l(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c})} e^{-ikx} dk. \quad (1.3)$$

4. En utilisant la propriété d'homogénéité de  $\mathcal{A}_l$  et de  $\mathcal{F}_l$  on pose  $k = ps/c_l$  pour obtenir :

$$\widetilde{u}_l(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2, 1, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, 1, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp, \quad (1.4)$$

par la suite nous ferons les abus de notation

$$\mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) = \mathcal{A}_l(p^2, 1, \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) = \mathcal{F}_l(p^2, 1, y, \mathbf{c}).$$

Ce changement de variable nous permet de faire apparaître la variable de Laplace,  $s$ , en facteur dans l'exponentielle.

5. Cette étape est la principale étape de la méthode de Cagniard-de Hoop, elle consiste à transformer l'intégrale précédente en une transformée de Laplace, c'est-à-dire à identifier le terme à l'intérieur de l'exponentielle à  $st$ . Pour cela nous allons chercher un **chemin**  $\Gamma$  dans le **plan complexe**, tel que, pour tout  $p$  de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx = -c_l t$  avec  $t \in \mathbb{R}^+$  et tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp = \int_{\Gamma} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp. \quad (1.5)$$

Si un tel chemin existe, on pourra alors paramétrer l'ensemble des  $p$  de  $\Gamma$  par une fonction  $\gamma(t, x, y)$ , et, en utilisant le changement de variable  $p = \gamma(t, x, y)$ , on montrera que<sup>1</sup>

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp = \int_{t_{0l}(x, y)}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\gamma^2(t, x, y), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, x, y) e^{-st} dt. \quad (1.6)$$

Par la suite, pour des raisons de **lisibilité** nous **omettrons la dépendance en espace** des fonctions  $\gamma$  et  $t_{0l}$ .

6. La dernière étape est évidente : en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace on montre que, puisque

$$\tilde{u}_l(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{0l}}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\gamma^2(t), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t) e^{-st} dt, \quad (1.7)$$

alors

$$u_l(x, y, t) = H_{t_{0l}}(t) \mathcal{A}_l(\gamma^2(t), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t) \quad (1.8)$$

où  $H_{t_{0l}}$  représente la fonction de Heavyside, nulle pour  $t < t_{0l}$  et telle que  $H_{t_{0l}}(t) = 1$  pour  $t > t_{0l}$ .

L'homogénéité des fonctions  $\mathcal{A}_l$  et  $\mathcal{F}_l$  est capitale pour appliquer la méthode de Cagniard-de Hoop, c'est pourquoi nous ne pouvons pas l'appliquer aux problèmes dispersifs comme l'équation des ondes amorties. Il n'est pas non plus possible de l'appliquer aux problèmes de couplage entre une plaque (ou une membrane) et un fluide ni aux problèmes comportant une symétrie de révolution.

Nous renvoyons le lecteur au livre de van der Hijden [7] pour plus de détails sur le formalisme de la méthode et son application aux problèmes anisotropes (sur ce point précis on pourra également se référer au cours d'O. Poncelet [6]). L'application de cette méthode aux interfaces courbes est détaillée dans la thèse de Q. Grimal [4], les solutions sont alors

<sup>1</sup>Nous supposons ici que l'onde  $l$  est une onde de volume, nous verrons comment calculer les ondes de tête dans les sections suivantes.

des solutions approchées obtenues en appliquant la méthode de Cagniard-de Hoop sur une configuration plane approchant la configuration courbe.

## 1 Calcul de la fonction de Green de l'équation des ondes scalaires dans un milieu homogène infini

Nous illustrons dans cette section le principe de la méthode de Cagniard-de Hoop exposé en introduction en l'appliquant à un cas très simple dont le résultat est bien connu et peut être obtenu par bien d'autres méthodes : le calcul de la solution de l'équation des ondes 2D dans un milieu homogène infini. L'équation aux dérivées partielles à résoudre est

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] = \delta(x)\delta(y)f(t), \quad (1.9)$$

où  $c$  représente la vitesse de propagation des ondes. Il est bien connu que la solution de cette équation aux dérivées partielles peut être obtenue en convoluant la fonction source avec  $u$  :

$$U(x, y, t) = \int_0^t u(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (1.10)$$

où  $u$  est la fonction de Green associée à (1.9), c'est dire la solution de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(t). \quad (1.11)$$

La première étape de la méthode ne présente aucune difficulté : l'utilisation de la transformée de Laplace en temps et de la transformée de Fourier suivant  $x^2$  sur (1.11) nous permet d'obtenir l'équation différentielle ordinaire suivante en  $y$  :

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \hat{u} = \delta(y), \quad (1.12)$$

dont la solution (deuxième étape de la méthode) est :

$$\hat{u}(k, y, s) = \frac{1}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.13)$$

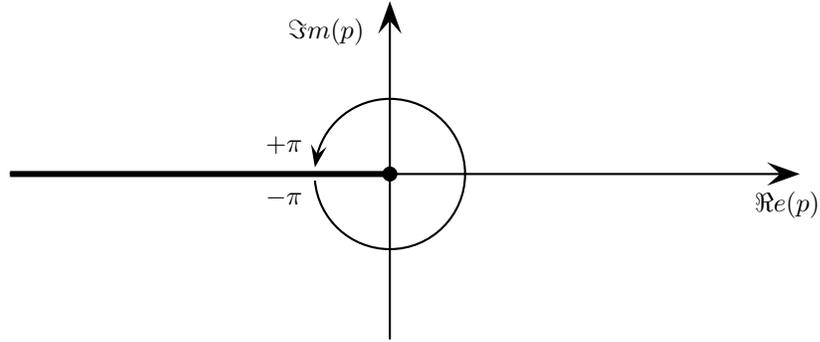
où la fonction  $g(p) = p^{\frac{1}{2}}$ , est définie de manière classique :

$$g(p)^2 = p \quad \text{et} \quad \Re e[g(p)] > 0.$$

La coupure de  $g(p)$  dans le plan complexe sera donc la demi-droite définie par  $\{p \in \mathbb{R}^-\}$  (voir figure 1).

On applique maintenant (troisième étape de la méthode) la transformée inverse de Fourier

<sup>2</sup>Le choix de la direction est ici arbitraire, il s'imposera plus naturellement lors de l'étude des milieux stratifiés dans les prochaines sections.


 Figure 1: Définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$ 

en  $x$  à  $\hat{u}$ , pour obtenir :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y|(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} - ikx} dk, \quad (1.14)$$

soit, en posant  $k = \frac{ps}{c}$  (quatrième étape),<sup>3</sup>

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c} \left[ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right]} dp \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(p) dp) \quad (1.15)$$

Comme nous l'avons vu en introduction, ce changement de variable nous permet de faire apparaître la variable de Laplace,  $s$ , en facteur dans l'exponentielle, le principe de la méthode de Cagniard-de Hoop consistant justement à transformer l'intégrale précédente en une transformée de Laplace. Pour cela (cinquième étape de la méthode) nous allons chercher un chemin  $\Gamma$  dans le plan complexe, tel que,

$$\text{pour tout } p \text{ de } \Gamma, |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx = ct \text{ avec } t \in \mathbb{R}^+$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(p) dp = \int_{\Gamma} \Xi(p) dp.$$

Posons donc  $ct = |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx$  et

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid \left( |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right) \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

<sup>3</sup>Rappelons que  $\Xi$  se lit xi majuscule.

Le contour  $\Gamma$  que nous cherchons sera inclus dans  $\tilde{\Gamma}$  qui est donc l'ensemble des solutions  $p$  de

$$|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx = ct, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.16)$$

**Lemme 1.1** *L'ensemble  $\tilde{\Gamma}$  des solutions de (1.16) pour  $t$  positif est tel que*

$$\tilde{\Gamma} = \Upsilon^+ \cup \Upsilon^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-,^4$$

avec

$$\Gamma^\pm = \left\{ p = \gamma^\pm(t), \quad \frac{r}{c} \leq t \right\}$$

et

- si  $\cos \theta > 0$

$$\Upsilon^+ = \left\{ p = v^+(t), \quad \frac{r \cos |\theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} \right\},$$

$$\Upsilon^- = \left\{ p = v^-(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c} \right\},$$

- si  $\cos \theta < 0$

$$\Upsilon^+ = \left\{ p = v^+(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c} \right\},$$

$$\Upsilon^- = \left\{ p = v^-(t), \quad \frac{r \cos |\theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} \right\}.$$

où nous avons posé

$$\gamma^\pm(t) = -i \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}$$

et

$$v^\pm(t) = -i \left( \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}} \right).^5$$

**Démonstration :**

Les solutions de (1.16) sont aussi racines du polynôme de degré 2 :

$$P_{t,r,\theta}(p) = p^2 + 2i \frac{ct}{r} \cos \theta p + \sin^2 \theta - \frac{c^2 t^2}{r^2}, \quad (1.17)$$

avec  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

---

<sup>4</sup> $\Upsilon$  =upsilon majuscule.

<sup>5</sup> $v$  =upsilon.

**Remarque 1.1** Si  $p$  est une racine de ce polynôme, elle ne vérifie pas forcément (1.16). En fait elle est solution de

$$|y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = ct - ipx$$

ou de

$$|y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = -ct + ipx$$

et il faudra vérifier, après résolution du polynôme, que  $\Re(ct - ipx) \geq 0$ .

On vérifie facilement que  $P_{t,r,\theta}$  admet 2 racines imaginaires pures,

$$v^{\pm}(t) = -i \left( \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}} \right), \quad \text{pour } t \leq \frac{r}{c}, \quad (1.18)$$

et deux racines complexes,

$$\gamma^{\pm}(t) = -i \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \text{pour } t > \frac{r}{c}. \quad (1.19)$$

La remarque 1.1 nous impose maintenant de vérifier que les racines de (1.17) sont bien solutions de (1.16).

- pour  $t \leq \frac{r}{c}$  :

$$ct - iv^{\pm}(t)x = ct \sin^2 \theta \mp \cos \theta |\sin \theta| \sqrt{r^2 - c^2 t^2}$$

donc :

- si  $\cos \theta > 0$

$$\Re(ct - iv^-(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{r}{c};$$

$$\Re(ct - iv^+(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } \frac{r|\cos \theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c};$$

- si  $\cos \theta < 0$

$$\Re(ct - iv^+(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{r}{c};$$

$$\Re(ct - iv^-(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } \frac{r|\cos \theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c};$$

- pour  $t > \frac{r}{c}$  :

$$ct - i\gamma^{\pm}(t)x = ct \sin^2 \theta \mp i \cos \theta |\sin \theta| \sqrt{r^2 - c^2 t^2}$$

donc :

$$\Re(ct - i\gamma^{\pm}(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } \frac{r}{c} < t.$$

■

**Remarque 1.2** Si  $\cos \theta = 0$  on a  $\Gamma^+ \cup \Gamma^- = \mathbb{R}$ .

Nous considérons uniquement, à partir de maintenant et dans les sections suivantes, le cas  $\cos \theta \leq 0$ , mais, les problèmes étudiés étant symétriques par rapport à  $(Oy)$ , les résultats sont évidemment identiques pour  $\cos \theta > 0$ .

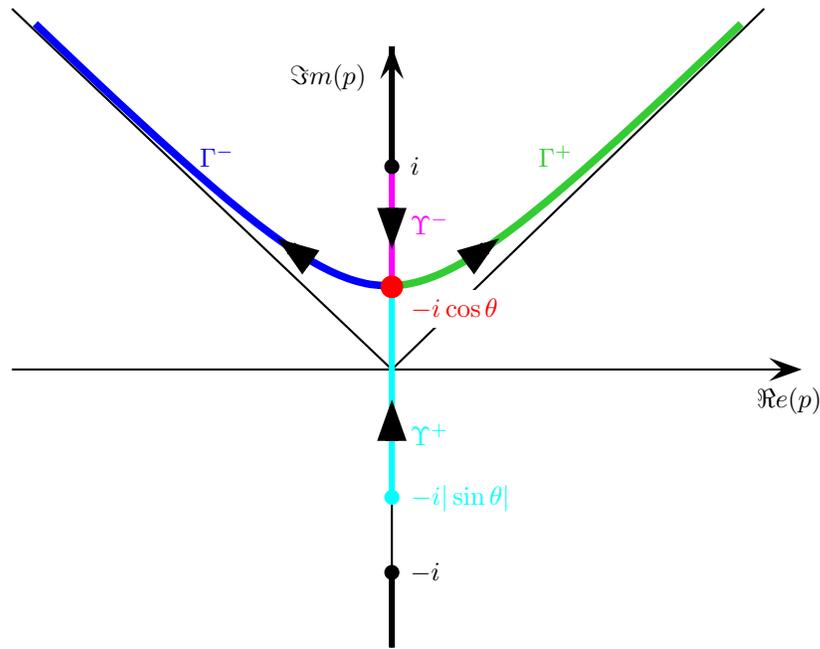


Figure 2: Représentation de  $\tilde{\Gamma}$

Soit  $p \in \Gamma^+$ , on note  $X = \Re e(p)$  et  $Y = \Im m(p)$ , on a alors

$$X = |\sin \theta| \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1} \geq 0, \quad Y = \frac{ct}{r} \cos \theta > 0$$

et

$$\frac{X^2}{\sin^2 \theta} - \frac{Y^2}{\cos^2 \theta} = -1.$$

C'est l'équation d'une hyperbole :  $\Gamma^+$  est la partie de cette hyperbole située dans le quart de plan  $X \geq 0$ ,  $Y > 0$  et  $\Gamma^-$  la partie située dans le quart de plan  $X \leq 0$ ,  $Y > 0$ .  $\Gamma$  intersecte l'axe imaginaire au point  $p = -i \cos \theta$  pour  $t = \frac{r}{c}$ .

**Remarque 1.3** Si  $\cos \theta > 0$  on montre de même que  $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$  est la branche de cette hyperbole située dans le plan  $Y < 0$ .

Les contours  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  et  $\Upsilon = \Upsilon^+ \cup \Upsilon^-$  sont représentés sur la figure 2.

**Remarque 1.4** Nous n'utiliserons pas les contours  $\Upsilon$  dans cette section, mais ils interviendront dans le calcul des ondes de tête dans les sections suivantes.

D'après la définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  que nous avons choisie, les points de branchement de  $\Xi$  sont  $p = \pm i$  et ses coupures sont les 2 demi-droites imaginaires

$$\{ip \mid p \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \}.$$

Nous notons de plus  $D$  la droite réelle et  $\Omega$  la partie du plan complexe délimitée par  $D$  et  $\Gamma$  (voir figure 3). Il est évident que  $\Gamma$  ne traverse pas les coupures.

Montrons maintenant que  $\int_D \Xi(p) dp = - \int_\Gamma \Xi(p) dp$ .

Soit  $\rho$  un réel positif, destiné à tendre vers  $+\infty$ , on pose :

$$\begin{cases} D_\rho = \{p \in D \mid |p| < \rho\}, \\ \Gamma_\rho = \{p \in \Gamma \mid |p| < \rho\}, \\ C_\rho = \{p \in \Omega \mid |p| = \rho\}. \end{cases}$$

$C_\rho$  est constitué de deux arcs-de-cercle reliant  $D_\rho$  et  $\Gamma_\rho$  de telle sorte que  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$  soit une courbe fermée. Puisque  $\Xi$  est analytique sur  $\Omega$ , son intégrale sur le contour fermé  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$  (l'orientation du contour est choisie de telle sorte que le segment réel  $D_\rho$  soit parcouru dans le sens des valeurs croissantes — voir figure 4) est nulle :

$$\int_{D_\rho} \Xi(p) dp + \int_{\Gamma_\rho} \Xi(p) dp + \int_{C_\rho} \Xi(p) dp = 0. \tag{1.20}$$

D'après la définition de la racine carrée que nous avons choisie et puisque  $x < 0$  on vérifie facilement que :

$$\Re(|y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx) > 0 \quad \text{si} \quad \Im m(p) \geq 0 \text{ et } \Re(p) \neq 0$$

et donc que, pour tout  $\psi \in [0; \pi/2[ \cup ]\pi/2; \pi]$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} Re^{i\psi} \Xi(Re^{i\psi}) = 0.$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Jordan [8, 5] :

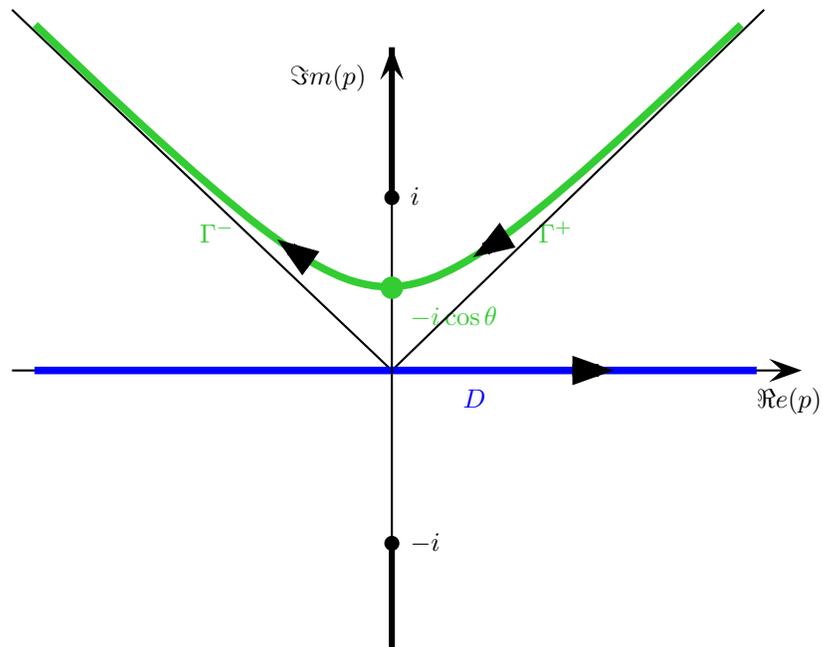


Figure 3: Représentation de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  dans le plan complexe

**Lemme 1.2 (Second Lemme de Jordan)** Soient  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{U}$  un secteur angulaire de  $\mathbb{C}$  défini par

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \geq R_0 \text{ et } \psi_1 < \arg(z - z_0) < \psi_2\} (R_0 > 0, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in \mathbb{R}).$$

Si  $f$  est une fonction continue dans  $\mathcal{U}$  et si

$$\lim_{\substack{|z-z_0| \rightarrow +\infty \\ z \in \mathcal{U}}} (z - z_0)f(z) = 0,$$

alors pour tout arc de cercle  $\gamma$  de centre  $z_0$ , de rayon  $R > R_0$ , contenu dans  $\mathcal{U}$  on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \Xi(p) dp = 0.$$

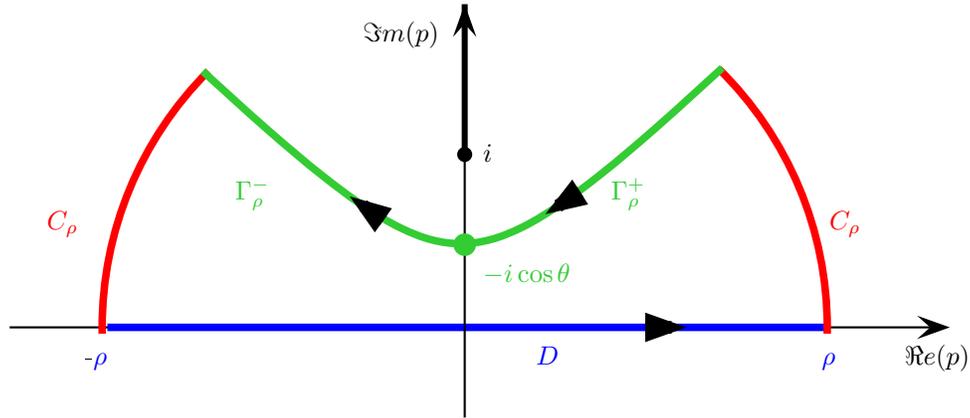


Figure 4: Contour d'intégration

Nous déduisons alors de (1.20):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]} dp = - \int_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp. \quad (1.21)$$

Effectuons maintenant le changement de variable  $p = \gamma^\pm(t)$  sur  $\Gamma^\pm$  pour  $t > \frac{x}{c}$ , par construction

$$e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+\gamma^\pm(t)^2)^{\frac{1}{2}} + i\gamma^\pm(t)x ]} = e^{-st},$$

donc

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{s}{c} \left[ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp = - \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(1+\gamma^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^+(t)}{dt} - \frac{1}{(1+\gamma^-(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^-(t)}{dt} \right] e^{-st} dt.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer la quantité

$$\frac{1}{(1+\gamma^{\pm}(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^{\pm}(t)}{dt},$$

pour cela on utilise d'abord (1.16) :

$$(1+\gamma^{\pm}(t)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{ct}{r} - i\gamma^{\pm}(t) \cos \theta}{|\sin \theta|}, \quad (1.22)$$

soit, en utilisant l'expression (1.19) de  $\gamma^{\pm}(t)$  :

$$(1+\gamma^{\pm}(t)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1} \left( \frac{\frac{ct}{r} |\sin \theta|}{\sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}} \mp i \cos \theta \right). \quad (1.23)$$

Or, en dérivant (1.19), on montre que :

$$\frac{d\gamma^{\pm}(t)}{dt} = \frac{c}{r} \left( \pm \frac{\frac{ct}{r} |\sin \theta|}{\sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}} - i \cos \theta \right). \quad (1.24)$$

Il est alors facile de montrer que

$$\frac{1}{(1+\gamma^{\pm}(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^{\pm}(t)}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} \quad (1.25)$$

puis que :

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{s}{c} \left[ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp = 2 \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} dt, \quad (1.26)$$

soit :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} dt. \quad (1.27)$$

Finalement, en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace (sixième et dernière étape de la méthode), nous déduisons le

**Théorème 1.1** La solution du problème (1.11) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, & t < \frac{r}{c} \\ u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}}, & t > \frac{r}{c} \end{aligned}}$$

**Définition 1.1** Pour  $t$  fixé la solution  $u$  est régulière dans tout l'espace, sauf pour les points vérifiant  $r(x) = ct^6$ . L'ensemble des singularités de  $u$  au temps  $t$  sera appelé le front d'onde de  $u$  au temps  $t$ .

