



Resolution des equations bidimensionnelles de Navier-Stokes

B. Cardot, Frédéric Hecht

► To cite this version:

B. Cardot, Frédéric Hecht. Resolution des equations bidimensionnelles de Navier-Stokes. [Rapport de recherche] RT-0059, INRIA. 1985, pp.39. inria-00070099

HAL Id: inria-00070099

<https://inria.hal.science/inria-00070099>

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (3) 954 90 20

Rapports Techniques

N° 59

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BIDIMENSIONNELLES DE NAVIER-STOKES

Bernard CARDOT
Frédéric HECHT

Septembre 1985

Résolution des équations bidimensionnelles de Navier-Stokes

Bernard CARDOT

Frédéric HECHT

Résumé :

Nous présentons ici une méthode permettant de résoudre les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible.

La méthode des caractéristiques et une formulation variationnelle dans une base à divergence nulle sont utilisées.

La méthodologie et la façon d'utiliser ce programme sont développées.

Abstract :

We present a method for solving the bidimensional Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid.

The characteristics method and the variational formulation in a divergence free basis are used.

Basic ideas and way to use this program are detailed here.



RESOLUTION DES EQUATIONS BIDIMENSIONNELLES

DE NAVIER STOKES

pour un fluide visqueux incompressible

Méthode des caractéristiques

Base à divergence nulle

Module NSQ2CA

Module PRP1Q2

Frédéric HECHT

Bernard CARDOT

1. BUT ET LIMITES D'UTILISATION

Le but du module NSQ2CA est la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour un fluide visqueux incompressible.

Les données du problème, à savoir les conditions aux limites et la condition initiale, doivent être indépendantes du temps.

Les forces de volumes sont supposées nulles.

L'algorithme utilisé est le suivant :

- * discrétisation en temps par la méthode des caractéristiques,
- * Résolution du problème linéaire issue de cette discrétisation en utilisant une formulation variationnelle dans une base à divergence nulle,
- * Discrétisation par éléments finis Q2 droits pour la vitesse, P1 totalement discontinus pour la pression.

REMARQUE : Le problème de Navier-Stokes stationnaire étant le limite (qd $t \rightarrow +\infty$) du problème évolutif, on peut utiliser ce module pour le résoudre. Pour cela on commencera les itérations avec un pas de temps grossier qu'on affinera vers la fin.

2. PRESENTATION DE LA METHODE DE CALCUL DE LA VITESSE

2.0 Le problème continu

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ici) ; $\Gamma = \partial\Omega$; l'écoulement d'un fluide visqueux dans Ω est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$(N,S) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = 0 \quad (1) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \text{ (condition d'incompressibilité)} \\ \vec{u}|_{\Gamma} = \vec{u}_{\Gamma} \\ \vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x) \end{array} \right.$$

où : $\vec{u}$ est le vecteur vitesse : $u = (u_1, u_2)$

p est la pression

$\vec{u}_\Gamma$ est la condition limite (valeur de la vitesse sur le bord)

ν est la viscosité cinématique du fluide :

$$\nu = \frac{UL}{Re} \quad Re = \text{nombre de Reynolds ; } U, L \text{ vitesse et longueur caractéristiques}$$

$\vec{u}_0$ est la vitesse à l'instant initial, de plus

$$[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}]_i = \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad i=1, \dots, N$$

2.1 Discretisation en temps par la méthode des caractéristiques

En notant $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ la dérivée totale du champ de vecteur $\vec{u}$, on remarque que (1) peut s'écrire

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = 0$$

On approxime alors $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ par :

$$\frac{1}{\Delta t} (u^{n+1}(x) - u^n(X^n(x)))$$

où

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = u(x, (n+1) \Delta t) \\ X^n(x) = \bar{X}^n(-\Delta t, x) \end{cases}$$

et $\bar{X}^n$ solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d\bar{X}^n}{dt}(t, x) = u^n(\bar{X}^n(t, x))$$

$$\bar{X}^n(0, x) = x \quad (\text{voir [1] pour plus de détails})$$

REMARQUE : $\bar{X}^n(t, x)$ est la position à l'instant t de la particule du fluide qui se trouve en x à l'instant 0

d'où

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}^{n+1} - \nu \Delta t \Delta \vec{u}^{n+1} + \Delta t \nabla p^{n+1} = u^n(X^n) \\ \nabla \cdot \vec{u}^{n+1} = 0 \\ \vec{u}^{n+1}|_\Gamma = \vec{u}_\Gamma \end{array} \right.$$

2.2 Formulation variationnelle et approximation

On introduit les espaces fonctionnels :

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} v = 0\}$$

$$V_0 = V \cap (H_0^1(\Omega))^2$$

En notant $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$, (2) devient (en remplaçant : $(\nabla u, \nabla v)$ par $\frac{1}{2} (\nabla u + {}^t \nabla u, \nabla v + {}^t \nabla v)$ ce qui est possible puisque $(\nabla u, {}^t \nabla v) = ({}^t \nabla u, \nabla v) = 0$ car $\nabla u = 0$)

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^{n+1}, v) + \frac{\nu \Delta t}{2} (\nabla u^{n+1} + {}^t \nabla u^{n+1}, \nabla v + {}^t \nabla v) = (u^n(X^n), v) \\ \forall v \in V_0 \\ u^{n+1}|_{\Gamma} = u_F \\ u^{n+1} \in V \end{array} \right.$$

On approxime le problème (3) par la méthode des éléments finis. On utilise des éléments Q2 Lagrange pour approcher la vitesse et des éléments P1 totalement discontinus pour la pression .

--

Donc V est approché par

$$V_h = \{v_h \in (H^1(\Omega))^2 \mid \forall Q \in \mathcal{T}_h \quad v_h|_Q \in (Q_2)^2 \mid \forall p \in P_1 \int_Q p \cdot \operatorname{div} v_h = 0\}$$

où $\mathcal{T}_h$ est la triangulation et

$$P_1 = \{a + bx_1 + cx_2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

Pour résoudre le problème (3) il nous faut donc construire une base de $V_{oh} =: V_h \cap (H_0^1(\Omega))^2$ comme en [2]

REMARQUE : l'inclusion $V_h \subset V$ n'a pas lieu.

Construction de la base de V_{oh}

Les 9 fonctions de base de l'élément Q2 de référence $\hat{Q} =]0,1[^2$ sont :

$$\hat{w}_{ij} = \left(\prod_{\substack{k=0,2 \\ k \neq i}} \frac{2x_1 - k}{i - k} \right) \left(\prod_{\substack{k=0,2 \\ k \neq j}} \frac{2x_2 - k}{j - k} \right)$$

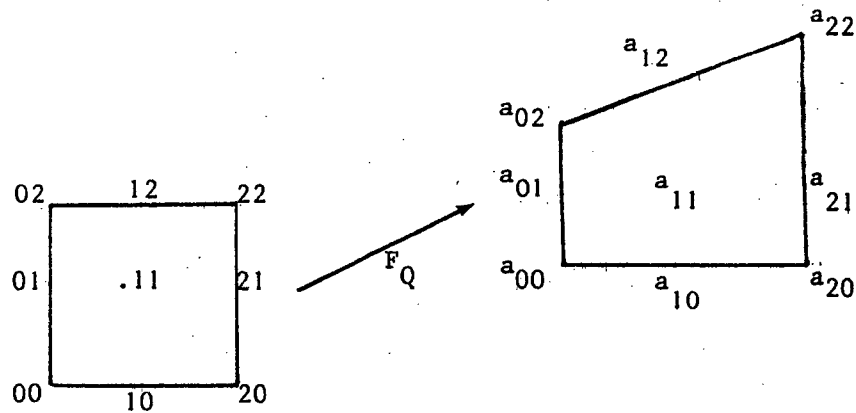
$$i = 0, 1, 2 \quad j = 0, 1, 2$$

Etant donné la transformation F_Q de $\hat{Q}$ sur Q qu'on supposera $Q \in (Q_1)^2$, les neuf fonctions de bases de l'élément Q sont :

$$W_{ij} = F_Q^{-1} \circ \hat{W}_{ij} \quad i = 0,1,2 \quad j = 0,1,2$$

REMARQUE : $\int x_i \operatorname{div} (W_{\ell\ell} \vec{e}_j) = -\delta_{ij} \int W_{\ell\ell}$ $i = 1,2 \quad j = 1,2$
où (ℓ_1, ℓ_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Schéma de numérotation locale



Nous pouvons maintenant construire les 16 nouvelles fonctions de base de $(Q_2)^2$ $\tilde{W}_{ij}$ telles que :

$$\int_Q \operatorname{div} (\tilde{W}_{ij}) x_1 = \int_Q \operatorname{div} (\tilde{W}_{ij}) x_2 = 0$$

on a :

$$\tilde{W}_{ij k} = \vec{W}_{ij} \cdot \vec{e}_k + \frac{\int_Q x_{\ell} \partial_k W_{ij}}{\int_Q W_{\ell\ell}} W_{\ell\ell} \vec{e}_\ell$$

avec

$$(i,j) \in \{0,1,2\}^2 - \{(1,1)\}, \quad k = 1,2$$

REMARQUE : la division par $\int_Q W_{\ell\ell}$ est possible puisque $W_{\ell\ell}$ est strictement positive sur Q .

