HAL
open science

Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures

Michel Fliess, Cédric Join, Mamadou Mboup, Hebertt Sira-Ramirez

To cite this version:

Michel Fliess, Cédric Join, Mamadou Mboup, Hebertt Sira-Ramirez. Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures. XXe Colloque GRETSI Traitement du Signal & des Images, GRETSI 2005, Sep 2005, Louvain-la-Neuve, Belgique. inria-00001115

HAL Id: inria-00001115

https://inria.hal.science/inria-00001115v1

Submitted on 15 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures

Michel FLIESS[1], Cédric JOIN[2], Mamadou MBOUP[3], Hebertt SIRA-RAMÍREZ[4]

[1]Équipe ALIEN, INRIA Futurs & Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161)
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

[2]Équipe ALIEN, INRIA Futurs & CRAN (CNRS, UMR 7039)
Université Henri Poincaré (Nancy I), BP 239, 54506 Vandœuvre-lés-Nancy

[3]Équipe ALIEN, INRIA Futurs & UFR de Mathématiques et Informatique
Université René-Descartes, 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France

[4]Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica
Cinvestav-IPN, Avenida IPN No. 2508, Colonia San Pedro Zacatenco, AP 14740, 07300 México, D.F., Mexique

Michel.Fliess@polytechnique.fr, Cedric.Join@cran.uhp-nancy.fr
Mamadou.Mboup@math-info.univ-paris5.fr, hsira@mail.cinvestav.mx

Résumé – Nous abordons le débruitage, la détection de ruptures et la compression par une approche inhabituelle de l'analyse et de la représentation des signaux. Algèbre différentielle, algèbre non commutative et calcul opérationnel conduisent à des méthodes simples et efficaces d'identification paramétrique de signaux et systèmes, qu'ils soient stationnaires ou non. Les estimateurs proposés, valables pour le calcul des dérivées, présentent une excellente robustesse à une large variété de bruits, sans nécessité de connaître leurs propriétés statistiques. Ils reposent sur des formules explicites, d'où des calculs très rapides.

Abstract – Noise removal, detection of abrupt changes and compression are studied via an unusual approach of signal analysis and representation. Differential algebra, noncommutative algebra and operational calculus lead to quite efficient and simple identification methods for signals and systems, which may be stationary or not. We thus obtain real time estimators, which

- yield excellent approximations of the signal derivatives,
- are robust with respect to a large variety of noises without any necessity of knowing their statistical properties,
- depend on explicit algebraic formulae.

1 Introduction

La compression des signaux, le débruitage et la détection de ruptures sont des sujets d'actualité que nous abordons par une approche inhabituelle [6, 7] de l'analyse et de la représentation des signaux. L'analyse de Fourier, dont l'hégémonie est indiscutable lorsqu'il s'agit de représenter des signaux stationnaires, montre ses limites en présence de phénomènes transitoires. Dans ces situations, les représentations à base d'*atomes temps-fréquence*, qui, de Gabor à Meyer [13], ont aujourd'hui culminé avec les ondelettes, semblent être les plus appropriées. Cette dualité temps-fréquence qui, corrige bien des imperfections des transformations de Fourier, se heurte néanmoins au principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor[1]. Pour illustrer ce propos, on peut citer l'échec, souligné en [11], de la représentation par paquets d'ondelettes, ou de cosinus locaux, d'un signal comprenant des structures à haute énergie avec des étalements temps-fréquence différents. Ce même exemple de signal est analysé ici, à la lumière de l'approche que nous proposons.

L'idée directrice de cette approche n'est pas nouvelle : elle repose sur une représentation locale, c'est-à-dire par morceaux, du signal, par des atomes temporels, ici des polynômes. L'estimation des ces polynômes, en revanche, relève d'une nouvelle théorie de l'identification de signaux et systèmes, bâtie autour de l'algèbre différentielle, de l'algèbre non commutative, et du calcul opérationnel. Elle apporte une solution au problème de l'estimation des dérivées d'un signal bruité, qui, à notre connaissance, est encore ouvert. Cette solution est à la base de notre démarche pour le débruitage. Elle conduit aussi à une méthode de segmentation, utilisée dans une phase de compression.