Pour le calcul numérique de  $U$  on pourra s'inspirer de l'algorithme présenté à la section 4.1.1 (calcul de  $P^i$ ) page 75.

## 2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Nous considérons maintenant un domaine infini composé de 2 fluides homogènes. Les 2 milieux sont respectivement associés aux demi-plans  $y > 0$  et  $y < 0$ . Nous supposons que la source est située dans le milieu 1 à une distance  $h \geq 0$  de l'interface. L'équation aux dérivées partielles modélisant ce problème est :

$$\frac{1}{\mu(y)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(y)} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho(y)} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] = \delta(x) \delta(y - h) f(t) \quad (2.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mu(y) = \mu_1, & \rho(y) = \rho_1, & y > 0, \\ \mu(y) = \mu_2, & \rho(y) = \rho_2, & y < 0 \end{cases} \quad \text{et } c(y) = \sqrt{\frac{\mu(y)}{\rho(y)}}.$$

Comme dans les sections précédentes on s'intéresse au calcul de la fonction de Green solution de

$$\frac{1}{\mu(y)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(y)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \delta(x) \delta(y - h) \delta(t). \quad (2.2)$$

<sup>6</sup>C'est-à-dire les points appartenant au cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $ct$ .

## 2.1 Résultats

### 2.1.1 Notations

Nous utiliserons par la suite les fonctions de la variable complexe  $z$  définies par :

$$\mathcal{R}(z) = \frac{\rho_2 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\mathcal{T}(z) = \frac{2\rho_2 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

### 2.1.2 Cas d'une source sur l'interface

Nous supposons ici que  $h = 0$  et  $c_1 < c_2$ .

- a) **Les fronts d'onde.** Nous avons défini, à la section précédente, le front d'onde de la solution comme étant l'ensemble des singularités de la solution. Dans le cas d'une source située sur l'interface de deux milieux acoustiques, le front d'onde se décompose en trois fronts d'onde secondaires : un front d'onde de volume et un front d'onde de tête dans le milieu 1 et un front d'onde de volume dans le milieu 2. Ces ondes seront définies plus précisément au §b. Nous utiliserons par la suite les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de  $x$  vérifiant

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta,$$

**Front de l'onde de volume dans le milieu 1.** Pour un instant  $t$  donné, le front de l'onde de volume dans le milieu 1 est un demi-cercle de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $c_1 t$  (en bleu sur la figure 5). Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de ce demi-cercle.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } \frac{r}{c_1} < t \right\}.$$

**Front de l'onde de volume dans le milieu 2.** De même le front de l'onde de volume dans le milieu 2 est un cercle de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $c_2 t$  (en rouge sur la figure 5) et nous appelons  $\Omega_T(t)$  l'intérieur de ce demi-cercle.  $\Omega_T(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_T(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0 \text{ et } \frac{r}{c_2} < t \right\}.$$

**Front de l'onde de tête dans le milieu 1.** Nous notons  $A(t)$  l'intersection du front d'onde dans le milieu 2 avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B(t)$  le point tel que le segment  $[A(t)B(t)]$  (en magenta sur la figure 5) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Soit  $[C(t)D(t)]$  le symétrique de  $[A(t)B(t)]$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il est bien connu qu'il se crée une onde dite onde de tête dans le milieu le plus lent (ici le milieu 1) dont le front d'onde est constitué du segment  $[A(t)B(t)]$  et du segment  $[C(t)D(t)]$ .

**Lemme 2.1** *L'angle  $\theta_c = \arccos(c_1/c_2)$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête. De plus les points du segment  $[A(t)B(t)]$  (resp.  $[C(t)D(t)]$ ) vérifient l'équation :*

$$\left\{ \begin{array}{l} t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_2}, \quad \theta \in [0; \theta_c]; \\ \text{( resp. } t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}, \quad \theta \in [\pi - \theta_c; \pi]). \end{array} \right. \quad (2.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_2}, \quad \theta \in [0; \theta_c]; \\ \text{( resp. } t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}, \quad \theta \in [\pi - \theta_c; \pi]). \end{array} \right. \quad (2.3b)$$

**Démonstration :**

Le triangle  $OA(t)B(t)$  est rectangle en  $B(t)$ , de plus  $OA(t) = c_2 t$  et  $OB(t) = c_1 t$  :

$$\cos \theta_c = \frac{OB(t)}{OA(t)} = \frac{c_1}{c_2}.$$

L'équation (2.3a) (resp. (2.3b)) n'est rien d'autre que l'équation du segment joignant le point  $A(t)$  de coordonnées  $(c_2 t, 0)$  au point  $B(t)$  de coordonnées

$$(c_1 t \cos \theta_c; c_1 t \sin \theta_c)$$

(resp. le point  $C(t)$  de coordonnées  $(-c_2 t, 0)$  au point  $D(t)$  de coordonnées

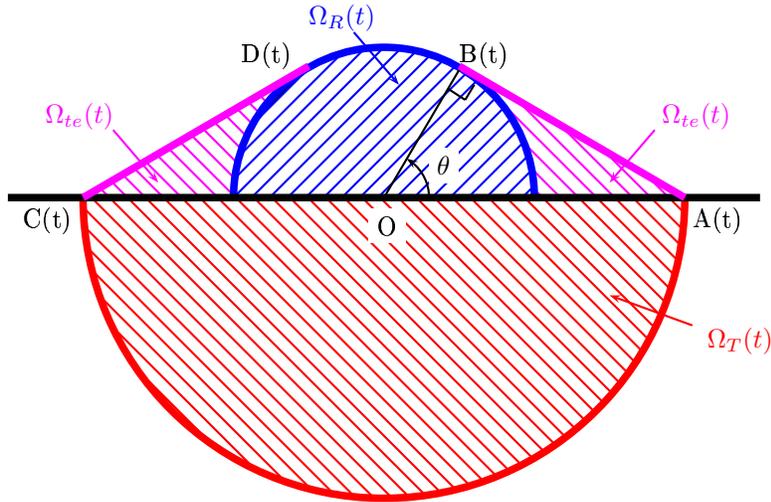
$$(-c_1 t \cos \theta_c; c_1 t \sin \theta_c)).$$

■

Nous noterons  $\Omega_{te}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OA(t)B(t)$  et  $OC(t)D(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$ .  $\Omega_{te}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{r}{c_2} \right\}.$$

Finalement nous notons  $\Omega(t) = \Omega_R(t) \cup \Omega_T(t) \cup \Omega_{te}(t)$ .

Figure 5: Représentation du front d'onde quand  $h = 0$ 

b) **Solutions analytiques.** On notera

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1} ; \\ v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right) ; \\ \gamma_2^+(t) = -i \frac{c_2 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{r^2} - 1}. \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors énoncer le

**Théorème 2.1** La solution causale du problème (2.2) avec  $h = 0$  est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega(t) : u(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) : u(x, y, t) = \frac{1 + \Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) : u(x, y, t) = -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}} ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : u(x, y, t) = \frac{\Re e [\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}} . \end{array} \right.$$

Pour le calcul numérique de  $U$  on pourra s'inspirer de l'algorithme présenté à la section 4.1.2 (calcul de  $P^r$ ) page 76.

### 2.1.3 Cas d'une source en-dehors de l'interface

a) **Les fronts d'onde.** Nous distinguerons deux cas :  $c_1 < c_2$  et  $c_1 > c_2$  et nous utiliserons les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de  $\mathbf{x}$  vérifiant

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y + h = r \sin \theta,$$

1. **Si  $c_1 < c_2$ .** Dans ce cas, l'onde dans le milieu 1 apparaît comme la somme de trois ondes : une onde incidente, une onde réfléchie et une onde de tête. L'onde dans le milieu 2 est seulement constituée d'une onde transmise. La définition précise de ces ondes sera donnée au §b.

**Front de l'onde incidente dans le milieu 1.** Pour un instant  $t$  donné le front de l'onde incidente (en vert sur la figure 7) est l'intersection du cercle de centre  $(0, h)$  et de rayon  $c_1 t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_I(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.

**Front de l'onde réfléchie dans le milieu 1.** Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur la figure 7) est l'intersection du cercle de centre  $(0, -h)$  et de rayon  $c_1 t$

avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } \frac{r}{c_2} < t \right\}.$$

**Front de l'onde transmise dans le milieu 2.** Le front de l'onde transmise a une forme plus compliquée. Pour le décrire il est nécessaire de calculer le temps de parcours d'un rayon issu de la source et atteignant le point  $(x, y)$  :

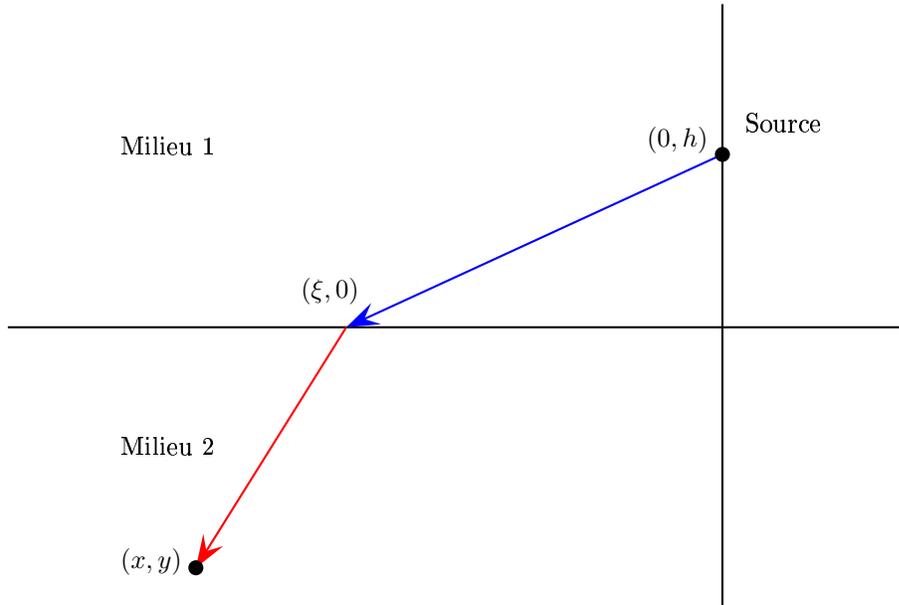


Figure 6: Trajet de l'onde transmise

la figure 6 représente le trajet d'un rayon émis par la source dans le milieu 1 et atteignant le point  $(x, y)$  dans le milieu 2. Ce trajet se décompose en 2 parties, une première partie dans le milieu 1 de la source  $(0, h)$  vers l'interface  $(\xi, 0)$  et une deuxième partie dans le milieu 2 de l'interface  $(\xi, 0)$  vers le point  $(x, y)$ . La longueur du premier trajet est  $\sqrt{\xi^2 + h^2}$  et le temps de parcours est  $\sqrt{\xi^2 + h^2}/c_1$ .

La longueur du deuxième trajet est  $\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$  et le temps de parcours est  $\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}/c_2$ . Le temps de parcours total est donc :

$$t(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}{c_2}. \quad (2.4)$$

Le premier rayon arrivant en  $(x, y)$  est celui passant par  $\xi_{02}(x, y)$ , minimisant la fonction  $t$ .  $\xi = \xi_{02}(x, y)$  vérifie donc :

$$t'(\xi) = \frac{\xi}{c_1 \sqrt{\xi^2 + h^2}} + \frac{\xi - x}{c_2 \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} = 0 \quad (2.5)$$

On montre facilement, en étudiant les variations de  $t'(\xi)$ , que cette équation n'admet qu'une seule racine réelle, que cette racine appartient à l'intervalle  $[0 ; x]$  (ou  $[x ; 0]$  si  $x < 0$ ) et qu'elle minimise  $t(\xi)$  (voir la démonstration ainsi que les détails pratiques pour le calcul de  $\xi_{02}(x, y)$  page 79). Finalement le temps d'arrivée de l'onde est  $t_{02}(x, y) = t(\xi_{02}(x, y))$  et le front de l'onde transmise est l'ensemble des points tels que :

$$t_{02}(x, y) = t.$$

Ce front d'onde est représenté en rouge sur la figure 7. Nous définissons également l'ensemble  $\Omega_T(t)$  par :

$$\Omega_T(t) = \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ et } t_{02}(x, y) \leq t\}.$$

**Remarque 2.1** *On vérifie facilement que l'ensemble  $\Omega_T(t)$  tend vers un demi-disque de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $c_2 t$  quand  $h$  tend vers 0.*

**Onde de tête dans le milieu 1.** Nous notons  $A(t)$  l'intersection du front d'onde transmis avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B(t)$  le point tel que le segment  $[A(t)B(t)]$  (en magenta sur la figure 5) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Soit  $[C(t)D(t)]$  le symétrique de  $[A(t)B(t)]$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Comme dans le cas où la source est située sur l'interface, il se crée une onde dite onde de tête dans le milieu le plus lent (ici le milieu 1) dont le front d'onde est constitué du segment  $[A(t)B(t)]$  et du segment  $[C(t)D(t)]$ .

**Lemme 2.2** *L'angle  $\theta_c = \arccos(c_1/c_2)$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête, de plus pour  $t$  donné, l'ensemble des points du segment  $[A(t)B(t)]$  (resp.  $[C(t)D(t)]$ ) vérifie l'équation :*

$$t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_2} \quad (\text{resp. } t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}) \quad (2.6)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $(x, y)$  dans le repère lié au point  $O = (0, -h)$ .

La démonstration de ce lemme est moins évidente que dans le cas  $h = 0$  et sera faite en démontrant le théorème 2.2 ci-dessous. (voir page 39).

Nous noterons  $\Omega_{te}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OA(t)B(t)$  et  $OC(t)D(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$ .  $\Omega_{te}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r|\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{r}{c_1} \right\}.$$

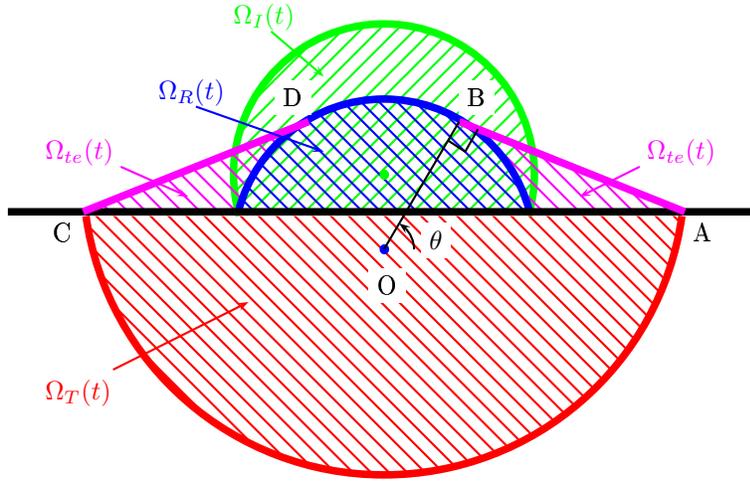
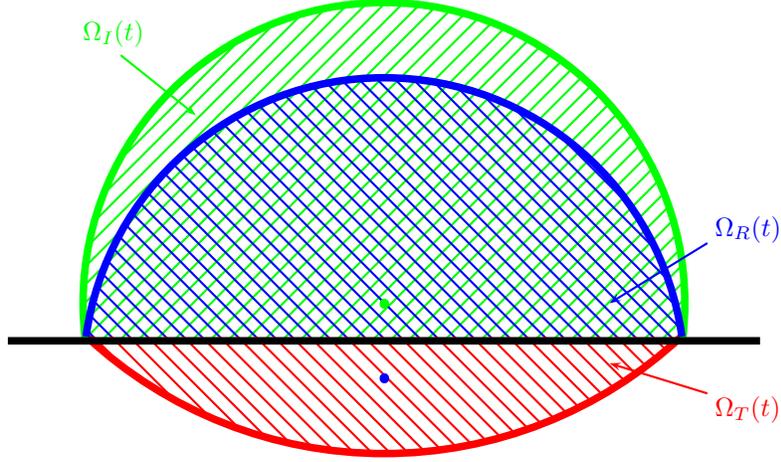


Figure 7: Représentation du front d'onde quand  $c_1 < c_2$

2. Si  $c_1 > c_2$ . Dans ce cas le contour est beaucoup plus simple car il n'y a pas d'onde de tête. Nous définissons les fronts d'onde incidente, réfléchi et transmise ainsi que les ensembles  $\Omega_I(t)$ ,  $\Omega_R(t)$  et  $\Omega_T(t)$  de la même manière que dans le cas  $c_1 < c_2$  (voir figure 8). Pour harmoniser les résultats dans les deux cas nous notons  $\Omega_{te} = \emptyset$ .

b) **Solutions analytiques.** Nous décomposons la solution  $u$  en :

$$\begin{cases} u = u^i + u^r & y > 0, \\ u = u^t & y < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$


 Figure 8: Représentation du front d'onde quand  $c_1 > c_2$ 

où  $u^i$  est l'onde incidente, c'est à dire la restriction au demi-plan  $y > 0$  de la solution qu'on aurait obtenue si  $c_1 = c_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : u^i(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : u^i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c_1^2}}} . \end{array} \right.$$

où  $r^* = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$ .

Nous posons

$$r = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{(y + h)}{r}$$

( $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $\mathbf{x}$  dans le repère du point source image situé en  $(0, -h)$ ) et

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1} \\ v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right) . \end{array} \right.$$

Pour définir  $\gamma_2^+(t)$  nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}(p, t) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_2t = 0,$$

le temps d'arrivée de l'onde transmise au point  $(x, y)$ ,  $t_{02} = t_{02}(x, y)$  et le lemme suivant, vrai pour  $x < 0$  :

**Lemme 2.3** (*Démonstration page 39*). Soit  $m = \min(1, c_1/c_2)$ , soit  $g$  la fonction définie par

$$p \in [-im; im] \mapsto g(p) = \mathcal{F}(p, t) - c_2t = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx. \quad (2.8)$$

et soit  $h(q) = g(ip)$  la fonction définie par

$$q \in [-m; m] \mapsto h(q) = -y(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{1}{2}} - qx. \quad (2.9)$$

Alors

- $t_{02}$  est l'unique réel tel que  $\mathcal{F}(p, t_{02})$  admette une racine double  $p = p_{02}$ , cette racine est imaginaire pure, de plus  $0 < \Im m(p_{02}) < m$  ;
- pour  $h(m)/c_2 \leq t < h(-m)/c_2$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet une unique racine

$$p = v^-(t) \in [p_{02}; im],$$

imaginaire pure ;

- pour  $h(-m)/c_2 \leq t \leq t_{02}$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines

$$p = v_2^-(t) \in [p_{02}; im] \quad \text{et} \quad p = v_2^+(t) \in [-im; p_{02}],$$

imaginaires pures. De plus

$$\frac{dv_2^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t_{02}^2 - t^2}},$$

avec

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2g''(p_{02})}} ;$$

- pour  $t_{02} < t$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines complexes  $\gamma_2^+(t)$  et  $\gamma_2^-(t)$  vérifiant

$$\Im m [\gamma_2^+(t)] = \Im m [\gamma_2^-(t)] > 0 \text{ et } \Re e [\gamma_2^+(t)] = -\Re e [\gamma_2^-(t)] > 0.$$

De plus

$$\frac{d\gamma_2^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_{02}^2}}.$$

**Théorème 2.2** *L'onde réfléchiée est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{te}(t) : u^r(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) : u^r(x, y, t) = \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) : u^r(x, y, t) = -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}}. \end{array} \right.$$

et l'onde transmise est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_T(t) : u^t(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : u^t(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{c_2 \mathcal{I}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} \right]. \end{array} \right.$$

On pourra s'inspirer, pour le calcul numérique de  $U^r$ , de l'algorithme présenté à la section 4.1.2 (calcul de  $P^r$ ) page 76, et, pour celui de  $U^t$  de l'algorithme présenté à la section 4.2.1 (calcul de  $V_{sx}^P$ ) page 79.