On définit alors 3 types de fonctions :

- i) les fonctions $\psi_{ij,k}$ du premier type associées au sommet (i,j)
 $(i,j) \in \{0,2\}^2$ et $k = 1,2$

$$\psi_{ij,k} = \tilde{w}_{ij,k} - (\tilde{w}_{1j,k} + \tilde{w}_{i1,k})/4.$$

- ii) les fonctions ϕ_{ij} du second type associées au sommet (i,j)

Notons (a_1^{kl}, a_2^{kl}) , $(k,l) \in \{0,2\}^2$ les coordonnées des quatres sommets de Q.

et

$$n_1^{i1} = -(a_2^{i2-j} - a_2^{ij}) / ((a_2^{i2-j} - a_1^{ij})^2 + (a_2^{i2-j} - a_2^{ij})^2)$$

$$n_2^{i1} = (a_1^{i2-j} - a_1^{ij}) / ((a_1^{i2-j} - a_1^{ij})^2 + (a_2^{i2-j} - a_2^{ij})^2)$$

$$n_1^{1j} = (a_2^{2-ij} - a_2^{ij}) / ((a_1^{2-ij} - a_1^{ij})^2 + (a_2^{2-ij} - a_2^{ij})^2)$$

$$n_2^{1j} = (a_1^{2-ij} - a_1^{ij}) / ((a_1^{2-ij} - a_1^{ij})^2 + (a_2^{2-ij} - a_2^{ij})^2)$$

alors :

$$\phi_{ij} = n_1^{i1} \tilde{w}_{i1,1} + n_2^{i1} \tilde{w}_{i1,2} + n_1^{1j} \tilde{w}_{1j,1} + n_2^{1j} \tilde{w}_{1j,2}$$

- iii) les fonctions ϕ_{ij} associées au milieu des arêtes :

$$(i,j) \in \{0,1,2\}^2 \text{ et } i=1 \text{ ou } j=1$$

Alors en notant (i_1, j_1) et (i_2, j_2) les deux sommets de cette arête on a

$$i = \frac{i_1 + i_2}{2} \quad j = \frac{j_1 + j_2}{2}$$

Afin d'orienter les arêtes indépendamment des éléments on introduit ε :

$\varepsilon = 1$ si le numéro du sommet (i_2, j_2) dans la triangulation est plus petit que le numéro du sommet (i_1, j_1)

$= -1$ sinon

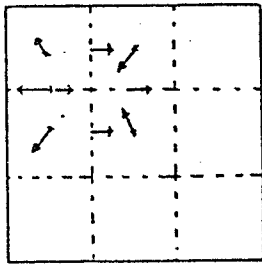
Alors ϕ_{ij} est définie par :

$$\phi_{ij} = \varepsilon [(a_1^{i_2 j_2} - a_1^{i_1 j_1}) \tilde{w}_{ij,1} + (a_2^{i_2 j_2} - a_2^{i_1 j_1}) \tilde{w}_{ij,2}] (*)$$

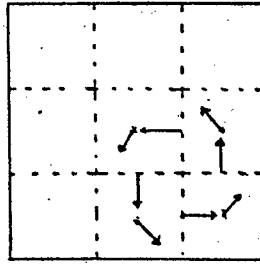
Ainsi à chaque sommet on associe deux fonctions de type 1, et une fonction de type 2, et à chaque arête une fonction (*)

On a alors le :

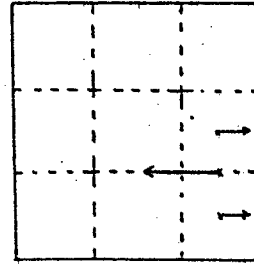
Théorème : L'union des fonctions de type 1 et 2 associées aux sommets intérieurs et des fonctions associées aux arêtes internes est une base de V_{oh} à condition que Ω soit simplement connexe.



Fonction associée
à un sommet
type 1



Fonction associée
à un sommet
type 2



Fonction associée
à une arête.

Résumé du problème à résoudre

trouver u_h^{n+1} solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_h^{n+1}, v_h) + \frac{\nu \Delta t}{2} (\nabla u_h^{n+1} + t_{\nabla u_h^{n+1}}, \nabla v_h + t_{\nabla v_h}) = (u_h^n(X^n), v_h) \\ \forall v_h \in V_{oh} \\ u_h^{n+1}|_{\Gamma} = u_{\Gamma} \\ u_h^{n+1} \in V_h \end{array} \right.$$

Calcul de $(u_h^n(X^n), v_h)$:

Cette intégrale ne peut être calculée exactement :

$u_h^n(X^n)$ est polynomiale sur la triangulation transportée par X^n . Un calcul exact nécessiterait donc d'intersecter cette triangulation avec la triangulation originale ce qui est prohibitif.

On utilise donc une formule de quadrature de Gauss à 9 points par élément.

Finalement $\bar{X}^n$ est calculé par une approximation explicite de :

$$\begin{cases} \bar{X}^n(x) = \bar{X}^n(-\Delta t, x) \\ \frac{d\bar{X}^n}{dt}(t, x) = u^n(\bar{X}^n(t, x)) \\ \bar{X}^n(0, x) = x \end{cases}$$

Stabilité et convergence

Il est à noter que ce type de schéma est inconditionnellement H^1 -stable et ne nécessite aucun décentrage supplémentaire de terme de convection.

Au moment du choix de h et Δt (pas de discrétisations en espace et en temps) il est utile de tenir compte du résultat suivant dont une démonstration et l'énoncé complet figurent dans [1] :

Sans certaines hypothèses de régularités l'erreur dépend de $h^2 / \Delta t$, il convient donc de prendre Δt relativement grand par rapport à h .

3. CALCUL DE LA PRESSION

Il est effectué dans les sousroutines PRECQ2 et PRESQ2 selon que l'on résout la pression solution du problème évolutif ou du problème de Stokes :

Dans le cas du problème évolutif, la résolution se fait suivant les étapes suivantes :

Rappel du problème à résoudre : Après discrétisation en temps et en espace, on a trouver

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u_h^{n+1}, p_h^{n+1}\} \in (\tilde{u}_{Th} + J_{oh}) \times Q_h \\ \text{tel que} \\ \frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n \circ X^n) - \nu \Delta u_h^{n+1} + p_h^{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$V_{oh} = \{ \vec{v}_h \in (C^0(\Omega))^2 \mid \vec{v}_h|_{\partial\Omega} = 0, \vec{v}_h|_Q \in (Q^2(Q))^2 \forall Q \in \mathcal{T}_h \}$$

$$J_{oh} = \{ \vec{v}_h \in V_{oh}, \int \nabla \cdot \vec{v}_h \cdot q_h = 0 \forall Q \in \mathcal{T}_h$$

$$\forall q_h \in Q_h \}$$

$$Q_h = \{ q_h \mid q_h|_Q \in P_1(Q), \forall Q \in \mathcal{T}_h \}$$

Comme on l'a vu précédemment la formulation variationnelle utilisant les fonctions de Joh fait disparaître le terme de pression, la vitesse peut donc être calculée indépendamment

Etape 1 : Calcul de u_h^{n+1} et calcul du second membre composé de

$$\frac{1}{\Delta t} u_h^n \circ X^n \stackrel{\text{def}}{=} f_h^n$$

Donc (en abandonnant les indices de discrétisation en temps) on a à résoudre

$$\begin{aligned} & \text{trouver } p_h \in Q_h \text{ à } t_q \\ & \frac{1}{\Delta t} u_h - \nu \Delta u_h + \nabla p_h = f \end{aligned}$$

Pour choisir les fonctions test l'idée naturelle est de les prendre dans un supplémentaire de Joh.

Etape 2 : Construction des fonctions tests

Soit W_h une telle fonction, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_h \in Q_h \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_h \cdot W_h \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla W_h \, dx + \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot W_h = \int_{\Omega} f_h W_h \, dx \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_h \in Q_h \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_h W_h \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla W_h \, dx - \int_{\Omega} p_h \cdot \nabla W_h \, dx = \int_{\Omega} f_h W_h \, dx \end{array} \right.$$

On construit alors quatre fonction : $\vec{V}_i$ $i = 1, \dots, 4$ par

$$\vec{V}_i = N_i W_i + \vec{\sigma}_i W_9$$

où

$\vec{N}_i$ est la normale unitaire extérieure à l'arête A_i de l'élément Q

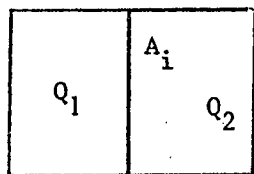
W_i la fonction de base scalaire du Q2 associée au milieu de l'arête A_i .

W_9 la fonction de base scalaire du Q2 associée au baycentre de Q .