Les bases mathématiques de cette théorie sont brièvement présentées dans la section suivante. La méthode d'estimation des dérivées est décrite dans la section 3. Enfin, dans la section 4, les estimateurs proposés sont appliqués à trois problèmes : *i*) l'estimation des dérivées d'un signal transitoire bruité, *ii*) la détection des discontinuités, le débruitage et la reconstruction d'un signal polynomial par morceaux contaminé par un bruit et *iii*) la compression d'un signal audio.

La généralisation aux images et vidéos, c'est-à-dire aux signaux multidimensionnels, est abordée en [5].

[1]Renvoyons à [4] pour ce sujet et, plus généralement, pour l'approche fréquentielle.

2 Cadre mathématique

2.1 Identifiabilité linéaire

Un *corps différentiel* [2, 10] $\mathfrak{K}$ est, ici, de caractéristique nulle et *ordinaire*, c'est-à-dire muni d'une seule dérivation, notée $\frac{d}{ds}$. Une *constante* est un élément $c \in \mathfrak{K}$ de dérivée nulle. L'ensemble des constantes de $\mathfrak{K}$ est un sous-corps, dit *sous-corps des constantes*. Un *corps de constantes* est un corps différentiel qui ne contient que des constantes. Soit $k_0 \subseteq k \subset k(s) \subseteq K$ une *tour de corps*[2] différentiels, où le corps de constantes $k = k_0(\mathbf{\Theta})$, est engendré par un ensemble fini, éventuellement vide, $\mathbf{\Theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ de *paramètres (constants)*, supposés transcendants par rapport au corps de constantes k_0. Tout élément $x \in K$ est un *signal*.

Exemple 1 *Le* corps de Mikusiński $\mathcal{M}$, *engendré par les* opérateurs *de Mikusiński [14, 15], est un corps différentiel par rapport à la* dérivation algébrique $\frac{d}{ds}$, *qui, rappelons-le, correspond à la multiplication par* $-t$. *Son sous-corps de constantes est* $\mathbb{C}$.

L'ensemble des opérateurs différentiels linéaires $\sum_{\text{fini}} a_\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}$, $a_\alpha \in k_0(s)$, est un anneau non commutatif, principal à gauche et à droite [12], noté $k_0(s)[\frac{d}{ds}]$, qui contient l'*algèbre de Weyl* [12] $k_0[s][\frac{d}{ds}]$. Un opérateur différentiel est dit *propre* (resp. *strictement propre*) si, et seulement si, les a_α le sont (rappelons qu'une fraction rationnelle est dite (strictement) propre si, et seulement si, le degré du numérateur est (strictement) inférieur à celui du dénominateur). Il est dit *polynômial en* $\frac{1}{s}$ si, et seulement si, $a_\alpha \in k_0[\frac{1}{s}]$.

Les paramètres $\mathbf{\Theta}$ sont dits *linéairement identifiables* (*cf.* [7, 8]) par rapport à $x \in K$ si, et seulement si, $\mathbf{\Theta}$ vérifie l'équation matricielle :

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q \tag{1}$$

où les coefficients des matrices P, carrée $r \times r$, et Q, colonne $r \times 1$, appartiennent à $\text{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(1, x)$, et $\det(P) \neq 0$.

2.2 Estimateurs

Soit $N/k_0(s)$ une extension de corps différentiels, telle que K et N soient *linéairement disjoints* sur $k_0(s)$. Tout élément de N est appelé *bruit*, ou *perturbation*. Un bruit n est dit *structuré* si, et seulement si, il est annihilé par $\eta \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$, $\eta \notin k_0(s)$: $\eta n = 0$. Sinon, le bruit est dit *non structuré*. Soit $\mathrm{Q}(K \otimes_{k_0(s)} N)$ le corps de fractions, qui est un corps différentiel, de l'anneau différentiel intègre $K \otimes_{k_0(s)} N$. Introduisons le *capteur*, ou la *mesure*, *bruité* $y \in \mathrm{Q}(K \otimes_{k_0(s)} N)$, $y = x + n^{\text{str}} + n^{\text{nst}}$, où n^{str} et n^{nst} sont des bruits structurés ou non. Alors, (1) devient

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q + R^{\text{str}} + R^{\text{nst}} \tag{2}$$

où y remplace x dans P et Q, les coefficients de R^{str} (resp. R^{nst}), matrice colonne $r \times 1$, appartiennent à $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(n^{\text{str}})$ (resp. $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(n^{\text{nstr}})$). En multipliant les deux membres de (2) par $\Delta \in \text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}})$, où $\text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}}) \subseteq k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ est l'idéal à gauche des annihilateurs des coefficients de R^{str}, on obtient, si $\det(\Delta P) \neq 0$, l'*estimateur*

$$\Delta P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \Delta Q + \Delta R^{\text{nst}} \tag{3}$$

L'estimateur est dit *propre* (resp. *strictement propre, polynômial en* s^{-1}) si, et seulement si, tout coefficient de ΔP et ΔQ est somme d'une fraction rationnelle propre (resp. strictement propre, polynômiale en s^{-1}) et de termes de la forme ϖy, où $y \in \boldsymbol{y}$ et $\varpi \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ est propre (resp. strictement propre, polynômiale en s^{-1}). Il est dit *minimal* si, et seulement si, Δ est un générateur monogène de l'idéal principal à gauche $\text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}})$.

Proposition 1 *Il existe un estimateur (3) que l'on peut choisir minimal et/ou propre (resp. strictement propre, polynômial en* s^{-1}*).*

3 Estimation des dérivées temporelles

À la série convergente $x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$, $a_n \in \mathbb{C}$, correspond la série opérationnelle convergente [14]

$$x = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{s^{n+1}} \in \mathcal{M}$$

appelée *signal analytique*, ou, pour éviter toute confusion avec une terminologie habituelle depuis Gabor et Ville (*cf.* [3]), *signal analytique en temps*. Avec le développement de Taylor tronqué $x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{t^n}{n!}$, l'équation différentielle

$$\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} x_N = 0$$

correspond dans le domaine opérationnel à

$$s^{N+1} x_N - s^N x_N(0) - s^{N-1} \dot{x}_N(0) \ldots - x_N^{(N)}(0) = 0$$

Les dérivées à l'origine $x_N^{(i)}(0) \triangleq \left.\frac{d^i}{dt^i} x_N(t)\right|_{t=0}$ sont ainsi obtenues à partir du système d'équations linéaires

$$s^{-\nu} \frac{d^m}{ds^m} \left\{ x_N^{(N)}(0) + x_N^{(N-1)}(0) s + \ldots + x_N(0) s^N \right\} = s^{-\nu} \frac{d^m}{ds^m} \left\{ s^{N+1} x_N \right\} \tag{4}$$

$m = 0, \ldots, N$, $\nu \geqslant N + 1$. Ce système étant triangulaire avec des éléments diagonaux non nuls, les paramètres $x_N^{(i)}(0), i = 0, \ldots, N$, et par conséquent les coefficients $a_0, \ldots, a_N$ sont linéairement identifiables. Remplaçons x_N par x dans (4) : on obtient ainsi l'*estimée opérationnelle* $[x^{(i)}(0)]_{e_N}$ de $x^{(i)}(0)$.

Pour le passage au numérique, il suffit, selon les règles usuelles du calcul opérationnel (voir, par exemple, [14, 15]), de remplacer en (4)

- $\frac{c}{s^\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $c \in \mathbb{C}$, par $c \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$, $t \geq 0$;
- $\frac{1}{s^\alpha} \frac{d^n x}{ds^n}$ par l'intégrale itérée d'ordre α

$$\int_0^t \int_0^{t_{\alpha-1}} \cdots \int_0^{t_1} (-1)^n \tau^n x(\tau) dt_{\alpha-1} \cdots dt_1 d\tau = \frac{(-1)^n}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^n x(\tau) d\tau \tag{5}$$

[2] Voir, par exemple, [2] pour toutes les notions courantes d'algèbre commutative.

Notons, $[x^{(i)}(0)]_{e_N}(t)$ l'*estimée numérique* ainsi obtenue de $x^{(i)}(0)$, pour un temps d'estimation t. Le résultat suivant est essentiel pour la mise en œuvre pratique, qui repose sur un compromis entre t et N :

Proposition 2 *Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 tel que, pour $t \in \mathcal{V}$, $[x^{(i)}(0)]_{e_N}(t)$ soit définie. Alors,*

$$\lim_{t \downarrow 0} [x^{(i)}(0)]_{e_N}(t) = \lim_{N \to +\infty} [x^{(i)}(0)]_{e_N}(t) = x^{(i)}(0) \qquad (6)$$

Remarque 1

- *Les itérations des intégrales produisent une moyennisation, donc un filtrage passe-bas, qui permet d'atténuer l'effet des perturbations non structurées, c'est-à-dire de ce qui est appelé usuellement* bruits *(voir [7, 8]).*
- *La fenêtre temporelle d'estimation peut être choisie très petite, ce qui permet une implémentation en temps réel.*

4 Exemples

4.1 Dérivées d'un signal académique bruité

Soit $x(t) = \mathrm{Re}(f(t)) + n^{\mathrm{nst}}$, où $\mathrm{Re}(\bullet)$ désigne la partie réelle, et

$$\begin{aligned} f(t) = \; & \frac{K_0}{\sqrt{S_0}} g\left(\frac{t-u_0}{S_0}\right) \exp(i\xi_0 t) + \frac{K_1}{\sqrt{S_1}} g\left(\frac{t-u_1}{S_1}\right) \exp(i\xi_0 t) \\ & + \frac{K_2}{\sqrt{s_1}} g\left(\frac{t-u_0}{S_1}\right) \exp(i\xi_1 t) + \frac{K_3}{\sqrt{S_0}} g\left(\frac{t-u_1}{S_0}\right) \exp(i\xi_1 t) \end{aligned} \qquad (7)$$

$K_0 = 0.4326$, $K_1 = -1.6656$, $K_2 = 0.1253$, $K_3 = 0.2877$, $\xi_0 = 2\pi 73$, $\xi_1 = 2\pi 123$, $S_0 = 1.5$, $S_1 = 3$, $u_0 = 2$, $u_1 = 4$; $g(t) = 0.54 + 0.46\cos(2\pi t)$ est une *fenêtre de Hamming*. Cet exemple, emprunté à [11], parag. 9.4.3, et, en raison de son étalement temps-fréquence, délicat à analyser par ondelettes, a le mérite de permettre la validation des simulations numériques. Nous avons choisi, ici, un bruit n^{nst} centré et gaussien, d'intensité forte. L'excellence de nos estimations est attestée par le zoom de la figure 1.

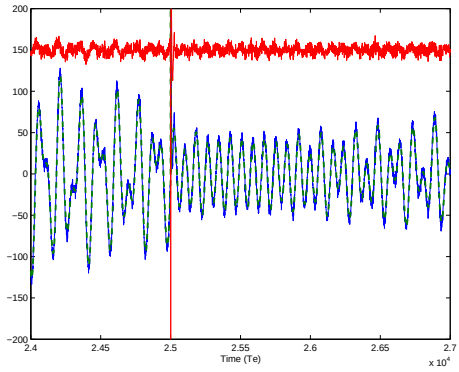

FIG. 1 – Estimation de $\frac{d}{dt}x$ (-), $\frac{d}{dt}x$ (- -)

4.2 Détection de ruptures en présence de bruit

Nous considérons ici le problème d'estimation de signaux réguliers par morceaux, pour lequel les limitations des estimateurs sont largement évoquées dans la littérature [11]. La figure 2 montre un exemple de signal polynômial de degré $N = 3$ par morceaux, contaminé par un bruit blanc gaussien. Le niveau du bruit, SNR = 21.9 dB, est celui de l'exemple traité dans [11, p.439]. La taille du signal est $L = 4096$, comme dans [11].

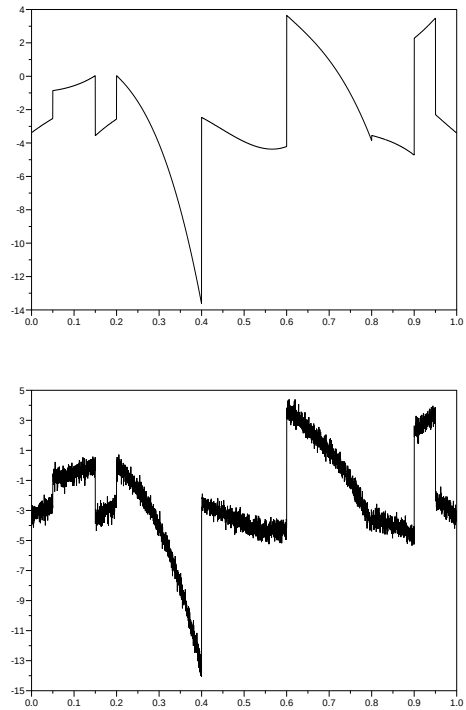

FIG. 2 - Signal polynomial par morceaux, et avec bruit $SNR = 21.9$ dB.

Pour chaque fenêtre d'estimation $I_\Delta(t) = [t, t+\Delta]$, on obtient les estimées numériques $[x^{(i)}(0)]_{e_3}(t), i = 0, \ldots, N$. La localisation des discontinuités étant inconnue, on s'intéresse dans un premier temps à la variation des coefficients $a_i(t)$, $i = 0, \ldots, N$ du signal polynômial ainsi identifié sur chaque fenêtre $I_\Delta(t)$. Le coefficient a_3, normalisé puis seuillé à 0.1, est représenté, avec des zooms, sur la figure 3, pour de petites fenêtres glissantes, larges de 50 échantillons.

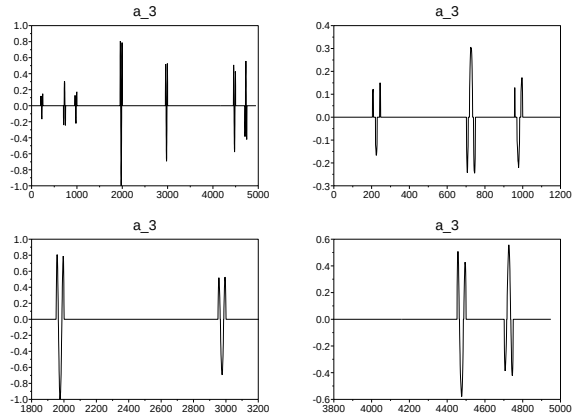

FIG. 3 – Variations des coefficients

Notons que toutes les discontinuités, excepté le saut à $t = 0.8$ (échantillon 4000) qui est complètement noyé dans le bruit, sont localisées avec une bonne précision, comme le montre les zooms. Les points de ruptures étant identifiés, une seconde estimation, réalisée sur des fenêtres de longueur Δ correspondant aux différents morceaux, permet d'obtenir le signal débruité $[x^{(0)}(0)]_{e_3}(t)$ représenté sur la figure 4.

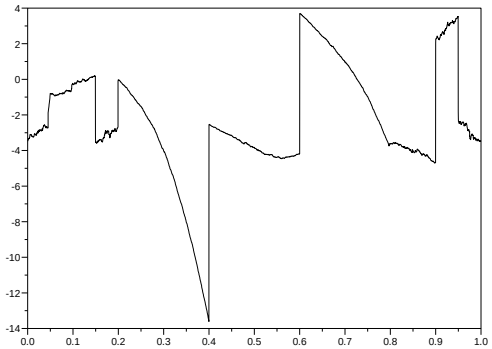

FIG. 4 - Signal débruité, SNR=27.74 dB

On peut noter que la rupture qui avait été noyée dans le bruit est ici bien restituée. Enfin, si l'on utilise le signal débruité $[x^{(0)}(0)]_{e_3}(t)$ pour ré-estimer comme précédemment les coefficients des polynômes, on obtient le resultat de la figure 5, qui montre une reconstruction quasi-parfaite du signal original.

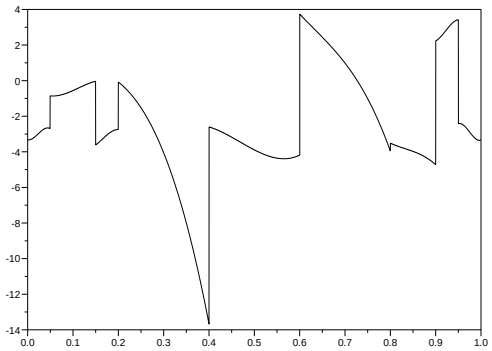

FIG. 5 - Signal reconstruit, SNR=39,58 dB

Notons aussi que la simplicité de notre traitement est à comparer avec la démarche utilisant les ondelettes présentée dans [1].

4.3 Compression d'un signal musical

Nous estimons les dérivées d'ordres 1 et 2 d'un signal musical, qui présente aussi un fort étalement temps-fréquence. Pour la compression, nous utilisons

- des splines polynômiaux de degré 2 que nous calculons par moindres carrés ;
- des fenêtres temporelles dont les longueurs variables sont spécifiées par un seuil sur la variation de la dérivée seconde ;
- des méthodes standard de quantification.

La figure 6 illustre les calculs qui, soulignons-le, sont rapides pour le codage et, encore plus, pour le décodage. Le *taux de compression* $\frac{(3+1)\times\text{nombre de polynômes}}{\text{nombre de points du signal d'origine}}$, où 3 correspond aux 3 coefficients d'un polynôme de degrÉ 2, vaut $0,2$. Il est égal à $0,33$ sans quantification. Alors, le son reconstitué est impossible à distinguer de l'original. La qualité reste bonne en dépit du bruit de quantification, qui serait réduit avec des techniques plus avancées de quantification [9], améliorant de même le taux de compression.

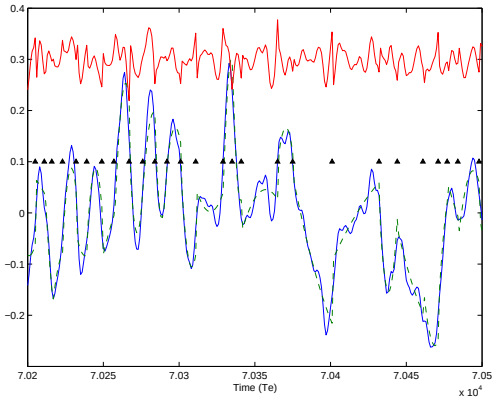

FIG. 4 – Signal d'origine (-), reconstruit (- -), indicateurs d'intervalles (△)

Références

[1] P. L. Dragotti and M. Vetterli, "Wavelet Footprints : Theory, Algorithms and Applications", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 51, may 2003, pp. 1306-1323.

[2] A. Chambert-Loir, A Field Guide to Algebra, Springer, Berlin, 2005.

[3] P. Flandrin, Temps-fréquence, 2e Éd., Hermès, Paris, 1998.

[4] M. Fliess, Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal, manuscrit.

[5] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, A. Sedoglavic, Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos, Actes 20e coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005.

[6] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Compression différentielle de transitoires bruités, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 339, 2004, 821-826.

[7] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H.Sira-Ramírez, Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, in *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimators*, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Editiorial Lagares, México, 2003, pp. 1-21.

[8] M. Fliess, H.Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, ESAIM Control Optim. Calc. Variat., 9 (2003) 151-168.

[9] A. Gersho, R.M. Gray, Vector Quantization and Signal Compression, Kluwer, Boston, 1992.

[10] E. Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New York, 1973.

[11] S. Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Éditions École Polytechnique, Palaiseau, 2000.

[12] J.C. McConnell, J.C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[13] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs, t. 1, Hermann, Paris, 1990.

[14] J. Mikusiński, Operational Calculus, 2nd ed., vol. 1, PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1983.

[15] K. Yosida, Operational Calculus, Springer, New York, 1984.