## 2.2 Démonstrations

Si nous décomposons  $u$  suivant (2.7), les conditions de transmissions physiques imposant la continuité de  $u$  et de  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y}$ , l'équation (2.2) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} \right] = \delta(x) \delta(y-h) \delta(t), \quad y > 0 \quad (2.10a) \\ \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial y^2} \right] = 0, \quad y > 0 \quad (2.10b) \\ \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^t}{\partial y^2} \right] = 0, \quad y < 0 \quad (2.10c) \end{array} \right.$$

$$u^i + u^r = u^t, \quad y = 0 \quad (2.10d)$$

$$\rho_2 \left( \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial u^r}{\partial y} \right) = \rho_1 \frac{\partial u^t}{\partial y}, \quad y = 0 \quad (2.10e)$$

L'utilisation des transformations de Laplace en temps et de Fourier en  $x$  nous permet d'obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^i = \delta(y-h), \quad y > 0, \quad (2.11a) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^r}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^r = 0, \quad y > 0, \quad (2.11b) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^t}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) \hat{u}^t = 0, \quad y < 0, \quad (2.11c) \end{array} \right.$$

$$\hat{u}^i + \hat{u}^r = \hat{u}^t, \quad y = 0, \quad (2.11d)$$

$$\rho_2 \left( \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}^r}{\partial y} \right) = \rho_1 \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial y}, \quad y = 0, \quad (2.11e)$$

dont les solutions sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^i = \frac{1}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y-h| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \end{array} \right. \quad (2.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^r = \frac{\mathcal{R}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-(y+h) \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \end{array} \right. \quad (2.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^t = \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{y \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{array} \right. \quad (2.12c)$$

Avec  $\mathcal{R}$ , le coefficient de réflexion, et  $\mathcal{T}$ , le coefficient de transmission, définis par

$$\mathcal{R}(k, s) = \frac{\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{T}(k, s) = \frac{2\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.14)$$

### 2.2.1 Cas d'une source sur l'interface, démonstration du théorème 2.1

Dans le cas  $h = 0$  la solution  $\hat{u}$  s'écrit

$$\hat{u}(k, y, s) = \frac{1 + \mathcal{R}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.15)$$

pour  $y > 0$  et

$$\hat{u}(k, y, s) = \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.16)$$

pour  $y < 0$ .

**Calcul de la solution dans le milieu 2.** En utilisant la transformation de Fourier on obtient :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left(k^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left(k^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk. \quad (2.17)$$

Comme précédemment on utilise le changement de variable  $k = \frac{ps}{c_2}$

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}\left(\frac{ps}{c_2}, s\right)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp \left(\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_T(p) dp\right). \quad (2.18)$$

Pour ne pas alourdir la présentation, nous faisons maintenant l'abus de notation

$$\mathcal{T}(p) = \mathcal{T}\left(\frac{p}{c_2}, 1\right) = \frac{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.19)$$

(il n'y aura pas de risque de confusion par la suite car la première formulation de  $\mathcal{T}$  ne sera plus utilisée).

Nous cherchons maintenant le nouveau contour d'intégration : on pose

$$c_2 t = |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx$$

et

$$\Gamma = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Comme à la section 1 on montre que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Upsilon^+ \cup \Upsilon^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^- \quad \text{avec} \\ \Gamma^\pm &= \left\{ p = \gamma_2^\pm(t) = -i \frac{c_2 t}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \frac{r}{c_2} \leq t \right\}, \\ \Upsilon^+ &= \left\{ p = v_2^+(t) = -i \left( \frac{c_2 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_2^2 t^2}{r^2}} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c_2} \right\}, \\ \Upsilon^- &= \left\{ p = v_2^-(t) = -i \left( \frac{c_2 t}{r} \cos \theta - |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_2^2 t^2}{r^2}} \right), \quad -\frac{r \cos \theta}{c_2} \leq t \leq \frac{r}{c_2} \right\}. \end{aligned}$$

$\Gamma^+ \cup \Gamma^-$  est une branche d'hyperbole située dans le plan  $\Im m(p) > 0$  si  $\cos \theta < 0$ . De plus  $\Gamma$  intersecte l'axe imaginaire au point  $p = -i \cos \theta$  pour  $t = \frac{r}{c_2}$  (toutes ces informations sont résumées sur la figure 9).

D'après la définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  que nous avons choisie, les points de branchements de  $\Xi_T$  sont  $p = \pm i$ , et  $p = \pm i \frac{c_2}{c_1}$  et ses coupures sont les deux demi-droites imaginaires

$$\{ip \mid p \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \}.$$

Il est évident que  $\Gamma$  ne traverse pas les coupures.

En utilisant le même contour qu'à la section 1, on montre que, avec les sens de parcours

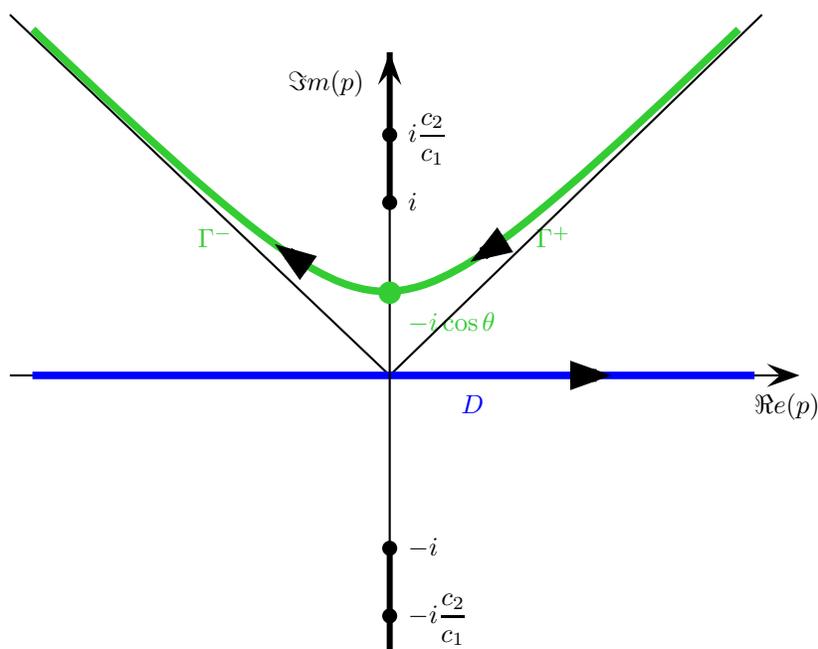


Figure 9: Représentation de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  dans le plan complexe

indiqués sur la figure 10 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_T(p) dp = - \int_{\Gamma} \Xi_T(p) dp. \quad (2.20)$$

De plus, après avoir effectué le changement de variable

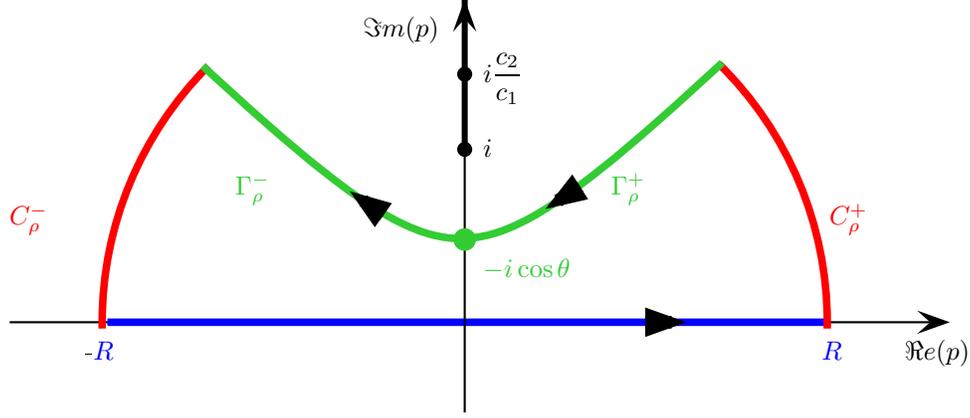


Figure 10: Contour d'intégration

$$p = \gamma_2^\pm(t) = -i \frac{t}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{r^2} - 1},$$

on obtient :

$$\int_{\Gamma^\pm} \Xi_T(p) dp = \mp \int_{\frac{r}{c_2}}^{+\infty} \frac{1}{4\pi (1 + \gamma_2^\pm(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma_2^\pm}{dt}(t) \mathcal{T}(\gamma_2^\pm(t)) e^{-st} dt. \quad (2.21)$$

Or on a vu à la section 1 que

$$\frac{1}{(1 + \gamma_2^\pm(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma_2^\pm}{dt}(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}}$$

donc

$$\int_{\Gamma} \Xi_T(p) dp = - \int_{\frac{r}{c_2}}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(\gamma_2^+(t)) + \mathcal{T}(\gamma_2^-(t))}{4\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}} e^{-st} dt. \quad (2.22)$$

De plus, en utilisant le fait que  $\gamma_2^-(t)^2 = \overline{\gamma_2^+(t)^2}$  et que  $\overline{z^{\frac{1}{2}}} = \overline{z}^{\frac{1}{2}}$ , on montre que :

$$\mathcal{T}(\gamma_2^-(t)) = \overline{\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}$$

et donc que

$$\mathcal{T}(\gamma_2^+(t)) + \mathcal{T}(\gamma_2^-(t)) = 2\Re[\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))].$$

On a alors

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_{\frac{r}{c_2}}^{+\infty} \frac{\Re(\mathcal{T}(\gamma_2^+(t)))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}} e^{-st} dt. \quad (2.23)$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, & t < \frac{r}{c_2} \\ u(x, y, t) &= \frac{\Re[\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))]}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}}, & t > \frac{r}{c_2} \end{aligned}}$$

**Calcul de la solution dans le milieu 1.** On s'intéresse maintenant au calcul de la solution dans le milieu où la vitesse est la plus lente et on étudie :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathcal{R}(k, s)}{2\left(k^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y|\left(k^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk. \quad (2.24)$$

Utilisons le changement de variable  $k = \frac{ps}{c_1}$  :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathcal{R}\left(\frac{ps}{c_1}, s\right)}{2(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_1} \left[|y|(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_R(p) dp). \quad (2.25)$$

Nous noterons :

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_1}, 1\right) = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.26)$$

Pour trouver le contour d'intégration on pose :

$$c_1 t = |y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \quad (2.27)$$

et  $\Gamma = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid |y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}^+ \right\}$  et on montre que

$$\Gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \Upsilon^+ \cup \Upsilon^-$$

avec

$$\Gamma^\pm = \left\{ p = \gamma_1^\pm(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \frac{r}{c_1} \leq t \right\},$$

$$\Upsilon^+ = \left\{ p = v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c_1} \right\},$$

$$\Upsilon^- = \left\{ p = v_1^-(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta - |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \quad -\frac{r \cos \theta}{c_1} \leq t \leq \frac{r}{c_1} \right\}.$$

$\Gamma$  intersecte l'axe imaginaire au point  $p = -i \cos \theta$  pour  $t = \frac{r}{c_1}$ .

D'après la définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  que nous avons choisie, les points de branchements de  $\Xi_R$  sont  $p = \pm i$ , et  $p = \pm i \frac{c_1}{c_2}$ , ses coupures sont les deux demi-droites imaginaires

$$\left\{ ip \mid p \in \left] -\infty; -\frac{c_1}{c_2} \left[ \cup \right] \frac{c_1}{c_2}; +\infty \left[ \right. \right\}.$$

Cette fois  $\Gamma$  traverse les coupures pour  $\cos \theta > \frac{c_1}{c_2}$  (voir figure 11). Il faut donc distinguer deux cas.

1. Si  $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$ . On peut alors utiliser un contour semblable à celui décrit lors du calcul dans le milieu 2 et on montre que :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, \quad t < \frac{r}{c_1} \\ u(x, y, t) &= \frac{1 + \Re e(\mathcal{R}(\gamma_1^+(t)))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}, \quad t > \frac{r}{c_1} \end{aligned}}$$

(la démonstration est la même que pour le calcul dans le milieu 2).

2. Si  $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$ . Il faut alors modifier le contour pour qu'il ne traverse pas les coupures, pour cela nous allons maintenant utiliser  $\Upsilon^\pm$  qui est représenté avec  $\Gamma^\pm$  dans le plan complexe sur la figure 12.  $\Upsilon^+$  est le segment imaginaire  $[-i|\sin \theta|; -i \cos \theta]$  et  $\Upsilon^-$  est le segment imaginaire  $[i; -i \cos \theta]$ . Seul  $\Upsilon^+$  peut nous permettre de contourner

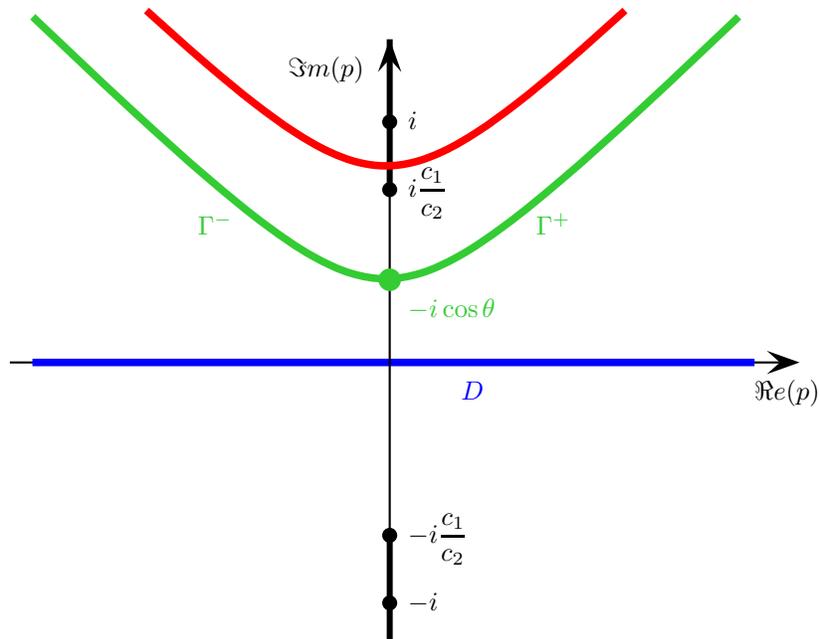


Figure 11: Représentation de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  dans le plan complexe

la coupure, de plus nous n'avons besoin que de la partie de  $\Upsilon^+$  comprise entre  $i\frac{c_1}{c_2}$  et  $-i\cos\theta$ , nous notons donc

$$\Upsilon = \Upsilon^+ \cap \left[ i\frac{c_1}{c_2}; -i\cos\theta \right].$$

On vérifie facilement que  $\Upsilon$  peut être paramétrée par  $t$  :

$$\Upsilon = \left\{ p = v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos\theta + |\sin\theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \quad t_1 \leq t \leq \frac{r}{c_1} \right\}$$

avec  $t_1 = r|\sin\theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r\cos\theta}{c_2}$  ( $t_1$  est obtenu en utilisant (2.27) en  $p = i\frac{c_1}{c_2}$ ).

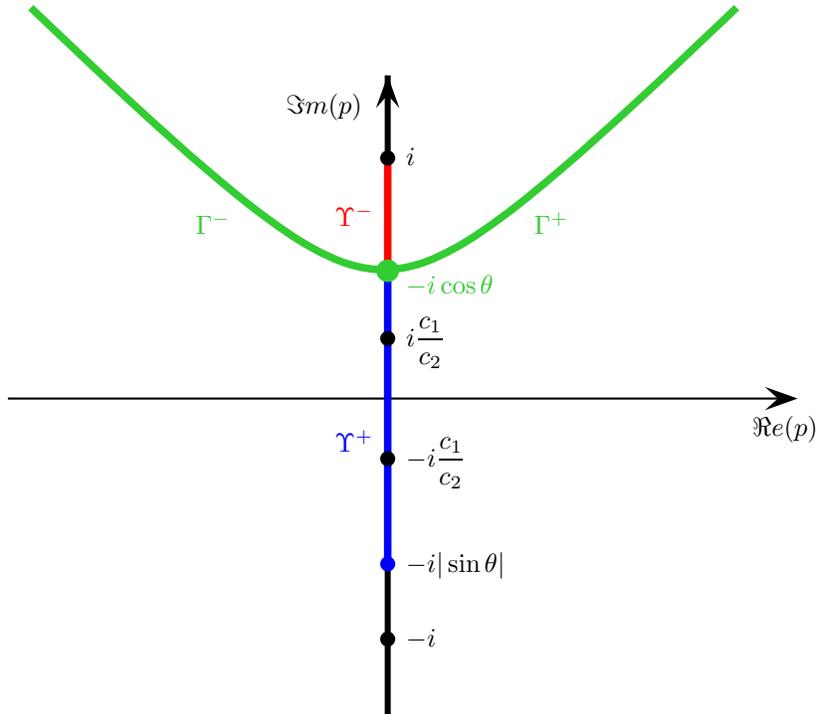


Figure 12: Représentation de  $\Gamma$  dans le plan complexe

Nous modifions légèrement la définition de  $\Gamma_\rho$  pour qu'il ne touche pas l'axe imaginaire :

$$\Gamma_\rho = \left\{ p \in \Gamma \mid |p| < \rho \quad \text{et} \quad \Re(p) \geq \frac{1}{\rho} \right\},$$

et nous définissons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_{+\rho} = \left\{ p \mid p - \frac{1}{\rho} \in \Upsilon \right\}, \\ \Upsilon_{-\rho} = \left\{ p \mid p + \frac{1}{\rho} \in \Upsilon \right\}, \\ c_\rho = \left\{ p \mid \left| p - i\frac{c_1}{c_2} \right| = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \Im m(p) \leq \frac{c_1}{c_2} \right\}. \end{array} \right.$$

$\Upsilon_{+\rho}$  (resp.  $\Upsilon_{-\rho}$ ) est l'image de  $\Upsilon$  par la translation de vecteur  $\frac{1}{\rho}$  (resp.  $-\frac{1}{\rho}$ ),  $c_\rho$  est le demi-cercle "inférieur" de centre  $i\frac{c_1}{c_2}$  et de rayon  $\frac{1}{\rho}$ . Puisque  $\Xi_R$  est analytique sur  $\Omega$ , son intégrale sur le contour fermé  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho \cup \Upsilon_{+\rho} \cup \Upsilon_{-\rho} \cup c_\rho$  (l'orientation du contour est choisie de telle sorte que le segment réel  $D_\rho$  soit parcouru dans le sens des valeurs croissantes — voir figure 13) est nulle :

$$\int_{D_\rho} \Xi_R(p) dp + \int_{\Gamma_\rho} \Xi_R(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{C_\rho} \Xi_R(p) dp + \int_{c_\rho} \Xi_R(p) dp = 0.$$

On vérifie facilement que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \Xi_R(p) dp = 0.$$

De plus

$$\lim_{\left| p - i\frac{c_1}{c_2} \right| \rightarrow 0} p \Xi_R(p) = 0,$$

on peut donc appliquer le premier lemme de Jordan :

**Lemme 2.4 (Premier Lemme de Jordan)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , soient  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{U}$  un secteur angulaire de  $\mathbb{C}$  défini par*

$$\mathcal{U} = \{ z \in \Omega \mid \psi_1 < \arg(z - z_0) < \psi_2 \} \quad (R_0 > 0, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in \mathbb{R}).$$

*Si  $f$  est une fonction continue dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$  et si,*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{U} \setminus \{z_0\}}} (z - z_0) f(z) = 0,$$

*alors pour tout arc de cercle  $\gamma$  de centre  $z_0$ , de rayon  $\varepsilon$ , contenu dans  $\mathcal{U}$  on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Donc :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{c_\rho} \Xi_R(p) dp = 0.$$

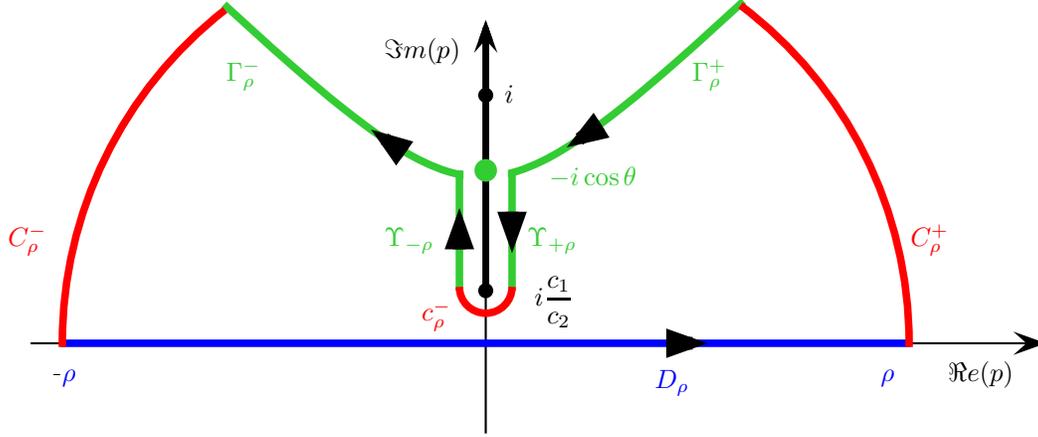


Figure 13: Contour d'intégration

On a alors :

$$\tilde{u}(x, y, s) = - \int_{\Gamma} \Xi_R(p) dp - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Gamma_{-\rho}^-} \Xi_R(p) dp + \int_{\Gamma_{+\rho}^+} \Xi_R(p) dp \right]. \quad (2.28)$$

Il est alors évident (en orientant  $\Upsilon$  "du haut vers le bas") que :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi_R(p) dp = \int_{\Upsilon} \left( 1 + \frac{\sqrt{1+p^2} \mp i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}}{\sqrt{1+p^2} \pm i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}} \right) \frac{e^{-\frac{s}{c_1} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{4\pi(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp$$

$$\text{soit, en posant } \tilde{\mathcal{R}}(p) = \frac{\sqrt{1+p^2} - i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}}{\sqrt{1+p^2} + i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}} :$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_R(p) dp = - \int_{\Upsilon} \left( 1 + \tilde{\mathcal{R}}(p) \right) \frac{e^{-\frac{s}{c_1} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{4\pi(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_R(p) dp = \int_{\Upsilon} \left(1 + \overline{\tilde{\mathcal{R}}(p)}\right) \frac{e^{-\frac{s}{c_1} \left[|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]}}{4\pi(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp.$$

**Remarque 2.2**  $\tilde{\mathcal{R}}(p) = \mathcal{R}(p)$  si on prolonge la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  sur la demi-droite des réels négatifs par  $(x)^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-x}$  pour  $x < 0$ .

Il ne nous reste plus qu'à utiliser le changement de variable

$$p = v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right)$$

pour obtenir :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_R(p) dp \right] = - \int_{t_1}^{\frac{r}{c_1}} \frac{\mathcal{R}(v_1^+(t)) - \overline{\mathcal{R}(v_1^+(t))}}{4\pi(1+v_1^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv_1^+(t)}{dt} e^{st} dt.$$

De la même manière qu'à la section précédente on montre que :

$$\frac{1}{(1+v_1^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv_1^+(t)}{dt} = \frac{i}{\sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}},$$

et, après avoir remarqué que

$$-i \left[ \mathcal{R}(v_1^+(t)) - \overline{\mathcal{R}(v_1^+(t))} \right] = 2\Im m(\mathcal{R}(v_1^+(t))),$$

on obtient

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_R(p) dp \right] = \int_{t_1}^{t_0} \frac{\Im m[\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}} e^{-st} dt. \quad (2.29)$$

On montre évidemment sans difficulté que :

$$- \int_{\Gamma} \Xi(p) dp = \int_{\frac{r}{c_1}}^{+\infty} \frac{1 + \Re e(\mathcal{R}(\gamma_1^+(t)))}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} e^{-st} dt \quad (2.30)$$

et on obtient

$$\tilde{u}(x, y, s) = - \int_{t_1}^{\frac{r}{c_1}} \frac{\Im m[\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}} e^{-st} dt + \int_{\frac{r}{c_1}}^{+\infty} \frac{1 + \Re e[\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} e^{-st} dt.$$

Finalement, l'expression de la fonction de Green est :

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= 0, & t < t_1, \\
u(x, y, t) &= -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}}, & t_1 < t < \frac{r}{c_1}, \\
u(x, y, t) &= \frac{1 + \Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}, & \frac{r}{c_1} < t.
\end{aligned}$$

### 2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface, démonstration du théorème 2.2

**Calcul de  $u^r$ .** On pose  $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{(y+h)}{r}$  et

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_1}, 1\right) = \frac{\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Comme dans le cas  $h = 0$  on vérifie que :

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(p)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_1} [y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx]} dp$$

Donc :

a) si  $c_1 > c_2$  ou si  $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$ . Alors il n'y a pas d'onde de tête et

$$\begin{aligned}
u^r(x, y, t) &= 0, & t < \frac{r}{c_1} \\
u^r(x, y, t) &= \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}, & t > \frac{r}{c_1}
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}.$$

b) si  $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$ . Il faut calculer la contribution de l'onde de tête :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= 0, \quad t < t_1 \\
 u(x, y, t) &= -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi\sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}}, \quad t_1 < t < \frac{r}{c_1} \\
 u(x, y, t) &= \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}, \quad \frac{r}{c_1} < t
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 v_1^+(t) &= -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \\
 \gamma_1^+(t) &= -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}
 \end{aligned}$$

et

$$t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} - \frac{r \cos \theta}{c_2}}.$$

Les calculs sont similaires au cas où la source est sur l'interface.

**Remarque 2.3** On démontre le lemme 2.2 en remarquant que la condition  $t_1 = t$  s'écrit

$$r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} - \frac{r \cos \theta}{c_2}} = t,$$

ce qui est bien l'équation du segment  $[C(t)D(t)]$  défini précédemment

**Étude de la fonction  $\mathcal{F}(p, t)$ , démonstration du lemme 2.3 :** Rappelons que

$$\mathcal{F}(p, t) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_2 t = 0$$

Nous pouvons dans un premier temps énoncer le lemme suivant :

**Lemme 2.5**

1. si  $p = a + ib$  avec  $a \neq 0$  est racine de  $\mathcal{F}(p, t)$ , alors  $p = -a + ib$  est également racine de  $\mathcal{F}(p, t)$  ;

2. si  $p$  est réel, alors  $p = 0$  :
3. si  $p$  est imaginaire pur alors  $|p| < m = \min(\frac{c_2}{c_1}, 1)$ , cette condition nous indique que le contour ne traversera pas les coupures et donc qu'il n'y aura pas d'onde de tête ce qui est cohérent avec la théorie physique ;
4. quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\tilde{\Gamma}$  admet 2 asymptotes paramétrées par  $t$  d'équations

$$p = \frac{t}{\pm(y-h) + ix} = \frac{\pm(y-h) - ix}{(y-h)^2 + x^2} t.$$

Il existe donc  $t_1$  tel que, pour tout  $t > t_1$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admette deux racines complexes telles que :

$$\Im m [\gamma^+(t)] = \Im m [\gamma^-(t)] \quad \text{et} \quad \Re e [\gamma^+(t)] = -\Re e [\gamma^-(t)] > 0$$

#### Démonstration :

1. la démonstration est évidente ;
2. si  $p$  est réel alors

$$\begin{cases} -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} - c_2 t \text{ est réel ,} \\ ipx \text{ est imaginaire pur ,} \\ -ipx = -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} - c_2 t \end{cases}$$

donc  $p = 0$  ;

3. si  $p$  est imaginaire pur alors  $ipx + c_2 t$  est réel et il faut donc que

$$y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

soit réel et donc que  $|p| < m = \min(\frac{c_2}{c_1}, 1)$  ;

4. si  $\mathcal{F}(p, t) = 0$  alors

$$-y\left(\frac{1}{t^2} + \left(\frac{p}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2 t^2} + \left(\frac{p}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\frac{p}{t}x - c_2 = 0.$$

Donc quand  $t$  tend vers l'infini cette équation devient :

$$-y \left( \left( \frac{p}{t} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \left( \frac{p}{t} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i \frac{p}{t} x - c_2 = 0.$$

Soit

$$\begin{cases} -y \frac{p}{t} + h \frac{p}{t} + i \frac{p}{t} x - c_2 = 0 & \text{si } \Re(p) > 0, \\ y \frac{p}{t} - h \frac{p}{t} + i \frac{p}{t} x - c_2 = 0 & \text{si } \Re(p) < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} (-y + h + ix) p = c_2 t & \text{si } \Re(p) > 0, \\ (y - h + ix) p = c_2 t & \text{si } \Re(p) < 0. \end{cases}$$

■

Concernant la position dans le plan complexe des éventuelles racines doubles  $p$  de  $\mathcal{F}(p, t)$  nous utiliserons le

**Lemme 2.6** *S'il existe  $t_0$  tel que  $p = p_0$  soit une racine double de  $\mathcal{F}(p, t_0)$  alors  $p_0$  est imaginaire pur.*

**Corollaire 2.1** *D'après le lemme 2.5  $|p_0| < m = \min(\frac{c_2}{c_1}, 1)$ .*

**Démonstration :**

S'il existe  $t_0$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_0)$  admette une racine double  $p_0$  alors :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(p_0, t_0) = 0 & (2.31a) \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p_0, t_0) = 0, & (2.31b) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} -y (1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i p_0 x - c_2 t_0 = 0, & (2.32a) \\ -\frac{y p_0}{(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h p_0}{\left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + i x = 0. & (2.32b) \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par  $p_0$  on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -y(1+p_0^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}} + ip_0x - c_2t_0 = 0, \end{array} \right. \quad (2.33a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{yp_0^2}{(1+p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp_0^2}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ixp_0 = 0. \end{array} \right. \quad (2.33b)$$

On additionne ces deux équations puis on divise la seconde équation par  $p_0^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{y}{(1+p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h\frac{c_2^2}{c_1^2}}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} = c_2t_0 \end{array} \right. \quad (2.34a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{y}{(1+p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ix}{p_0} = 0. \end{array} \right. \quad (2.34b)$$

On soustrait ensuite (2.34b) à (2.34a) et  $\frac{c_2^2}{c_1^2}$  (2.34b) à (2.34a) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)h}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} = c_2t_0 - \frac{ix}{p_0} \end{array} \right. \quad (2.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)y}{(1+p_0^2)^{\frac{1}{2}}} = c_2t_0 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{ix}{p_0}. \end{array} \right. \quad (2.35b)$$

Si  $p_0$  est solution du système (2.35) alors  $p_0$  est solution du système suivant, obtenu en élevant (2.35a) et (2.35b) au carré<sup>7</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(p_0) = \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)^2 h^2 p_0^2 - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right) (c_2 t_0 p_0 - ix)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2(p_0) = -\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)^2 y^2 p_0^2 - (1 + p_0^2) \left(c_2 t_0 p_0 - \frac{c_2^2}{c_1^2} ix\right)^2. \end{array} \right. \quad (2.36b)$$

---

<sup>7</sup>La réciproque n'est pas vraie.

$Q_1$  et  $Q_2$  sont donc deux polynômes de degré quatre. Pour des raisons de simplicité, nous n'explicitons pas leurs coefficients ici, remarquons simplement que ces deux polynômes ont le même coefficient dominant :  $c_2^2 t_0^2$ .  $Q_3 = Q_1 - Q_2$  est donc un polynôme de degré trois dont  $p_0$  est une racine. On vérifie ensuite (à l'aide d'un logiciel de calcul formel car les calculs se compliquent rapidement) que :

$$Q_1(p) = (a_0 + b_0 p)Q_3(p) + Q_4(p)$$

avec  $Q_4$  polynôme de degré 2, puis que :

$$Q_3(p) = (a_1 + b_1 p)Q_4(p) + (a_2 + b_2 p)$$

avec  $a_2$  réel et  $b_2$  imaginaire pur.

Il est évident que  $p_0$  est racine de  $Q_4$  et donc que

$$p_0 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Les racines doubles de  $\mathcal{F}(p, t)$ , s'il y en a, seront donc imaginaires pures. ■

Le lemme suivant garantit l'existence et l'unicité de la racine double  $p$  de  $\mathcal{F}(p, t)$  :

**Lemme 2.7** *Il existe un unique  $t_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double  $p_2$ , de plus  $\Im m(p_2) \geq 0$ .*

**Démonstration :**

Nous définissons la fonction

$$p \in i[-m; m] \mapsto g(p) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $p \in i[-m; m]$ ,  $t = c_2 g(p)$  est solution de  $\mathcal{F}(p, t) = 0$ . De plus on a

$$g'(p) = -\frac{yp}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ix$$

soit

$$g'(p) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p, t).$$

Donc s'il existe  $p_2$  tel que  $g'(p_2) = 0$  alors  $p_2$  est racine double de  $\mathcal{F}(p_2, c_2 g(p_2))$ . Réciproquement, s'il existe  $t_2$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double  $p_2$  alors  $g'(p_2) = 0$ . Il nous suffit donc de chercher les racines de  $g'(p)$ . Pour simplifier les calculs et étudier une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons  $p = iq$  et nous définissons la fonction  $h$  par

$$q \in [-m; m] \mapsto h(q) = -y(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{1}{2}} - qx \in \mathbb{R}.$$

On a

$$h'(q) = \frac{yq}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{hq}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{1}{2}}} - x = ig(ip),$$

il est donc équivalent de chercher les racines  $p_2$  de  $g'$  ou les racines  $q_2$  de  $h'$ .

De plus

$$h''(q) = \frac{y}{(1-q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{h}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

$h'$  est strictement décroissante, elle ne peut donc s'annuler qu'une fois sur  $[-m; m]$ . Remarquons maintenant que :

- si  $m = 1$  on a :

$$\lim_{q \rightarrow -1} h(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} h(q) = -\infty ;$$

- si  $m = \frac{c_2}{c_1}$  on a :

$$\lim_{q \rightarrow -\frac{c_2}{c_1}} h(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \frac{c_2}{c_1}} h(q) = -\infty.$$

Donc

$$\lim_{q \rightarrow -m} h(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow m} h(q) = -\infty.$$

La fonction  $h$  étant continue et strictement monotone, il est évident qu'elle n'admet qu'une seule racine  $q_2$ . Pour obtenir le signe de  $q_2$  il suffit de remarquer que :  $h'(0) = -x > 0$ .  $h'$  s'annule donc en  $0 < q_2 < m$ . Finalement  $p_2 = iq_2$  est l'unique racine de  $g'$  et  $\Im m(p_2) > 0$ . Le temps  $t_2 = g(p_2)/c_2$  est le seul temps tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double. ■

Il nous reste à étudier le lien entre  $t_2$  et  $t_{02}$ , le temps d'arrivée de l'onde au point  $(x, y)$  :

**Lemme 2.8** *L'unique temps  $t_2$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double correspond au temps d'arrivée de l'onde transmise  $t_{02}$ .*

**Démonstration :**

La démonstration qui suit s'inspire des résultats de van der Hijden [7] et de Cagniard [2].

Nous avons vu que  $t_2$  et  $p_2$  vérifient :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(p_2, t_2) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p_2, t_2) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} -y(1+p_2^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + ip_2x = c_2t_2, \end{array} \right. \quad (2.37a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{yp_2}{(1+p_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp_2}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ix = 0. \end{array} \right. \quad (2.37b)$$

De plus  $|p_2| \leq \min\left(\frac{c_2}{c_1}, 1\right)$ . Il existe donc deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  vérifiant

$$p_2 = i\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 = i \sin \theta_2, \quad (2.38)$$

avec  $\cos \theta_1 \geq 0$  et  $\cos \theta_2 \geq 0$ .

**Remarque 2.4** Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  vérifient les lois de Snell-Descartes.

On a alors

$$(1+p_2^2)^{\frac{1}{2}} = (1-\sin^2 \theta_2)^{\frac{1}{2}} = \cos \theta_2$$

et

$$\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c_2}{c_1} \cos \theta_2.$$

L'équation (2.37b) se réécrit donc

$$-\frac{iy \sin \theta_2}{(1-\sin^2 \theta_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ih\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_1\right)^{\frac{1}{2}}} + x = 0,$$

soit plus simplement :

$$-y \tan \theta_2 + h \tan \theta_1 = -x. \quad (2.39)$$

L'équation (2.39) traduit le fait que le rayon issu du point source  $(0, h)$ , atteignant l'interface avec un angle d'incidence  $\theta_1$  et diffracté avec un angle  $\theta_2$  atteint bien le point  $(x, y)$  (voir figure 14). Le fait que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  satisfassent les lois de Snell-Descartes signifie que ce rayon est le premier à atteindre le point  $(x, y)$ .

Considérons maintenant l'équation (2.37a), d'après (2.39) on a :

$$ip_2x = ip_2y \tan \theta_2 - ip_2h \tan \theta_1,$$

ce qui peut se réécrire

$$ip_2x = -y \sin \theta_2 \tan \theta_2 + h\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \tan \theta_1.$$

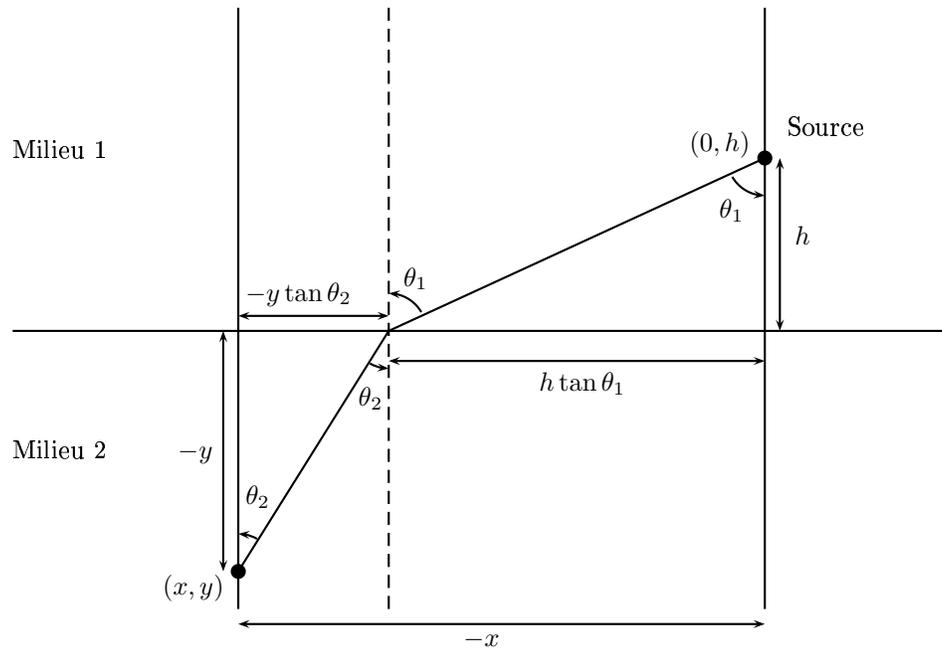


Figure 14: Trajet de l'onde transmise

L'équation (2.37a) devient alors :

$$-y \cos \theta_2 + h \frac{c_2}{c_1} \cos \theta_1 - y \sin \theta_2 \tan \theta_2 + h \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \tan \theta_1 = c_2 t_2.$$

Après avoir remarqué que

$$\cos \theta + \sin \theta \tan \theta = \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta},$$

on obtient :

$$-\frac{1}{c_2} \frac{y}{\cos \theta_2} + \frac{1}{c_1} \frac{h}{\cos \theta_1} = t_2.$$

$h/\cos \theta_1$  est la distance parcourue par le rayon de la source à l'interface, le temps de ce parcours est bien évidemment

$$\frac{1}{c_1} \frac{h}{\cos \theta_1}.$$

De même

$$-\frac{1}{c_2} \frac{y}{\cos \theta_2}$$

est le temps mis par le rayon pour parcourir la distance de l'interface au point  $(x, y)$ ,  $t_2$  est donc le temps de parcours du premier rayon issu de la source atteignant le point  $(x, y)$  :  $t_2 = t_{02}$  est le temps d'arrivée de l'onde transmise. Nous noterons désormais  $p_{02} = p_2$ . ■

Intéressons-nous maintenant au comportement des racines  $p$  de  $\mathcal{F}(p, t)$  pour  $t < t_{02}$  :

### Lemme 2.9

- pour  $h(m)/c_2 \leq t < h(-m)/c_2$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet une unique racine  $p = v^-(t) \in i[p_{02}; m]$ , imaginaire pure ;
- pour  $h(-m)/c_2 \leq t \leq t_{02}$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines  $p = v^-(t) \in i[p_{02}; m]$  et  $p = v^+(t) \in i[-m; p_{02}]$ , imaginaires pures.

### Démonstration :

Pour démontrer ce lemme il suffit de tracer le tableau de variation de la fonction  $h$ . Pour cela il ne nous reste plus qu'à étudier le comportement de  $h$  aux bornes de son domaine de définition :

- si  $m = 1$  on a :

$$h(-m) = h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + x \quad \text{et} \quad h(m) = h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - x ;$$

- si  $m = \frac{c_2}{c_1}$  on a :

$$h(-m) = -y \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{c_1} x \quad \text{et} \quad h(m) = -y \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{c_2}{c_1} x.$$

Quoiqu'il en soit  $h(m)$  est positif et le signe de  $h(-m)$  est indéterminé<sup>8</sup>, nous avons néanmoins

$$h(m) \geq h(-m).$$

Nous pouvons donc maintenant tracer le tableau de variation de  $h$  :

$q$	$-m$	$0$	$q_{02}$	$m$
$h'(q)$		+	$0$	-
$h(q)$	$h(-m)$		$h(q_{02})$	$h(m)$

On en déduit les variations de  $t$  quand  $p$  est dans  $[-im; im]$  :

$p$	$-im$	$0$	$p_{02}$	$im$
$t$	$h(-m)/c_2$		$t_{02}$	$h(m)/c_2$

Le résultat est alors évident en regardant ce dernier tableau qui nous permet également de montrer que  $v^+$  et  $v^-$  sont bijectives . ■

Étudions maintenant le comportement des racines de  $\mathcal{F}(p, t)$  pour  $t > t_{02}$  :

<sup>8</sup>Rappelons que  $y$  et  $x$  sont négatifs.

**Lemme 2.10** Pour  $t > t_{02}$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines complexes  $\gamma^+(t)$  et  $\gamma^-(t)$  vérifiant

$$\Im m [\gamma^+(t)] = \Im m [\gamma^-(t)] > 0 \quad \text{et} \quad \Re e [\gamma^+(t)] = -\Re e [\gamma^-(t)] > 0.$$

**Démonstration :**

D'après le lemme 2.5 il existe  $t_1$  tel que, pour tout  $t > t_1$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admette deux racines complexes telles que

$$\Im m [\gamma^+(t)] = \Im m [\gamma^-(t)] \quad \text{et} \quad \Re e [\gamma^+(t)] = -\Re e [\gamma^-(t)] > 0.$$

Or d'après le théorème des fonctions implicites, les fonctions  $\gamma^+(t)$  et  $\gamma^-(t)$  sont continues tant que  $p = \gamma^+(t)$  (ou  $p = \gamma^-(t)$ ) n'est pas racine double de  $\mathcal{F}(p, t)$ . Donc  $t_1 = t_0$ . De plus  $\Im m(\gamma^+(t_{02})) = \Im m(p_{02}) > 0$  et on a vu que, si  $p$  est racine réelle de  $\mathcal{F}(p, t)$ , alors  $p = 0$ . Comme  $\gamma^+(t)$  a une partie réelle strictement positive, sa partie imaginaire ne peut s'annuler :  $\Im m(\gamma^+(t)) > 0$  pour  $t > t_{02}$ . ■

Il nous reste à démontrer le

**Lemme 2.11** On a

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_0^\pm}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_0^2}}.$$

et

$$\frac{dv^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^\pm}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t_{02}^2 - t^2}},$$

avec

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2 g''(p_{02})}}.$$

Remarquons que  $\lim_{t \rightarrow t_{02}} \zeta(t) < \infty$ .

**Démonstration :**

Nous pouvons prolonger la fonction  $g$ , définie précédemment sur l'intervalle  $i[-m; m]$ , à  $\mathbb{C}$  privé des deux demi-droites  $i[m; \infty]$  et  $i[-\infty; -m]$ . En appliquant la formule de Taylor on montre que :

$$g(p) = g(p_{02}) + (p - p_{02})g'(p_{02}) + \frac{1}{2}(p - p_{02})^2 g''(p_{02}) + o((p - p_{02})^3).$$

Or on a vu que  $g'(p_{02}) = 0$ , donc :

$$g(p) = g(p_{02}) + \frac{1}{2}(p - p_{02})^2 g''(p_{02}) + o((p - p_{02})^3).$$

On sait également que  $t = c_2 g(p)$  est solution de  $\mathcal{F}(p, t) = 0$  :

$$t = t_{02} + \frac{1}{2}(p - p_{02})^2 c_2 g''(p_{02}) + o((p - p_{02})^3).$$

Un rapide calcul nous permet de vérifier que  $g''(p_{02}) > 0$ , en effet :

$$g''(p) = -\frac{y}{1+p^2} + \frac{h}{\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2} > 0 \quad \text{si } p \in [-im; im].$$

Si  $t > t_{02}$ ,  $p = \gamma^+(t)$  ou  $p = \gamma^-(t)$ , et on a :

$$t \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} t_{02} + \frac{1}{2}(\gamma^\pm(t) - p_{02})^2 c_2 g''(p_{02}),$$

soit

$$\gamma^\pm(t) \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} p_{02} \pm \sqrt{2 \frac{t - t_{02}}{c_2 g''(p_{02})}}.$$

En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient :

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} \pm \sqrt{\frac{1}{2c_2(t - t_{02})g''(p_{02})}} = \pm \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2(t^2 - t_{02}^2)g''(p_{02})}}.$$

Donc

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_{02}^2}}.$$

De même, si  $t < t_{02}$ ,  $p = v^+(t)$  ou  $p = v^-(t)$ , et on a :

$$t \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} t_{02} + \frac{1}{2}(v^\pm(t) - p_{02})^2 c_2 g''(p_{02}),$$

soit

$$v^\pm(t) \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} p_{02} \pm i \sqrt{2 \frac{t_{02} - t}{c_2 g''(p_{02})}}.$$

En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient :

$$\frac{dv^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm i \sqrt{\frac{1}{2c_2(t_{02} - t)g''(p_{02})}} = \pm \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2(t_{02}^2 - t^2)g''(p_{02})}}.$$

Donc

$$\frac{dv^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t_{02}^2 - t^2}}.$$

■

**Remarque 2.5** Comme  $\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^\pm}{\simeq} a \in \mathbb{R}^\pm$ ,  $\Gamma^\pm$  admet une tangente parallèle à l'axe réel.

Nous noterons

- $\Upsilon^- = \{p = v^-(t) \mid t \in [h(m)/c_2; h(q_{02})/c_2]\}$  ;
- $\Upsilon^+ = \{p = v^+(t) \mid t \in [h(-m)/c_2; h(q_{02})/c_2]\}$  ;
- $\Gamma^\pm = \{p = \gamma^\pm(t) \mid t \in [t_{02}; +\infty]\}$ .

Nous pouvons donc maintenant représenter complètement l'ensemble  $\tilde{\Gamma} = \Upsilon^- \cup \Upsilon^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^+$  (voir figure 15).

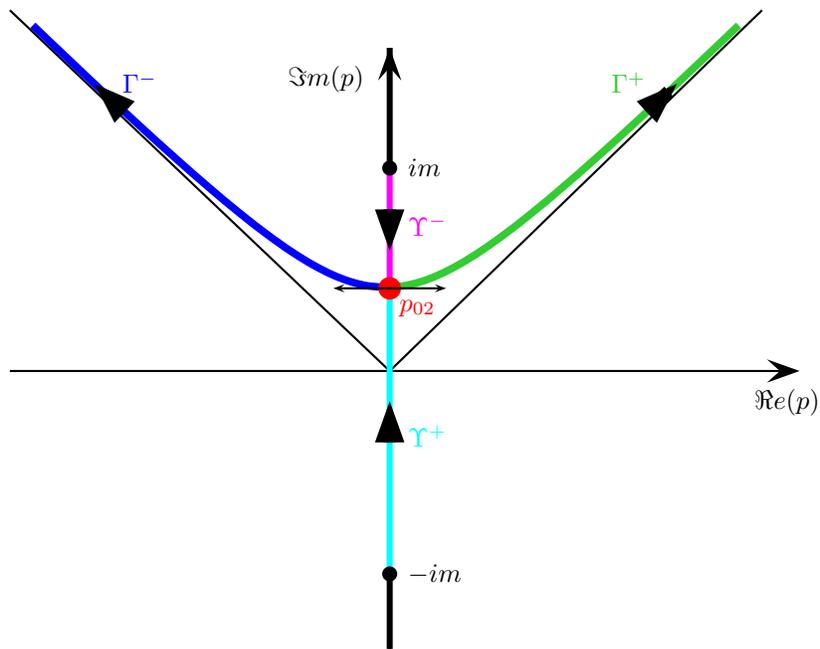


Figure 15: Représentation de  $\tilde{\Gamma}$

**Calcul de  $u^t$ .**

On applique la transformation de Fourier inverse selon  $x$  :

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left(k^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{y \left(k^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} - h \left(k^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk, \quad (2.40)$$

et on pose de nouveau  $k = \frac{ps}{c_2}$  pour obtenir

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(p)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[-y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp. \quad (2.41)$$

Si nous définissons  $\gamma_2^+(t)$  (resp.  $\gamma_1^-(t)$ ) comme étant la racine de  $\mathcal{F}(p, t)$  à partie réelle positive (resp. négative) et

$$\Gamma^\pm = \{p = \gamma_2^\pm(t) \mid t > t_{02}\} \quad \text{et} \quad \Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+,$$

nous montrons, comme dans les démonstrations précédentes, que :

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{T}(p)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[-y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp. \quad (2.42)$$

Nous pouvons ensuite effectuer le changement de variable  $p = \gamma_2^\pm(t)$  :

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{02}}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \gamma_2^{+\prime}(t) \right] e^{-st} dt \quad (2.43)$$

Il faut encore obtenir une expression de  $\gamma_2^{+\prime}(t)$ . Pour cela on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à  $\mathcal{F}$  :

$$\gamma_2^{+\prime}(t) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(\gamma_2^+(t), t)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} = \frac{c_2}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)}, \quad (2.44)$$

pour obtenir

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{02}}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{c_2 \mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} \right] e^{-st} dt \quad (2.45)$$

Finalement :

$$\begin{array}{l}
 u^t(x, y, t) = 0, \quad t < t_{02} \\
 u^t(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{c_2 \mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} \right], \quad t > t_{02}
 \end{array}$$

### 3 Interaction fluide-solide

Considérons maintenant un milieu infini composé d'un demi-plan fluide  $\Omega_f$  et d'un demi-plan solide isotrope  $\Omega_s$  séparés par une interface horizontale  $\Gamma$ . Nous nous intéressons à la formulation en pression dans le fluide et en vitesse dans le solide, la source est une source ponctuelle de pression située dans le fluide à une distance  $h$  de l'interface. Les équations à résoudre sont

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y-h) f(t) \quad (\Omega_f), \quad (3.1a) \\
 \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{V}_s}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \mathbf{div}(\underline{\nabla} \mathbf{V}_s) + \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}_s) = 0 \quad (\Omega_s). \quad (3.1b)
 \end{array} \right.$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du solide isotrope et où  $\mathbf{rot}$  représente le rotationnel  $2d$  :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Les deux milieux sont liés par les conditions de transmission suivantes qui traduisent la continuité des vitesses normales à l'interface et l'égalité entre les contraintes normales et la pression :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial V_{sy}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\Gamma), \quad (3.1c) \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad (\Gamma), \quad (3.1d) \\
 \frac{\partial V_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{sy}}{\partial x} = 0 \quad (\Gamma). \quad (3.1e)
 \end{array} \right.$$

Nous pouvons simplifier ces équations en décomposant le champ de vitesse  $\mathbf{V}_s$  en ondes P et S, en posant  $\mathbf{V}_s = \nabla\Phi + \mathbf{rot}\Psi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y-h) f(t) \quad (\Omega_f), \end{array} \right. \quad (3.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.2c)$$

avec  $c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_s}}$  et  $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$ .

Nous allons maintenant calculer les fonctions de Green associées à ce problème, elles sont solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = \delta(x)\delta(y-h)\delta(t) \quad (\Omega_f), \end{array} \right. \quad (3.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.3c)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sy}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (3.3d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial t} \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (3.3e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial v_{sy}}{\partial x} = 0. \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (3.3f)$$

et

$$\mathbf{v}_s = \nabla\phi + \mathbf{rot}\psi.$$

### 3.1 Résultats

Nous supposons ici que  $c_f < c_S < c_P$ , ce qui est le cas dans la plupart des problèmes d'interaction fluide-structure.

### 3.1.1 Les fronts d'onde.

Dans le cas d'une interaction fluide-structure, l'onde de pression dans le fluide apparaît comme la somme d'une onde incidente, d'une onde de volume réfléchie et de deux ondes de tête. L'onde se propageant dans le solide se décompose en une onde de volume de compression, de rotationnel nul, (dite onde P), une onde de volume de cisaillement, à divergence nulle, (dite onde S) et une onde de tête de cisaillement. La définition précise de chacune de ces ondes est donnée à la section 3.1.2.

**Front de l'onde incidente dans le fluide.** Pour un instant  $t$  donné, le front de l'onde incidente de pression (en vert sur les figures 17.a et 18) est l'intersection du cercle de centre  $(0, h)$  et de rayon  $c_f t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_I(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.

**Front de l'onde réfléchie dans le fluide.** Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur les figures 17.b et 18) est l'intersection du cercle de centre  $(0, -h)$  et de rayon  $c_f t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } \frac{r}{c_f} < t \right\}.$$

**Fronts des ondes P et S transmises dans le solide.** Comme à la section précédente, nous devons calculer le temps de parcours des rayons P et S issus de la source et atteignant le point  $(x, y)$  : soit  $\xi \in \mathbb{R}$ , le temps de parcours d'un rayon P passant par le point  $(\xi, 0)$  est donné par :

$$t_P(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_P}, \quad (3.4)$$

et le temps de parcours d'un rayon S par :

$$t_S(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_S}. \quad (3.5)$$

On définit  $\xi_{0P}$  (resp.  $\xi_{0S}$ ), le réel minimisant la fonction  $t_P$  (resp.  $t_S$ ) :

$$t'_P(\xi_{0P}(x, y)) = \frac{\xi_{0P}(x, y)}{c_f \sqrt{\xi_{0P}^2(x, y) + h^2}} + \frac{\xi_{0P}(x, y) - x}{c_P \sqrt{(x - \xi_{0P}(x, y))^2 + y^2}} = 0 \quad (3.6)$$

et

$$t'_S(\xi_{0S}(x, y)) = \frac{\xi_{0S}(x, y)}{c_f \sqrt{\xi_{0S}^2(x, y) + h^2}} + \frac{\xi_{0S}(x, y) - x}{c_S \sqrt{(x - \xi_{0S}(x, y))^2 + y^2}} = 0. \quad (3.7)$$

Le rayon passant par  $(\xi_{0P}, 0)$  (resp.  $(\xi_{0S}, 0)$ ) est le premier rayon P (resp. S) atteignant le point  $(x, y)$  (voir figure 16).

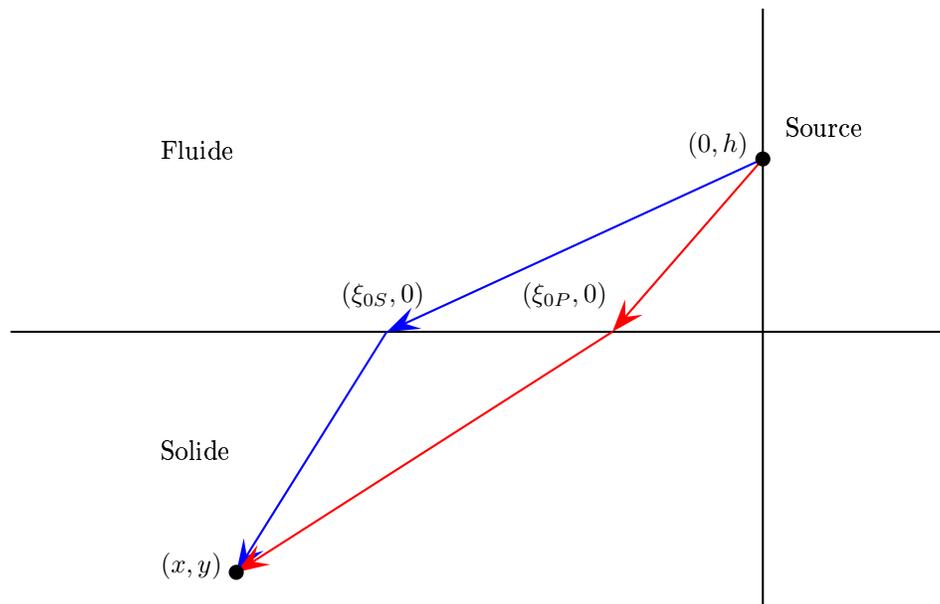


Figure 16: Trajet des ondes P (en rouge) et S (en bleu) transmises

Finalement le temps d'arrivée de l'onde P (resp. S) est

$$t_{0P}(x, y) = t_P(\xi_{0P}(x, y)) \quad (\text{resp. } t_{0S}(x, y) = t_S(\xi_{0S}(x, y)))$$

et le front de l'onde transmise P (resp. S) est l'ensemble des points tels que :

$$t_{0P}(x, y) = t \quad (\text{resp. } t_{0S}(x, y) = t).$$

Ce front d'onde est représenté en bleu ciel (resp. en rouge) sur les figures 17.f (resp. 17.g) et 18. Nous définissons également l'ensemble  $\Omega_P(t)$  (resp.  $\Omega_S(t)$ ) par :

$$\begin{aligned} \Omega_P(t) &= \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ et } t_{0P}(x, y) \leq t\} \\ (\text{resp. } \Omega_S(t) &= \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ et } t_{0S}(x, y) \leq t\}). \end{aligned}$$

**Fronts des ondes de tête dans le fluide.** Nous notons  $A$  (resp.  $E$ ) l'intersection du front d'onde P (resp. S) avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B$  (resp.  $F$ ) le point tel que le segment  $[AB]$  (en orange sur la figure 18) (resp.  $[EF]$ ) (en magenta sur la figure 18) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Soit  $[CD]$  (resp.  $[GH]$ ) le symétrique de  $[AB]$  (resp.  $[EF]$ ) par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il se crée une onde de tête P (resp. S) dans le fluide dont le front d'onde est constitué du segment  $[AB]$  (resp.  $[EF]$ ) et du segment  $[CD]$  (resp.  $[GH]$ ).

**Lemme 3.1** *L'angle  $\theta_{cP} = \arccos(c_f/c_P)$  (resp.  $\theta_{cS} = \arccos(c_f/c_S)$ ) est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête P (resp. S). De plus, pour  $t$  donné, l'ensemble des points des segments  $[AB]$  et  $[CD]$  (resp.  $[EF]$  et  $[GH]$ ) vérifie l'équation :*

$$t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_P} \quad ([AB]) \quad \text{et} \quad t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_P} \quad ([CD]) \quad (3.8)$$

(resp.

$$t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_S} \quad ([EF]) \quad \text{et} \quad t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_S} \quad ([GH])) \quad (3.9)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $(x, y)$  dans le repère lié au point  $O = (0, -h)$ .

Comme pour le cas de deux milieux acoustiques, la démonstration de ce lemme se fera en démontrant le théorème 3.1 ci-dessous (voir page 69).

Nous noterons  $\Omega_{tefP}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OA(t)B(t)$  et  $OC(t)D(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$  (en orange sur les figures 17.c et 18) et  $\Omega_{tefS}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OE(t)F(t)$  et  $OG(t)H(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$  (en magenta sur les figures 17.d et 18).  $\Omega_{teP}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{teP}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, \quad |\cos \theta| > \frac{c_f}{c_P} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r |\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{r}{c_f} \right\},$$

et  $\Omega_{teS}(t)$  par :

$$\Omega_{teS}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_f}{c_S} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{r|\cos \theta|}{c_S} < t < \frac{r}{c_f} \right\}.$$

**Front de l'onde de tête dans le solide.** Nous notons  $I$  le point tel que le segment  $[AI]$  (en violet sur la figure 17) soit tangent à  $\Omega_S(t)$ . Soit  $[CJ]$  le symétrique de  $[AI]$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il se crée une onde de tête dans le solide joignant les fronts d'onde P et S dont le front d'onde est constitué du segment  $[AI]$  et du segment  $[CJ]$ .

**Lemme 3.2** *L'ensemble des points des segments  $[AI]$  (resp.  $[CJ]$ ) vérifie l'équation :*

$$t = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{c_S} \quad (3.10)$$

$$\text{(resp. } t = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{c_S} \text{).} \quad (3.11)$$

La démonstration de ce lemme se fera également en démontrant le théorème 3.1 (voir page 74).

Nous noterons  $\Omega_{teSP}(t)$  l'ensemble des points compris entre le segment  $[A(t)I(t)]$ , la droite  $(Ox)$  et le front d'onde S et des points compris entre le segment  $[C(t)J(t)]$ , la droite  $(Ox)$  et le front d'onde S (en violet sur les figures 17.e et 18).  $\Omega_{teSP}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{teSP}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|}{c_S} < t < t_{0S}(x, y) \right\}.$$

### 3.1.2 Solutions analytiques.

Nous décomposons la solution  $p$  en  $p = p^i + p^r$ , avec  $p^i$  l'onde incidente de pression, c'est-à-dire la solution qu'on obtiendrait en remplaçant le solide par un fluide de vitesse de propagation  $c_f$  :

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : & p^i(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : & p^i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c_f^2}}}. \end{cases}$$

où  $r^* = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$ .

Nous décomposons également  $\mathbf{v}_s$  en  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^P + \mathbf{v}_s^S$  avec  $\mathbf{v}_s^P = \nabla \phi$  et  $\mathbf{v}_s^S = \mathbf{rot} \psi$ .

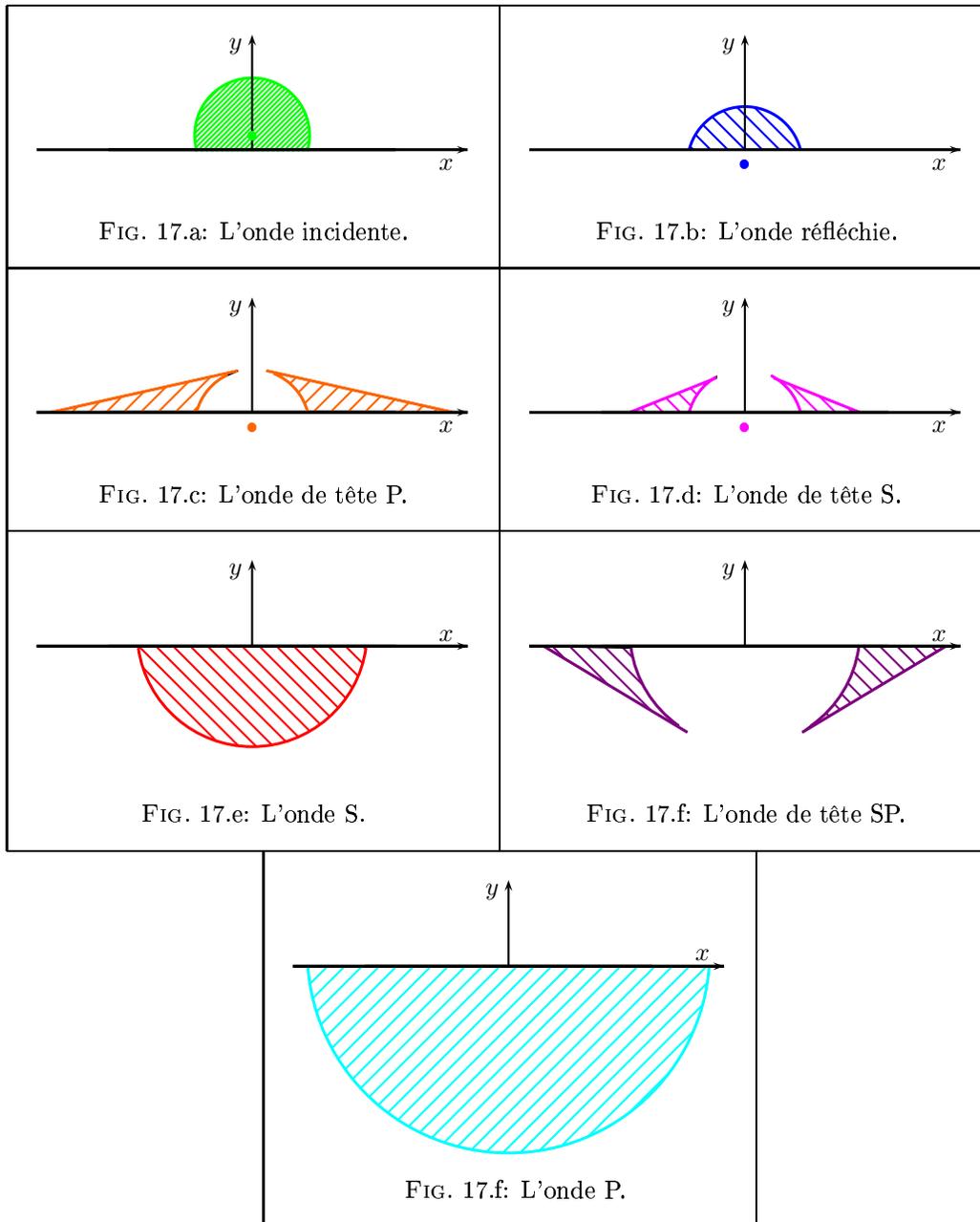


Figure 17: Les différentes ondes du problème

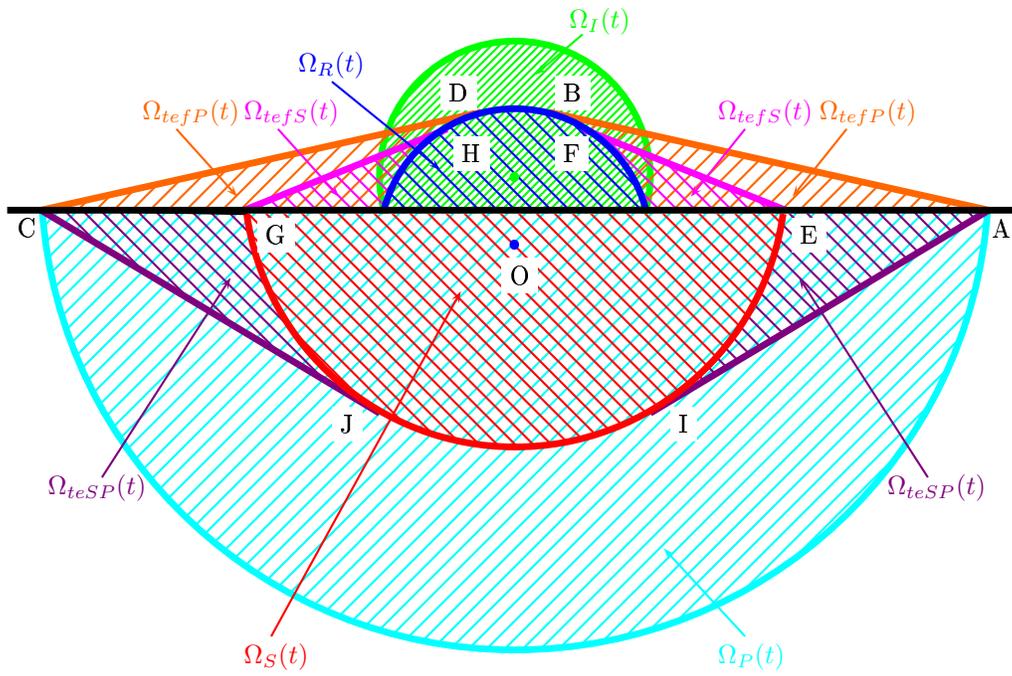


Figure 18: Représentation du front d'onde

**Notations.** Nous posons

$$r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{(y+h)}{r}.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_{ff} = \sqrt{1+p^2}, \quad \tilde{k}_{fP} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{fS} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2}, \\ \tilde{k}_{Pf} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{PP} = \sqrt{1+p^2}, \quad \tilde{k}_{PS} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2} \\ \tilde{k}_{Sf} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{SP} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{SS} = \sqrt{1+p^2}. \end{array} \right.$$

et nous définissons les fonctions de la variable complexe  $p$  définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(p) = \frac{[(\lambda(\tilde{z}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}{[(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}, \\ \mathcal{T}_P(p) = \frac{2\tilde{k}_{PP}(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2)}{[(\lambda(\tilde{k}_{PP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP}] \tilde{k}_{Pf} + c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2)}, \\ \tilde{\mathcal{T}}_S(p) = \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}\tilde{k}_{SS}}{[(\lambda(\tilde{k}_{SP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}] \tilde{k}_{Sf} + c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP} (\tilde{k}_{SS}^2 - p^2)}. \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_f^+(t) = -i \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_f^2 t^2}{r^2} - 1}, \\ v_f^+(t) = -i \left( \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_f^2 t^2}{r^2}} \right). \end{array} \right.$$

Soit  $t_{0P}$  le temps de l'arrivée de l'onde P, défini page 57 et

$$\mathcal{F}_P(p, t) = -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - cpt,$$

pour  $t > t_{0P}$ , on définit  $p = \gamma_P^+(t)$  l'unique racine de  $\mathcal{F}_P(p, t)$  à partie réelle strictement positive (l'existence et l'unicité de cette racine sont garanties par le lemme 2.3 page 24).

Soit  $t_{0S}$  le temps d'arrivée de l'onde S, défini page 57,  $t_{1SP}$  le temps d'arrivée de l'onde de tête S,

$$t_{1SP} = -y \left( \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{c_P},$$

$$\mathcal{F}_S(p, t) = -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_S t = 0$$

et  $p_{0S}$  la racine double de  $\mathcal{F}_S(p, t_{0S})$ .

- pour  $t_{1SP} < t < t_{0S}$  on définit  $p = v_S^+(t)$  l'unique racine imaginaire pure telle que

$$\Im m(v_S^+(t)) \leq \Im m(p_{0S}).$$

- pour  $t > t_{0S}$  on définit  $p = \gamma_S^+(t)$  l'unique racine de  $\mathcal{F}_S(p, t)$  à partie réelle strictement positive.

Ici encore, l'existence et l'unicité de  $v_S^+(t)$  et de  $\gamma_S^+(t)$  sont garanties par le lemme 2.3.

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 3.1** *L'expression de l'onde réfléchie est donnée par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{tefS}(t) \cup \Omega_{tefP}(t) : p^r(x, y, t) = 0, \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) : p^r(x, y, t) = \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}}, \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{tefS}(t) \cup \Omega_{tefP}(t) : p^r(x, y, t) = -\frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_f^2} - t^2}}, \end{array} \right.$$

l'expression de l'onde P est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_P(t) : \mathbf{v}_s^P(x, y, t) = 0, \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_P(t) : \left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^P(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t)\mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t))}{(1 + \gamma_P^+(t)^2(t))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right], \\ \\ v_{sy}^P(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et l'expression de l'onde S est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_S(t) \cup \Omega_{teSP} : \mathbf{v}_s^S(x, y, t) = 0, \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_S(t) : \left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \\ \\ v_{sy}^S(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t)\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{(1 + \gamma_S^+(t)^2(t))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \end{array} \right. \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{teSP}(t) : \left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right], \\ \\ v_{sy}^S(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t)\mathcal{T}_S(v_S^+(t))}{(1 + v_S^+(t)^2(t))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les algorithmes de calcul de  $P^i$ ,  $P^r$ ,  $V^P$ ,  $V^S$  sont présentés à la section suivante.

## 3.2 Démonstrations

### 3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier-Laplace

Appliquons comme d'habitude les transformations de Laplace en temps et de Fourier suivant  $x$  aux équations du système pour obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{s^2}{c_f^2} + k^2 \right] \hat{p} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} = \delta(y-h) \quad y > 0, \\ \left[ \frac{s^2}{c_P^2} + k^2 \right] \hat{\phi} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \\ \left[ \frac{s^2}{c_S^2} + k^2 \right] \hat{\psi} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \end{array} \right. \quad (3.12a)$$

$$\left[ \frac{s^2}{c_P^2} + k^2 \right] \hat{\phi} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \quad (3.12b)$$

$$\left[ \frac{s^2}{c_S^2} + k^2 \right] \hat{\psi} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \quad (3.12c)$$

avec les trois conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} s\hat{v}_{sy} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \quad y = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{v}_{sy}}{\partial y} + \lambda ik\hat{v}_{sx} = -sp \quad y = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}_{sx}}{\partial y} + ik\hat{v}_{sy} = 0. \quad y = 0. \end{array} \right. \quad (3.12d)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{v}_{sy}}{\partial y} + \lambda ik\hat{v}_{sx} = -sp \quad y = 0, \quad (3.12e)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_{sx}}{\partial y} + ik\hat{v}_{sy} = 0. \quad y = 0. \quad (3.12f)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{sx} = ik\hat{\phi} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}, \\ \hat{v}_{sy} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} - ik\hat{\psi}. \end{array} \right. \quad (3.12g)$$

$$\hat{v}_{sy} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} - ik\hat{\psi}. \quad (3.12h)$$

On en déduit facilement la forme des solutions (en introduisant les ondes de pression incidente,  $p^i$ , et réfléchie,  $p^r$ ) :

$$\hat{p} = \hat{p}^i + \hat{p}^r \quad (3.13a)$$

$$\hat{p}^i = \frac{1}{2k_f} e^{-|y-h|k_f} \quad (3.13b)$$

$$\hat{p}^r = A_R e^{-yk_f} \quad (3.13c)$$

$$\hat{\phi} = A_P e^{yk_P} \quad (3.13d)$$

$$\hat{\psi} = A_S e^{yk_S} \quad (3.13e)$$

$$\hat{v}_{sx} = ikA_P e^{yk_P} + A_S k_S e^{yk_S} \quad (3.13f)$$

$$\hat{v}_{sy} = A_P k_P e^{yk_P} - ikA_S e^{yk_S}, \quad (3.13g)$$

avec  $k_f = \left(k^2 + \frac{s^2}{c_f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $k_P = \left(k^2 + \frac{s^2}{c_P^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  et  $k_S = \left(k^2 + \frac{s^2}{c_S^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Les coefficients  $A_R$ ,  $A_P$  et  $A_S$  sont ensuite déterminés à l'aide des équations de transmission (3.12d), (3.12e) et (3.12f) :

$$\left\{ \begin{array}{l} sk_P A_P - ik s A_S = -\frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f} + \frac{k_f}{\rho_f} A_R, \end{array} \right. \quad (3.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) [z_P^2 A_P - ik k_S A_S] + \lambda ik [ik A_P + A_S k_S] = -s \left[ \frac{1}{2k_f} e^{-hk_f} + A_R \right], \end{array} \right. \quad (3.14b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ik k_P A_P + A_S z_S^2 + ik [A_P k_P - ik A_S] = 0, \end{array} \right. \quad (3.14c)$$

soit, plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_f}{\rho_f} A_R - sk_P A_P + ik s A_S = \frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f}, \\ s A_R + [(\lambda + 2\mu) z_P^2 - \lambda k^2] A_P - 2i\mu k k_S A_S = -\frac{s}{2k_f} e^{-hk_f}, \\ 2ik k_P A_P + [z_S^2 + k^2] A_S = 0. \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$A_R = \frac{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] - \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)} \frac{e^{-hk_f}}{2k_f},$$

$$A_P = \frac{s(k_S^2 + k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)} e^{-hk_f},$$

$$A_S = \frac{-2isk k_P}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)} e^{-hk_f}.$$

Donc

$$\hat{p}^r = \frac{R(k, s)}{2k_f} e^{-(y+h)k_f} \quad \text{et} \quad \hat{p}^i = \frac{1}{2k_f} e^{-|y-h|k_f}$$

$$\hat{v}_{sx} = \hat{v}_{sx}^P + \hat{v}_{sx}^S \quad \text{et} \quad \hat{v}_{sy} = \hat{v}_{sy}^P + \hat{v}_{sy}^S,$$

$$\hat{v}_{sx}^P = \frac{ikT_P(k, s)}{2k_P} e^{yk_P - hk_f} \quad \text{et} \quad \hat{v}_{sy}^P = \frac{T_P(k, s)}{2} e^{yk_P - hk_f},$$

$$\hat{v}_{sx}^S = \frac{T_S(k, s)}{2} e^{yk_S - hk_f} \quad \text{et} \quad \hat{v}_{sy}^S = -\frac{ikT_S(k, s)}{2k_S} e^{yk_S - hk_f}.$$

avec

$$\mathcal{R} = \frac{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] - \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)},$$

$$\mathcal{T}_P = \frac{2sk_P(k_S^2 + k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)},$$

$$\mathcal{T}_S = \frac{-4isk k_P k_S}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}.$$

### 3.2.2 Démonstration du théorème 3.1

Nous nous intéresserons uniquement au calcul de  $p$  et  $v_{sx}$ , le calcul de  $v_{sy}$  étant très similaire.

**Calcul de  $p^r$ .** On a

$$\tilde{p}^r(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(k, s)}{2k_f} e^{-(y+h)k_f - ikx} dk. \quad (3.15)$$

On pose

$$k = \frac{ps}{c_f}, \quad \tilde{k}_{ff} = \sqrt{1+p^2}, \quad \tilde{k}_{fP} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{fS} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2}$$

puis  $\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}(\frac{p}{c_f}, 1)$ , pour obtenir

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\tilde{k}_{ff} \left[ (\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP} \right] - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}{\tilde{k}_{ff} \left[ (\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP} \right] + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}$$

Ce qui donne

$$\tilde{p}^r(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(p)}{2\tilde{k}_{ff}} e^{-\frac{s}{c_f}[(y+h)\tilde{k}_f + ipx]} dp \quad (3.16)$$

Le contour d'intégration sera similaire à ceux utilisés pour calculer l'onde réfléchie à la section précédente. Comme  $c_f < c_S < c_P$ , il y aura donc toujours une onde de tête.

**Remarque 3.1 Calcul des ondes de surface** *La différence avec les sections précédentes est la présence de pôles dans la fonction  $\tilde{\mathcal{R}}(p)$ . Nous supposons que les caractéristiques des milieux sont telles que ces pôles seront imaginaires purs et de modules supérieurs à 1 (ce qui est le cas d'un domaine eau-os), c'est-à-dire qu'ils appartiennent aux coupures de la fonction  $\mathcal{R}$ . Pour comprendre l'action de ces pôles il faut étudier le comportement du contour d'intégration en fonction de  $y+h$ . Sur la figure 19 nous avons représenté 4 contours d'intégration obtenus pour 4 valeurs de  $y+h$  décroissantes (respectivement vert, magenta, rouge et bleu) et un pôle de la fonction  $\tilde{\mathcal{R}}$  en rouge. Quand  $y+h$  tend vers 0, le contour tend vers la demi-droite  $[i; +\infty]$ . Le pôle sera donc à l'extérieur du contour d'intégration sauf pour  $y+h=0$ . Comme nous imposons  $h > 0$  ce cas est impossible, néanmoins, pour des valeurs de  $y+h$  proches de 0, la fonction  $\mathcal{R}$  augmentera brusquement au voisinage du pôle, ce qui nous permettra d'obtenir l'onde de surface. Les ondes de surface n'ont donc pas (sauf dans certains cas particuliers que nous n'étudierons pas ici) à être calculées séparément mais seront prises en compte dans le calcul des ondes de volume.*

Posons  $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{(y+h)}{r}$ . De la même manière que pour le calcul de  $u^r$  à la section précédente, on montre que :

- si  $|\cos \theta| < \frac{c_f}{c_P}$ , alors

$$\boxed{\begin{aligned} p^r(x, y, t) &= 0, \quad t < \frac{r}{c_f}, \\ p^r(x, y, t) &= \frac{\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}}, \quad t > \frac{r}{c_f}, \end{aligned}}$$

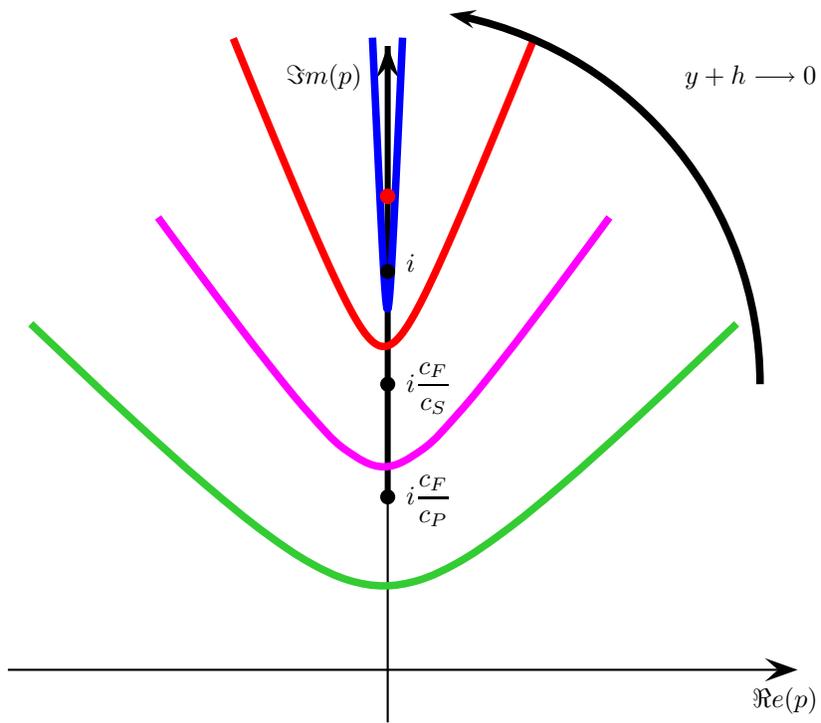


Figure 19: Influence de  $y+h$  sur le contour d'intégration

$$\text{avec } \gamma_f^+(t) = -i \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_f^2 t^2}{r^2} - 1}.$$

- si  $|\cos \theta| > \frac{c_f}{c_P}$  alors

$$\begin{aligned} p^r(x, y, t) &= 0, \quad t < t_1 \\ p^r(x, y, t) &= -\frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_f^2} - t^2}}, \quad t_1 < t < \frac{r}{c_f} \\ p^r(x, y, t) &= \frac{\Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}}, \quad \frac{r}{c_f} < t \end{aligned}$$

avec

$$v_f^+(t) = -i \left( \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_f^2 t^2}{r^2}} \right),$$

et

$$t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_P}.$$

**Remarque 3.2** La méthode de Cagniard-de Hoop ne permet pas de différencier les ondes de tête  $S$  et  $P$ . Néanmoins, on peut montrer que  $\tilde{\mathcal{R}}(p)$  n'est pas régulière aux points  $p = ic_f/c_S$  et  $p = ic_f/c_P$  ce qui nous permet de définir le temps d'arrivée de l'onde de tête  $P$  par

$$t_{1fP} = t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_P}$$

et le temps d'arrivée de l'onde de tête  $S$  par

$$t_{1fS} = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_S}.$$

Il est alors facile de démontrer le lemme 3.1.

**Calcul de  $v_{sx}^P$**  On a

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik\mathcal{T}_P(k, s)}{2k_P} e^{yk_P - hk_f - ikx} dk \quad (3.17)$$

On pose

$$k = \frac{ps}{c_P}, \quad \tilde{k}_{PP} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \tilde{k}_{Pf} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{PS} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2}$$

puis  $\mathcal{T}_P(p) = c_P^2 \mathcal{T}_P(\frac{p}{c_P}, 1)$  pour obtenir

$$\mathcal{T}_P(p) = 2\tilde{k}_{PP} \frac{\tilde{k}_{PS}^2 + p^2}{\tilde{k}_f \left[ (\lambda(\tilde{k}_{PP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP} \right] + c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2)},$$

ce qui donne

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip\mathcal{T}_P(p)}{2c_P \tilde{k}_{PP}} e^{-\frac{s}{c_P}[-y\tilde{k}_{PP} + h\tilde{k}_{Pf} + ipx]} dp \quad (3.18)$$

On utilisera donc un contour d'intégration similaire à celui utilisé pour calculer l'onde transmise dans le cas de deux milieux acoustiques. Ce contour coupe l'axe imaginaire en un point  $ia$  avec  $|a| < 1$ . Les coupures de la fonction  $\mathcal{T}_P/\tilde{k}_{PP}$  sont les coupures des fonctions  $\tilde{k}_{PP}$ ,  $\tilde{k}_{PS}$  et  $\tilde{k}_{Pf}$ , c'est-à-dire les demi-droites imaginaires définies respectivement par  $|p| > 1$ ,  $|p| > c_P/c_S$  et  $|p| > c_P/c_f$ . Comme  $c_P > c_S > c_f$ , le contour d'intégration ne traverse pas les coupures de  $\mathcal{T}_P/k_P$ . Si on suppose de plus que les pôles de  $\mathcal{T}_P$  sont à l'extérieur de ce contour, on montre, comme dans le cas de deux milieux acoustiques, que :

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^P(x, y, t) &= 0, \quad t < t_{0P} \\ v_{sx}^P(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{T}}_P(\gamma_P^+(t))}{(1 + \gamma_P^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right], \quad t > t_{0P} \end{aligned}}$$

avec

$$\mathcal{F}_P(p, t) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_P t$$

et  $t_{0P}$  et  $\gamma_P^+(t)$  déterminés de la même manière que  $t_{02}$  et  $\gamma_2^+(t)$  dans le cas de deux milieux acoustiques avec  $h \neq 0$ , en remplaçant respectivement  $c_1$  et  $c_2$  par  $c_f$  et  $c_P$ .

**Calcul de  $v_{sx}^S$**  On a

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_S(k, s) e^{yk_P - hk_f - ikx} dk \quad (3.19)$$

On pose

$$k = \frac{ps}{c_S}, \quad \tilde{k}_{SS} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \tilde{k}_{Sf} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{SP} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2}$$

puis  $\mathcal{T}_S(p) = c_S^2 \mathcal{T}_S(\frac{p}{c_S}, 1)$  pour obtenir

$$\mathcal{T}_S(p) = \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}\tilde{k}_{SS}}{\tilde{k}_{Sf} \left[ (\lambda(\tilde{k}_{SP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS}\tilde{k}_{SP} \right] + c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP}(\tilde{k}_{SS}^2 - p^2)},$$

ce qui donne

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}_S(p)}{c_S} e^{-\frac{s}{c_S}[-y\tilde{k}_{SS} + h\tilde{k}_{Sf} + ipx]} dp \quad (3.20)$$

Comme dans le cas de deux milieux acoustiques nous pouvons définir le contour d'intégration au temps  $t$  comme une partie de l'ensemble  $\tilde{\Gamma}$  des solutions de l'équation  $\mathcal{F}_S(p, t) = 0$  avec

$$\mathcal{F}_S(p, t) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_S t$$

Nous pouvons également calculer  $t_{0S}$ , le temps d'arrivée de l'onde S au point  $(x, y)$ . Nous notons  $p_{0S}$  la racine double de  $\mathcal{F}_S(p, t_0)$ . Comme nous l'avons vu,  $p_{0S}$  est imaginaire pur et, d'après le lemme 2.3,  $|p_{0S}| < 1$ . Les coupures de la fonction  $\mathcal{T}_S$  sont les coupures des fonctions  $\tilde{k}_{SS}$ ,  $\tilde{k}_{SP}$  et  $\tilde{k}_{Sf}$ , c'est-à-dire les demi-droites imaginaires définies respectivement par  $|p| > 1$ ,  $|p| > c_S/c_P$  et  $|p| > c_S/c_f$ . Comme  $c_S < c_P$  il est possible que  $|p_{0S}| > c_S/c_P$  et donc que le contour traverse les contours. Contrairement au calcul de l'onde P nous devons en conséquence distinguer deux cas :  $|p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}$  et  $|p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}$ .

**Si  $|p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}$ .** Dans ce cas les coupures ne traversent pas les contours et on montre facilement que

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^S(x, y, t) &= 0, \quad t < t_{0S}, \\ v_{sx}^S(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \quad t > t_{0S}, \end{aligned}}$$

avec  $\gamma_S^+(t)$  déterminée de la même manière que  $\gamma_2^+(t)$  dans le cas de deux milieux acoustiques avec  $h \neq 0$ , en remplaçant respectivement  $c_1$  et  $c_2$  par  $c_f$  et  $c_S$ .

Si  $|p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}$ . Nous avons représenté, sur la figure 20, le contour  $\tilde{\Gamma}$ . Il est évident que seul  $\Upsilon^+$  peut nous permettre de contourner la coupure. Il est facile de déterminer le temps  $t_{1SP}$  d'arrivée de l'onde de tête, c'est le temps tel que  $\mathcal{F}_S(i\frac{c_S}{c_P}, t_{1S}) = 0$  :

$$t_{1SP} = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{c_S} x. \quad (3.21)$$

Nous appelons  $\Upsilon$  le sous-ensemble de  $\Upsilon^+$  défini par

$$\Upsilon = [v^+(t_{1SP}) = i\frac{c_S}{c_P}; v^+(t_{0S}) = p_{0S}]$$

et nous posons

$$\Xi_S(p) = \frac{\mathcal{T}_S(p)}{4\pi} e^{-\frac{s}{c_S}[-y\tilde{k}_{SS} + h\tilde{k}_{Sf} + ipx]}.$$

Avec des notations similaires à celles de la section précédente<sup>9</sup>, on montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_S(p) dp = - \int_{\Gamma} \Xi_S(p) dp - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_S(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_S(p) dp \right]$$

et on vérifie que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi_S(p) dp = \int_{\Upsilon} \frac{\mathcal{T}_S^{\pm}(p)}{4\pi c_S} e^{\frac{s}{c_S}[-y\tilde{k}_{SS} + h\tilde{k}_{Sf} + ipx]} dp$$

avec

$$\mathcal{T}_S^{\pm}(p) = \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}^{\pm}\tilde{k}_{SS}}{\tilde{k}_{Sf} \left[ (\lambda(\tilde{z}_{SP}^{\pm})^2 - p^2) + 2\mu\tilde{z}_{SP}^{\pm}(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2) - 4\mu p^2\tilde{k}_{SS}\tilde{k}_{SP}^{\pm} \right] + c_S^2 \rho_f \tilde{z}_{SP}^{\pm}(\tilde{k}_{SS}^2 - p^2)},$$

et

$$k_{SP}^{\pm} = \pm i \sqrt{-\left(p^2 + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right)}.$$

Nous avons vu (page 48) que  $t \mapsto v^+(t)$  est une bijection de  $[t_{1SP}; t_{0S}]$  vers  $\Upsilon = [i\frac{c_S}{c_P}; p_{0S}]$ , nous pouvons donc effectuer le changement de variable  $p = v_S^+(t)$  pour obtenir

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi_S(p) dp = \frac{1}{4\pi} \int_{t_{1SP}}^{t_0} \frac{\mathcal{T}_S^{\pm}(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} e^{-st} dt.$$

<sup>9</sup>C'est-à-dire  $\Upsilon_{-\rho} = \Upsilon - \frac{1}{\rho}$  et  $\Upsilon_{\rho} = \Upsilon + \frac{1}{\rho}$ .

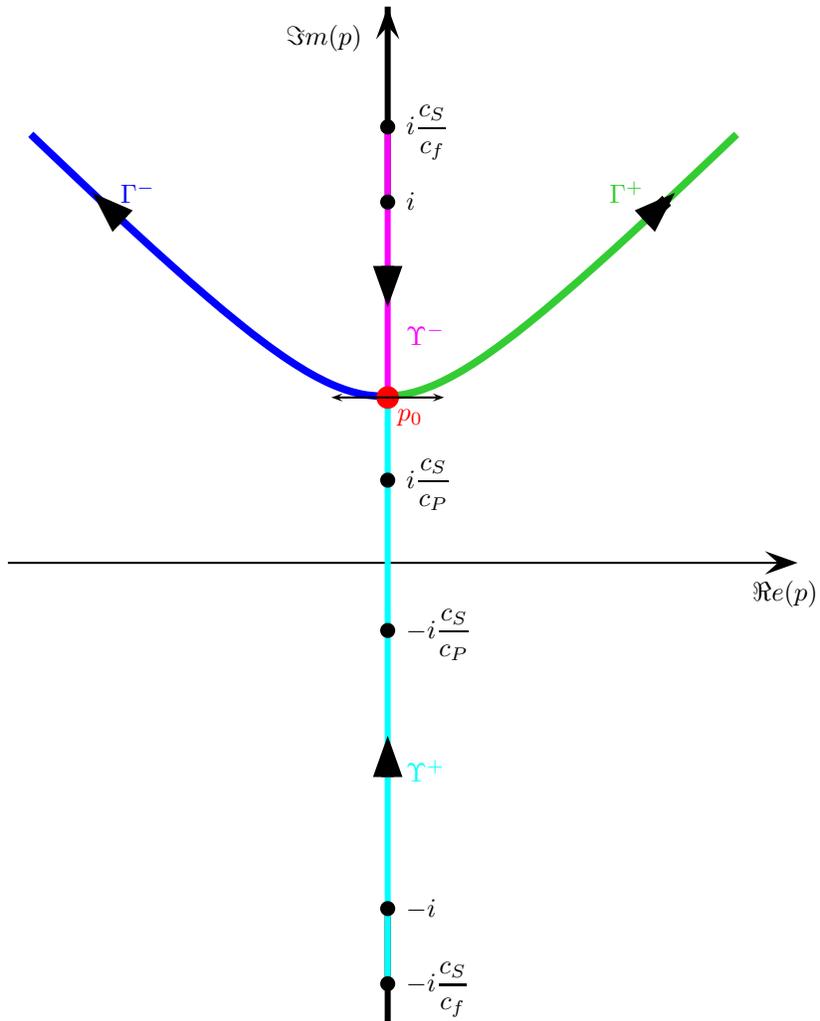


Figure 20: Représentation de  $\tilde{\Gamma}$

En remarquant que

$$\frac{\mathcal{T}_S^-(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} = -\frac{\overline{\mathcal{T}_S^+(v_S^+(t))}}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)}$$

on vérifie que :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Gamma_{-\rho}} \Xi_S(p) dp + \int_{\Gamma_{+\rho}} \Xi_S(p) dp \right] = -\frac{1}{4\pi} \int_{t_{1SP}}^{t_0} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S^+(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right] e^{-st} dt.$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^S(x, y, t) &= 0, \quad t < t_{1SP}, \\ v_{sx}^S(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S^+(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right], \quad t_{1SP} < t < t_{0S}, \\ v_{sx}^S(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \quad t > t_{0S}. \end{aligned}}$$

On démontre le lemme 3.2 en remarquant que la condition  $t_{1SP} = t$  s'écrit

$$-y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{c_S} = t$$

ce qui est bien l'équation du segment  $[C(t)J(t)]$  défini précédemment.

## 4 Considérations pratiques pour le calcul numérique

Le calcul numérique de la convolution en temps entre les fonctions de Green que nous venons de décrire et un terme source présente certaines difficultés :

1. Les fonctions de Green sont singulières au temps d'arrivée de l'onde ;
2. Le contour  $\Gamma$  n'est pas toujours connu explicitement ;
3. Les singularités des fonctions de Green ne sont pas non plus toujours explicites.

Le but de cette section est de montrer comment résoudre ces problèmes. Pour cela nous détaillerons l'algorithme de résolution du problème de couplage fluide-structure (3.1), la résolution du cas deux milieux acoustiques s'en déduit facilement.

## 4.1 Calcul de $P$

Le champ de pression est donné par :

$$P(x, y, t) = \int_0^t p(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (4.1)$$

Comme  $p$  se décompose en  $p^i + p^r$ , on peut également décomposer  $P$  en  $P^i + P^r$  avec :

$$P^i(x, y, t) = \int_0^t p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad P^r(x, y, t) = \int_0^t p^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

### 4.1.1 Calcul de $P^i$

Soit  $r^* = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$  et  $t_0 = r^*/c_f$  le temps d'arrivée de l'onde incidente au point  $(x, y)$ . Rappelons que  $p^i(x, y, t)$  est nulle pour  $t < t_0$  :

$$\begin{cases} P^i(x, y, t) = 0 & \text{si } t \leq t_0 \quad (\iff \mathbf{x} \notin \Omega_I(t)) \\ P^i(x, y, t) = \int_{t_0}^t p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t > t_0 \quad (\iff \mathbf{x} \in \Omega_I(t)) \end{cases} \quad (4.2)$$

On décompose l'intervalle de temps  $[t_0 ; t]$  en  $Nt$  intervalles de même longueur  $dt$ . On a alors

$$P^i(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt} \int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Il existe de nombreuses techniques permettant de calculer les intégrales

$$\int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau,$$

comme la méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ou de Gauss (par ordre de sophistication croissante). Pour simplifier notre propos nous présentons ici la méthode la plus simple à mettre en oeuvre : la méthode des rectangles. Pour  $i > 1$  on approximera donc l'intégrale

$$\int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

par

$$p^i(x, y, t_0 + (i - 1)dt) f(t - (t_0 + (i - 1)dt)) dt = \frac{f(t - (t_0 + (i - 1)dt))}{2\pi \sqrt{(t_0 + (i - 1)dt)^2 - t_0^2}} dt.^{10}$$

<sup>10</sup>Le schéma d'intégration est décentré à gauche.

Par contre, pour  $i = 1$ , on ne peut plus utiliser cette formule puisque la racine carrée s'annule. Une première idée consiste à approximer

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

par

$$p^i(x, y, t_0 + idt) f(t - (t_0 + idt)) dt = \frac{f(t - (t_0 + idt))}{2\pi \sqrt{(t_0 + idt)^2 - t_0^2}} dt,$$

mais c'est une approximation peu précise puisque  $p^i$  varie fortement sur l'intervalle  $[t_0 ; t_0 + dt]$ . On lui préférera donc l'approximation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \simeq f(t - t_0) \int_{t_0}^{t_0+dt} p^i(x, y, \tau) d\tau = f(t - t_0) \int_{t_0}^{t_0+dt} \frac{d\tau}{2\pi \sqrt{\tau^2 - t_0^2}}.$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - t_0^2}} = \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt}{t_0} \right).$$

On calculera donc :

$$P^i(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_0)}{2\pi} \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt}{t_0} \right) + \sum_{i=2}^{Nt} \frac{f(t - (t_0 + (i-1)dt))}{2\pi \sqrt{(t_0 + (i-1)dt)^2 - t_0^2}} dt. \quad (4.3)$$

L'algorithme de calcul de  $P^i$  est reproduit sur le tableau 1 (la fonction polaire( $x, y$ ) permet d'obtenir les coordonnées polaires du point  $(x, y)$  et nous avons appelé  $C$  le vecteur contenant les données physiques de l'expérience :  $c_f, c_S, c_P, \rho_f \dots$ ).

#### 4.1.2 Calcul de $P^r$

On suppose maintenant que  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $(x, y + h)$  et on pose  $t_{0f} = r/c_f$  le temps d'arrivée de l'onde réfléchie et

$$t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_P} < t_{0f},$$

le temps d'arrivée de l'onde tête défini page 69.

On pose

$$p_v^r(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_R(t)), \\ \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_f^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}} & \text{si } t > t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_R(t)), \end{cases}$$

```

    PI(x, y, t, dt, C)
    1  (r, theta) = polaire(x, y - h)
    2  t0 = r/cf
    3  si t ≤ t0 alors
    4      Pi = 0
    5  sinon
    6      Nt = (t - t0)/dt
    7      Pi = f(t - t0) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
    8      pour i de 2 à Nt faire
    9          tau = t0 + (i - 1) * dt
    10         Pi = Pi + f(t - tau)/(2 * pi * sqrt(t^2/r^2 - 1/cf^2)) * dt
    11      fin pour
    12  fin si
    
```

 Table 1: Algorithme de calcul de  $P^i$ 

et, si  $|\cos \theta| > c_f/c_P$  :

$$p_t^r(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou si } t > t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_{tefP}(t)), \\ -\frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_f^2} - t^2}} & \text{si } t_1 < t < t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t)). \end{cases}$$

On peut alors décomposer  $P^r$  en une onde de tête  $P_t^r$  et une onde de volume  $P_v^r$  avec :

$$\begin{cases} P_v^r(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0f}, \\ P_v^r(x, y, t) = \int_{t_{0f}}^t p_t^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0f}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_t^r(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_1 \text{ ou } \cos \theta \leq \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, t) = \int_{t_1}^t p_t^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t_1 < t < t_{0f} \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, t) = \int_{t_1}^{t_{0f}} p_t^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t_{0f} \leq t \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}. \end{cases}$$

On aura donc  $P^r(x, y, t) = P_t^r(x, y, t) + P_v^r(x, y, t)$

**Calcul de  $P_v^r(x, y, t)$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_{0f}; t]$  se décompose en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$ . On a alors :

$$P_v^r(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt_1} \int_{t_{0f}+(i-1)dt_1}^{t_{0f}+idt_1} \frac{\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(\tau)) \right]}{2\pi\sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}} f(t - \tau) d\tau.$$

avec  $\mathcal{R}$  et  $\gamma_f^+$  définies page 69.

Pour  $i > 1$ , on approximera l'intégrale

$$\int_{t_{0f}+(i-1)dt_1}^{t_{0f}+idt_1} \frac{\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(\tau)) \right]}{2\pi\sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}} f(t - \tau) d\tau.$$

par

$$\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f} + idt_1)) \right] \frac{f(t - (t_{0f} + (i-1)dt_1))}{2\pi\sqrt{(t_{0f} + (i-1)dt_1)^2 - t_{0f}^2}} dt$$

et, pour  $i=1$ , on utilisera l'approximation suivante :

$$\int_{t_{0f}}^{t_{0f}+dt_1} \frac{\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(\tau)) \right]}{2\pi\sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}} f(t - \tau) d\tau = \Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f}) \int_{t_{0f}}^{t_{0f}+dt_1} \frac{d\tau}{2\pi\sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}}.$$

On calculera donc :

$$\begin{aligned} P_v^r(x, y, t) &\simeq \frac{\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f})}{2\pi} \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt_1}{t_{0f}} \right) \\ &+ \sum_{i=2}^{Nt_1} \frac{\Re \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f} + (i-1)dt_1)) \right] f(t - (t_{0f} + (i-1)dt_1))}{2\pi\sqrt{(t_{0f} + (i-1)dt_1)^2 - t_{0f}^2}} dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Calcul de  $P_t^r(x, y, t)$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_1; \min(t_{0f}, t)]$  se décompose en  $Nt_2$  intervalles de même longueur  $dt_2$ . On a alors :

$$P_t^r(x, y, t) = - \sum_{i=1}^{Nt_2} \int_{t_1+(i-1)dt_2}^{t_1+idt_2} \frac{\Im \left[ \mathcal{R}(v_f^+(\tau)) \right]}{2\pi\sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}} f(t - \tau) d\tau.$$

avec  $v_f^+$  définie page 69.

Si  $t < t_{0f}$  on calculera sans difficulté

$$P_t^r(x, y, t) \simeq - \sum_{i=1}^{Nt_2} \frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_1 + (i+1)dt_1)) \right] f(t - (t_1 + (i-1)dt_2))}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - (t_1 + (i-1)dt_2)^2}} dt. \quad (4.5)$$

Sinon on devra utiliser l'approximation

$$- \int_{t_{0f}-dt_2}^{t_{0f}} \frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(\tau)) \right] f(t-\tau) d\tau}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}} = - \Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t_{0f})) \right] f(t-t_{0f}) \int_{t_{0f}-dt_2}^{t_{0f}} \frac{d\tau}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}}$$

en remarquant que :

$$\int_{t_{0f}-dt_2}^{t_{0f}} \frac{d\tau}{\sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}} = - \arccos\left(1 - \frac{dt_2}{t_{0f}}\right).$$

On calculera donc :

$$P_t^r(x, y, t) \simeq - \sum_{i=1}^{Nt_2-1} \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t_1 + (i+1)dt_2)) \right] f(t - (t_1 + (i-1)dt_2))}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - (t_1 + (i-1)dt_2)^2}} dt + \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f})}{2\pi} \arccos\left(1 - \frac{dt_2}{t_{0f}}\right). \quad (4.6)$$

L'algorithme de calcul de  $P^r$  est décrit sur le tableau 2

## 4.2 Calcul de $V_s$

### 4.2.1 Calcul de $V_{sx}^P$

**Calcul de  $t_{0P}$ .** Comme nous l'avons vu, le calcul du temps d'arrivée de l'onde  $P$  nécessite de trouver la racine  $\xi = \xi_{0P}$  de

$$t_P'(\xi) = \frac{\xi}{c_f \sqrt{\xi^2 + h^2}} + \frac{\xi - x}{c_P \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}. \quad (4.7)$$

Remarquons que :

$$t_P''(\xi) = \frac{h^2}{c_f (\xi^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(x - \xi)^2 + y^2}{c_P ((x - \xi)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

et que

$$t_P'(0) = -\frac{x}{c_P \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad t_P'(x) = \frac{x}{c_f \sqrt{x^2 + h^2}}.$$

```

PR(x, y, t, dt1, dt2, C)
1  (r, theta) = polaire(x, y + h)
2  t0 = r/cf
3  si t ≤ t0 alors
4    Pr = 0
5  sinon
6    Nt1 = (t - t0)/dt1
7    p = -i * cos(theta)
8    Pr = f(t - t0) * reel(R(p, C)) * argch(1 + dt1/t0)/(2 * pi)
9    pour i de 2 à Nt1 faire
10     tau = t0 + (i - 1) * dt1
11     p = -it/tau * cos(theta) + abs(sin(theta)) * sqrt(tau^2/t0^2 - 1)
12     Pr = Pr + f(t - tau) * reel(R(p, C))/(2 * pi * sqrt(t^2 - t0^2)) * dt1
13  fin pour
14  fin si
15  si cos(theta) > cf/cP alors
16    t1 = r * abs(sin(theta)) * sqrt(1/cf^2 - 1/cP^2) - r * cos(theta)/cP
17    si t > t1 alors
18      Nt2 = (min(t, t0) - t1)/dt2
19      pour i de 1 à Nt2 - 1 faire
20        tau = t1 + (i - 1) * dt2
21        p = -i (t/t0 * cos(theta) + abs(sin(theta)) * sqrt(1 - t^2/t0^2))
22        Pr = Pr - f(t - tau) * imag(R(p, C))/(2 * pi * sqrt(t0^2 - t^2)) * dt2
23      fin pour
24      si t0 > t alors
25        tau = t1 + (Nt2 - 1) * dt2
26        p = -i (t/t0 * cos(theta) + abs(sin(theta)) * sqrt(1 - t^2/t0^2))
27        Pr = Pr - f(t - tau) * imag(R(p, C))/(2 * pi * sqrt(t0^2 - t^2)) * dt2
28      sinon
29        p = -i * cos(theta)
30        Pr = Pr - f(t - t0) * imag(R(p, C)) * arccos(1 - dt2/t0)/(2 * pi) * dt2
31      fin si
32    fin si
33  fin si

```

Table 2: Algorithme de calcul de  $P^r$

Donc  $t'_P(0)t'_P(x) < 0$  et  $t'_P(\xi)$  admet une unique racine, comprise entre 0 et  $x$  qui minimise  $t_P(\xi)$ . De plus il est évident que toute racine de  $t'_P$  est également racine de la fonction

$$\sqrt{(\xi^2 + h^2)}\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} t'_P(\xi) = \frac{\xi\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_f} + \frac{(\xi - x)\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_P}$$

et par conséquent du polynôme de degré 4 :

$$\begin{aligned} Poly(\xi) &= \left( \frac{\xi\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_f} + \frac{(\xi - x)\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_P} \right) \left( \frac{\xi\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_f} - \frac{(\xi - x)\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_P} \right) \\ &= \frac{\xi^2(x - \xi)^2 + y^2}{c_f^2} - \frac{(\xi - x)^2 \xi^2 + h^2}{c_P^2} \end{aligned}$$

soit

$$c_P^2 c_S^2 Poly(\xi) = (c_P^2 - c_f^2)\xi^4 - 2x(c_P^2 - c_f^2)\xi^3 + ((x^2 + y^2)c_P^2 - (x^2 + h^2)c_f^2)\xi^2 + 2c_f^2 h^2 \xi - c_f^2 h^2 x^2. \quad (4.8)$$

Le calcul numérique de  $\xi$  se fera donc de la manière suivante :

1. on calcule les quatre racines de  $Poly$  ;
2. on cherche parmi ces racines la seule racine réelle de  $t'_P$  comprise entre 0 et  $x$  et solution de  $t'_P(\xi) = 0$ .

Il ne reste alors plus qu'à calculer  $t_P(\xi_{0P})$ . Nous appellerons  $t(x, y, h, c_f, c_P)$  la fonction qui nous permet de calculer ce temps d'arrivée.

**Calcul de  $\gamma_P^+(t)$ .** Nous donnons ici une méthode de calcul de  $\gamma_P^+(t)$ , cette méthode n'est certainement pas la plus efficace en terme de temps de calcul mais c'est celle qui nous a paru la plus simple à mettre en oeuvre numériquement.

On vérifie facilement que  $p = \gamma_P^+(t)$  est également racine du polynôme de degré 4 suivant :

$$P_P(p, t) = ap^4 + b(t)p^3 + c(t)p^2 + d(t)p + e(t) = 0. \quad (4.9)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (x^2 + y^2 + h^2)^2 - 4h^2y^2 \end{array} \right. \quad (4.10a)$$

$$b(t) = 4 i c_P t x (x^2 + y^2 + h^2) \quad (4.10b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(t) = 2 \left[ y^2 (x^2 + y^2 - h^2) + \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} (x^2 - y^2 + h^2) - c_P^2 t^2 (3x^2 + y^2 + h^2) \right] \end{array} \right. \quad (4.10c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d(t) = 4 i c_P t x \left( y^2 + \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} - c_P^2 t^2 \right) \end{array} \right. \quad (4.10d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t) = \left( y^2 - \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} \right)^2 + c_P^2 t^2 \left( c_P^2 t^2 - 2y^2 - 2 \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.10e)$$

En effet :

$$y^2 (1 + p^2) = \left( c_P t - ip_{02}x - h \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

soit, en développant chaque terme :

$$y^2 (1 + p^2) = (c_P t - ip_{02}x)^2 + h^2 \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right) - 2h (c_P t - ip_{02}x) \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

puis

$$4h^2 (c_P t - ip_{02}x)^2 \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right) = \left[ y^2 (1 + p^2) - (c_P t - ip_{02}x)^2 - h^2 \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right) \right]^2.$$

Les coefficients de  $P_P$  sont alors obtenus en développant les termes de cette dernière équation.

Le calcul de  $\gamma_P^+(t)$  se fera donc de la manière suivante :

1. on calcule les quatre racines de  $P_P(p, t)$ ;
2. on cherche parmi ces racines l'unique racine de  $\mathcal{F}_P(p, t)$  à partie réelle positive<sup>11</sup> ;

Nous appellerons  $\text{gamma}(x, y, h, t, c_f, c_P)$  la fonction qui nous permet de calculer cette racine.

<sup>11</sup>Rappelons que l'existence et l'unicité de cette racine est garantie par le lemme 2.3.

**Calcul de  $V_{sx}^P$ .** On a :

$$\begin{cases} V_{sx}^P(x, y, t) = 0 & \text{si } t \leq t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \notin \Omega_P(t)) \\ V_{sx}^P(x, y, t) = \int_{t_{0S}}^t v_{sx}^P(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t > t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \in \Omega_P(t)), \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $v_{sx}^P$  est défini par le théorème 3.1 On décompose l'intervalle de temps  $[t_{0P} ; t]$  en  $Nt$  intervalles de même longueur  $dt$ . On a alors

$$V_{sx}^P(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt} \int_{t_{0P} + (i-1)dt}^{t_{0P} + idt} v_{sx}^P(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Pour  $i > 1$  nous pouvons sans difficulté écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{t_{0P} + (i-1)dt}^{t_{0P} + idt} v_{sx}^P(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \\ & \simeq \frac{dt}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt))}{\left(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P} + (i-1)dt)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt), t)} \right] f(t - (t_{0P} + (i-1)dt)), \end{aligned}$$

mais  $p = \gamma^+(t_{0P})$  est une racine double de  $\mathcal{F}_P(p, t_{0P})$  :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma^+(t_{0P}), t_{0P}) = 0,$$

cette approximation n'est donc plus valable pour  $i = 1$ . Dans ce cas nous utiliserons

$$\frac{d\gamma_P^+(t)}{dt} \left( = \frac{c_P}{\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right) \underset{t \rightarrow t_{0P}^+}{\simeq} \zeta_P(t_{0P}) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_{0P}^2}},$$

avec

$$\zeta_P(t_{0P}) = \sqrt{\frac{t + t_{0P}}{2c_P g''(\gamma_P^+(t_{0P}))}}$$

et

$$g''(p) = -\frac{y}{1 + p^2} + \frac{h}{\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2} \quad \text{voir lemme 2.3 .}$$

On peut donc écrire :

$$\int_{t_{0P}}^{t_{0P} + dt} v_{sx}^P(x, y, t) f(t - \tau) \simeq \frac{f(t - t_{0P})}{2\pi c_P} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0P}) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t_{0P}))}{\left(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \int_{t_{0P}}^{t_{0P} + dt} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t_{0P}^2}},$$

```

VPSX(x, y, t, dt, C)
1  t0 = t(x, y, h, cf, cP)
2  si t ≤ t0 alors
3    VPSx = 0
4  sinon
5    Nt = (t - t0)/dt
6    p = gamma(x, y, h, t0, cf, cP)
7    z = zeta(x, y, h, t, cP, cf, p, t0)/cP
8    VPSx = f(t - t0) * reel(zeta * cP * TP(p, C)/sqrt(1 + p^2)) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
9    pour i de 2 à Nt faire
10     tau = t0 + (i - 1) * dt
11     p = gamma(x, y, h, tau, cf, cP)
12     df = deriveef(x, y, h, cf, cP, tau, p)
13     VPSx = VPSx + f(t - tau) * reel(TP(p, C)/(sqrt(1 + p^2) * df)) * dt
14  fin pour
15  fin si

```

Table 3: Algorithme de calcul de  $V_{sx}^P$ 

soit

$$\begin{aligned}
V_{sx}^P(x, y, t) &\simeq \frac{f(t - t_{0P})}{2\pi c_P} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0P}) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t_{0P}))}{(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P}))^{\frac{1}{2}}} \right] \argch \left( 1 + \frac{dt}{t_{0P}} \right) dt \\
&+ \sum_{i=2}^{Nt} \frac{f(t - (t_{0P} + (i-1)dt))}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt))}{(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P} + (i-1)dt))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt), t)} \right] dt.
\end{aligned}$$

L'algorithme de calcul de  $V_{sx}^P$  est décrit sur le tableau 3

#### 4.2.2 Calcul de $V_{sx}^S$

**Calcul de  $t_{0S}$ , de  $\gamma_S^+(t)$  et de  $v_S^+(t)$ .** Ce calcul se fait de la même façon que pour  $V_{sy}^P$  :

$$t_{0S} = t(x, y, h, cf, cS) \quad \text{et} \quad \gamma_S^+(t) = \text{gamma}(x, y, h, t, cf, cS).$$

On pose  $p_{0S} = \gamma_S^+(t_{0S})$ . Comme nous l'avons vu, si  $|p_{0S}| < c_S/c_P$ , nous devons calculer  $v_S^+(t)$  pour  $t_{1SP} < t < t_{0S}$  avec

$$t_{SP} = y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|}{c_S}.$$

Nous savons également, toujours d'après le lemme 2.3, que, pour  $t_{1SP} < t < t_{0S}$ ,  $v_S^+(t)$  est la seule racine de  $\mathcal{F}_S(p, t)$  située dans l'intervalle  $i[c_S/c_P; 1]$ . Il est évident que  $v_S^+(t)$  est également racine de  $P_S(p, t)$ , où  $P_S$  est le polynôme de degré 4 obtenu à partir de  $P_P$  défini par (4.9) en remplaçant  $c_P$  par  $c_S$ . Le calcul de  $v_S^+(t)$  se fera donc de la manière suivante :

1. on calcule les quatre racines de  $P_S(p, t)$ ;
2. on cherche parmi la seule de ces racines située dans l'intervalle  $i[c_S/c_P; 1]$ .

Nous appellerons  $\text{upsilon}(x, y, h, t, cf, c_S)$  la fonction qui nous permet de calculer cette racine.

On pose

$$v_{s_x v}^S(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \notin \Omega_S(t)), \\ \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right] & \text{si } t > t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \in \Omega_S(t)), \end{cases}$$

et, si  $|p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}$  :

$$v_{s_x t}^S(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{1SP} \text{ ou si } t > t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \notin \Omega_{teSP}(t)), \\ \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right] & \text{si } t_{SP} < t < t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \in \Omega_{teSP}(t)). \end{cases}$$

On peut alors décomposer  $V_{s_x}^S$  en une onde de tête  $V_{s_x t}^S$  et une onde de volume  $V_{s_x v}^S$  avec :

$$\begin{cases} V_{s_x v}^S(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0S}, \\ V_{s_x v}^S(x, y, t) = \int_{t_{0S}}^t v_{s_x v}^S(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0S}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} V_{s_x t}^S(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{1SP} \text{ ou } |p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}, \\ V_{s_x t}^S(x, y, t) = \int_{t_{1SP}}^t v_{s_x t}^S(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t_{1SP} < t < t_{0S} \text{ et } |p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}, \\ V_{s_x t}^S(x, y, t) = \int_{t_{1SP}}^{t_{0S}} v_{s_x t}^S(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t_{1SP} \leq t \text{ et } |p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}. \end{cases}$$

**Calcul de  $V_{suv}^S$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_{0S}; t]$  se décompose en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$ . On peut alors écrire :

$$V_{suv}^S(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_{0S})}{2\pi c_S} \Re \left[ \frac{\zeta(t_{0S}) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t_{0S}))}{\left(1 + \gamma_S^{+2}(t_{0S})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt_1}{t_{0S}} \right) dt$$

$$+ \sum_{i=2}^{Nt_1} \frac{f(t - (t_{0S} + (i-1)dt_1))}{2\pi} \Re \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_S(\gamma_S^+(t_{0S} + (i-1)dt_1)) dt_1}{\left(1 + \gamma_S^{+2}(t_{0S} + (i-1)dt_1)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t_{0S} + (i-1)dt_1), t)} \right].$$

**Calcul de  $V_{sxt}^S$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_{1SP}; \min(t_{0S}, t)]$  se décompose en  $Nt_2$  intervalles de même longueur  $dt_2$ . Si  $t < t_{0S}$ , on calculera alors sans difficulté

$$V_{sxt}^S(x, y, t) \simeq$$

$$\sum_{i=1}^{Nt_2} \frac{f(t - t_{1SP} + (i-1)dt_2)}{2\pi} \Re \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2)) dt_2}{\left(1 + v_S^{+2}(t_{1SP} + (i-1)dt_2)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2), t)} \right].$$

Sinon, comme pour le calcul de l'onde de volume, on devra utiliser l'approximation, obtenue grâce au lemme 2.3

$$\int_{t_{0S}-dt_2}^{t_{0S}} v_{sxt}^S(x, y, t) f(t - \tau) \simeq \frac{f(t - t_{0S})}{2\pi c_S} \Re \left[ \frac{\zeta(t_{0S}) \mathcal{I}_S(v_P^+(t_{0S}))}{\left(1 + v_P^{+2}(t_{0S})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \int_{t_{0S}-dt_2}^{t_{0S}} \frac{dt}{\sqrt{t_{0S}^2 - t^2}}.$$

On calculera donc :

$$V_{sxt}^S(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_{0S})}{2\pi c_S} \Re \left[ \frac{\zeta(t_{0S}) \mathcal{I}_S(v_P^+(t_{0S}))}{\left(1 + v_P^{+2}(t_{0S})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \arccos \left( 1 - \frac{dt_2}{t_{0S}} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{Nt_2-1} \frac{f(t_{1SP} + (i-1)dt_2)}{2\pi} \Re \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2)) dt_2}{\left(1 + v_S^{+2}(t_{1SP} + (i-1)dt_2)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2), t)} \right].$$

L'algorithme de calcul de  $V_{sx}^S$  est décrit sur le tableau 4.

```

VSSx(x, y, t, dt1, dt2, C)
1  t0 = t(x, y, h, cf, cS)
2  si t ≤ t0 alors
3    VSsx = 0
4  sinon
5    Nt = (t - t0)/dt
6    p = gamma(x, y, h, t0, cf, cS)
7    p0 = p
8    z = zeta(x, y, h, t, cS, cf, p, t0)/cS
9    VSsx = f(t - t0) * reel(z * TS(p, C)/sqrt(1 + p2)) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
10  pour i de 2 à Nt faire
11    tau = t0 + (i - 1) * dt
12    p = gamma(x, y, h, tau, cf, cS)
13    df = deriveef(x, y, h, cf, cS, tau, p)
14    VSsx = VSsx + f(t - tau) * reel(TS(p, C)/(sqrt(1 + p2) * df)) * dt1
15  fin pour
16  fin si
17  si abs(p0) > cS/cP alors
18    t1 = y * sqrt(1/cP2 - 1/cS2) + h * sqrt(1/cf2 - 1/cS2) - x/cS
19    si t > t1 alors
20      Nt2 = (min(t, t0) - t1)/dt2
21      pour i de 1 à Nt2 - 1 faire
22        tau = t1 + (i - 1) * dt2
23        p = gamma(x, y, h, tau, cf, cS)
24        df = deriveef(x, y, h, cf, cS, tau, p)
25        VSsx = VSsx + f(t - tau) * reel(TS(p, C)/(sqrt(1 + p2) * df)) * dt2
26      fin pour
27    si t0 > t alors
28      tau = t1 + (Nt2 - 1) * dt2
29      p = gamma(x, y, h, tau, cf, cS)
30      df = deriveef(x, y, h, cf, cS, tau, p)
31      VSsx = VSsx + f(t - tau) * reel(TS(p, C)/(sqrt(1 + p2) * df)) * dt2
32    sinon
33      p = p0
34      z = zeta(x, y, h, t, cS, cf, p, t0)/cS
35      VSsx = VSsx +
36      f(t - t0) * reel(zeta * TS(p, C)/sqrt(1 + p2)) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
37    fin si
38  fin si
39  fin si

```

Table 4: Algorithme de calcul de  $V_{sx}^S$

## References

- [1] L. Cagniard. *Réflexion et Réfraction des Ondes Sismiques Progressives*. Gauthier-Villard, 1939.
- [2] L. Cagniard. *Reflection and refraction of progressive seismic waves*. McGraw-Hill, 1962. traduit de [1].
- [3] A. T. de Hoop. The surface line source problem. *Appl. Sci. Res. B*, 8:349–356, 1959.
- [4] Q. Grimal. *Étude dans le domaine temporel de la propagation d’ondes élastiques en milieux stratifiés ; modélisation de la réponse du thorax à un impact*. PhD thesis, Université Paris XII-Val de Marne, 2003.
- [5] C. Jordan. *Cours d’analyse de l’École polytechnique*, volume 2, pages 285–286. Gauthier-Villars, 3 edition, 1909-1915.
- [6] O. Poncelet. Réponse transitoire à une source impulsionnelle en espace en milieu anisotrope. Calcul de fonctions de Green par la méthode de Cagniard-de Hoop. In *Ondes élastiques dans les solides, Cours de l’Ecole des ondes*, pages 277–330. INRIA, 2001.
- [7] J. H. M. T. van der Hijden. *Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media*, volume 32 of *North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science Publishers, 1987.
- [8] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course in Modern Analysis, 4th ed.*, pages 115–117. Cambridge University Press, 1990.

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini</b>	<b>6</b>
<b>2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes</b>	<b>15</b>
2.1 Résultats . . . . .	16
2.1.1 Notations . . . . .	16
2.1.2 Cas d'une source sur l'interface . . . . .	16
2.1.3 Cas d'une source en-dehors de l'interface . . . . .	19
2.2 Démonstrations . . . . .	26
2.2.1 Cas d'une source sur l'interface . . . . .	27
2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface . . . . .	38
<b>3 Interaction fluide-solide</b>	<b>53</b>
3.1 Résultats . . . . .	54
3.1.1 Les fronts d'onde. . . . .	55
3.1.2 Solutions analytiques. . . . .	58
3.2 Démonstrations . . . . .	64
3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier-Laplace . . . . .	64
3.2.2 Démonstration du théorème 3.1 . . . . .	66
<b>4 Considérations pratiques pour le calcul numérique</b>	<b>74</b>
4.1 Calcul de $P$ . . . . .	75
4.1.1 Calcul de $P^i$ . . . . .	75
4.1.2 Calcul de $P^r$ . . . . .	76
4.2 Calcul de $V_s$ . . . . .	79
4.2.1 Calcul de $V_{sx}^P$ . . . . .	79
4.2.2 Calcul de $V_{sx}^S$ . . . . .	84



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399