$\vec{\sigma}_i$ un vecteur tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- le flux de $\vec{V}_i$ à travers l'arête A_i vaut 1
- le flux de $\vec{V}_i$ à travers les autres arêtes est nul.
- (*) - $(\nabla \cdot \vec{V}_i, x)_Q = (\nabla \cdot \vec{V}_i, y)_Q = 0$
- le support de $\vec{V}_i$ est inclus dans les deux quadrangles ayant l'arête A_i en commun.

Etape 3 : D'après ce qui précède :



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx &= \sum_{Q \in \mathcal{T}_h} \int_Q p_h \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx = \int_{Q_1 \cup Q_2} p_h \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx \\ &= \int_{Q_1} (p_1^Q + p_2^Q y + p_3^Q) \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx + \int_{Q_2} (p_1^Q x + p_2^Q y + p_3^Q) \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx \end{aligned}$$

mais par (*) on obtient :

$$= p_3^Q \int_{Q_1} \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx + p_3^Q \int_{Q_2} \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx$$

Donc :

$$\begin{aligned} p_3^Q \int_{Q_1} \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx + p_3^Q \int_{Q_2} \nabla \cdot \vec{V}_i \, dx &= \\ &= - \int_{Q_1 \cup Q_2} (f_h \vec{V}_i - 1/\Delta t \, u_h \vec{V}_i - \nu \nabla u_h \cdot \nabla \vec{V}_i) \, dx \end{aligned}$$

Donc si p_3 est connu sur un quadrangle on peut de proche en proche le connaître sur toute la maillage. Pour cela on utilise un arbre maximal des arêtes (PRPRES).

Pour le calcul de p_1^Q, p_2^Q , on écrit la formulation précédente avec les fonctions de base $\vec{W}_{17} = w_9 \vec{e}_1$ et $\vec{W}_{18} = w_9 \vec{e}_2$ avec w_9 précédemment définie. Ainsi p_1^Q et p_2^Q peuvent facilement être déterminés sur chaque quadrangle.

REMARQUES

1) Bien que sur chaque quadrangle Q , la dimension d'un supplémentaire de $J_0|_Q$ est deux on construit 4 fonctions de bases afin de ne pas privilégier des arêtes par rapport aux autres, en d'autres termes cette construction élimine des tests.

2) Afin d'alléger l'écriture on a remplacé dans ce paragraphe le terme

$$\frac{1}{2}(\nabla u_h + {}^t \nabla u_h, \nabla v_h + {}^t \nabla v_h) \text{ par } (\nabla u_h, \nabla v_h)$$

On peut noter que lorsque $\nabla \cdot u_h = 0$ les deux formes coïncident puisque $(\nabla u_h, {}^t \nabla v_h) = ({}^t \nabla u_h, \nabla v_h) = 0$, par contre dès que la contrainte $\nabla \cdot u_h$ n'est satisfaite que faiblement comme c'est le cas ici la contribution du terme $(\nabla u_h, {}^t \nabla u_h)$ n'est plus forcément nulle.

Ceci étant, en pratique on ne constate pas de grandes différences entre les résultats obtenus à partir de l'une ou de l'autre des deux formes.

4. MISE EN OEUVRE DU MODULE NSQ2CA

Ce module permet la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour un fluide incompressible, visqueux.

La méthode de discrétisation en temps est la méthode des caractéristiques.

La méthode de discrétisation en espace est basée sur l'utilisation d'éléments finis Q2 droits pour la vitesse et Q1 totalement discontinus pour la pression.

REMARQUE :

Un paramètre d'appel du module permet de calculer ou non la pression.

Les résultats sont donc les valeurs aux 9 noeuds des quadrangles Q2 pour les deux composantes de la vitesse d'une part, les trois coefficients de la pression Q1 par quadrangle d'autre part.

Sont donc calculés pour chaque quadrangle E : P1, P2, P3 tq

$$P|_Q(x,y) = P1 * x + P2 * y + P3$$

A l'appel de NSQ2CA devra exister un SD NOPO correspond à un maillage Q2 du domaine. (cf [3])

4.1 Programme d'appel

4.1.1. Programme principal

* instructions :

DOUBLE PRECISION DM

COMMON M (LM)

EQUIVALENCE (DM,M)

: déclaration et mise en équivalence du super tableau M de longueur LM mots.

Estimation de LM :

- si pas de calcul de pression :

$LM = LENPOV + 23 * NOE + 2 * NBELPF + 1350 + 5 * NE + 3 * INTAF.$

- si calcul de la pression :

taille précédente à laquelle il convient de rajouter :

$5 * NE + 50$

avec :

NE : nombre d'éléments du maillage

NOE : nombre de noeuds " " "

NBELPF : nb d'arêtes frontières

INTAF : nb d'éléments frontières

LENPOV : nombre de mots nécessaires au stockage de NOPO

* Initialisation des Commons TRAVAI, TRAVAI

Elle se fait obligatoirement par appel du sous-programme INITI

CALL INITI (M,LM,IMPRE,NNN)

ou

LM est le nombre de mots déclaré du super tableau M

IMPRE : paramètre d'impression des modules (de 0 à 10)

NNN = 0 aucune impression des adresssages de tableaux

1 impression des adressages.

4.1.2. Instruction d'appel du module

* CALL NSQ2CA (M,M,NFNOPO,NINOPO,NFBVIT,IOP,ISAUVE,NBTEMPS,DTEMPS,XNU,EPSARR,
FX,FY,ICP,NFBPRE,NIBPRE,NITEV,NITER)

avec en entrée :

NFNOPO : numéro de fichier de la S.D. NOPO (Q2 droit)

NINOPO : " " niveau " "

NFBVIT : numéro de fichier de la SDS B - Vitesse Q2

NIBVIT : " " niveau " "

IOP : Paramètre d'option pour l'initialisation en temps

IOP ≤ 0 : initialisation par Stockes.

$1 \leq \text{IOP} \leq 98$: lecture d'une initialisation sur le fichier de
numéro IOP.

IOP ≥ 99 : initialisation par 0.

ISAUVE : fréquence de sauvegarde sur le fichier B de la solution (sauvegarde
toutes les ISAUVE itérations en temps).

NBTEMP : nombre d'itérations en temps.

DTEMPS : pas de temps.

XNU : viscosité

EPSARR : epsilon d'arrêt sur l'erreur relative en deux itérations consécutives
en temps. Calcul en norme L2.

Dans ce cas impression de "sortie normale de NSQ2CA " et stockage de la dernière
itération

FX } : sous programmes utilisateurs donnant la valeur
FY } : de la vitesse sur le bord du domaine.(voir plus bas)

ICP : Indicateur de calcul de la pression

ICP : 0 : pas de calcul de la pression

ICP : 1 : calcul de la pression et sauvegarde des résultats dans la
SDS B - pression avec la fréquence donnée par ISAUVE.

NFBPRE : numéro du fichier de la SDS B - pression

NIBPRE : numéro du niveau " " "

* Si ICP = 0 donner par exemple (0,0). (Aucune importance, la SDS Pression
n'est pas créée).

en sortie :

NITEV : donne le nombre effectif de stockage dans B - Vitesse effectués

NITER : donne le nombre effectif de stockage dans B - Pression effectués.

4.2 Bibliothèque utilisées :

FLUI
UTIL
RESD
BNTK
UTSD

4.3 Fichiers nécessaires :

en entrée : fichier support de la SD NOPO (NFINOPO)

en sortie : fichier support de la SD B pour la vitesse (NFBVIT)

si ICP = 1: fichier support de la SD B pour la pression (NFBPRE)

4.4. Carte donnée :

Titre du travail : 72 caractères

4.5 Sous programmes supplémentaires

A l'appel de NSQ2CA doivent avoir été créés deux sous-programme fonctions FX,FY ; de la forme :

FX (X,Y,NREF)

FY (X,Y,NREF)

ou

(X,Y) : coordonnées du noeud.

NREF : numéro de référence de la frontière auquel appartient le noeud

$\left. \begin{array}{l} \text{FX} \\ \text{FY} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{les deux composantes de la vitesse sur } \Gamma = \partial\Omega \\ \text{si } NREF \neq 0 \end{array}$

si NREF = 0 (frontière non référencée) :

La condition aux limites est alors $p \vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = 0$ où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure à la frontière et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}}$ la dérivée normale de la vitesse. (Condition de Neumann)

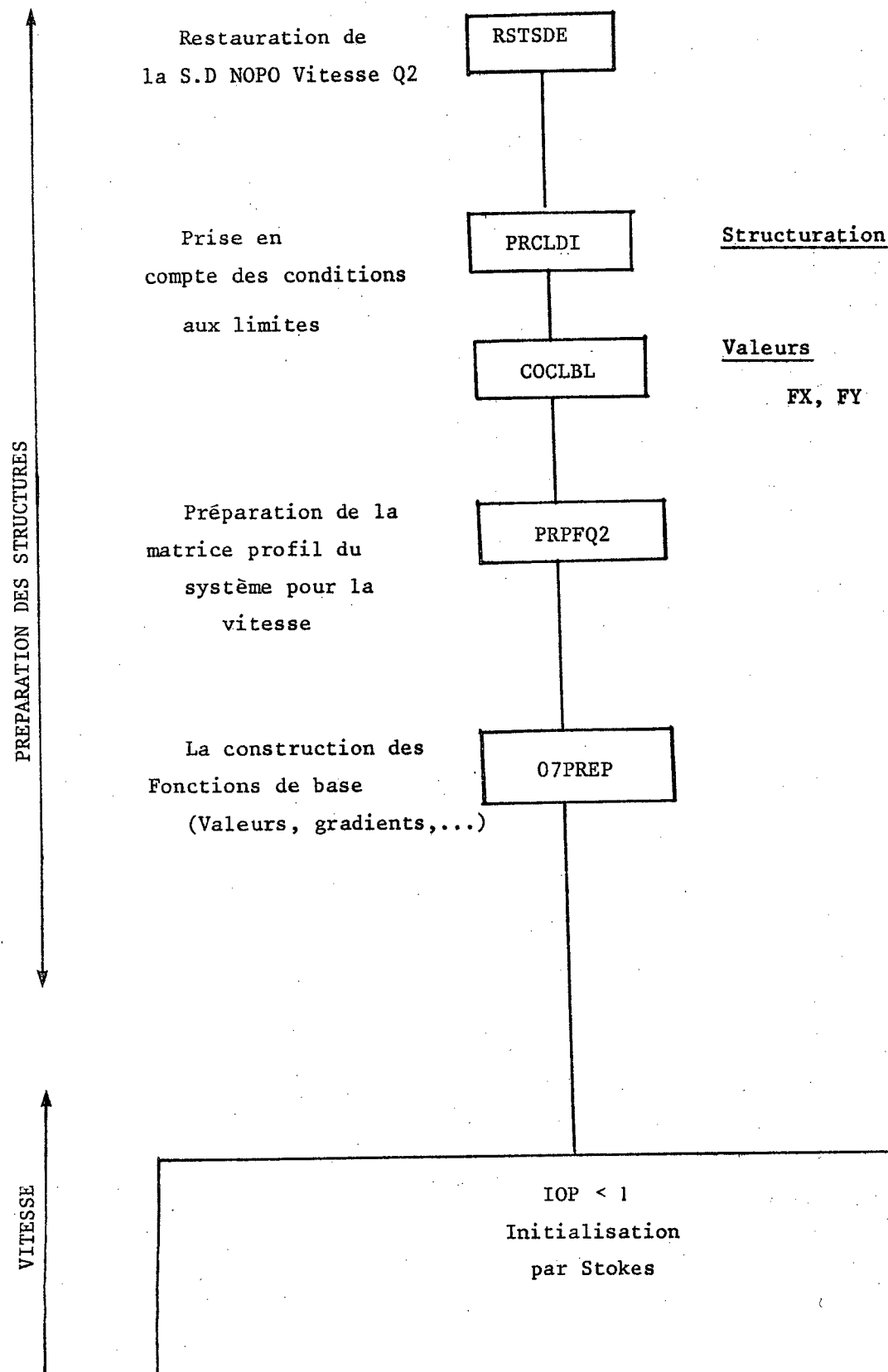
5 Arbre de NSQ2CA

Cet arbre présente les différentes étapes du programme.

Il peut donc donner une vision générale du programme et permettre d'éventuelles modifications liées au problème à résoudre, (par exemple modification des conditions aux limites, etc....).

M O D U L E

NSQ2CA



18.

$I \leq IOP < 99$

Initialisation
par Fichier

$IOP \geq 99$
Initialisation
par 0

INITIALISATION

INITA 8

AFQ2D0

Construction de la matrice profil
(matrices élémentaires + assemblage) et
prise en compte des C.L sur le 2e membre

CHMC1D

Factorisation
de Cholesky

DRCH1D

Descente
remontée

On possède la
solution vitesse initiale dans
la base a divergence nulle

(cf plus haut)

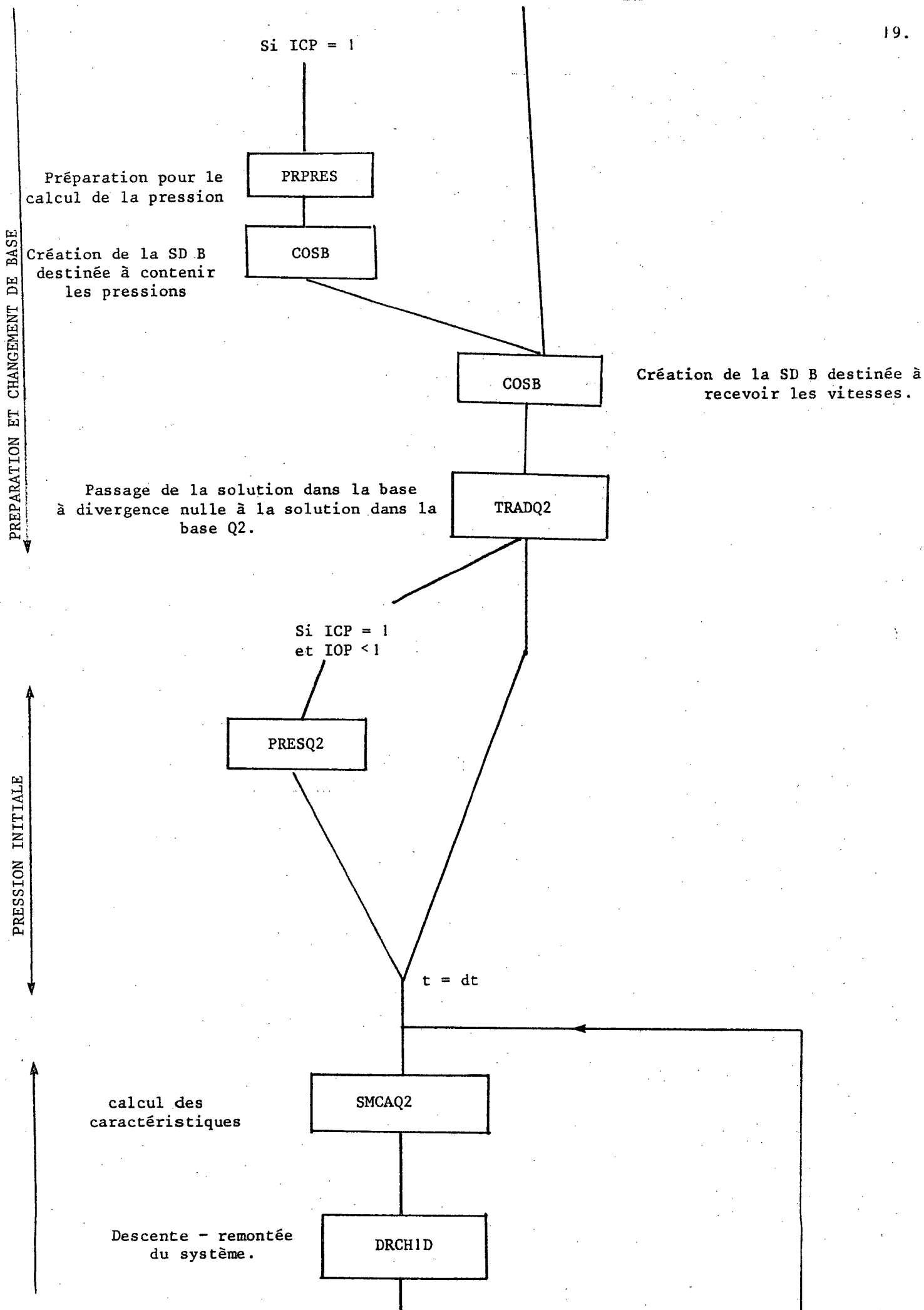
AFQ2D0

CHMC1D

ADJEQ2

COADJE

Construction du tableau
des éléments adjacents



ITERATIONS EN TEMPS

Passage de la base à
divergence nulle à la base
Q2 pour la vitesse

TRADQ2

Calcul de l'erreur relative
entre deux itérations consécu-
tives en norme l^2

ERREL 2

si
icp = 1

Calcul de la pression P1
discontinue correspon-
dante.

PRECQ2

 $t = t + dt$

test sur l'erreur
+
Stockage

FIN

6. MISE EN OEUVRE DU MODULE PRP1Q2

Ce module permet le passage de la pression exprimée sous forme de P1 totalement discontinue (cf. module NSQ2CA) à son expression en Q2 (valeur de la pression aux neufs noeuds du quadrangle).

Principe de la transformation :

Etant donné un noeud de numéro NNO, on calcule la valeur de la pression en ce noeud : P(NNO) par :

$$P(NNO) = \left(\sum_{\substack{Q \text{ quadrangle} \\ NNO \in Q}} P|_Q(NNO) \right) / (\text{nb de quadrangles } Q \text{ contenant } NNO)$$

A l'appel de ce module devront être construites les SD suivantes :

- une SD NOPO contenant les données du maillage Q de numéro de fichier support : NENOPO,
- une SD B contenant la pression P1 discontinue de numéro de fichier support : NFB.

REMARQUE : Si le module NSQ2CA a été activé ces deux structures de données existent.

Sera généré :

- un SD B contenant la pression Q2 du numéro de fichier support NFBPQ2.

REMARQUE : l'intérêt de ce module réside dans la possibilité qu'il donne d'appeler le module de tracé d'isobares (cf. § 5) ce qui n'était pas possible avec l'expression de la pression obtenue à la sortie de NSQ2CA

6.1 PROGRAMME D'APPEL

6.1.1 Programme principal

* instruction COMMON M (LM)

déclaration du super tableau M de longueur LM

avec

$LM = (LNOPV) + 110 + 2 * NOE$

avec

NOE : nb de noeuds du maillage

ou

NP : nb de points,

LNOPV : nb de mots nécessaire au stockage de NOPO (Q2 vitesse

* Initialisation des Commons : on utilise INITI :

* CALL INITI (M,LM,IMPRE,NNN) (voir § 3)

* appel du module.

6.1.2 Instruction d'appel

CALL PRP1Q2 (M, M, NFNOP0, NINOP0, NFB, NIB, NFBPQ2, NIBPQ2, NITER)

avec

NFNOP0 : numéro du fichier support de la SD NOPO

NINOP0 : numéro de niveau du fichier NFNOP0

NFB : numéro du fichier support de la SD B contenant la pression en P1

NIB : numéro de niveau du fichier NFB

NFBPQ2 : numéro du fichier support de la SDS B contenant la pression Q2.

NIBPQ2 : niveau du fichier NFBPQ2

NITER : nombre de tableau B4 de NFB pour lesquels on fait cette transformation.
(ce paramètre peut-être égal au paramètre de sortie du module
NSQ2CA : dans ce cas toutes les pressions P1 stockées seront
projetées en Q2).

6.2 Bibliothèques utilisées : UTSD
FLUI
UTIL

6.3 Fichiers nécessaires :

- * en entrée : fichier support de la SD NOPO (NENOPO)
fichier support de la SD B pression P1 (NFB)
- * en sortie : fichier support de la SD B pression Q2 (NFBPQ2)

6.4 Cartes de donnée :

Titre du travail : 72 caractères.

7. TRACE DES CHAMPS DE VITESSE, LIGNES DE COURANT, ISOBARES

7.1 Tracé du champ de vitesse

Les valeurs de la vitesse Q2 sont stockées dans les enregistrements B4 du fichier NFBVIT.

Le tracé du champ de vitesse est fait à l'aide du module TRAVIT (cf. [2]).

Pour la mise en oeuvre de ce module, il faut créer les structures de données MAIL et COOR correspondants à la structure de données NOPO pour le maillage Q2.

Pour cela on mettra en oeuvre le module COMACO pour l'élément fini THER QUAD 2Q2D (cf [3]).

7.2 Tracé des isobares

Les valeurs de la pression Q2 sont stockées dans les enregistrements B4 du fichier NFBPQ2 (après l'appel de PRP1 Q2).

Le tracé des isobares est fait à l'aide du module ISOSOL(cf. [2]).

La mise en oeuvre de ce module nécessite l'existence des structures de données MAIL et COOR pour le maillage Q2. Pour les créer procéder comme en 5.1. si ce n'est pas déjà fait.

7.3 Tracés des lignes de courant

La fonction courant est calculée à partir des valeurs de la vitesse par la résolution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\psi = \text{rot } \vec{v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \vec{v} \cdot \vec{\tau} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où ψ : fonction courant, $\vec{v}$ la vitesse, $\vec{\tau}$ la tangente.....

REMARQUE : si on sait que $\vec{v} \equiv 0$ sur une partie Γ_0 de la frontière on peut imposer $\psi = 0$ sur Γ_0 et la condition de Neumann précédente sur le complémentaire de Γ_0 . On obtient un système mieux conditionné admettant une solution unique.

Ce système sera résolu à l'aide de MODULEF comme résolution d'un problème de THERMIQUE avec l'élément TRIA 2Q2D.

On mettra en oeuvre d'abord le module COMACO (avec l'élément THER TRIA 2Q2D) (si cela n'a pas déjà été fait pour le tracé de la vitesse), (cf. Brochure MODULEF n°13), puis le module THELAS (cf. Brochure MODULEF n°14, M. VIDRASCU, Modules 1978), puis les modules de Résolution (cf. Brochure n°21, A. PERRONNET, Quelques résolutions directes des systèmes linéaires de matrice profil, Mars 1980).

La mise en oeuvre du module THELAS qui calcule les tableaux élémentaires, suppose la mise en oeuvre préalable des modules MILI et FORC ainsi que la donnée de la subroutine FORCE.

Pour la résolution de MILI et FORC devront être fournis les données nécessaires correspondant à l'élément TRIA 2Q2D, (cf. Brochure MODULEF n°100, Fiches techniques : éléments finis version 3.2, fiche élément THER TRIA 2Q2D)

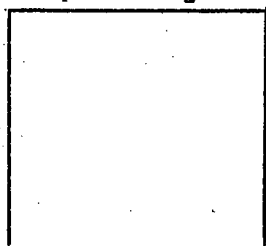
Pour l'écriture de la subroutine force on réécrira celle donnée à la fin de cette brochure les subroutines CAROTV et CAUTAV étant écrites dans la bibliothèque fluide.

Le tracé des lignes de courant est fait à l'aide du module ISOSOL (cf. [4]) à partir des fichiers NFMAIL, NFCOOR, et NFB créés précédemment.

8 EXEMPLES NUMERIQUES

8.1. Cavité Carrée avec paroi mobile :

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 0$$



$$u_1 = u_2 = 0$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$\Omega =]0,1[^2 : \text{carré unité}$$

Conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1. \\ u_2 = 0 \end{array} \right. \text{ sur } x_2 = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0. \\ u_2 = 0. \end{array} \right. \text{ ailleurs.}$$

Calcul à $\nu = 400$. Le maillage est composé de 100 quadrangles réguliers.

On résout le problème de Navier-Stokes avec initialisation par Stokes à l'aide du module NSQ2CA.

Pas de temps utilisé = 0.1

Nombres itérations = 30

Temps CPU sur Multics pour 30 itérations avec calcul de la pression et passage en Q2 :

17 min 31 s.

On donne ci-après :

- le tracé des vitesses effectué à l'aide du preprocesseur aatravit (cf. [4])
-   $t = 0$ (stokes)
- et à $t = 3.s$

-le tracé des isobares : 12 courbes équi-potentiellles calculées automatiquement par le preprocesseur aaisova (cf. [4])

à $t = 0$ (valeurs comprises entre $- 0,102$ et $+ 0,104$)

$t = 3.s$ (valeurs comprises entre $- 0,0617$ et $0,367$)

- le tracé des lignes de courant à $t = 3.S$

- les fichiers ayant permis de générer les SD NOPO, MAIL, COOR (par aaapnopo et aacomaco)

- le programme test.

- la subroutine force,

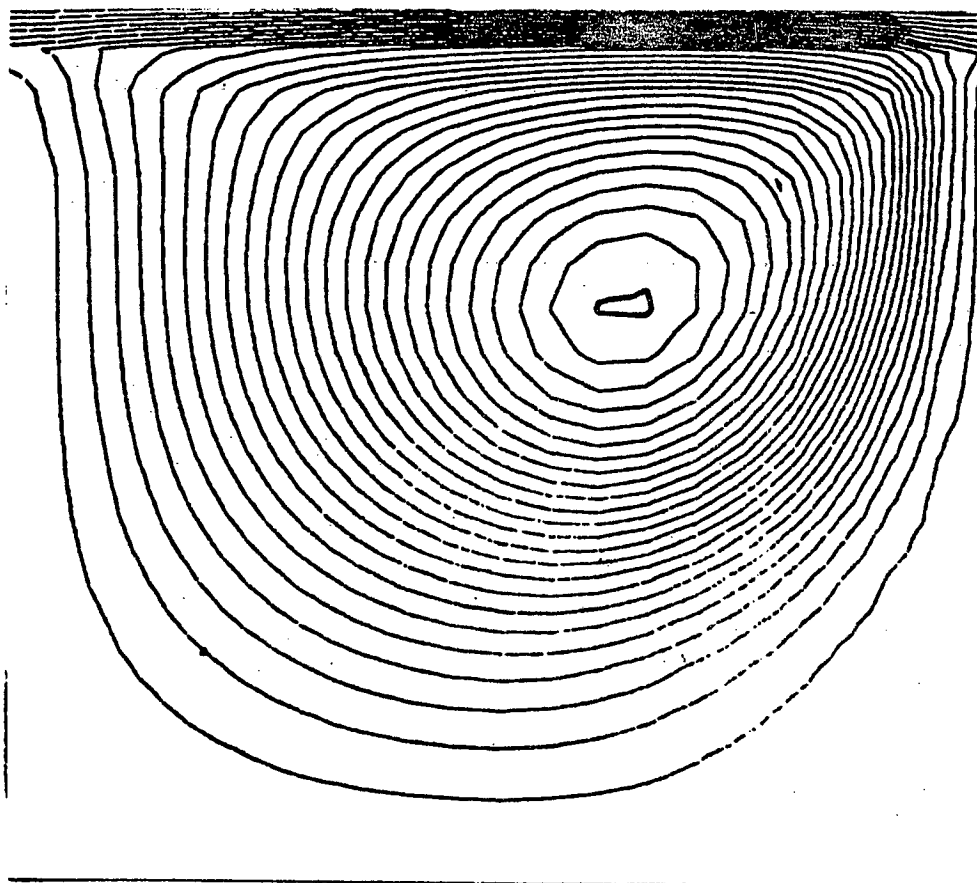
- le programme d'appel de Thelas.

Le système linéaire permettant de calculer la fonction de courant a été résolu par une méthode de Cholesky (module Calpc).

Résultat sur les erreurs relatives entre deux itérations en norme $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ pour la vitesse.

Itération n° erreur relative	20 (t = 2.s)	30 (t = 3.s)
ℓ^1	$0,9527 \cdot 10^{-2}$	$0,5774 \cdot 10^{-2}$
ℓ^2	$0,8609 \cdot 10^{-2}$	$0,4874 \cdot 10^{-2}$
ℓ^∞	$0,7431 \cdot 10^{-2}$	$0,3951 \cdot 10^{-2}$

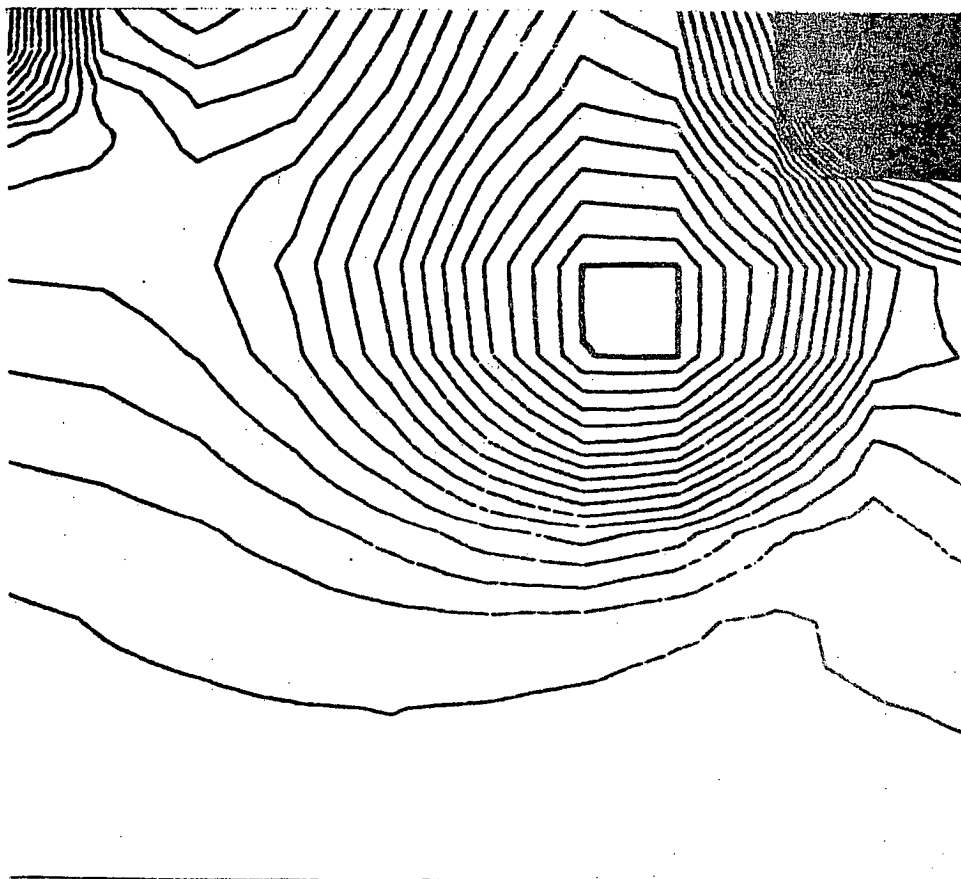
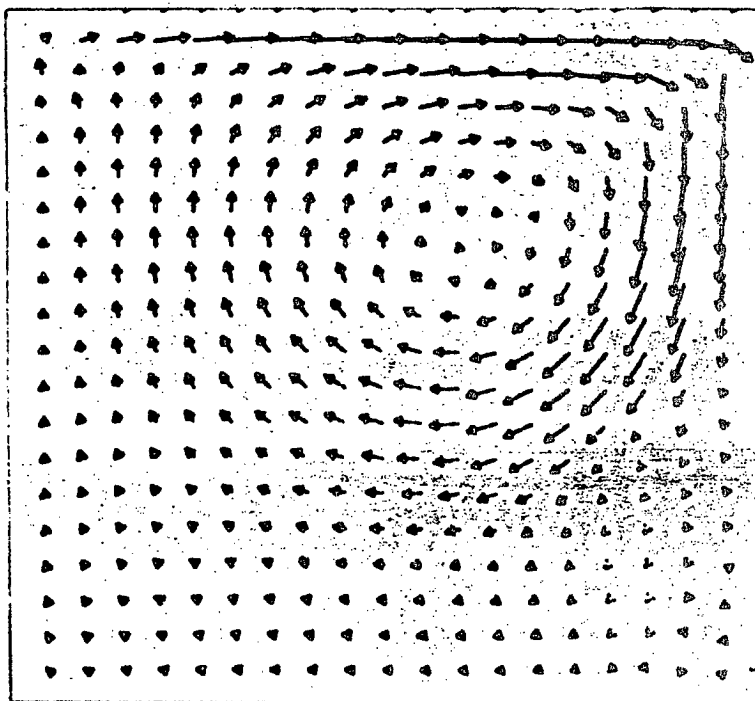
Taille de la matrice profil : 19469



Cavité Carrée

$t = 3.s$

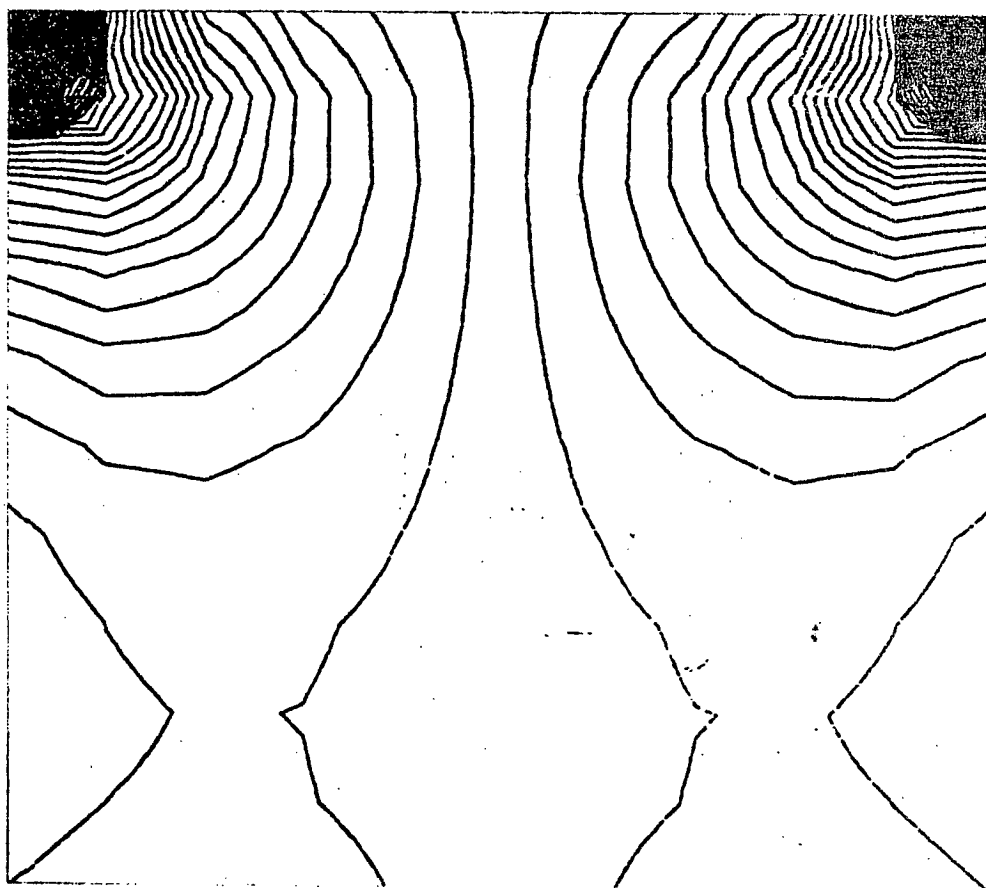
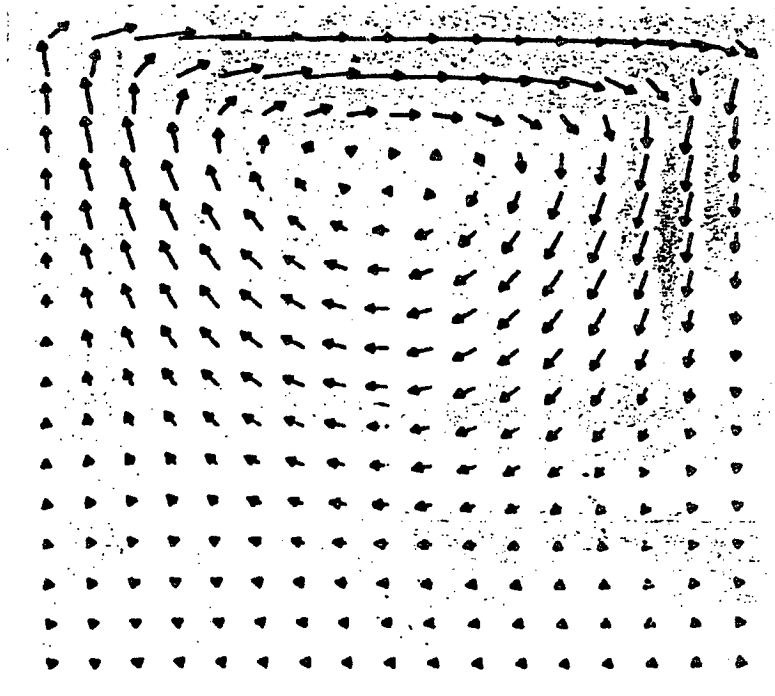
$Re = 400$



Cavité Carrée

$t = 3.s$

$Re = 400$

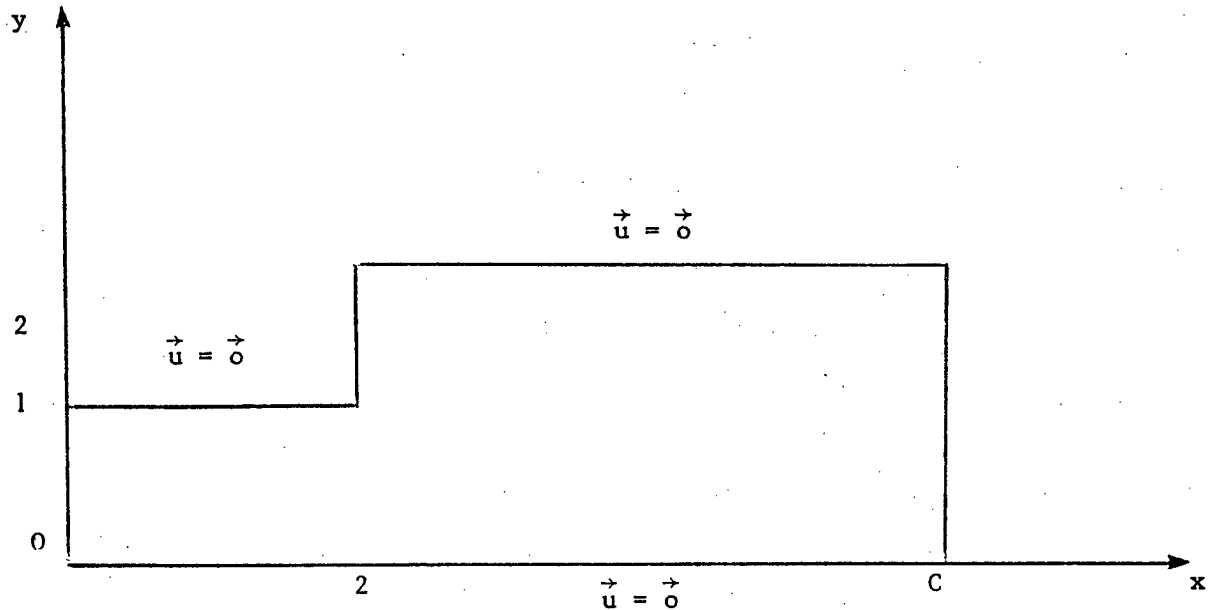


Cavité Carrée

$t = 0$. (Stokes)

8.2 Le problème de la marche

$$\Omega = ([0,2[\times]0,1[) \cup ([2,6[\times]0,2[)$$



On impose à l'entrée $x = 0$ la distribution de Poiseuille $u = (24y(1-y), 0)$.
 A la sortie $x = 6$ la condition aux limite est celle de la traction nulle :

$$p \vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0.$$

On prend $\nu = 0.1$ (viscosité cinématique) d'où un nombre de Reynolds égal à 60 à l'entrée.

Le maillage est régulier et est composé de 125 rectangles.

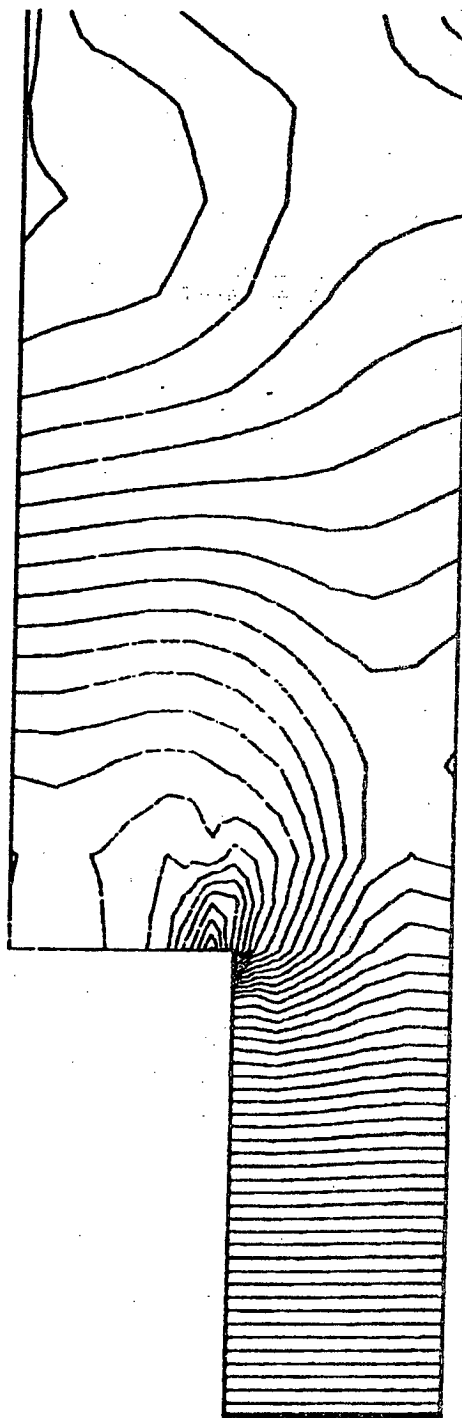
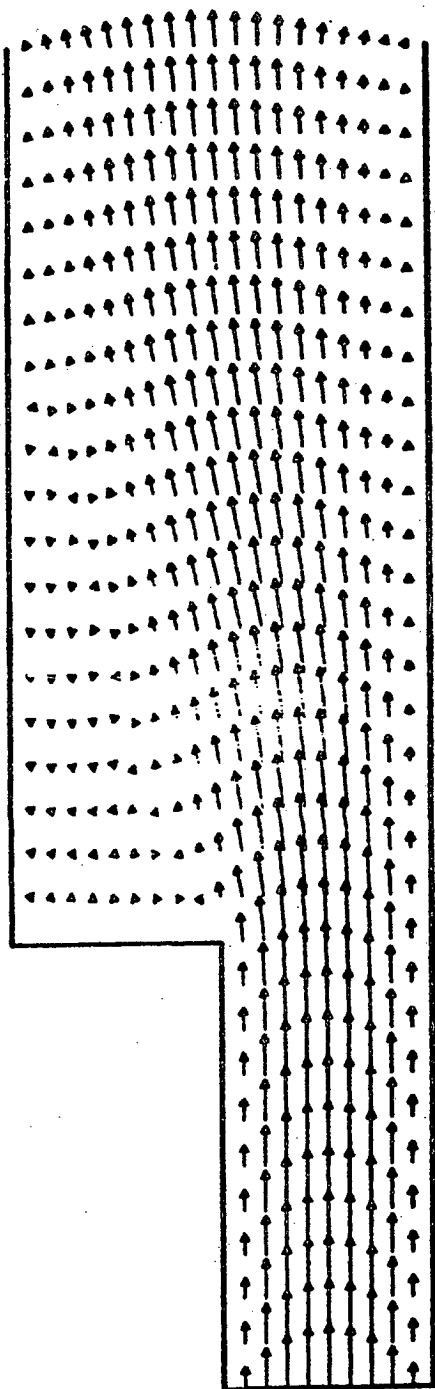
On fait 60 itérations avec un pas de temps de 0.1 s

Taille de la matrice profil = 21259

Temps CPU sur Multics = 41 mn 27 s

On donne ci-après les champs de vitesses ainsi que le tracé de 50 isobares (valeurs d'impression entre - 2,59 et 10,9). Erreurs relations à $t = 6.s$ entre deux itérations en norme $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ à l'issue des 60 itérations.

norme ℓ^1	→	0,694	10-4
norme ℓ^2	→	0,769	10-4
norme ℓ^∞	→	0,111	10-3

MARCHE $t = 6.s$ 

MAIL - COOR

	0		
	2	1	0
	2	0	
THER	1		
QUAD	2Q2D		
	0		
NOPO	0		
MAIL	0		
COOR	0		
	0	0	

\$ NOMBRE DE FONCTIONS INTERPRETEES
 \$ NDIM NDSO NBSDC
 \$ NNR NBLC
 \$ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
 \$ NTYED DU SD 1
 \$ LE NOM DES ELEMENTS DROITS
 \$ NTYEC DU SD 1
 \$ NOM DU FICHIER
 \$ ET NIVEAU DE LA SD NOPO
 \$ NOM DU FICHIER
 \$ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
 \$ NOM DU FICHIER
 \$ ET NIVEAU DE LA SD COOR
 \$ NTMAIL NTCOOR

NOPO

POIN	5	4			
\$ NOP		NOREF(NOP)	X(NOP).		
	1	1	0.000000E+00		
	2	1	0.100000E+01		
	3	2	0.100000E+01		
	4	2	0.000000E+00		
'MANU	5	0	1		
	4	1	1	2	3 4
	1	1	2	1	
'RETR	4	0	2	10	
'ADPO	3	2	3	1	0
	1	1			
'RENC	3	3	0		
'SAUV	3	0	0		
NOPO					
'FTN					

\$ IMPRE NPOINT \$
 Y(NOP). \$
 0.000000E+00
 0.000000E+00
 0.100000E+01
 0.100000E+01
 \$ IMPRE NIVEAU NE
 \$ TYPE NUDSD NS1 NS2 NS3 NS4
 \$ NFA1 NFA2 NFA3 NFA4
 \$ IMPRE NIVEA1 NIVEA2 N.
 \$ IMPRE NIVEA1 NIVEA2 N1 ISET
 \$ ISEQ NOESOM
 \$ IMPRE NIVEA1 NIVEA2
 \$ IMPRE NINOP NTNPO
 \$ NOM DU FICHIER

```

C *****
C APPEL DU MODULE THELAS
C CALCUL DES TABLEAUX ELEMENTAIRES POUR LE PROBLEME :
C
C -LAPLACIEN(PHI) = RCT(U)
C DERIVEE NORMALE DE PHI = COMPOSANTE TANGENTIELLE DE U SUR LE
C BORD.
C OU U EST LA DERNIERE VITESSE CALCULEE PAR NSQ2CA.
C
C POUR LA SIGNIFICATION DES PARAMETRES SE REPORTER A LA BROCHURE 85
C *****
COMMON/ALB/NZB(16)
COMMON/POBA/NO2Q2D
DIMENSION M(50000),IOPT(4)
DOUBLE PRECISION DM
EQUIVALENCE (M(1),DM)
EXTERNAL LEB,REB
LM=50000
NNN=0
IMPRE=2
CALL INITI(M,LM,IMPRE,NNN)
C
C NFPOBA=-20
C
C NFB=26
C NIB=1
C NTB=0
CALL RSTSDE(M,'B',NFB,NIB,NZB,16,LEB,REB,NCB,IAB)
NBBLOC=M(NZB(9)+7)
LB4=NZB(16)
IAB4=NZB(15)
C
C ECRITURE DE LA DERNIERE VITESSE SOLUTION.
C
C DO 3 J=1,NBBLOC
C READ (NFB) LB4,(M(IAB4-1+I),I=1,LB4)
C 3 CONTINUE
C
C NFMILI=14
C NIMILI=1
C NTMILI=1
C NFFORC=15
C NIFORC=1
C NTFORC=0
C
C IOPT(1)=0
C IOPT(2)=1
C IOPT(3)=1
C IOPT(4)=0
C
C NFMAIL=11
C NIMAIL=0
C NFCOOR=12
C NICOOR=0
C NFTA=13
C NITAE=1
C
C
C NTTAE=0
C NPROV=1
C NL=0
C IEMILI=1
C IEFORC=1
C NTHELA=0
C
C CALL THELAS (M,M,M,NFMAIL,NIMAIL,NFCOOR,NICOOR,IEMILI,NFMILI,
& NIMILI,IEFORC,NFFORC,NIFORC,NFTA,NITAE,NTTAE,IOPT,NL,L1,L2,
& NNT,NPROV,NFPOBA,NTHELA,NFBO,NIBO,NFNDL1,NINDL1)
C
C END

```

C-----
 C PROGRAMMEUR ; DSTEE INRIA
 C-----

C
 DIMENSION M(*),TAR(*),X(NPO,*)
 COMMON/ALB/NEB,NB0,IAB0,LB0,NB1,IAB1,LB1,NB2,IAB2,LB2,NB3,IAB3,
 & LB3,NB4,IAB4,LB4
 1000 FORMAT (' EN GENERAL, LA SUBROUTINE FORCE DOIT ETRE FOURNIE PAR',
 & ' L'UTILISATEUR.'/' S'IL S'AGIT VRAIMENT DE TRACER',
 & ' DES LIGNES DE COURANT (BROCHURE 107),'/
 & ' RECOMPILER LA SUBROUTINE FORCE DE LA BIBLIOTHEQUE FLUI'/'
 & ' EN SUPPRIMANT LES LIGNES 15 ET 16 (WRITE ET CALL ARRET).')

C
 GO TO (10,20),LOPT
 10 CONTINUE
 NFPOBA=-20
 NO2Q2D=ICHAR4('2T30')
 CALL FINDEL(M,2,NO2Q2D,IA2Q2D,NFPOBA)
 CALL FINDIA(NO2Q2D,IA2Q2D)
 IADP=IA2Q2D+92
 CALL CAROTV(M,M(IADF),M(IAB4),X,NDIM,NPC,IA,TAR)
 RETURN
 20 CALL CAUTAV(M,M(IAB4),X,NDIM,NPO,IA,TAR,NARE)
 END

```

C          PROGRAMME TEST
C
C *****
C TEST DES MODULES NSQ2CA ET PRP1Q2 SUR LE PROBLEME
C DE LA CAVITE CARREE AVEC PAROI MOBILE.
C
C INITIALISATION PAR STOKES
C PAS DE TEMPS= 0.1 S
C 30 ITERATIONS
C REYNOLDS= 400
C STOCKAGE TOUTES LES 10 ITERATIONS
C *****
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H)
C      DOUBLE PRECISION XNU
C      COMMON M(250000)
C      EQUIVALENCE (DM,M)
C      EQUIVALENCE (XM,M)
C
C
C      CALL INITI(M,250000,5,0)
C      EXTERNAL FX,FY
C
C
C      NFNOP0=10
C      NINOP0=0
C      NFBVIT=26
C      NIBVIT=1
C      IOP=0
C      ISAUVE=10
C      NBTEMP=30
C      DTEMPS=0.1
C      XNU=0.0025
C      EPSARR=1.D-06
C      ICP=1
C      NFBPRE=29
C      NIBPRE=3
C      NFBPQ2=30
C      NIBPQ2=5
C
C
C      CALCUL DES VITESSES ET DES PRESSIONS
C
C      CALL NSQ2CA(M,M,NFNOP0,NINOP0,NFBVIT,NIBVIT,IOP,ISAUVE
C      &      ,NBTEMP,DTEMPS,XNU,EPSARR,FX,FY,ICP,NFBPRE,NIBPRE,
C      &      NITEV,NITER)
C
C      TRADUCTION DES PRESSIONS STOCKEES EN Q2
C
C      CALL PRP1Q2(M,M,NFNOP0,NINOP0,NFBPRE,NIBPRE,NFBPQ2,NIBPQ2,
C      &      NITER)
C
C
C      END

```

REFERENCES

[1] PIRONNEAU O.

On the transport diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equation.

Numerische Mathematik 38, 309 - 332 (1982)

[2] HECHT F.

Construction d'une base de Fonctions Pl non conforme a divergence nulle dans R^3 .

RAIRO (Volume 15 n°2, 1981 pp 119 à 150).

[3] Brochure MODULEF n°47

P.L. GEORGE . Mailleur bidimensionnel du Club MODULEF (mars 1985).

[4] Brochure MODULEF n° 96.

P.L. GEORGE, F. PISTRE

Post traitement, trace des isovaleurs, des contraintes, des vitesses, des coupes.

Modules ISOSOL, TRAISO, TABSTR, TRASTR, TRAVIT, COUPE B, TRCOUP (Juin 1985)

[5] Brochure MODULEF n° 13

D. LEROY - Description du maillage interpolation module COMACO.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique