HAL
open science

Les elements thermiques axisymetriques de la bibliotheque MODULEF

Paul-Louis George

To cite this version:

Paul-Louis George. Les elements thermiques axisymetriques de la bibliotheque MODULEF. RT-0058, INRIA. 1985, pp.30. inria-00070100

HAL Id: inria-00070100

https://inria.hal.science/inria-00070100v1

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (3) 954 90 20

Rapports Techniques

N° 58

LES ÉLÉMENTS THERMIQUES AXISYMÉTRIQUES DE LA BIBLIOTHÈQUE MODULEF

Paul Louis GEORGE

Septembre 1985

LES ELEMENTS THERMIQUES AXISYMETRIQUES DE LA BIBLIOTHEQUE MODULEF

Paul Louis GEORGE

Résumé

Ce papier présente les 4 éléments thermiques avec déformations initiales axisymétriques de la bibliothèque MODULEF.

Après avoir rappelé le système de la thermique tridimensionnelle, nous montrons sa forme particulière dans le cas axisymétrique.

La méthode des Eléments Finis nous permet d'introduire les matrices et seconds membres élémentaires que nous écrivons d'une manière formelle bien adaptée aux calculs sur ordinateur.

Une description complète de chaque élément fini est donnée en précisant, en particulier, les quadratures utilisées.

Abstract

The four axisymmetric elements included in the MODULEF library, for thermal problem with initial deformations are described in this paper.

We write the particular case of axisymmetry in tridimensional thermal problems.

Using Finite Element method we introduce elementary matrices and right hand sides. A formal written, convenient for computer, is shown.

Furthermore full description of each element is given and quadrature formulaes are detailled.

PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

I. THERMIQUE 3D ET AXISYMETRIE
1.1. Modélisation en E.D.P.
1.2. Le cas axisymétrique
1.3. Cas homogène isotrope
1.4. Cas général

II. DES E.D.P. AUX QUANTITES ELEMENTAIRES

III. POINT DE VUE ELEMENTAIRE

IV. TABLEAUX ELEMENTAIRES
4.1. Masse
4.2. Rigidité
4.3. Second membre
4.4. Flux

V. INTEGRATION NUMERIQUE
5.1. Intégration numérique de surface
5.2. Intégration numérique de bord
5.2.1. Degré un
5.2.2. Degré deux

VI. DESCRIPTION DES QUATRE ELEMENTS
6.1. Triangle à 3 noeuds
6.2. Quadrangle à 4 noeuds
6.3. Triangle à 6 noeuds
6.4. Quadrangle à 8 noeuds

VII. PROBLEME MODELE

VIII. IMPLEMENTATION MODULEF
8.1. Récapitulation
8.2. Utilisation

ANNEXE TECHNIQUE : la fiche technique de chaque élément.

I. THERMIQUE TRIDIMENSIONNELLE ET AXISYMETRIE

1.1. Modélisation en équations aux dérivées partielles

Nous considérons le problème de thermique tridimensionnelle formulé en "température" sur un domaine Ω. Le milieu continu a sa température imposée sur une partie Γ_0 de sa frontière, il est soumis à un flux sur Γ_1 le complément de la frontière, de plus une distribution de puissances volumiques est appliquée.

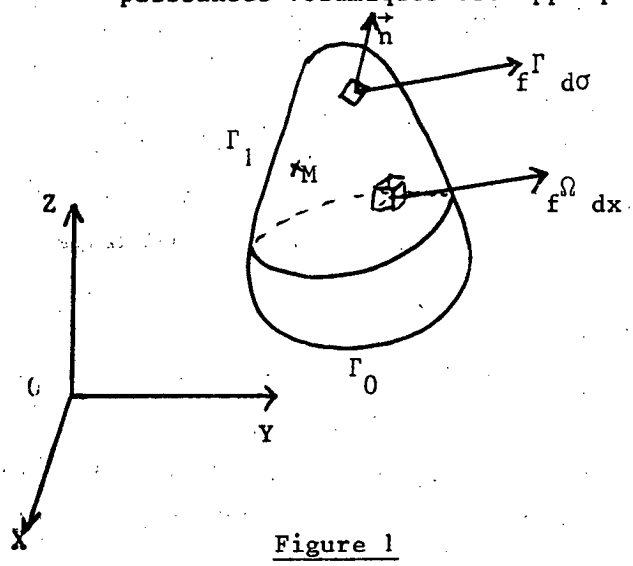


Figure 1

Sous l'action de la puissance volumique f^{Ω} et du flux f^{Γ}, le milieu continu Ω voit sa température varier.
Le problème est de déterminer le champ des températures θ en tout point M de Ω, ainsi que le flux à travers les frontières.

Si $\theta(x,y,z)$ dénote le champ des températures au point $M(x,y,z)$ dans le repère $(0,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$, on peut modéliser le problème par le système suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\dfrac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) = f^{\Omega} & \text{dans } \Omega \quad (1.1) \\ \sigma = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x_j}\cos(\vec{n},\vec{x}_i) & \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.2) \\ \sigma + g\theta = f^{\Gamma} & \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.3) \\ \theta = \bar{\theta} & \text{sur } \Gamma_0. \quad (1.4) \end{cases}$$

Avec t désignant le temps et $\vec{n}$ la normale à Γ_1 de composantes $(n_j)_{j=1,3}$.

Dans le cas stationnaire le terme $\frac{\partial}{\partial t}$ de (1.1) disparaît.

Le coefficient ρ est le produit de la *masse thermique* par la *chaleur massique*.

Le tenseur k_{ij} est le tenseur symétrique de *conductivité* thermique.

Le coefficient g est le coefficient de *transfert* de la frontière Γ_1.

Nous considérons d'autre part que le domaine Ω est soumis à des déplacements (de champ $\vec{u} = \{u_i\}_{i=1,3}$) qui influent sur sa température. En 4.3, nous préciserons cette incidence.

1.2. Le cas axisymétrique

Nous considérons que le domaine Ω, les caractéristiques des matériaux et les effets appliqués sont invariants pour toute rotation autour de l'axe OZ, ainsi le problème de thermique tridimensionnelle se simplifie en un problème bidimensionnel.

Tout point M est défini par le triplet (x,y,z) dans le repère $(0,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$.

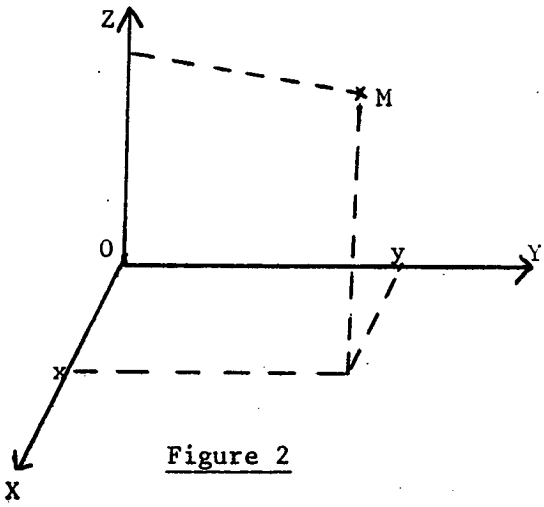


Figure 2

On définit r, ϕ et z tel que :

$$x = r \cos\phi$$
$$y = r \sin\phi$$
$$z$$

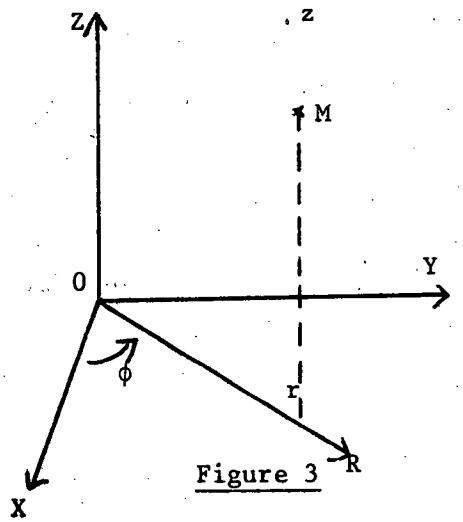


Figure 3

avec $r > 0$
$\phi \in]0, \Pi[$

L'axe OR est ainsi introduit.

Il est donc facile d'exprimer (1.1) (1.2) (1.3) et (1.4) avec ces nouvelles variables en remarquant que :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\phi \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\sin\phi}{r} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{r}$$

et en exprimant $\frac{\partial}{\partial x_i} (. \frac{\partial}{\partial x_j} .)$ puis σ dans ce système.

1.3. Cas homogène isotrope (sans couplage)

(1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\rho \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - k(\Delta\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\theta}{\partial r}) = f^{\Omega} \quad \text{dans } \Omega' & (1.6)\\[2ex]
\sigma = k(\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\cos(\vec{n},\vec{r}) + \dfrac{\partial\theta}{\partial z}\cos(\vec{n},\vec{z})) \quad \text{sur } \Gamma_1' & (1.7)\\[2ex]
\sigma + g\theta = f^{\Gamma} \quad \text{sur } \Gamma_1' & (1.8)\\[2ex]
\theta = \overline{\theta} \quad \text{sur } \Gamma_0' & (1.9)
\end{array}\right.$$

où $\theta = \theta(t,r,z)$ et $\sigma = \sigma(t,r,z)$.

Ω' est l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ déduit de Ω par axisymétrie, de même Γ_0' et Γ_1' se déduisent de Γ_0 et Γ_1 par axisymétrie.

1.4. Cas général

La programmation prend en compte le cas général où k_{ij} est quelconque et où il y a couplage avec les déformations initiales.

II. DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES AUX QUANTITES ELEMENTAIRES

Nous renvoyons à [1] pour la définition précise d'une formulation variationnelle de ce problème.

Rappelons simplement que si on définit le problème suivant :

Trouver, à chaque instant, la température $\theta = \theta(r,z)$ où

$$\theta \in V = \{v/v\sqrt{r} \in L^2(\Omega'),\ Dv\sqrt{r} \in L^2(\Omega)\} \cap \{v/\Gamma_1 = \bar{\theta}\}$$

(P') solution de :

$$2\pi \int_{\Omega'} \rho\ {}^t\{v\} \frac{\partial}{\partial t} \{\theta\} r dr dz + 2\pi \int_{\Omega'} {}^t\{Dv\}[K]\{D\theta\} r dr dz$$

$$+ 2\pi \int_{\Gamma_1'} {}^t\{v\} g\{\theta\} r d\Gamma$$

$$= 2\pi \int_{\Omega'} {}^t\{v\}\{f^{\Omega}\} r dr dz + 2\pi \int_{\Gamma_1'} {}^t\{v\}\{f^{\Gamma}\} r d\Gamma$$

pour tout $v \in V$,

θ peut aussi dépendre de t.

Alors, sous certaines conditions de régularité, la solution de (P') est solution de (P) et réciproquement.

Appliquant la méthode des éléments finis, on obtient facilement les éléments discrets correspondants :

soit $\mathcal{T}_h$ la triangulation dont l'élément générique est noté T : la matrice de masse provient de

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \rho(v,\theta)dT \ ,$$

la matrice de rigidité provient de :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{\int_T {}^t\{Dv\}[K]\{D\theta\}dT + \chi_T \int_{T\cap\Gamma_1} g(v,\theta)d\Gamma\}$$

où

$$[K] = \{k_{ij}\}_{i,j} \quad \text{et} \quad \chi_T = \begin{matrix} 0 \text{ si } T \text{ n'est pas frontalier} \\ 1 \text{ sinon.} \end{matrix}$$

Le second membre provient de :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{\int_T {}^t\{v\}\{f^{\Omega}\}dT + \chi_T \int_{T\cap\Gamma_1} {}^t\{v\}\{f^{\Gamma}\}d\Gamma\}.$$

Notre problème est donc de calculer les quantités élémentaires ainsi introduites :

- la matrice de masse élémentaire
- la matrice de rigidité élémentaire
- le second membre élémentaire

ainsi que :

- les flux élémentaires (en un sens que l'on précisera par la suite).

Ces calculs constituent l'objet des paragraphes suivants.

III. POINT DE VUE ELEMENTAIRE

Le but de ce paragraphe est d'exprimer formellement sous une forme adaptée aux calculs les différentes intégrales de 2.

Nous présentons le cas du quadrangle à 4 noeuds. On définit $\hat{F}_T$ la transformation permettant le passage de l'élément de référence $\hat{T}$ à l'élément courant T :

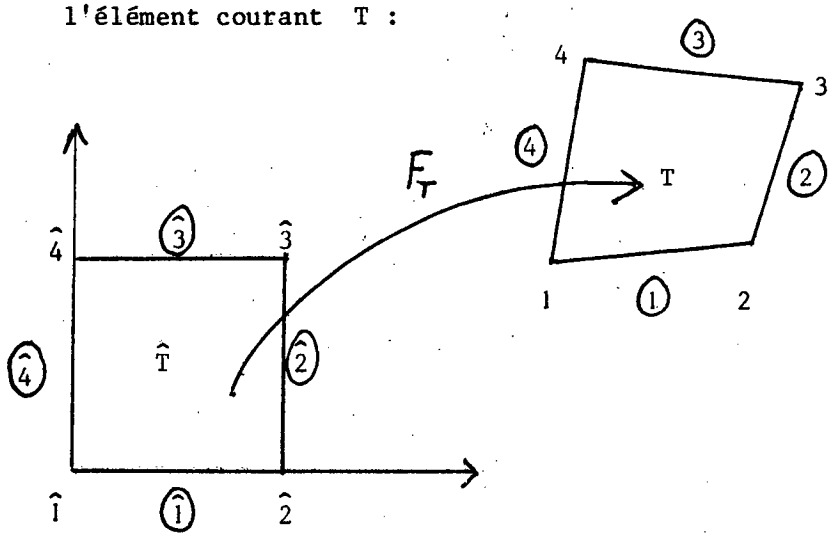


Figure 5

$\hat{F}_T$ est de la forme :

$$\hat{F}_T = \begin{Bmatrix} F_1(r,z) \\ F_2(r,z) \end{Bmatrix} .$$

F_1 et F_2 s'expriment en fonction des 4 polynômes de base de l'élément (notés par p_i , i = 1 à 4) :

$$F_1(r,z) = \sum_{i=1}^{4} r_i p_i(r,z)$$

$$F_2(r,z) = \sum_{i=1}^{4} z_i p_i(r,z) .$$

Dans notre cas, on a :

$$p_1(r,z) = (1-r)(1-z)$$

$$p_2(r,z) = r(1-z)$$

$$p_3(r,z) = rz$$

$$p_4(r,z) = (1-r)z \ .$$

On désigne par $[\hat{DF}]$ la quantité :

$$[\hat{DF}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial r} & \dfrac{\partial F_2}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et Δ son jacobien :

$$\Delta = |\det(\hat{DF})|$$

En utilisant la notation condensée :

$$[P] = \{p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4\}$$

et en introduisant :

$$[DP] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial p_4}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial p_4}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$$^t\{\theta_T\} = {}^t\{\theta(1)\ldots\theta(4)\} \ ,$$

les températures élémentaires avec

$$\theta(j) = \theta(r_j, z_j)$$

la température au point $M = (r_j, z_j)$, on peut exprimer :

$$\theta/T = [P]\{\theta_T\}$$

$$D\theta/T = [DP]\{\theta_T\} .$$

On note de plus

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ \text{sym} & K_3 \end{bmatrix}$$

le tenseur de conductivité représenté par cette matrice 2×2.

IV. LES TABLEAUX ELEMENTAIRES

Ces tableaux correspondent aux intégrales écrites en 2.

4.1. Masse élémentaire

Sur l'élément T elle s'écrit matriciellement par :

$$\int_T {}^t[P]\rho[P]dT \ .$$

4.2. Rigidité élémentaire

Son terme de "volume" est :

$$\int_T {}^t[DP][K][DP]dT \ .$$

Son terme de bord (provenant de (1.8)) est :

$$\int_{T\cap\Gamma_1} {}^t[P]g[P]d\Gamma \ .$$

4.3. Second membre élémentaire

Il comprend deux termes : la contribution de f^{Ω} et de f^{Γ} (terme classique) et la contribution des déformations initiales. L'écriture matricielle correspondante est donc :

$$\int_T {}^t[P]f^{\Omega}dT + \int_{T\cap\Gamma_1} {}^t[P]f^{\Gamma}d\Gamma$$

$$+ \int_T {}^t[P]\{c\}[\mathscr{D}]\begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\{u_T\}\, dT$$

où $\{c\}$ est le coefficient de couplage entre les déplacements et la température, représenté par une matrice 1×4; $[\mathscr{D}]$ dénote la matrice

des déformations (cf. 5) représentée par un tableau 4×5.

4.4. Le flux élémentaire

Provenant de (1.7), il s'écrit de manière adaptée aux calculs par :

$$^{t}\{\cos(\vec{n},\vec{x}_i)\}[K][DP] \ .$$

Le flux élémentaire est calculable avant même de connaître le champ des températures solution du problème et sera utile pour calculer le flux réel à travers la frontière Γ_1' par "remontée" avec $\{\theta_T\}$ après résolution du problème.

En fait, le flux réel ne sera calculé qu'en certains points de la frontière.

V. INTEGRATION NUMERIQUE

Les tableaux élémentaires introduits précédemment font apparaître deux types d'intégrations : celle portant sur T et celle portant sur la frontière de T.

Etant donné une formule d'intégration numérique sur $\hat{T}$ et une arête de $\hat{T}$, nous évaluerons schématiquement les termes par :

$$\int_T \ldots \overset{\leftarrow}{\rightarrow} \int_{\hat{T}} \ldots \overset{\leftarrow}{\rightarrow} \text{quadrature}$$

etc.

5.1. Intégration numérique de surface

Le calcul à effectuer est de la forme : $\int_T h(r,z)dT$ où $h(.,.)$ est l'une des formes rencontrées plus haut; on passe d'abord sur l'élément de référence sur lequel on intègre numériquement :

$$\int_T h(r,z)dT = \int_{\hat{T}} \hat{h}(\hat{r},\hat{z})\ \Delta(\hat{r},\hat{z})d\hat{T}$$

où Δ est le jacobien de la transformation $\hat{F}_T$.

$$\begin{aligned}\int_T h(r,z)dT &= \int_{\hat{T}} 2\pi\ \hat{h}(\hat{r},\hat{z})\Delta(\hat{r},\hat{z})r\ d\hat{r}d\hat{z}\\ &= \int_{\hat{T}} 2\ \pi\hat{h}(\hat{r},\hat{z})\Delta(\hat{r},\hat{z})F_1(\hat{r})d\hat{r}d\hat{z}\\ &\simeq \sum_{\ell=1}^{npi} 2\pi\ \hat{h}(\hat{b}_\ell)\Delta(\hat{b}_\ell)F_1(\hat{b}_\ell)\omega_\ell.\end{aligned}$$

La quadrature est définie par les npi poids ω_ℓ et les points $\hat{b}_\ell = (\hat{r}_\ell,\hat{z}_\ell)$ ($F_1(.)$ est la première composante de $\hat{F}_T$).

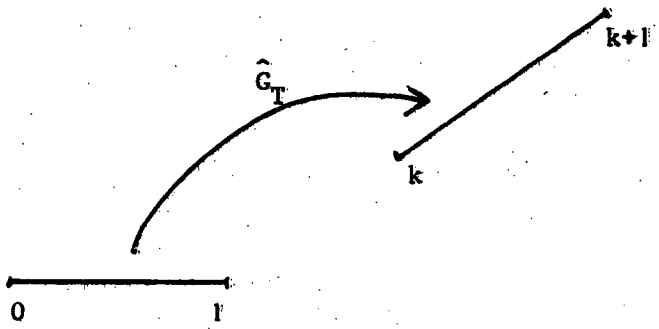
5.2. Intégration de bord

De la même façon, pour calculer $\int_{T\cap\Gamma_I} h(r,z)dT$, on passe sur l'élément de référence (arête $]0,1[$) sur lequel on intègre numériquement :

$$\int_{T\cap\Gamma_I} h(r,z)dT\cap\Gamma_I = \int_{\hat{T}\cap\hat{\Gamma}} \hat{h}(\hat{r},\hat{z})\delta_k(\hat{r},\hat{z})d\hat{T}\cap\hat{\Gamma}$$

où $\delta_k(\hat{r},\hat{z})$ désigne la longueur de l'arête considérée.

Si $\hat{G}_T = \{G_1,G_2\}$ est la transformation permettant l'envoi de l'arête de référence $]0,1[$ sur l'arête k de l'élément courant traitée, on a :



$r_k, z_k, r_{k+1}, z_{k+1}$ désignent les coordonnées des extrémités de l'arête k de l'élément T.

Figure 6

La longueur de l'arête k s'exprime par :

$$\delta_k = \sqrt{dG_1^2 + dG_2^2} \; .$$

Ainsi :

$$\int_{T\cap\Gamma_I} h(r,z)dT\,\Gamma_I = \int_{\hat{T}\cap\hat{\Gamma}} 2\pi\,\hat{h}(\hat{\sigma})\,\delta_k(\hat{\sigma})\,r\,d\hat{\sigma}$$

$$= \int_{\hat{T}\cap\hat{\Gamma}} 2\pi\,\hat{h}(\hat{\sigma})\,\delta_k\,G_1(\hat{\sigma})d\hat{\sigma}$$

$$\simeq \sum_{\ell=1}^{npia} 2\pi\,\hat{h}(\hat{b}_\ell)\delta_k(\hat{b}_\ell)G_1(\hat{b}_\ell)$$

où $d\hat{\sigma}$ désigne l'élément d'intégration sur $]0,1[$, $\hat{\sigma}$ la variable courante et la quadrature a pour paramètre $npia, \omega_\ell, b_\ell$.

5.2.1. Intégration de degré 1

Pour les éléments quadrangulaires et triangulaires de degré 1, on a :

$$G_T = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \text{ avec } \begin{Bmatrix} G_1(\hat{\sigma}) = r_k(1-\hat{\sigma}) + r_{k+1}\,\hat{\sigma} \\ G_2(\hat{\sigma}) = z_k(1-\hat{\sigma}) + z_{k+1}\,\hat{\sigma} \end{Bmatrix}$$

et

$$dG_1 = -r_k + r_{k+1}$$

$$dG_2 = -z_k + z_{k+1} \ .$$

Ainsi

$$\delta_k(\hat{\sigma}) = \sqrt{(r_{k+1}-r_k)^2 + (z_{k+1}-z_k)^2}$$

et ne dépend pas de $\hat{\sigma}$:

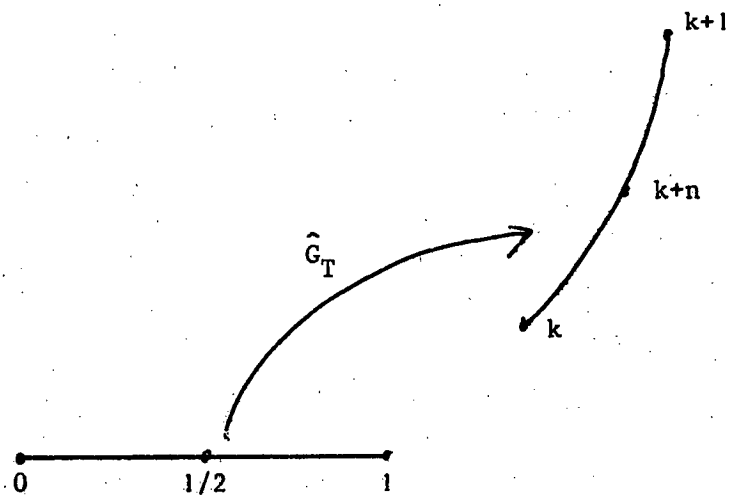
$$\int_{T\cap\Gamma_1} h(r,z)dT\cap\Gamma_1 \simeq \sum_{\ell=1}^{npia} 2\pi\ \hat{h}(\hat{b}_\ell)\delta_k(\hat{b}_\ell)\omega_\ell \ .$$

5.2.2. Interpolation de degré 2

Pour les éléments correspondants, on a :

$$G_1(\hat{\sigma}) = (1-\hat{\sigma})(1-2\hat{\sigma})r_k + \hat{\sigma}(2\hat{\sigma}-1)r_{k+1} + 4\hat{\sigma}(1-\hat{\sigma})r_{k+n}$$

et $G_2(\hat{\sigma})$ a la même forme en remplaçant r par z.



L'arête k considérée a pour sommet (r_k, z_k) et (r_{k+1}, z_{k+1}), son milieu est (r_{k+n}, r_{k+n}) où n=4 (triangle P2) ou n=5 (quadrangle Q2).

Dans ce cas :

$$\delta_k(\hat{\sigma}) = \sqrt{dG_1^2 + dG_2^2} \quad \text{avec}$$

$$dG_1 = (4\hat{\sigma}-3)r_k + (4\hat{\sigma}-1)r_{k+1} + (4-8\hat{\sigma})r_{k+n}$$

idem pour dG_2 avec z remplaçant r.

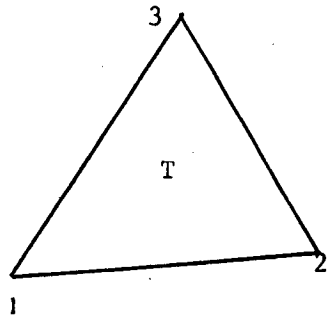
Ainsi $\delta_k(\hat{\sigma})$ dépend effectivement de $\hat{\sigma}$ et

$$\int_{T\cap\Gamma_1} h(r,z)dT\cap\Gamma_1 \simeq \sum_{\ell=1}^{npia} 2\pi\, \hat{h}(\hat{b}_\ell)\delta_k(\hat{b}_\ell)G_1(\hat{b}_\ell)\omega_\ell \ .$$

VI. DESCRIPTION DES 4 ELEMENTS

6.1. Le triangle à 3 noeuds

Description



Interpolation P1 pour la température

3 noeuds : les 3 sommets.

Les 3 polynômes de base [P] sont consignés dans le tableau suivant :

i	p_i
1	1-r-z
2	r
3	z

Tableau 1

Remarque : sur le bord, [P] se réduit à $\{1-\sigma;\sigma\}$.

Intégration de bord

Formule de Gauss à 2 points :

$$\text{npia} = 2 \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = 1/2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ .$$

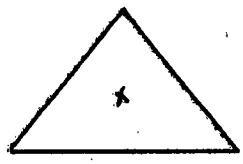
Remarque : cf. 5.2.1 pour G_T et δ_k.

Intégration de surface

Il est fondamental de choisir une formule dont les points d'intégration soient internes.

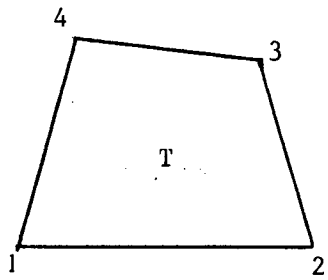
Nous prenons :

$$npi = 1 \quad ; \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \hat{b}_1 = \{1/3 \ , \ 1/3\}$$



6.2. Le quadrangle à 4 noeuds

Description



Interpolation Q1 pour la température

4 noeuds : les 4 sommets.

Les 4 polynômes de base [P] **sont :**

i	p_i
1	$(1-r)(1-z)$
2	$r(1-z)$
3	rz
4	$(1-r)z$

Tableau 2

Remarque : sur le bord, [P] se **réduit à** $\{1-\sigma;\sigma\}$.

Intégration de bord

Formule de Gauss à 2 points :

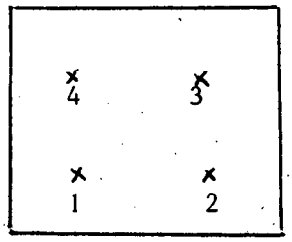
$$\text{npia} = 2 \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = 1/2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Remarque : cf. 5.2.1 pour G_T et δ_k .

Intégration de surface

Formule de Gauss à 4 points :

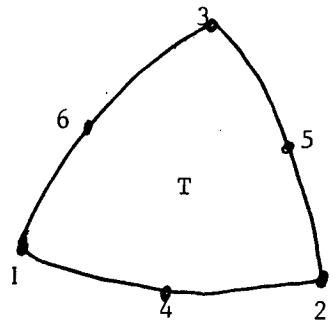


npi = 4 ; $\omega_\ell = 1/4 \quad (\ell = 1,4)$

$\hat{b}_\ell = ((\alpha_1,\alpha_1);(\alpha_2,\alpha_1);(\alpha_2,\alpha_2);(\alpha_1,\alpha_2))$

6.3. Le triangle à 6 noeuds

Description



Interpolation P2 pour la température.

6 noeuds : les 3 sommets et les 3 milieux des arêtes.

Les 6 polynômes de base [P] **sont :**

i	p_i
1	$(1-r-z)(1-2r-2z)$
2	$z(2r-1)$
3	$z(2z-1)$
4	$4r(1-r-z)$
5	$4rz$
6	$4z(1-r-z)$

Tableau 3

Remarque : sur le bord, [P] se réduit à $\{(1-\sigma)(1-2\sigma);\sigma(2\sigma-1);4\sigma(1-\sigma)\}$

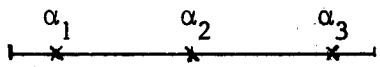
Intégration de bord

Formule de Gauss à 3 points.

npia = 3 ; $\omega_1 = 5/18 = 0{,}2777...$

$\omega_2 = 8/18 = 0{,}444...$

$\omega_3 = 5/18$



$$\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{3/5}}{2} = 0{,}1127016$$

$$\alpha_2 = 1/2$$

$$\alpha_3 = \frac{1+\sqrt{3/5}}{2} = 0{,}887298$$

Remarque : cf. 5.2.2 pour G_T et δ_k .

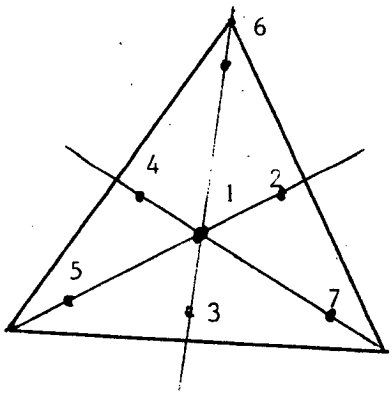
Intégration de surface

Formule à 7 points

npi = 7 ; $\omega_I = 9/80 = 0{,}1125$

$$\omega_{II} = \frac{155-\sqrt{15}}{2400} = 0{,}06296959$$

$$\omega_{III} = \frac{155+\sqrt{15}}{2400} = 0{,}06619707$$



$$\alpha_1 = \frac{6-\sqrt{15}}{21} = 0{,}101287$$

$$\alpha_2 = \frac{6+\sqrt{15}}{21} = 0{,}470142$$

$$\alpha_3 = \frac{9-2\sqrt{15}}{21} = 0{,}05971587$$

$$\alpha_4 = \frac{9+2\sqrt{15}}{21} = 0{,}797427$$

$$\omega_1 = \omega_I$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_{III}$$

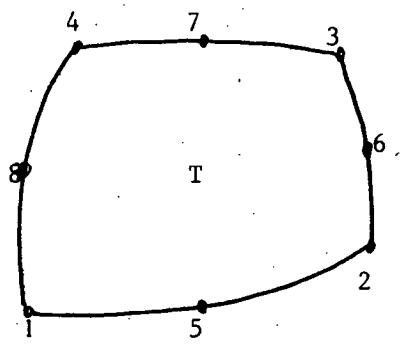
$$\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_{II}$$

Tableau des points d'intégration

ℓ	b_ℓ	
1	1/3	1/3
2	α_2	α_2
3	α_2	α_3
4	α_3	α_2
5	α_1	α_1
6	α_1	α_4
7	α_4	α_1

6.4. Le quadrangle à 8 noeuds

Description



Interpolation Q_2' pour la température.

8 noeuds : les 4 sommets et les 4 milieux des arêtes.

Les 8 polynômes de base [P] sont :

i	p(i)
1	(1-r)(1-z)(1-2r-2z)
2	r(1-z)(2r-2z-1)
3	-rz(3-2r-2z)
4	(1-r)z(-2r+2z-1)
5	4r(1-r)(1-z)
6	4r(1-z)z
7	4r(1-r)z
8	4(1-r)(1-z)z

Tableau 4

Remarque : sur le bord, [P] se réduit à $\{(1-\sigma)(1-2\sigma);\sigma(2\sigma-1);4\sigma(1-\sigma)\}$

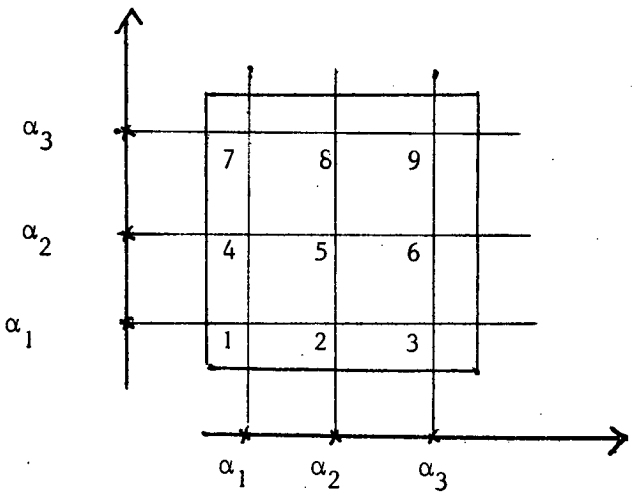
Intégration de bord

Formule de Gauss à 3 points. Cf. 6.3.

Remarque : cf. 5.2.2 pour G_T et δ_k.

Intégration de surface

Formule de Gauss à 9 points.



Soient $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3/5})$

$\alpha_2 = \frac{1}{2}$

$\alpha_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3/5})$

$\omega_1 = 5/18$

$\omega_2 = 8/18$

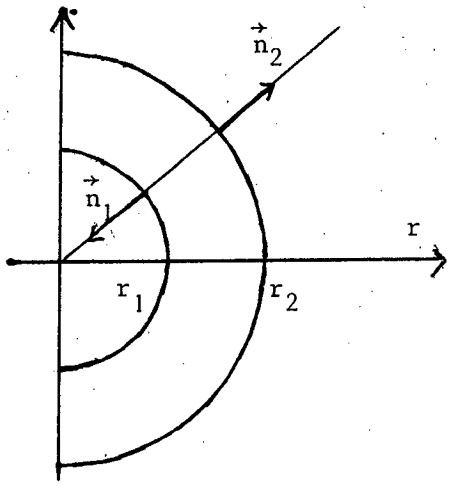
$\omega_3 = \omega_1$.

De $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ on déduit les 9 points d'intégration (cf. figure).
Des poids $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ on déduit les 9 poids par la formule :

$$\omega_{ij} = \omega_i\omega_j \ .$$

VII. PROBLEME MODELE

Afin de valider ces 4 éléments, nous allons calculer les températures et le flux pour le problème modèle suivant :



$\Delta\theta = f^{\Omega}$ dans Ω avec $f^{\Omega} = 4$

$k = 1.$

Cercle intérieur :

$\vec{n}_1 = (-r,-z)$

échange $g_1 = 0$ $\quad f^{\Gamma} = -2$

Cercle extérieur :

$\vec{n}_2 = (\frac{r}{2}, \frac{z}{2})$

échange $g_2 = 1$ $\quad f^{\Gamma} = 8.$

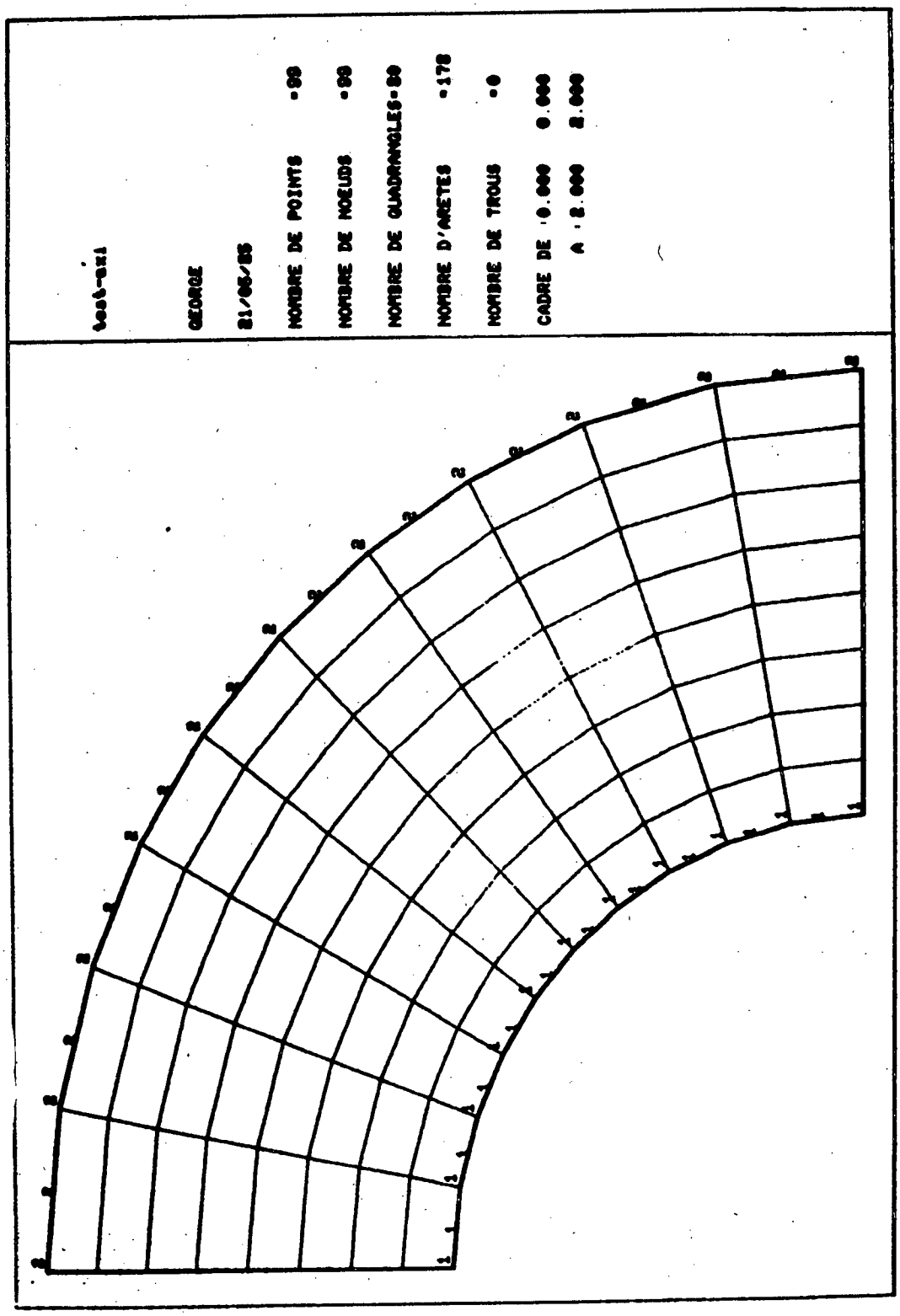
Le problème traité est donc :

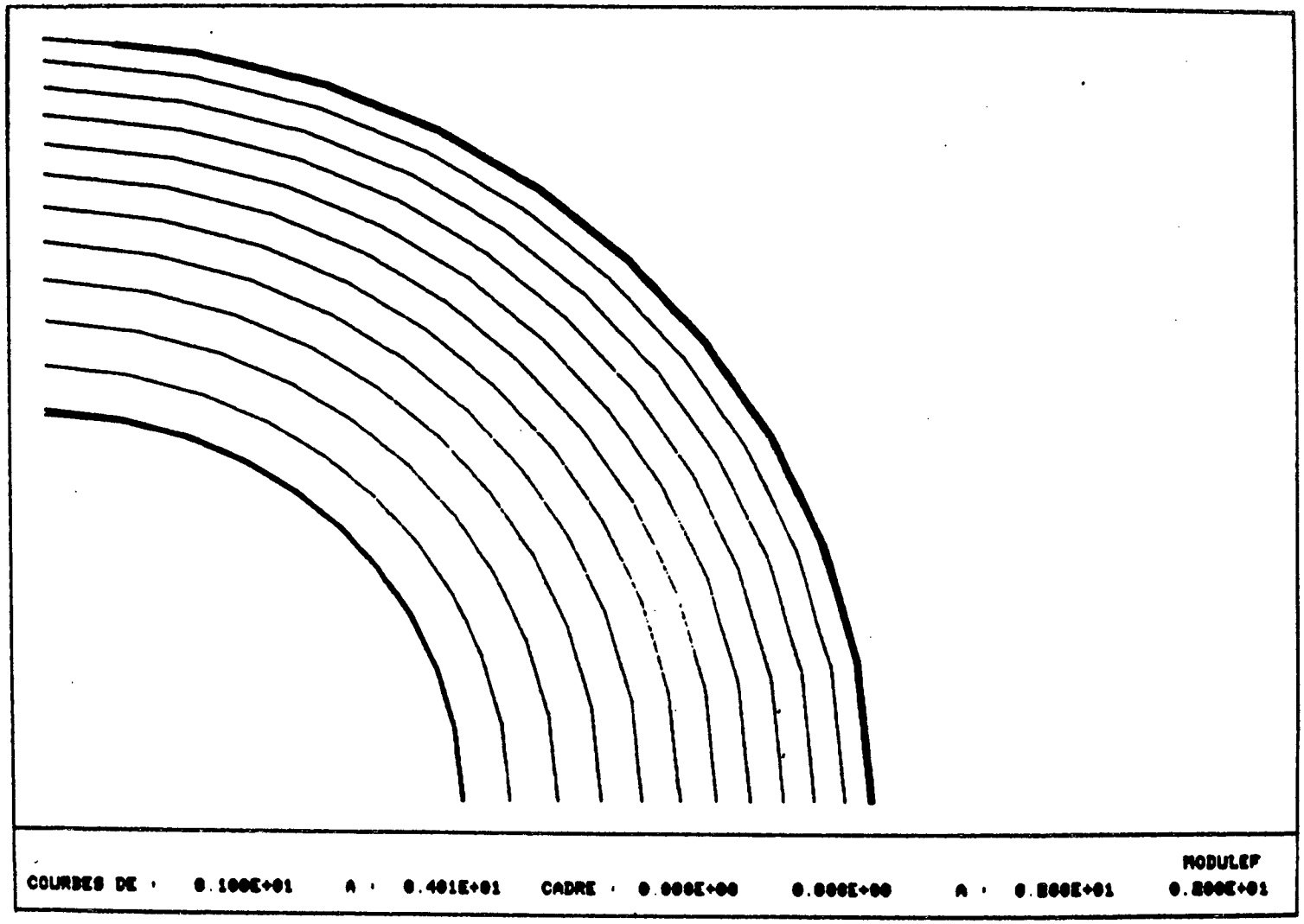
$$\begin{cases} \Delta\theta = f^{\Omega} \text{ dans } \Omega \\ k \dfrac{\partial\theta}{\partial n_1} + g_1\theta = f^{\Gamma_1} \text{ sur } \Gamma_1 \\ k \dfrac{\partial\theta}{\partial n_2} + g_2\theta = f^{\Gamma_2} \text{ sur } \Gamma_2 . \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : les conditions de Fourier sur Γ_1 et Γ_2 assurent que le problème est bien posé.

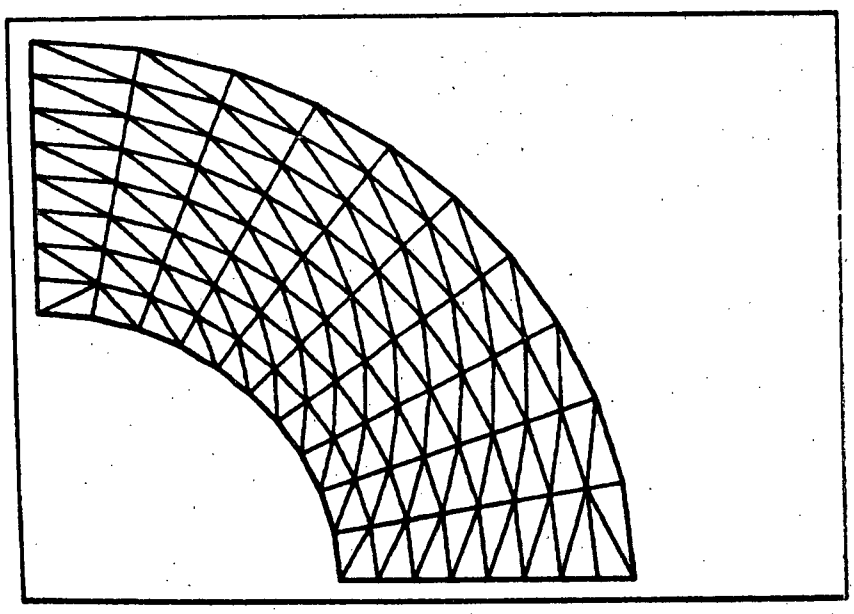
La solution exacte de ce problème est connue :

$$\theta = r^2 + z^2 .$$

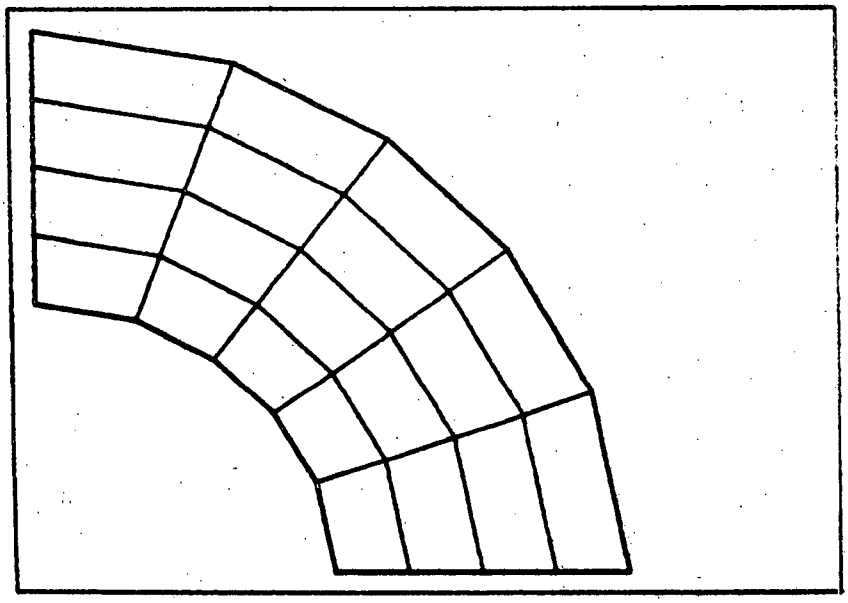

test-ex1
GEORGE
21/05/85
NOMBRE DE POINTS =90
NOMBRE DE NOEUDS =90
NOMBRE DE QUADRANGLES=80
NOMBRE D'ARETES =178
NOMBRE DE TROUS =0
CADRE DE (0.000 0.000
A (2.000 2.000



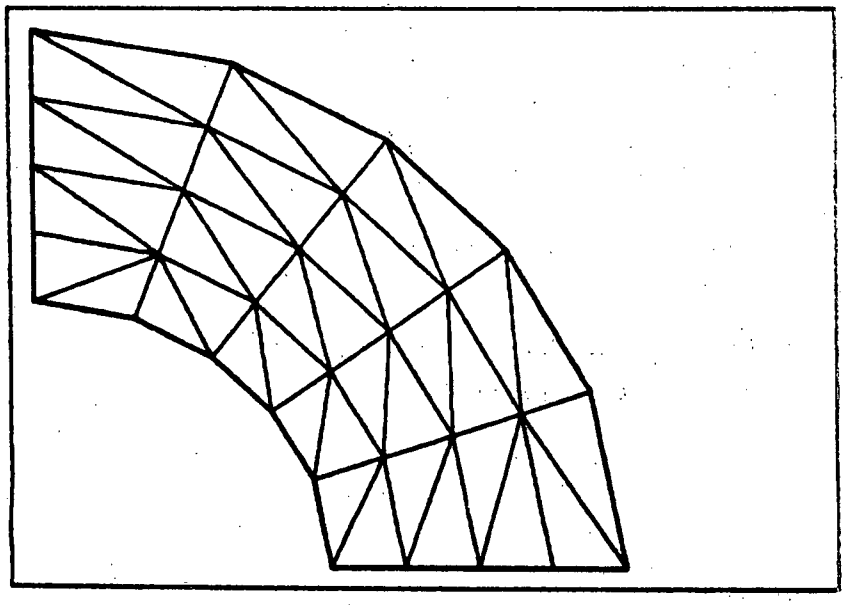
Isovaleurs élément Q1



Maillage en triangles
(interpolation P1)
180 éléments
99 noeuds



Maillage en quadrangles
(interpolation Q2)
20 éléments
79 noeuds



Maillage en triangles
(interpolation P2)
40 éléments
99 noeuds

```
      SUBROUTINE TRAP1D(M,NOCAL,NOTELM,NMMAST,NTYTA,NINDI,NSTOC,
     &                  NDSDE,R,Z,SURFAM,LSURFM,ARETEM,LARETM,NOREF,
     &                  NFPOBA,LCPT,AE)
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT : CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR DE L ELEMENT TRIA AP1D
C ---   TRIANGLE P1 AXISYMETRIQUE  THERMO-ELASTIQUE
C PARAMETRES D ENTREE : VOIR BROCHURE 95
C -------------------
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C PROGRAMMEUR : PL GEORGE INRIA 1985
C ......................................................................
      DIMENSION M(*),R(*),Z(*),SURFAM(*),AE( *),NOTELM(*),
     &          ARETEM(*),NOREF(*)
      DATA IA2P13/0/
C
      N2P13 = ICHAR4('2P13')
      NMMAST    = 6
      NSTOC     = 1
      NTYTA     = 2
C
      IF(NOCAL-1) 1 , 1 , 2
C
    1 NINDI     = 1
      LSURFM    = 3
      LARETM    = 2
      RETURN
C
    2 IF(LCPT-1) 3 , 3 , 4
C
    3 CALL FINDEL(M,5,N2P13,IA2P13,NFPOBA)
      GOTO 5
C
C     RECHERCHE DE L ADRESSE DES TABLEAUX 2P13 ET DP13 DANS M
C
    4 CALL FINDIA(N2P13,IA2P13)
      IF(IA2P13 .LE. 0) GOTO 3
C
    5 NBPOLY    = M(IA2P13)
      NPI       = M(IA2P13 + 1)
      IAPOID    = IA2P13    + 2
      IAP13     = IAPOID    + 2 * NPI
      IADP13    = IAP13     + 2 * NBPOLY * NPI
C
      CALL TRAP1X(NBPOLY,NPI,M(IAPOID),M(IAP13),M(IADP13),
     &            SURFAM,ARETEM,NOREF,NDSDE,R,Z,NOTELM,AE)
      END
```

Les sous-programmes TRAP1D et TRAP1X : calcul de la matrice élémentaire de rigidité (bibliothèque Modulef : THER).

```
      SUBROUTINE TRAP1X(NBPOLY,NPI,POIDS,POL,DPOL,SURFAM,ARETEM,NOREF,
     &                  NDSDE,R,Z,NOTELM,AE)
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT : CALCUL EFFECTIF DE LA MATRICE DE RAIDEUR DE L ELEMENT TRIA AP1D
C ---
C PARAMETRES D ENTREE : VOIR BROCHURE 95
C -------------------
C NBPOLY : NBRE DE POLYNOMES
C NPI    : NBRE DE POINTS D INTEGRATION NUMERIQUE
C POIDS  : LES NPI POIDS DE LA FORMULE D INTEGRATION
C POL    : VALEUR DES POLYNOMES DE BASE P1 LAGRANGE SUR LE RECTANGLE
C          UNITE AUX POINTS D'INTEGRATION
C           POL(I,  L)= P(I) (XL)
C DPOL   : IDEM POUR LES DERIVEES DE CES POLYNOMES
C          DPOL(I,J,L)=DP(J)/DX(I) (XL)
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C     PROGRAMMEUR : PL GEORGE INRIA 1985
C ......................................................................
      DOUBLE PRECISION POL,DPOL,F1,F2,DFM1,POIDEL,DP,AUX,D,RD,ZD,TAUXI,
     &                 C,D2PI,CONDUC,POIDS,D1,DAE,RR,XA,POIDSA
      DIMENSION POL(3,*),DPOL(2,3,*),R(*),Z(*),AE(*),NOTELM(*),
     &          SURFAM(*),ARETEM(*),NOREF(*),POIDS(*),POIDSA(2),XA(2)
      COMMON/THELAD/INDICV,INDICS,INDICA,INDICP,
     &              D2PI,F1(4),F2(4),DFM1(4,3),POIDEL(3),DP(2,3,3),
     &              CONDUC(3),DAE(6),C(3),TAUXI(3,2),NZW(900)
      DATA NPIA,POIDSA,XA/2,   0.5D0,          0.5D0,
     &                         0.211324865404D0,0.788675134593D0/
C
      IF ( INDICS .EQ. 0 ) THEN
C
C        LE CALCUL DE F1,F2,DFM1,DELTA
C        -----------------------------
         CALL T1AP1D(NBPOLY,NPI,POIDS,POL,DPOL,R,Z)
      END IF
C
C     CALCUL DANS TOUS LES CAS DE LA MATRICE DE CONDUCTIVITE CONDUC(3)
C     ----------------------------------------------------------------
      IF ( IABS(NOTELM(1)) .EQ. 20 ) THEN
         RD      = F1(4)
         ZD      = F2(4)
         LONG    = 1
         IF ( NOTELM(1) .LE. 0 ) LONG = 3
         N       = 0
         CALL SPCOND(NDSDE,RD,ZD,N,LONG,SURFAM(1))
      END IF
C
C      MATERIAU HOMOGENE ISOTROPE
C
      IF ( NOTELM(1) .GT. 0 ) THEN
         CONDUC(1) = SURFAM(1)
         CONDUC(2) = 0.D0
         CONDUC(3) = SURFAM(1)
      ELSE
C
C      MATERIAU ANISOTROPE
C
         DO 1 I=1,3
            CONDUC(I) = SURFAM(I)
    1    CONTINUE
      END IF
C
```

```
C     INITIALISATION DE LA MATRICE DAE A ZERO
C     ---------------------------------------
      CALL AZEROD(1,1,6,DAE)
C
C     CONTRIBUTION DE LA SURFACE
C     --------------------------
      DO 3 L=1,NPI
         AUX = POIDFL(L)
         DO 2 I=1,3
            C(I) = CONDUC(I) * AUX
    2    CONTINUE
         CALL TAPAOD(3,2,DP(1,1,L),C,DAE,TAUXI)
    3 CONTINUE
C
C     CONTRIBUTION DES ARETES A LA RAIDEUR
C     ------------------------------------
      DO 6 K=1,3
         IF ( NOREF(K) .NE. 0 ) THEN
            J  = K + 1
            IF ( J .EQ. 4 ) J = 1
            RR = R(K)
            D  = R(J)-RR
            D1 = Z(J)-Z(K)
            D1 = DSQRT(D*D+D1*D1)*D2PI
C
            IF ( NOTELM(1+K) .EQ. 20 ) THEN
               DO 4 L=1,NPIA
                  L1 = L + NPIA * ( K - 1 )
                  RD = R(K) * ( 1. - XA(L) ) + R(J) * XA(L)
                  ZD = Z(K) * ( 1. - XA(L) ) + Z(J) * XA(L)
                  LONG = 1
                  N    = 0
                  CALL SPECHA(NOREF(K),RD,ZD,N,LONG,ARETEM(L1))
    4          CONTINUE
            END IF
C
            DO 5 L=1,NPIA
               RR = ( 1. - XA(L) ) * R(K) + XA(L) * R(J)
               L1 = L + ( K - 1 ) * NPIA
               D  = D1 * RR *  POIDSA(L) * ARETEM(L1)
               IA = K * ( K + 1 ) / 2
            DAE(IA) = DAE(IA) + D * ( 1. - XA(L) ) * ( 1. - XA(L) )
               IA = J * ( J + 1 ) / 2
            DAE(IA) = DAE(IA) + D * XA(L) * XA(L)
               IF ( K .LT. J ) THEN
                  IA = J * ( J - 1 ) / 2 + K
               ELSE
                  IA = K * ( K - 1 ) / 2 + J
               END IF
            DAE(IA) = DAE(IA) + D * XA(L) * ( 1. -XA(L) )
    5       CONTINUE
         END IF
    6 CONTINUE
C
      DO 7 I=1,6
         AE(I) = DAE(I)
    7 CONTINUE
      END
```

VIII. IMPLEMENTATION DANS LA BIBLIOTHEQUE MODULEF

8.1. Récapitulation

Triangle à 3 noeuds	Quadrangle à 4 noeuds	Triangle à 6 noeuds	Quadrangle à 8 noeuds
TRIA AP1D	QUAD AQ1C	TRIA AP2C	QUAD AQ2C
POBA 2P13	POBA 2Q13	POBA 2P26	POBA 2Q25
Barycentre	4 points de Gauss	7 points	9 points de Gauss
2 points de Gauss	2 points de Gauss	3 points de Gauss	3 points de Gauss

Tableau récapitulatif

Dans ce tableau, nous avons mentionné, pour chaque élément :

- le nom de l'élément
- le nom du tableau du fichier POBA contenant les valeurs utiles (polynômes de base aux points d'intégration numérique...) cf. [14] et [95]
- les points de la formule d'intégration de surface
- les points de la formule d'intégration de bord.

8.2. Utilisation de ces éléments

La documentation [14] décrit en détails la manière d'appeler ces éléments pour calculer les tableaux élémentaires (masse, rigidité, second membre, flux).

Résumons ici les points principaux :

i - les tableaux élémentaires sont calculés par le module THELAS ou THERCT

ii - pour THERCT les données $(\rho, k, f^{\Omega}, f^{\Gamma}, \ldots)$ sont constantes par élément et sont des arguments du module

iii - pour THELAS, les données peuvent être fournies de différentes manières :

. par tableau(x)

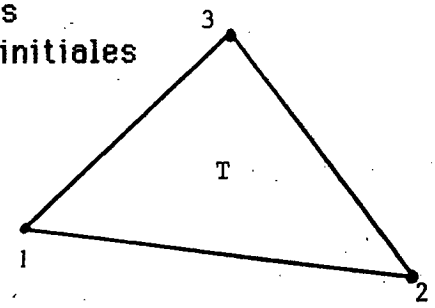
. par sous-programme (FORCE et MILIEU)

. par sous-programme utilisateur (SPCAPA,...,SPSOUR,...).

La description de la manière dont on fournira les données est contenue dans les S.D MILI et FORC que l'on créera en exécutant les modules COMILI et COFORC. Lors de l'exécution du module THELAS on fournira donc le(s) tableau(x) et le(s) sous-programme(s) selon ces spécifications.

Pour savoir exactement quelles sont les données (nombre et nature) on se reportera aux fiches techniques de chaque élément (cf. ci-après).

THERMIQUE AXISYMETRIQUE
THER **TRIA AP1D** : TRIANGLE à 3 noeuds
(*PL GEORGE*) avec déformations initiales



Espace R^2
Inconnues : température
Code : 100039
Code géometrique : 3
Interpolation : **P1** Lagrange pour la température
Un type de noeud : les 3 sommets
1 degre de liberte par noeud : la valeur de la température (mnémonique 'VN ')
Element de reférence : le triangle unité
Points et noeuds coincident partout
Les points sont définis par leur coordonnées
Pas de tableau associé
Blocage : température = valeur SD BDCL
Le fichier **POBA** est nécessaire (tableau **2P13**)

DONNEES : (*en simple précision*)

Matrice de **MASSE** : (partie MILI , S)
ρ capacité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : (partie MILI)

termes de surface : (S)
cas isotrope : (notel > 0)
k conductivité et 2 zéros
cas anisotrope : (notel < 0)
k_{ij} les 3 termes de la matrice de conductuvité
termes de bord : (L)
g(k) : le coefficient de transfert aux k points d'intégration (2 points de Gauss)

couplage élastique : (S)
c le coefficient de couplage
(c'est la 4-iéme valeur)

Tableau des **FLUX** : non calculable actuellement

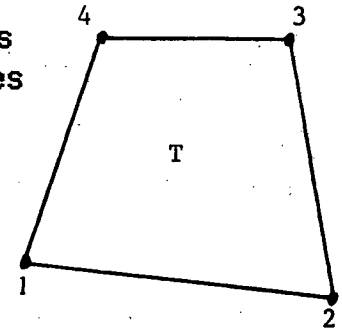
SECOND MEMBRE : (partie FORC) NDSM cas de charge
termes de surface : (S)
F(i,k) : les i cas de charges (i=1,NDSM)
les k points d'intégration
(le barycentre)

termes de bord : (L)
f(i,k) : les i cas de charges
les k points d'intégration (k=1,2)
(2 points de Gauss)

Remarques :
1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :
(notel = 20 (isotrope) ou -20 (anisotrope))
ρ par SPCAPA , k ou k_{ij} par SPCOND , g par SPECHA
F par SPSOUR , f par SPFLUX , c par SPDEFO (cf -14-)

2 : le tableau **2P13** du fichier POBA contient (dans l'ordre) :
nbpoly : nombre de polynomes de base (3)
npi : nombre de points d'intégration (1)
poids(l) : npi poids de la quadrature
pol(i,l) : valeur du polynome i au point l
dpol(i,j,l) : valeur du polynome i dérivé par rapport à la variable j au point l
poids(.) , pol(.) et dpol(.) sont en *double précision*

THERMIQUE AXISYMETRIQUE
THER **QUAD AQ1C** : QUADRANGLE à 4 noeuds
(*J ERHEL*) avec déformations initiales



Espace R^2
Inconnues : température
Code : 100040
Code géometrique : 4
Interpolation : **Q1** Lagrange pour la température
Un type de noeud : les 4 sommets
1 degre de liberte par noeud : la valeur de la température (mnémonique 'VN ')
Element de reférence : le quadrangle unité
Points et noeuds coincident partout
Les points sont définis par leur coordonnées
Pas de tableau associé
Blocage : température = valeur SD BDCL
Le fichier **POBA** est nécessaire (tableau **2Q13**)

DONNEES : (*en simple précision*)

Matrice de **MASSE** : (partie MILI , *S*)
ρ capacité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : (partie MILI)

termes de surface : (*S*)
cas isotrope : (notel > 0)
k conductivité et 2 zéros
cas anisotrope : (notel < 0)
k_{ij} les 3 termes de la matrice de conductuvité
termes de bord : (*L*)
g(k) : le coefficient de transfert aux k points d'intégration (2 points de Gauss)

couplage élastique : ($\mathcal{S}$)
c le coefficient de couplage
(c'est la 4-iéme valeur)

Tableau des **FLUX** : non calculable actuellement

SECOND MEMBRE : (partie FORC) NDSM cas de charge
termes de surface : ($\mathcal{S}$)
F(i,k) : les i cas de charges (i=1,NDSM)
les k points d'intégration
(4 points de Gauss)

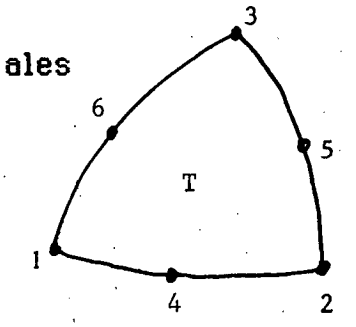
termes de bord : ($\mathcal{L}$)
f(i,k) : les i cas de charges
les k points d'intégration (k=1,2)
(2 points de Gauss)

Remarques :

1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :
(notel = 20 (isotrope) ou -20 (anisotrope))
ρ par SPCAPA , k ou k_{ij} par SPCOND , g par SPECHA
F par SPSOUR , f par SPFLUX , c par SPDEFO (cf -14-)

2 : le tableau **2Q13** du fichier POBA contient (dans l'ordre) :
nbpoly : nombre de polynomes de base (4)
npi : nombre de points d'intégration (4)
poids(l) : npi poids de la quadrature
pol(i,l) : valeur du polynome i au point l
dpol(i,j,l) : valeur du polynome i dérivé par rapport à la variable j au point l
poids(.) , pol(.) et dpol(.) sont en *double précision*

THERMIQUE AXISYMETRIQUE
THER **TRIA AP2C** : TRIANGLE à 6 noeuds
(*PL GEORGE*) avec déformations initiales



Espace R^2
Inconnues : température
Code : 100045
Code géometrique : 3
Interpolation : **P2** Lagrange pour la température
Un type de noeud : les 3 sommets et les 3 milieux des aretes
1 degre de liberte par noeud : la valeur de la température (mnémonique 'VN ')
Element de reférence : le triangle unité
Points et noeuds coincident partout
Les points sont définis par leur coordonnées
Pas de tableau associé
Blocage : température = valeur SD BDCL
Le fichier **POBA** est nécessaire (tableau **2P26**)

DONNEES : (*en simple précision*)

Matrice de **MASSE** : (partie MILI , S)
ρ capacité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : (partie MILI)

termes de surface : (S)
cas isotrope : (notel > 0)
k conductivité et 2 zéros
cas anisotrope : (notel < 0)
k_{ij} les 3 termes de la matrice de conductuvité
termes de bord : (L)
g(k) : le coefficient de transfert aux k points d'intégration (3 points de Gauss)

couplage élastique : (S)
c le coefficient de couplage
(c'est la 4-iéme valeur)

Tableau des **FLUX** : non calculable actuellement

SECOND MEMBRE : (partie FORC) NDSM cas de charge
termes de surface : (S)
F(i,k) : les i cas de charges (i=1,NDSM)
les k points d'intégration (k=1,7)
(7 points de Gauss)

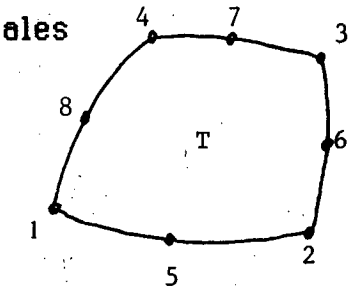
termes de bord : (L)
f(i,k) : les i cas de charges
les k points d'intégration (k=1,3)
(3 points de Gauss)

Remarques :

1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :
(notel = 20 (isotrope) ou -20 (anisotrope))
ρ par SPCAPA , k ou k_{ij} par SPCOND , g par SPECHA
F par SPSOUR , f par SPFLUX , c par SPDEFO (cf -14-)

2 : le tableau **2P26** du fichier POBA contient (dans l'ordre) :
nbpoly : nombre de polynomes de base (6)
npi : nombre de points d'intégration (7)
poids(l) : npi poids de la quadrature
pol(i,l) : valeur du polynome i au point l
dpol(i,j,l) : valeur du polynome i dérivé par rapport à la variable j au point l
poids(.) , pol(.) et dpol(.) sont en *double précision*

THERMIQUE AXISYMETRIQUE
THER **QUAD AQ2C** : QUADRANGLE à 8 noeuds
(*PL GEORGE*) avec déformations initiales



Espace R^2
Inconnues : température
Code : 100046
Code géometrique : 4
Interpolation : **Q2** Lagrange pour la température
Un type de noeud : les 4 sommets et les 4 milieux des aretes
1 degre de liberte par noeud : la valeur de la température (mnémonique 'VN ')
Element de reférence : le quadrangle unité
Points et noeuds coincident partout
Les points sont définis par leur coordonnées
Pas de tableau associé
Blocage : température = valeur SD BDCL
Le fichier **POBA** est nécessaire (tableau **2Q25**)

DONNEES : (*en simple précision*)

Matrice de **MASSE** : (partie MILI , *S*)
ρ capacité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : (partie MILI)

termes de surface : (*S*)
cas isotrope : (notel > 0)
k conductivité et 2 zéros
cas anisotrope : (notel < 0)
k_{ij} les 3 termes de la matrice de conductuvité
termes de bord : (*L*)
g(k) : le coefficient de transfert aux k points d'intégration (3 points de Gauss)

couplage élastique : ($\mathcal{S}$)
c le coefficient de couplage
(c'est la 4-iéme valeur)

Tableau des **FLUX** : non calculable actuellement

SECOND MEMBRE : (partie FORC) NDSM cas de charge
termes de surface : ($\mathcal{S}$)
F(i,k) : les i cas de charges (i=1,NDSM)
les k points d'intégration
(9 points de Gauss)

termes de bord : ($\mathcal{L}$)
f(i,k) : les i cas de charges
les k points d'intégration (k=1,3)
(3 points de Gauss)

Remarques :

1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :
(notel = 20 (isotrope) ou -20 (anisotrope))
ρ par SPCAPA , k ou k_{ij} par SPCOND , g par SPECHA
F par SPSOUR , f par SPFLUX , c par SPDEFO (cf -14-)

2 : le tableau **2Q25** du fichier POBA contient (dans l'ordre) :
nbpoly : nombre de polynomes de base (8)
npi : nombre de points d'intégration (9)
poids(l) : npi poids de la quadrature
pol(i,l) : valeur du polynome i au point l
dpol(i,j,l) : valeur du polynome i dérivé par rapport à la variable j au point l
poids(.) , pol(.) et dpol(.) sont en *double précision*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.G. CIARLET, "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North Holland 1978.

[2] K.J. BATHE, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall 1982.

[3] P.L. GEORGE, M. VIDRASCU, "Modules de Création des Tableaux Elémentaires Associés aux Eléments", Brochure Modulef n° 14, 1985.

[4] P.L. GEORGE, A. PERRONNET, M. VIDRASCU, "Intégration d'un Nouvel Elément Fini", Brochure Modulef n° 95, 1983.

[5] P.L. GEORGE, "Les Eléments thermoélastiques axisymétriques de la bibliothèque Modulef", Rapport Technique INRIA, N° 53, 1985.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique