



HAL
open science

Une methode d'elements finis mixte pour les equations de von karman

Srinivasan Kesavan

► **To cite this version:**

Srinivasan Kesavan. Une methode d'elements finis mixte pour les equations de von karman. [Rapport de recherche] IRIA-RR-343, IRIA. 1979, pp.31. hal-04716625

HAL Id: hal-04716625

<https://inria.hal.science/hal-04716625v1>

Submitted on 1 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ImJ. 05868 RR343

IRIA

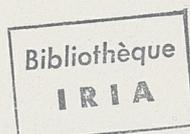
laboria

Institut de Recherche
d'Informatique
et d'Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B. P. 105 78150 - Le Chesnay
France
Tél.: 954 90 20

laboratoire de recherche
en informatique
et automatique

**UNE MÉTHODE
D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTE
POUR LES ÉQUATIONS
DE VON KARMAN**



Srinivasan KESAVAN

Rapport de Recherche N° 343

Février 1979

31p.

**UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTE POUR LES ÉQUATIONS
DE VON KARMAN
Srinivasan Kesavan**

Résumé :

Le but de ce travail est d'adapter la méthode de Kikuchi à une formulation mixte utilisée pour approcher par éléments finis les solutions non triviales qui bifurquent à partir de la solution triviale des équations de Von Karman. On démontre la convergence de la méthode et on obtient des estimations d'erreur.

Abstract :

The aim of this paper is to adapt Kikuchi's method to a mixed finite element formulation used to approximate non trivial solutions bifurcating from the trivial solution of the Von Karman equations. The convergence of the method is proved and error estimates are obtained.

UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS MIXTE POUR

LES EQUATIONS DE VON KARMAN

S. KESAVAN

1. - INTRODUCTION

Dans cet article on s'intéresse au calcul des branches de bifurcation (à partir de la solution triviale $u=0$) des équations de Von Karman. Ces équations, qui sont un modèle pour le flambage d'une plaque mince soumise à des forces latérales, s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} (1.1) \quad \Delta^2 \psi &= -[u, u] \\ (1.2) \quad \Delta^2 u &= \lambda[f, u] + [\psi, u] \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega,$$

$$(1.3) \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné (la surface moyenne de la plaque) et Γ sa frontière. Par ailleurs,

$$(1.4) \quad [u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Dans un article précédent (cf. KESAVAN [9]), nous avons donné un algorithme de calcul de la branche bifurquée autour d'une valeur propre simple du problème linéarisé, par une méthode d'éléments finis conforme. Nous allons considérer ici l'application d'une méthode d'éléments finis mixte pour ce même problème. Nous démontrons la convergence de la méthode et nous obtenons des estimations d'erreur.

Le N° 2 est consacré à la formulation mixte due à MIYOSHI [14], et à un bref rappel des résultats préliminaires utilisés par la suite.

Le N° 3 traite le problème linéaire de valeurs propres dont les résultats sont utilisés par la suite. A cause de la forme inhabituelle du membre de droite de cette équation ($\Delta^2 u = \lambda[f, u]$), on ne peut pas appliquer les résultats de MERCIER et RAPPAZ [13], ni ceux de CANUTO [4]. On est donc d'abord amené à donner un traitement adapté à ce problème. On donne également dans ce numéro des résultats sur l'approximation du problème de l'alternative de Fredholm, qui jouent un rôle important dans les estimations d'erreur.

Le N° 4 donne quelques nouveaux résultats concernant la formulation mixte pour l'équation biharmonique, qui nous permettront plus loin de démontrer la convergence de la méthode et d'obtenir les estimations d'erreur.

Le N° 5 traite brièvement le problème non linéaire continu et l'algorithme pour le problème discret est décrit dans le N° 6. Le N° 7 donne les estimations d'erreur et le N° 8 est réservé aux conclusions et aux remarques diverses.

NOTATIONS : On utilise les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ et les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$. La norme dans $L^p(\Omega)$ est désignée par $|\cdot|_{0,p,\Omega}$ sauf si $p=2$ quand nous écrivons $|\cdot|_{0,\Omega}$. La norme et la semi-norme habituelles dans $H^m(\Omega)$ sont respectivement désignées par $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ et $|\cdot|_{m,\Omega}$. Tout espace produit est muni de la norme produit correspondante mais on continuera à la désigner comme dans le cas scalaire. Exemple : La norme dans $(L^2(\Omega))^4$ sera désignée par $|\cdot|_{0,\Omega}$.

2. - UNE FORMULATION MIXTE POUR L'EQUATION BIHARMONIQUE.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée. On considère le problème suivant :

$$(2.1) \quad \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega$$

$$(2.2) \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

La formulation faible dans $H_0^2(\Omega)$ de (2.1)-(2.2) est équivalente à la formulation mixte suivante :

(P) Trouver $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$ tel que

$$(2.3) \quad \forall \tau \in \Sigma, \quad a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) = 0$$

$$(2.4) \quad \forall v \in V, \quad -b(\sigma, v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

où $\Sigma = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \in (L^2(\Omega))_s^4 \mid \sigma_{12} = \sigma_{21}\}$ et $V = H_0^2(\Omega)$, et (avec la convention de sommation sur les indices répétés)

$$(2.5) \quad \forall \sigma, \tau \in \Sigma, \quad a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx$$

$$(2.6) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad v \in V, \quad b(\sigma, v) = - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \, dx.$$

Ce problème admet une solution unique (cf. BREZZI et RAVIART [3]) et pour $f \in L^2(\Omega)$ on a $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et $\sigma_{ij} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j \in H^1(\Omega)$ (cf. KONDRAT'EV [12]), Ω étant un domaine à frontière Lipschitzienne. Grâce à ce résultat de régularité, la solution unique du problème (P) est aussi solution du problème suivant :

(P) Trouver $(\sigma, u) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ tel que

$$(2.7) \quad \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, u) = 0$$

$$(2.8) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad -\tilde{b}(\sigma, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

où $\tilde{\Sigma} = (H^1(\Omega))_s^4$, $\tilde{V} = H_0^1(\Omega)$ et

$$(2.9) \quad \forall \sigma \in \tilde{\Sigma}, \quad v \in \tilde{V}, \quad \tilde{b}(\sigma, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

Notons que la forme bilinéaire $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition de BREZZI [2], i.e. il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$(2.10) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad \sup_{\tau \in \tilde{\Sigma}} \frac{\tilde{b}(\tau, v)}{\|\tau\|_{1, \Omega}} \geq \beta \|v\|_{1, \Omega}.$$

Donc (P) admet une solution unique, à savoir, celle de (P).

Pour l'approximation de la solution de (P) on se donne des espaces $\Sigma_h \subset \tilde{\Sigma}$ et $V_h \subset \tilde{V}$ de dimension finie, qui vérifient les propriétés d'approximation habituelles, ainsi que la condition $(V_h)_s^4 \subset \Sigma_h$. Cette deuxième condition nous

permet de conclure que $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition de BREZZI discrète uniformément par rapport à h, i.e. il existe une constante $\beta_1 > 0$ indépendante de h telle que, pour tout h,

$$(2.11) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \sup_{\tau_h \in \Sigma_h} \frac{\tilde{b}(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_{1, \Omega}} \geq \beta_1 \|v_h\|_{1, \Omega}.$$

Le problème approché suivant admet toujours une solution $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ tel que

$$(2.12) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0$$

$$(2.13) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx.$$

Puisque V_h est de dimension finie il existe $S(h) > 0$ tel que

$$(2.14) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \|v_h\|_{1, \Omega} \leq S(h) |v_h|_{0, \Omega}$$

et on a l'estimation d'erreur abstraite due à BREZZI et RAVIART [3]

$$(2.15) \quad |\sigma - \sigma_h|_{0, \Omega} + |u - u_h|_{1, \Omega} \leq C \left\{ \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\sigma - \tau_h\|_{1, \Omega} + (1 + S(h)) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1, \Omega} \right\},$$

$C > 0$ étant une constante indépendante de h.

On utilisera par la suite les espaces Σ_h et V_h décrits ci-après. Pour simplifier l'exposé, supposons que Ω est un polygone convexe. On se donne une famille régulière de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}_h$ de Ω et on définit

$$(2.16) \quad W_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_k(K)\}$$

l'espace associé aux polynômes de degré $\leq k$, par l'élément fini de Lagrange de type (k) (cf. CIARLET [5]).

On pose

$$(2.17) \quad \Sigma_h = (W_h^k)_s^4, \quad V_h = W_h^k \cap H_0^1(\Omega), \quad k \geq 2.$$

Si, de plus, la triangulation est uniformément régulière, i.e. il existe $C_0 > 0$ indépendante de h telle que

$$(2.18) \quad \min_{K \in \mathcal{E}_h} h_k \leq C_0 \max_{K \in \mathcal{E}_h} h_k = C_0 h$$

où h_k est le diamètre du triangle K , on a (cf. CIARLET [5])

$$(2.19) \quad S(h) \leq C h^{-1}$$

$C > 0$ étant indépendante de h . Dans ces conditions si $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, on a, d'après (2.13),

$$(2.20) \quad |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + |u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch \|u\|_{4,\Omega}.$$

Récemment RANNACHER [16] a amélioré cette estimation. On a en effet si $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$,

$$(2.21) \quad |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} \leq Ch \|u\|_{3,\Omega}$$

$$(2.22) \quad |u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}$$

Par conséquent

$$(2.23) \quad |u - u_h|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega},$$

$$(2.24) \quad |u - u_h|_{0,\infty,\Omega} \leq Ch \|u\|_{3,\Omega}.$$

3. - LE PROBLEME LINEARISE

Considérons le problème de valeurs propres suivant :

(PV) Trouver $(\sigma, u, \lambda) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}$ tel que

$$(3.1) \quad \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, u) = 0$$

$$(3.2) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad -\tilde{b}(\sigma, v) = \lambda \int_{\Omega} [f, \sigma] v \, dx$$

où avec la notation $f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on définit

$$(3.3) \quad \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, [f, \sigma] = f_{11}\sigma_{22} + f_{22}\sigma_{11} - 2f_{12}\sigma_{12}.$$

Par les raisonnements habituels (régularité de solution et densité de \tilde{V} dans V , (σ, u, λ) est solution de $(\tilde{P}\tilde{V})$ si et seulement si (u, λ) est solution faible dans $H_0^2(\Omega) \times \mathbb{R}$ du problème de Von Karman linéarisé :

$$(3.4) \quad \Delta^2 u = \lambda [f, u] \text{ dans } \Omega; \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Ce dernier est décrit dans KESAVAN [9] ; il s'agit d'un problème de valeurs propres d'un opérateur L qui est compact et symétrique de $H_0^2(\Omega)$ dans lui-même. Donc il existe une suite de valeurs propres réelles et une suite de vecteurs propres normalisés. Sous l'hypothèse supplémentaire (faite uniquement pour fixer les idées) que L est défini positif, les valeurs propres sont positives.

Considérons le problème discret :

(PV_h) Trouver $(\sigma_h, u_h, \lambda_h) \in \Sigma_h \times V_h \times \mathbb{R}$ tel que

$$(3.5) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h, \lambda_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0$$

$$(3.6) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \lambda_h \int_{\Omega} [f, \sigma_h] v_h \, dx.$$

Afin que le problème (PV_h) soit bien l'analogue discret du problème continu $(\tilde{P}\tilde{V})$ on souhaiterait que les valeurs propres λ_h soient toutes réelles. Mais cela n'est pas évident a priori. Avec le raisonnement qui suit on aboutit à une condition (cf. (3.10)-(3.11)) qui est suffisante pour que cela soit vrai. On verra plus tard que cette condition suffisante est nécessaire pour obtenir la condition de compatibilité que doit vérifier le second membre du problème de l'alternative de Fredholm discret (cf. (3.36)) qui est analogue au cas continu (cf. (3.32)). Cette analogie est essentielle dans le traitement du problème non-linéaire.

Posons d'abord ce problème sous forme d'un problème de valeurs propres d'un opérateur linéaire L_h . S'inspirant du cas continu, on définit un produit scalaire sur V_h qui imite le produit scalaire en $H_0^2(\Omega)$. Pour $u_h \in V_h$ donné, grâce à la dimension finie de Σ_h , il existe σ_h unique tel que (3.5) est vérifiée. On pose $M_h u_h = \sigma_h$. (On voit que $M_h u_h$ est l'analogue discret du tenseur de dérivées secondes ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$ donné il existe

$\sigma \in \tilde{\Sigma}$ tel que (3.1) est vérifiée si et seulement si $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et $\sigma_{i,j} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$. On définit le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$ sur V_h par

$$(3.7) \quad \forall u_h, v_h \in V_h, (u_h, v_h)_h = a(M_h u_h, M_h v_h).$$

Alors pour $w_h \in V_h$ donné, $L_h w_h = u_h$ où $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ vérifie

$$(3.8) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0$$

$$(3.9) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \int_{\Omega} [f, M_h w_h] v_h dx.$$

Il est maintenant facile de voir que le problème (PV_h) n'est rien d'autre que le problème de valeurs propres de l'opérateur L_h . Pour que le problème (PV_h) n'admette que des valeurs propres réelles il est suffisant que L_h soit symétrique par rapport à $(\cdot, \cdot)_h$. Cela est vrai si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

(P) Si $(\sigma_h^i, u_h^i) \in \Sigma_h \times V_h$, $i=1,2$ vérifient

$$(3.10) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h^i, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h^i) = 0$$

alors

$$(3.11) \quad \int_{\Omega} [f, \sigma_h^1] u_h^2 dx = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^2] u_h^1 dx.$$

L'analogue de cette propriété dans le cas continu est toujours vérifié grâce à la formule de Green donnant ainsi la symétrie de l'opérateur L . Dans le cas discret ce n'est pas toujours évident. On donne ci-dessous un cas particulier où cette propriété est vérifiée.

Lemme 3.1 : Si l'hypothèse (H) ci-dessous a lieu, alors la propriété (P) est vérifiée :

(H) Les fonctions $f_{i,j}$ sont des constantes, i.e. f est un polynôme de degré ≤ 2 .

Démonstration : On définit $\tau_h^i \in \Sigma_h$, $i=1,2$ par

$$(3.12) \quad (\tau_h^i)_{11} = f_{22} u_h^i, \quad (\tau_h^i)_{11} = f_{11} u_h^i; \quad (\tau_h^i)_{12} = (\tau_h^i)_{21} = -f_{12} u_h^i.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f, \sigma_h^2] u_h^1 dx &= a(\sigma_h^2, \tau_h^1) = -\tilde{b}(\tau_h^1, u_h^2) \\ &= -\tilde{b}(\tau_h^2, u_h^1), \text{ utilisant (H)} \\ &= a(\sigma_h^1, \tau_h^2) = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^1] u_h^2 dx \end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

Un exemple important dans la pratique où cette hypothèse est vérifiée est celui où $f = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Cette situation correspond à une plaque soumise à une pression horizontale appliquée au bord et constitue le modèle le plus étudié (cf. BAUER et REISS [1], RANNACHER [15] etc...). Les équations (3.1) correspondantes sont

$$(3.13) \quad \Delta^2 u = -\lambda \Delta u \text{ dans } \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Pour une dérivation de ce modèle, voir CIARLET [6].

Avec cette hypothèse (H), L_h est symétrique et on a $N(h)$ valeurs propres toutes réelles, $N(h)$ étant la dimension de V_h . Pour fixer les idées supposons que L_h est défini positif de sorte que ses valeurs propres soient positives. On peut traiter l'étude de la convergence dans le cas général comme indiqué, dans KESAVAN [8], sur un exemple de l'homogénéisation d'un problème non-nécessairement elliptique. La démonstration de la convergence de la méthode se fait à peu près de la même manière qu'en théorie de l'homogénéisation des valeurs propres. On se contentera d'indiquer ici les étapes essentielles. Soit λ^i , $1 \leq i \leq \ell$, les ℓ premières valeurs propres du problème (PV). Pour h assez petit, de sorte que $N(h) \geq \ell$, soit λ_h^i , $1 \leq i \leq \ell$ les ℓ premières valeurs propres du problème (PV_h). On définit $(\phi_h^i, w_h^i) \in \Sigma_h \times V_h$ par

$$(3.14) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\phi_h^i, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, w_h^i) = 0$$

$$(3.15) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\phi_h^i, v_h) = \lambda^i \int_{\Omega} [f, \sigma^i] v_h \, dx,$$

où $(\sigma^i, u^i) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ est une fonction propre normalisée (i.e. $|\sigma^i|_{0, \Omega^i} = 1$) correspondant à λ^i . On sait que $w_h^i \rightarrow u^i$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort et $\phi_h^i \rightarrow \sigma^i$ dans $(L^2(\Omega))_s^4$ fort lorsque $h \rightarrow 0$ d'après les résultats sur le problème stationnaire et on a les estimations d'erreur du type (2.15). On a maintenant le

LEMME 3.2 : Les fonctions $\{w_h^i\}_{i=1}^{\ell}$ sont linéairement indépendantes dans V_h , et la suite $\{\lambda_h^i\}$ des ℓ -ièmes valeurs propres est bornée indépendamment de h .

Démonstration : La première partie de l'énoncé est facile à vérifier, étant donné que les fonctions $\{u^i\}, 1 \leq i \leq \ell$ sont linéairement indépendantes. Supposons la deuxième propriété fautive. Alors, pour une sous-suite, que l'on notera encore h , on a grâce au principe de mini-max (cf. STRANG et FIX [18])

$$(3.16) \quad \min_{\substack{W_h \subset V_h \\ \dim W_h = \ell}} \max_{v_h \in W_h} \{R_h(v_h)\} \rightarrow +\infty$$

lorsque $h \rightarrow 0$, où $R_h(\cdot)$ est le quotient de Rayleigh défini par

$$(3.17) \quad \forall v_h \in V_h, v_h \neq 0, \quad R_h(v_h) = \frac{a(M_h v_h, M_h v_h)}{\int_{\Omega} [f, M_h(v_h)] v_h \, dx}.$$

On utilise l'espace engendré par $\{w_h^i\}, 1 \leq i \leq \ell$ pour W_h . Supposons que le maximum soit atteint pour $w_h = \sum c_h^i w_h^i$ où (grâce à l'homogénéité du quotient de Rayleigh)

$$\sum_{i=1}^{\ell} (c_h^i)^2 = 1.$$

Alors pour une sous-suite, $c_h^i \rightarrow c_i, \sum_{i=1}^{\ell} c_i^2 = 1$ et on vérifie facilement que

$$R_h(w_h) \rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_i^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_i^2 (\lambda^i)^{-1} \right) \leq \lambda^{\ell}$$

ce qui contredit (3.16). ■

Théorème 3.1 : Pour chaque entier $\ell > 1$, la suite des ℓ -ièmes valeurs propres $\{\lambda_h^\ell\}$ converge vers λ^ℓ , la ℓ -ième valeur propre du problème (P \tilde{V}).

Démonstration : Etape 1 - Grâce au Lemma 3.2, on sait déjà que $\{\lambda_h^\ell\}$ est bornée. Si $|\sigma_h^\ell|_{0,\Omega} = 1$, alors grâce à la condition de Brezzi discrète, uniforme en h , $\{u_h^\ell\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, $(\sigma_h^\ell, u_h^\ell)$ étant vecteur propre normalisé de λ_h^ℓ . On peut donc trouver une sous-suite (encore indicée par h) telle que pour tout ℓ , $\sigma_h^\ell \rightarrow \sigma^{(\ell)}$ dans $(L^2(\Omega))_s^4$ faible, $u_h^\ell \rightarrow u^{(\ell)}$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et $\lambda_h^\ell \rightarrow \lambda^{(\ell)}$.

Etape 2 - On démontre qu'en effet les convergences ont lieu dans les topologies fortes respectives et que $(\sigma^{(\ell)}, u^{(\ell)}, \lambda^{(\ell)})$ vérifie le problème (P \tilde{V}). On définit $(\theta^\ell, z^\ell) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ solution du problème (P \tilde{P}) avec second membre $\lambda^{(\ell)}[f, \sigma^{(\ell)}] \in L^2(\Omega)$, et soit $(\theta_h^\ell, z_h^\ell) \in \Sigma_h \times V_h$ son approximation, i.e. solution de (P_h) avec le même second-membre. Alors $\theta_h^\ell \rightarrow \theta^\ell$ dans $(L^2(\Omega))_s^4$ fort et $z_h^\ell \rightarrow z^\ell$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort. On voit maintenant que $(\sigma_h^{\ell-\theta_h^\ell}, u_h^{\ell-z_h^\ell}) \in \Sigma_h \times V_h$ est solution de (P_h) avec second-membre g_h^ℓ donné par

$$(3.18) \quad g_h^\ell = \lambda_h^\ell[f, \sigma_h^\ell] - \lambda^{(\ell)}[f, \sigma^{(\ell)}]$$

et on sait que $g_h^\ell \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Mais

$$|\sigma_h^{\ell-\theta_h^\ell}|_{0,\Omega}^2 = a(\sigma_h^{\ell-\theta_h^\ell}, \sigma_h^{\ell-\theta_h^\ell}) = \int_{\Omega} g_h^\ell (u_h^\ell - z_h^\ell) dx \rightarrow 0$$

puisque $u_h^{\ell-z_h^\ell} \rightarrow u^{(\ell)} - z^{(\ell)}$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Alors on déduit que σ_h^ℓ converge dans $(L^2(\Omega))_s^4$ fort et la limite est, a fortiori, $\sigma^{(\ell)} = \theta^{(\ell)}$. De même $u_h^\ell \rightarrow u^\ell = z^\ell$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort. Or, par définition de (θ^ℓ, u^ℓ) , $(\sigma^{(\ell)}, u^{(\ell)}, \lambda^{(\ell)})$ vérifie (P \tilde{V}).

Etape 3 - Procédant maintenant exactement comme dans le Théorème 2.1 de KESAVAN [8] on démontre que toutes les valeurs propres de (P \tilde{V}) sont contenues dans la suite $\{\lambda^{(\ell)}\}_\ell$ et ceci quelque soit la sous-suite. Donc, d'une part, $\lambda^{(\ell)}$ est la ℓ -ième valeur propre de (P \tilde{V}) et, d'autre part, la convergence $\lambda_h^\ell \rightarrow \lambda^{(\ell)}$ a lieu pour toute la suite. ■

Cette convergence des valeurs propres suffit pour obtenir l'estimation d'erreur pour les vecteurs propres. La méthode est standard (cf., par exemple, CANUTO [4]). On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 3.2 : Etant donné $(\sigma_h^\ell, u_h^\ell) \in \Sigma_h \times V_h$ vecteur propre normalisé correspondant à λ_h^ℓ , alors on peut trouver $(\sigma^\ell(h), u^\ell(h)) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ vecteur propre normalisé correspondant à λ^ℓ tel que

$$(3.19) \quad |\sigma^\ell(h) - \sigma_h^\ell|_{0,\Omega} + |u^\ell(h) - u_h^\ell|_{1,\Omega} \leq C_\ell \{ \|u^\ell(h) - w_h^\ell\|_{1,\Omega} + \|\sigma^\ell(h) - \phi_h^\ell\|_{1,\Omega} \}$$

où (ϕ_h^ℓ, w_h^ℓ) est défini par (3.13)-(3.14) à partir de $(\sigma^\ell(h), u^\ell(h), \lambda^\ell)$. ■

En ce qui concerne l'estimation de l'erreur pour les valeurs propres, l'estimation est moins bonne que dans le cas où le membre de droite de l'équation (3.4) est de la forme λu (cf. CANUTO [4], MERCIER et RAPPAZ [13]). Mais on va montrer que l'estimation de l'erreur est meilleure que pour les vecteurs propres.

Soit $\lambda_h^\ell \rightarrow \lambda^\ell$ et soit $(\sigma_h^\ell, u_h^\ell)$ et (σ^ℓ, u^ℓ) des vecteurs propres normalisés choisis tels que les estimations du type (3.19) soient valables. On a, grâce à la symétrie de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$,

$$(3.20) \quad \lambda_h^\ell \int_{\Omega} [f, \sigma_h^\ell] w_h^\ell dx = \lambda^\ell \int_{\Omega} [f, \sigma^\ell] u^\ell dx \quad (= a(\phi_h^\ell, \sigma_h^\ell)).$$

Puisque $\int_{\Omega} [f, \sigma_h^\ell] w_h^\ell dx \rightarrow \int_{\Omega} [f, \sigma^\ell] u^\ell dx = (\lambda^\ell)^{-1}$, il en résulte que pour h assez petit

$$(3.21) \quad \int_{\Omega} [f, \sigma_h^\ell] w_h^\ell dx \geq (2\lambda^\ell)^{-1} \quad (\text{par exemple}).$$

On a maintenant le lemme technique suivant :

Lemme 3.3 : Il existe $\theta_h^\ell \in \Sigma_h$ tel que

$$(3.22) \quad \int_{\Omega} [f, \sigma^\ell] u^\ell dx = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^\ell] w_h^\ell dx + a(\sigma_h^\ell, \theta_h^\ell)$$

avec

$$(3.23) \quad |\theta_h^\ell|_{0,\Omega} \leq C_\ell \{ h \|u^\ell - w_h^\ell\|_{1,\Omega} + \|u^\ell - w_h^\ell\|_{0,\Omega} \}.$$

Démonstration : On définit

$$(\tau_h^\ell)_{11} = f_{22} u_h^\ell ; (\tau_h^\ell)_{22} = f_{11} u_h^\ell ; (\tau_h^\ell)_{12} = (\tau_h^\ell)_{21} = -f_{12} u_h^\ell$$

$$\tau_{11}^\ell = f_{22} u^\ell ; \tau_{22}^\ell = f_{11} u^\ell ; \tau_{12}^\ell = \tau_{21}^\ell = -f_{12} u^\ell .$$

$$(\psi_h^\ell)_{12} = f_{22} w_h^\ell ; (\psi_h^\ell)_{22} = f_{11} w_h^\ell ; (\psi_h^\ell)_{12} = (\psi_h^\ell)_{21} = -f_{12} w_h^\ell .$$

Alors

$$\int_{\Omega} [f, \sigma^\ell] u_h^\ell dx = a(\sigma^\ell, \tau_h^\ell) = -\tilde{b}(\tau_h^\ell, u^\ell) = -\tilde{b}(\tau^\ell, u_h^\ell)$$

grâce à l'hypothèse (H). On résoud maintenant le problème suivant :
Trouver $z_h^\ell \in V_h$ tel que

$$(3.24) \quad \forall v_h \in V_h , \int_{\Omega} \nabla z_h^\ell \nabla v_h dx = \tilde{b}(\tau^\ell - \psi_h^\ell, v_h) ,$$

et on pose

$$(3.25) \quad (\theta_h^\ell)_{ij} = z_h^\ell \delta_{ij}$$

Alors,

$$(3.26) \quad \forall v_h \in V_h , \tilde{b}(\tau^\ell, v_h) = \tilde{b}(\psi_h^\ell + \theta_h^\ell, v_h) .$$

Donc on a

$$(3.27) \quad \int_{\Omega} [f, \sigma^\ell] u_h^\ell dx = -\tilde{b}(\psi_h^\ell + \theta_h^\ell, u_h^\ell) = a(\sigma_h^\ell, \psi_h^\ell + \theta_h^\ell) \\ = \int_{\Omega} [f, \sigma_h^\ell] w_h^\ell dx + a(\sigma_h^\ell, \theta_h^\ell)$$

d'où la première partie de l'énoncé. Pour la deuxième partie, il suffit d'évaluer $|z_h^\ell|_{0, \Omega}$, ce que l'on fait par dualité. Si $z_g \in H_0^1(\Omega)$ est la solution faible du problème de Dirichlet pour le Laplacien, on a $z_g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $\|z_g\|_{2, \Omega} \leq C \|g\|_{0, \Omega}$. Or, pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$\int_{\Omega} z_h^\ell g dx = \int_{\Omega} \nabla(z_g - v_h) \nabla z_h^\ell dx + \tilde{b}(\tau^\ell - \psi_h^\ell, v_h - z_g) + \tilde{b}(\tau^\ell - \psi_h^\ell, z_g) .$$

Mais puisque $\tau^\ell, \psi_h^\ell \in (H_0^1(\Omega))_s^4$ on peut écrire

$$\tilde{b}(\tau^\ell - \psi_h^\ell, z_g) = b(\tau^\ell - \psi_h^\ell, z_g)$$

et on a

$$\left| \int z_h^\ell g dx \right| \leq C \{ h(|z_h^\ell|_{1,\Omega} + |\tau^\ell - \psi_h^\ell|_{1,\Omega}) + |\tau^\ell - \psi_h^\ell|_{0,\Omega} \},$$

d'où le lemme. ■

Avec ce lemme, on combinant (3.20) et (3.22), on obtient

$$(\lambda_h^\ell - \lambda^\ell) \int_{\Omega} [f, \sigma_h^\ell] w_h^\ell dx = \lambda^\ell a(\sigma_h^\ell, \theta_h^\ell)$$

d'où, en utilisant (3.21) et (3.23) on déduit le

THEOREME 3.3 : Il existe une constante $C_\ell > 0$ indépendante de h telle que

$$(3.28) \quad |\lambda_h^\ell - \lambda^\ell| \leq C_\ell \{ h|u^\ell - w_h^\ell|_{1,\Omega} + |u^\ell - w_h^\ell|_{0,\Omega} \}. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 3.1 : Si $u^\ell \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, alors

$$(3.29) \quad h(|\sigma_h^\ell - \sigma^\ell|_{0,\Omega} + |u^\ell - u_h^\ell|_{1,\Omega}) + |\lambda_h^\ell - \lambda^\ell| \leq C_\ell h^2 \|u\|_{3,\Omega}. \quad \blacksquare$$

Considérons finalement le problème de l'alternative de Fredholm. Soit λ une valeur propre simple du problème (PV) correspondant à un vecteur propre normalisé (σ, u) . Le problème

(PF) Trouver $(\theta, z) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ tel que

$$(3.30) \quad \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, a(\theta, \tau) + \tilde{b}(\tau, z) = 0$$

$$(3.31) \quad \forall v \in \tilde{V}, \tilde{b}(\theta, v) - \lambda \int_{\Omega} [f, \theta] v dx = \int_{\Omega} g v dx$$

où $g \in L^2(\Omega)$, admet une solution si et seulement si

$$(3.32) \quad \int_{\Omega} [f, \sigma] z dx = 0.$$

Le problème discret correspondant s'écrit,

(PF_h) Trouver $(\theta_h, z_h) \in \Sigma_h \times V_h$ tel que

$$(3.34) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\theta_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, z_h) = 0,$$

$$(3.35) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\theta_h, v_h) - \lambda_h \int_{\Omega} [f, \sigma_h] v_h \, dx = \int_{\Omega} g v_h \, dx$$

où $(\sigma_h, u_h, \lambda_h)$ est solution de (PV_h) approchant (σ, u, λ) .

Ce problème admet une solution si et seulement si

$$(3.36) \quad \int_{\Omega} g u_h \, dx = 0$$

grâce à la propriété (P) qui est vérifiée sous l'hypothèse (H). Il existe une solution unique telle que

$$(3.37) \quad \int_{\Omega} [f, \sigma_h] z_h \, dx = 0.$$

Observons que pour $g \in L^2(\Omega)$ quelconque, le problème (PF) posé avec P_{og} , où

$$(3.38) \quad P_{og} = g - \lambda(g, u) [f, \sigma],$$

admet une solution unique (θ, z) vérifiant (3.33). De même, le problème (PF_h) posé avec $P_{oh}g$, où

$$(3.39) \quad P_{oh}g = g - \lambda_h(g, u_h) [f, \sigma_h],$$

admet une solution unique $(\theta_h, z_h) \in \Sigma_h \times V_h$ vérifiant (3.37), et on a le théorème suivant.

THEOREME 3.4 : Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de g telle que, pour h assez petit,

$$(3.40) \quad \|\theta_h\|_{0, \Omega} + \|z_h\|_{1, \Omega} \leq C \|g\|_{0, \Omega}$$

$$(3.41) \quad \|\theta - \theta_h\|_{0, \Omega} + \|z - z_h\|_{1, \Omega} \leq C \left\{ \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\theta - \tau_h\|_{1, \Omega} + \inf_{\tau_h \in \Sigma_h} \|\sigma - \tau_h\|_{1, \Omega} \right. \\ \left. + (1+S(h)) \left(\inf_{v_h \in V_h} \|z - v_h\|_{1, \Omega} + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1, \Omega} \right) \right\}$$

Démonstration : On ne donne pas les détails ici. La démonstration s'effectue exactement comme dans le Théorème 5.1 de KESAVAN [9]. ■

Grâce aux résultats de RANNACHER [16] (cf. (2.21)-(2.24) on a

$$(3.42) \quad |\theta - \theta_h|_{0,\Omega^+} + |z - z_h|_{1,\Omega} \leq Ch(\|u\|_{3,\Omega^+} + \|z\|_{3,\Omega}).$$

4.- QUELQUES NOUVELLES ESTIMATIONS.

Dans ce numéro, nous allons donner quelques nouvelles estimations concernant les problèmes (\tilde{P}) et (P_h) du N° 2, qui vont être utilisées dans la démonstration de la convergence de la méthode qu'on va proposer pour résoudre le problème non-linéaire. Signalons que ces résultats reposent notamment sur l'injection continue de $H^2(\Omega)$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ (valable parce que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$). On a d'abord le

THEOREME 4.1 : Soit $(\sigma, u) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ solution du problème (\tilde{P}) (cf. (2.7)-(2.8)) avec second membre $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de f telle que

$$(4.1) \quad |\sigma|_{0,\Omega^+} + |u|_{1,\Omega} \leq C |f|_{0,1,\Omega}.$$

Démonstration : Grâce à la condition de BREZZI, il suffit de démontrer que $|\sigma|_{0,\Omega}$ est bornée par $|f|_{0,1,\Omega}$. On a déjà remarqué que $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et σ est le tenseur des dérivées secondes de u . Donc on a

$$\begin{aligned} |\sigma|_{0,\Omega}^2 &= a(\sigma, \sigma) = \int_{\Omega} fu \, dx \leq |f|_{0,1,\Omega} |u|_{0,\infty,\Omega} \leq C |f|_{0,1,\Omega} \|u\|_{2,\Omega} \\ &\leq C |f|_{0,1,\Omega} |\sigma|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

d'où le théorème. ■

Soit $(\theta, z) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ la solution du problème $(\tilde{P}f)$ du N° 3 vérifiant (3.33), le second membre étant $P_0 g$, $g \in L^2(\Omega)$. Alors on peut également démontrer le résultat suivant :

THEOREME 4.2 : Il existe une constante $C > 0$ indépendante de $g \in L^2(\Omega)$ telle que

$$(4.2) \quad |\theta|_{0,\Omega^+} + |z|_{1,\Omega} \leq C |g|_{0,1,\Omega}.$$

Démonstration : On omet les détails. La démonstration s'effectue en raisonnant par l'absurde. ■

Ce qui est plus important, ce sont les analogues discrets des résultats précédents. Dans le cas discuté on peut démontrer les résultats suivants.

THEOREME 4.3 : Soit $\ell \geq 2$ un entier quelconque. Il existe une constante $C = C(\ell) > 0$, indépendante de h , telle que

$$(4.3) \quad \forall g_h \in W_h^\ell, \quad |\sigma_h(g_h)|_{0,\Omega} + |u_h(g_h)|_{1,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega}$$

où $(\sigma_h(g_h), u_h(g_h)) \in \Sigma_h \times V_h$ est la solution du problème (P_h) avec second membre g_h .

Démonstration : Grâce à la condition de Brezzi, uniforme en h , il suffit de démontrer que

$$(4.4) \quad |\sigma_h(g_h)|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega}.$$

Supposons le contraire. Alors on peut trouver une sous-suite $\{h_n\}$ et une suite $\{g_{h_n}\}$ telles que

- (i) $h_n \rightarrow 0$
- (ii) $g_{h_n} \in W_{h_n}^\ell, \quad |g_{h_n}|_{0,1,\Omega} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$,
- (iii) $|\sigma_{h_n}(g_{h_n})|_{0,\Omega} = 1$.

Pour alléger l'écriture on supprimera l'indice n et on écrit σ_h au lieu de $\sigma_{h_n}(g_{h_n})$ et u_h au lieu de $u_{h_n}(g_{h_n})$. On va montrer maintenant que $\sigma_h \rightarrow 0$ fortement dans $(L^2(\Omega))_s^4$, ce qui sera une contradiction en vue de la condition (iii) ci-dessus.

Etape 1 : Pour $f \in L^2(\Omega)$, on définit $z(f) \in H_0^1(\Omega)$, solution faible du problème de Dirichlet pour le Laplacien, i.e.

$$(4.5) \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla z(f) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

On pose \

$$(4.6) \quad z^h = z(g_h).$$

On a, d'une part,

$$(4.7) \quad |z^h|_{1,\Omega} \leq C |g_h|_{0,\Omega} \leq Ch^{-1} |g_h|_{0,1,\Omega}$$

d'après les "inégalités inverses" (cf. CIARLET [5]) provenant de la régularité uniforme (2.16) de la triangulation. D'autre part, on évalue $|z^h|_{0,\Omega}$ par dualité.

On a

$$\int_{\Omega} z^h f \, dx = \int_{\Omega} \nabla z(f) \cdot \nabla z^h \, dx = \int_{\Omega} g_h z(f) \, dx,$$

d'où l'on déduit, grâce à la régularité du problème (4.5),

$$(4.8) \quad |z^h|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega} \rightarrow 0.$$

Si l'on définit $\sigma^h \in \tilde{\Sigma}$ par

$$(4.9) \quad \sigma_{ij}^h = z^h \delta_{ij} \in (H_0^1(\Omega))_s^4,$$

on a les propriétés suivantes :

$$(4.10) \quad \|\sigma^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{-1} |g_h|_{0,1,\Omega}$$

$$(4.11) \quad |\sigma^h|_{0,\Omega} \leq C |g_h|_{0,1,\Omega} \quad (\text{donc } \sigma^h \rightarrow 0 \text{ dans } (L^2(\Omega))_s^4)$$

$$(4.12) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \tilde{b}(\sigma^h, v_h) = \tilde{b}(\sigma_h, v_h).$$

Etape 2 : D'après un lemme de BREZZI et RAVIART [3], puisque $\sigma^h \in (H_0^1(\Omega))_s^4$, on peut trouver $\tilde{\sigma}_h \in \tilde{\Sigma}_h$ tel que

$$(4.13) \quad |\sigma^h - \tilde{\sigma}_h|_{r,\Omega} \leq Ch^{1-r} \|\sigma^h\|_{1,\Omega}, \quad r=0,1$$

$$(4.14) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \tilde{b}(\tilde{\sigma}_h, v_h) = \tilde{b}(\sigma^h, v_h) = \tilde{b}(\sigma_h, v_h).$$

Etape 3 : On a d'une part

$$(4.15) \quad a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma^h) \rightarrow 0,$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma_h) &= a(\sigma^h - \tilde{\sigma}_h, \sigma_h) + a(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h, \sigma_h) \\ &= a(\sigma^h - \tilde{\sigma}_h, \sigma_h) - b(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h, u_h) \\ &= a(\sigma^h - \tilde{\sigma}_h, \sigma_h) \quad \text{d'après (4.14)} \\ &\leq |\sigma^h - \tilde{\sigma}_h|_{0, \Omega} \leq C |g_h|_{0, 1, \Omega}. \end{aligned}$$

Donc on a $a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma_h) \rightarrow 0$ et par conséquent

$$|\sigma^h - \sigma_h|_{0, \Omega}^2 = a(\sigma^h - \sigma_h, \sigma^h - \sigma_h) \rightarrow 0,$$

et puisque $\sigma^h \rightarrow 0$ dans $(L^2(\Omega))_s^4$ fort, on a également $\sigma_h \rightarrow 0$ dans $(L^2(\Omega))_s^4$ fort, d'où la contradiction. ■

THEOREME 4.4 : Supposons que (σ, u, λ) solution de $(\tilde{P}\tilde{V})$ vérifie $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.
Alors il existe une constante $C_\ell > 0$ indépendante de h telle que

$$(4.16) \quad \forall g_h \in W_h^\ell, \quad |\theta_h(g_h)|_{0, \Omega} + |z_h(g_h)|_{1, \Omega} \leq C |g_h|_{0, 1, \Omega}$$

où $(\theta_h(g_h), z_h(g_h))$ est la solution du problème de Fredholm discret (PF_h) avec second membre $P_{oh}g_h$.

Démonstration : Le principe de la démonstration est le même qu'au Théorème 4.3 mais les détails varient légèrement. L'hypothèse $u \in H^3(\Omega)$ est utilisée pour montrer que u_h le vecteur propre approché reste borné dans $L^\infty(\Omega)$ (cf. (2.22)) et donc $P_{oh}g_h \rightarrow 0$ dans $L^1(\Omega)$ avec g_h . ■

Remarque 4.1 : Naturellement, si l'on se restreint aux fonctions $g_h \in W_h^\ell$ qui vérifient de plus la condition $\int_\Omega g_h u_h dx = 0$ de sorte que $P_{oh}g_h = g_h$, on n'a plus besoin de l'hypothèse $u \in H^3(\Omega)$. Néanmoins d'après les résultats de KONDRAT'EV [12], pour un polygone convexe cette hypothèse est toujours vérifiée. ■

Dans l'étude de la convergence de la méthode proposée pour le problème non linéaire, nous aurons l'occasion d'utiliser les Théorèmes 4.3 et 4.4 avec $\ell = 2k$; par exemple avec $\ell=4$ pour les éléments quadratiques.

5. - LE PROBLEME NON LINEAIRE CONTINU.

On peut écrire le problème (1.1)-(1.3) dans la formulation mixte de MIYOSHI comme ci-dessous :

(PÑ) Trouver $(\psi, y) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$, $(\sigma, u) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$(5.1) \quad \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad a(\psi, \tau) + \tilde{b}(\tau, y) = 0$$

$$(5.2) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad -\tilde{b}(\psi, v) = - \int_{\Omega} [\sigma, \sigma] v \, dx$$

$$(5.3) \quad \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, \quad a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, u) = 0$$

$$(5.4) \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad -\tilde{b}(\sigma, v) = \lambda \int_{\Omega} [f, \sigma] v \, dx + \int_{\Omega} [\psi, \sigma] v \, dx.$$

On a déjà vu dans KESAVAN [9] que toute solution faible dans $H_0^2(\Omega)$ du problème (1.1)-(1.3) est en effet dans $H^3(\Omega)$. Donc par les méthodes habituelles, on peut démontrer que si le triplet $\{(\psi, y), (\sigma, u), \lambda\}$ est solution du problème non-linéaire (PÑ), alors (y, u, λ) est solution faible dans $H_0^2(\Omega)$ du problème (1.3), et réciproquement. Etant donné cette équivalence avec la formulation faible, on peut traduire les résultats du problème continu donnés dans KESAVAN [9] dans le langage de la formulation mixte, et on a l'algorithme du type KIKUCHI [11] pour le problème continu. Puisque l'on va voir le cas discret plus en détail on indiquera simplement le résultat sans démonstration dans le cas continu.

Soit $(\sigma_0, u_0, \lambda_0) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}$ une solution du problème de valeurs propres (PÑ), avec λ_0 valeur propre simple et $|\sigma_0|_{0, \Omega} = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre. Alors pour ε assez petit il existe une solution unique du problème (PÑ) de la forme suivante :

$$(5.5) \quad \sigma = \varepsilon \sigma_0 + \theta$$

$$(5.6) \quad u = \varepsilon u_0 + z$$

$$(5.7) \quad \lambda = \lambda_0 (1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma, \psi] u_0 \, dx)$$

où (ψ, y) est calculé à partir de (σ, u) par (5.1)-(5.2) et où (θ, z) est la solution orthogonale à (σ_0, u_0) (au sens de (3.32)) du problème de l'alternative de Fredholm (\tilde{P}), avec second membre $(\lambda - \lambda_0)[f, \sigma] + [\sigma, \psi]$; cette solution vérifie de plus, $|\theta|_{0, \Omega} \leq \varepsilon$.

La solution (5.5)-(5.7) du problème (\tilde{P}) peut être décrite comme un point fixe d'un certain opérateur, et l'algorithme suivant converge vers cette solution :

Etape 1 : On choisit $(\theta^{(0)}, z^{(0)})$ orthogonal à (σ_0, u_0) (au sens de (3.32)) avec $|\theta^{(0)}|_{0, \Omega} \leq \varepsilon$. Par exemple on peut choisir $\theta^{(0)} = 0$, $z^{(0)} = 0$.

Etape 2 : Supposons que $(\theta^{(i)}, z^{(i)})$ soit connu. On pose $\sigma^{(i)} = \varepsilon \sigma_0 + \theta^{(i)}$, $u^{(i)} = \varepsilon u + z^{(i)}$ et on résout le problème biharmonique (\tilde{P}) avec second membre $-[\sigma^{(i)}, \sigma^{(i)}]$ pour obtenir $(\psi^{(i)}, y^{(i)})$.

Etape 3 : On calcule

$$(5.8) \quad \lambda^{(i+1)} = \lambda_0 (1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\psi^{(i)}, \sigma^{(i)}] u_0 \, dx).$$

Etape 4 : On résout le problème de Fredholm (\tilde{P}) avec second membre $(\lambda^{(i+1)} - \lambda_0)[f, \sigma^{(i)}] + [\sigma^{(i)}, \psi^{(i)}]$ pour obtenir $(\theta^{(i+1)}, z^{(i+1)})$ et on retourne à l'étape 2. ■

6. - LE PROBLEME NON LINEAIRE DISCRET.

L'analogie discret du problème (\tilde{P}) s'écrit :

(PN_h) Trouver $(\psi_h, y_h) \in \Sigma_h \times V_h$, $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$, $\lambda_h \in \mathbb{R}$ tel que

$$(6.1) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\psi_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, y_h) = 0$$

$$(6.2) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\psi_h, v_h) = - \int_{\Omega} [\sigma_h, \sigma_h] v_h \, dx.$$

$$(6.3) \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \quad a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, u_h) = 0$$

$$(6.4) \quad \forall v_h \in V_h, \quad -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \lambda_h \int_{\Omega} [f, \sigma_h] v_h \, dx + \int_{\Omega} [\psi_h, \sigma_h] v_h \, dx.$$

Soit $(\sigma_{oh}, u_{oh}, \lambda_{oh})$ solution du problème linéaire de valeurs propres (PV_h) , approchant $(\sigma_o, u_o, \lambda_o)$ avec λ_{oh} valeur propre simple et $|\sigma_{oh}|_{o, \Omega} = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ donné on s'intéresse aux solutions de la forme

$$(6.5) \quad \sigma_h = \varepsilon \sigma_{oh} + \theta_h ; u_h = \varepsilon u_{oh} + z_h$$

et en substituant (6.5) dans (6.3)-(6.4) on déduit que (θ_h, z_h) vérifie (PF_h) avec second membre $(\lambda_h - \lambda_{oh}) [f, \sigma_h] + [\sigma_h, \psi_h]$. Donc l'existence de (θ_h, z_h) exige que (cf. (3.36))

$$(6.6) \quad (\lambda_h - \lambda_{oh}) \int_{\Omega} [f, \sigma_h] u_{oh} dx + \int_{\Omega} [\psi_h, \sigma_h] u_{oh} dx = 0 ,$$

ce qui nous permet de calculer λ_h en fonction de (σ_h, u_h) . Notons que

$$\int_{\Omega} [f, \sigma_h] u_{oh} dx = \int_{\Omega} [f, \sigma_{oh}] u_h dx = \varepsilon \int_{\Omega} [f, \sigma_{oh}] u_{oh} dx = \varepsilon \lambda_{oh}^{-1} \neq 0$$

où on a utilisé d'abord la propriété (P) (cf. (3.10)) et ensuite l'orthogonalité de (θ_h, z_h) à (σ_{oh}, u_{oh}) au sens de (3.36) et finalement la condition de normalisation de (σ_{oh}, u_{oh}) . Alors (6.6) nous donne λ_h explicitement, à savoir,

$$(6.7) \quad \lambda_h = \lambda_{oh} (1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi_h] u_{oh} dx).$$

Pour $v_h \in V_h$ donné on calcule d'abord $M_h v_h$ (cf. N° 3) et on résout le problème biharmonique discret (P_h) avec second membre $-[M_h v_h, M_h v_h]$ pour obtenir $(\psi_h(v_h), y_h(v_h)) \in \Sigma_h \times V_h$. Maintenant on peut définir

$$(6.8) \quad \Lambda_{\varepsilon}^h v_h = \lambda_{oh} (1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [M_h v_h, \psi_h(v_h)] u_{oh} dx)$$

et

$$(6.9) \quad S_{\varepsilon}^h v_h = (\Lambda_{\varepsilon}^h v_h - \lambda_{oh}) [f, M_h v_h] + [M_h v_h, \psi_h(v_h)].$$

Finalement pour $g \in L^2(\Omega)$ données définissons $Q_h g$ la composante dans V_h de la solution du problème de Fredholm discret (PF_h) vérifiant (3.37). Pour $z_h \in V_h$ donné, définissons

$$(6.10) \quad T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{oh} + z_h)).$$

Avec ces définitions il est évident que toute solution du problème (PN_h) de la forme (6.5) provient d'un point fixe de T_h^ε . On montre que, pour ε assez petit, T_h^ε est une contraction de la boule de centre 0 et de rayon ε . Pour cela on a d'abord les estimations suivantes :

LEMME 6.1 : Supposons que $u_o \in H^3(\Omega) \cap H_o^2(\Omega)$. On suppose que $z_h, z_h^i \in B(h; o, \varepsilon)$, $i=1,2$, où

$$(6.11) \quad B(h; o, \varepsilon) = \{v_h \in V_h \mid \|v_h\|_h = |M_h v_h|_{o, \Omega} \leq \varepsilon\}.$$

On pose $\theta_h = M_h z_h$, $\theta_h^i = M_h z_h^i$, $i=1,2$ et $u_h = \varepsilon u_{oh} + z_h$, $\sigma_h^i = \varepsilon \sigma_{oh} + \theta_h^i$, $u_h^i = \varepsilon u_{oh} + z_h^i$, $\sigma_h^i = \varepsilon \sigma_{oh} + \theta_h^i$, $i=1,2$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que

$$(6.12) \quad |\Lambda_h^\varepsilon u_h - \lambda_{oh}| \leq C\varepsilon^2$$

$$(6.13) \quad |\Lambda_h^\varepsilon u_h^1 - \Lambda_h^\varepsilon u_h^2| \leq C\varepsilon |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{o, \Omega}$$

$$(6.14) \quad |S_h^\varepsilon u_h|_{o, 1, \Omega} \leq C\varepsilon^3$$

$$(6.15) \quad |S_h^\varepsilon u_h^1 - S_h^\varepsilon u_h^2|_{o, 1, \Omega} \leq C\varepsilon^2 |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{o, \Omega}$$

$$(6.16) \quad \|T_h^\varepsilon z_h\|_h \leq C\varepsilon^3$$

$$(6.17) \quad \|T_h^\varepsilon z_h^1 - T_h^\varepsilon z_h^2\|_h \leq C\varepsilon^2 |\sigma_h^1 - \sigma_h^2|_{o, \Omega}.$$

Démonstration : (i) Puisque $u_o \in H^3(\Omega)$, on a $\{u_{oh}\}$ bornée dans $L^\infty(\Omega)$ (cf. (2.22)).

$$\text{Alors } |\Lambda_h^\varepsilon u_h - \lambda_{oh}| = \varepsilon^{-1} |\lambda_{oh}| \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi_h] u_{oh} dx$$

$$\leq C\varepsilon^{-1} |\sigma_h|_{o, \Omega} |\psi_h|_{o, \Omega} |u_{oh}|_{o, \infty, \Omega}$$

Mais $|\sigma_h|_{o, \Omega} \leq \varepsilon$. Par ailleurs puisque $[\sigma_h, \sigma_h] \in W_k^{2k}$, on peut appliquer le Théorème 4.3 pour obtenir

$$|\psi_h|_{0,\Omega} \leq C |[\sigma_h, \sigma_h]|_{0,1,\Omega} \leq C\varepsilon^2,$$

d'où on déduit (6.12).

(ii) On déduit (6.13) de la même façon que (6.12). Les estimations (6.14) et (6.15) sont directes et ne posent aucune difficulté.

(iii) On a $T_h^\varepsilon z_h = Q_h(S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{oh} + z_h))$ et on sait que $S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{oh} + z_h) \in W_h^{2k}$. Alors on applique cette fois le Théorème 4.4 pour obtenir

$$\|T_h^\varepsilon z_h\|_h \leq C |S_h^\varepsilon(\varepsilon u_{oh} + z_h)|_{0,1,\Omega}$$

d'où on déduit (6.16) grâce à (6.14). De la même façon on a (6.17) grâce à (6.15) par une seconde application du Théorème 4.4. Le lemme est donc complètement démontré. ■

Si ε est suffisamment petit, de telle sorte que $C\varepsilon^2 < 1$, alors T_h est une application de $B(h;0,\varepsilon)$ dans elle-même et d'autre part cette application est une contraction. Donc il existe un point fixe unique, qui peut être calculé par la suite itérative

$$z_h^{(i+1)} = T_h z_h^{(i)},$$

d'où l'algorithme suivant pour résoudre (PN_h) :

Etape 1 : On choisit $(\theta_h^{(0)}, z_h^{(0)})$ orthogonal (au sens de (3.36)) à (σ_{oh}, u_{oh}) avec $|\theta_h^{(0)}|_{0,\Omega} \leq \varepsilon$. (Exemple, $\theta_h^{(0)} = 0, z_h^{(0)} = 0$).

Etape 2 : On suppose $(\theta_h^{(i)}, z_h^{(i)})$ donné. Alors on pose $\sigma_h^{(i)} = \varepsilon \sigma_{oh} + \theta_h^{(i)}$, $u_h^{(i)} = \varepsilon u_{oh} + z_h^{(i)}$ et on résout le problème biharmonique discret $(P_h^{(i)})$ avec second membre $-[\sigma_h^{(i)}, \sigma_h^{(i)}]$ pour obtenir $(\psi_h^{(i)}, y_h^{(i)})$.

Etape 3 : On calcule

$$(6.18) \quad \lambda_h^{(i+1)} = \lambda_{oh} (1 - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h^{(i)}, \psi_h^{(i)}] u_{oh} dx).$$

Etape 4 : On résout le problème de Fredholm $(PF_h^{(i)})$ avec second membre $(\lambda_h^{(i+1)} - \lambda_{oh}) [\sigma_h^{(i)}, \sigma_h^{(i)}] + [\sigma_h^{(i)}, \psi_h^{(i)}]$ pour obtenir $(\theta_h^{(i+1)}, z_h^{(i+1)})$ et on retourne à l'étape 2. ■

Cet algorithme converge vers la solution $((\psi_h, y_h), (\sigma_h, u_h), \lambda_h)$ du problème (PN_h) .

7. - ESTIMATIONS D'ERREUR

Dans ce numéro nous allons obtenir des estimations de l'erreur commise en passant au problème discret. Comme dans le numéro précédent nous aurons souvent l'occasion d'utiliser les estimations du N° 4.

Soit $(\sigma_o, u_o, \lambda_o)$ solution du problème $(\tilde{P}\tilde{V})$ avec λ_o valeur propre simple et $|\sigma_o|_{o, \Omega} = 1$. Soit $(\sigma_{oh}, u_{oh}, \lambda_{oh})$ son approximation, et solution de (PV_h) . Pour h assez petit, λ_{oh} est également valeur propre simple. Soit $\{(\psi, y), (\sigma, u), \lambda\}$ solution du problème $(\tilde{P}\tilde{N})$ obtenue à partir de $(\sigma_o, u_o, \lambda_o)$ comme dans le N° 5. Soit $\{(\psi_h, y_h), (\sigma_h, u_h), \lambda_h\}$ solution de (PN_h) , son analogue discret.

LEMME 7.1 : Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que

$$(7.1) \quad |\psi - \psi_h|_{o, \Omega} + |y - y_h|_{1, \Omega} \leq C \{ r_h + \varepsilon |\sigma - \sigma_h|_{o, \Omega} + \varepsilon^2 h \}$$

où $r_h \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Démonstration : Soit $\tilde{\sigma}_h \in \Sigma_h$ tel que $\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. On définit $(\psi_h^1, y_h^1) \in \Sigma_h \times V_h$ solution du problème biharmonique discret (P_h) avec second membre $-[\sigma, \sigma]$ et $(\psi_h^2, y_h^2) \in \Sigma_h \times V_h$ solution de (P_h) avec second membre $-[\tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_h]$. Alors on a d'après les estimations (2.21) et (2.22)

$$(7.2) \quad |\psi - \psi_h^1|_{o, \Omega} + |y - y_h^1|_{o, \Omega} \leq Ch \|\psi\|_{1, \Omega} .$$

On peut majorer les quantités $|\psi_h^1 - \psi_h^2|_{o, \Omega}$ et $|y_h^1 - y_h^2|_{1, \Omega}$ pour la norme en $L^2(\Omega)$ de $[\sigma, \sigma] - [\tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_h]$. Ainsi on a

$$(7.3) \quad |\psi_h^1 - \psi_h^2|_{o, \Omega} + |y_h^1 - y_h^2|_{o, \Omega} \leq C (\|\sigma\|_{1, \Omega} + \|\sigma_h\|_{1, \Omega}) \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} \\ \leq C \|\sigma\|_{1, \Omega} \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} .$$

Finalement, puisque $[\tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_h] - [\sigma_h, \sigma_h] \in W_h^{2k}$, on peut appliquer le Théorème 4.3 pour obtenir

$$(7.4) \quad |\psi_h^2 - \psi_h|_{0,\Omega} + |y_h^2 - y_h|_{1,\Omega} \leq C(|\tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\sigma_h|_{0,\Omega}) |\tilde{\sigma}_h - \sigma_h|_{0,\Omega} \\ \leq C(|\tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\sigma_h|_{0,\Omega}) (|\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega})$$

Observons que $|\sigma|_{0,\Omega} \leq \varepsilon$, $|\sigma_h|_{0,\Omega} \leq \varepsilon$. De plus, puisque (σ, u) est solution du problème continu, on a $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et l'estimation $\|u\|_{3,\Omega} \leq C \|u\|_{2,\Omega}$ grâce au Théorème de régularité démontré dans KESAVAN [9]. Donc

$$(7.5) \quad \|\sigma\|_{1,\Omega} \leq C \|u\|_{3,\Omega} \leq C\varepsilon.$$

et

$$(7.6) \quad \|\psi\|_{1,\Omega} \leq C |[\sigma, \sigma]|_{0,\Omega} \leq C \|\sigma\|_{1,\Omega}^2 \leq C\varepsilon^2$$

d'où on tire (7.1) avec $r_h = \varepsilon \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega}$. ■

LEMME 7.2 : Supposons que $u_o \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Alors il existe $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que

$$(7.7) \quad |\lambda - \lambda_h| \leq C(h^2 + \varepsilon^2 h + r_h + \varepsilon |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega}).$$

Démonstration : On a

$$\lambda_h - \lambda = (\lambda_{oh} - \lambda_o) + \varepsilon^{-1} (\lambda_o - \lambda_{oh}) \int_{\Omega} [\sigma, \psi] u_o dx + \lambda_{oh} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma - \sigma_h, \psi] u_o dx + \\ + \lambda_{oh} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi] (u_o - u_{oh}) dx + \lambda_{oh} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} [\sigma_h, \psi - \psi_h] u_{oh} dx.$$

Sous l'hypothèse $u_o \in H^3(\Omega)$, on a $|u_o - u_{oh}|_{1,\Omega} = O(h^2)$, $|\lambda_o - \lambda_{oh}| = O(h^2)$ et $\{u_{oh}\}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Par ailleurs, $|\sigma|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon$ et grâce au Théorème 4.1, $|\psi|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon^2$. Alors on obtient

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 + Ch^2 \varepsilon^2 + C\varepsilon |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + Ch^2 \varepsilon^2 + C|\psi - \psi_h|_{0,\Omega}$$

d'où on déduit (7.7). ■

Maintenant on a tous les éléments nécessaires pour les estimations finales.

THEOREME 7.1 : On suppose que $u_o \in H^3(\Omega) \cap H_o^2(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que, pour ε assez petit,

$$(7.8) \quad \|\sigma - \sigma_h\|_{o, \Omega} + \|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h$$

$$(7.9) \quad |\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 + Ch\varepsilon + Cr_h + C\varepsilon s_h$$

où r_h est la quantité apparaissant dans l'inégalité (7.1) et $s_h \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Démonstration : On a d'abord

$$S^{\varepsilon} u = (\lambda - \lambda_o)[f, \sigma] + [\psi, \sigma]$$

$$S_h^{\varepsilon} u_h = (\lambda_h - \lambda_{oh})[f, \sigma_h] + [\psi_h, \sigma_h] .$$

Choisissons $\tilde{\sigma}_h, \tilde{\psi}_h \in \Sigma_h$ tels que $\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1, \Omega} \rightarrow 0, \|\psi - \tilde{\psi}_h\|_{1, \Omega} \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.
On définit

$$(7.10) \quad \tilde{S}_h^{\varepsilon} u_h = (\lambda_h - \lambda_{oh})[f, \sigma_h] + [\tilde{\psi}_h, \tilde{\sigma}_h] .$$

On définit $(\theta_h^1, z_h^1), (\theta_h^2, z_h^2)$ dans $\Sigma_h \times V_h$ solutions de problèmes de Fredholm (PF_h) avec second membres $P_{oh}(S^{\varepsilon} u)$ et $P_{oh}(\tilde{S}_h^{\varepsilon} u_h)$ respectivement, de sorte que l'on a

$$(7.11) \quad z = Q(S^{\varepsilon} u), z_h = Q_h(S_h^{\varepsilon} u_h), z_h^1 = Q_h(S^{\varepsilon} u), z_h^2 = Q_h(\tilde{S}_h^{\varepsilon} u_h).$$

Tout d'abord, grâce au Théorème 3.4, on a

$$(7.12) \quad \|\theta - \theta_h^1\|_{o, \Omega} + \|z - z_h^1\|_{1, \Omega} \leq Ch(\|z\|_{3, \Omega} + \|u_o\|_{3, \Omega}) \\ \leq Ch\varepsilon^2 + Ch, \text{ puisque } \|z\|_{3, \Omega} \leq C\|\sigma\|_{1, \Omega}^2 \\ \leq Ch$$

Ensuite, grâce au même théorème, on a également

$$\begin{aligned}
 (7.13) \quad & |\theta_h^1 - \theta_h^2|_{0,\Omega} + |z_h^1 - z_h^2|_{1,\Omega} \leq C |S^\varepsilon u - \tilde{S}_h^\varepsilon u_h|_{0,\Omega} \\
 & \leq C\varepsilon^2 |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + Ch^2\varepsilon + Ch\varepsilon^2 + C\varepsilon r_h \\
 & \quad + C\varepsilon^2 \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega} + C\varepsilon \|\psi - \tilde{\psi}_h\|_{1,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Finalemment, grâce au Théorème 4.4, on a (puisque $\tilde{S}_h^\varepsilon u_h - S_h^\varepsilon u_h \in W_h^{2k}$),

$$\begin{aligned}
 (7.14) \quad & |\theta_h^2 - \theta_h|_{0,\Omega} + |z_h^2 - z_h|_{1,\Omega} \leq C |\tilde{S}_h^\varepsilon u_h - S_h^\varepsilon u_h|_{0,1,\Omega} \\
 & \leq C \{ |\psi_h|_{0,\Omega} |\sigma_h - \tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} + |\tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} |\psi_h - \tilde{\psi}_h|_{0,\Omega} \} \\
 & \leq C \{ \varepsilon^2 |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + \varepsilon^2 |\sigma - \tilde{\sigma}_h|_{0,\Omega} \\
 & \quad + \varepsilon |\psi - \psi_h|_{0,\Omega} + \varepsilon^2 |\psi - \tilde{\psi}_h|_{0,\Omega} \}.
 \end{aligned}$$

On pose

$$(7.15) \quad s_h = \varepsilon (\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega} + \|\psi - \tilde{\psi}_h\|_{1,\Omega})$$

expression qui tend vers zero lorsque $h \rightarrow 0$. Alors on obtient

$$(7.16) \quad |\theta - \theta_h|_{0,\Omega} + |z - z_h|_{1,\Omega} \leq C \{ s_h + \varepsilon^2 |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} \} + Ch + Ch^2\varepsilon$$

et donc

$$(7.17) \quad |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + |u - u_h|_{0,\Omega} \leq Ch\varepsilon + Ch + Ch^2\varepsilon + s_h + C\varepsilon^2 |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega}.$$

Si ε est suffisamment petit pour que $C\varepsilon^2 \leq 1/2$ (par exemple) on obtient (7.8). L'estimation (7.9) est une conséquence directe de (7.7) et de (7.8). ■

Remarque 7.1 : Si $u_0, u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, alors on a de même pour z et donc $\sigma, \psi \in (H^2(\Omega))_s^4$. Par conséquent on a $\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_{1,\Omega} \leq Ch(\|u\|_{4,\Omega} + \|u_0\|_{4,\Omega})$ et de même pour $\|\psi - \tilde{\psi}_h\|_{1,\Omega}$. Dans ces conditions on obtient $|r_h| \leq C\varepsilon h$, $|s_h| \leq C\varepsilon h$ et donc on a

$$(7.18) \left\{ \begin{array}{l} |\sigma - \sigma_h|_{0,\Omega} + |u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch + Ch^2 \varepsilon, \\ |\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 + Ch\varepsilon. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Remarque 7.2 : Pour des domaines qui ne sont pas des polygones, on peut utiliser des éléments finis isoparamétriques ainsi qu'un procédé d'intégration numérique. Pour les estimations d'erreur dans ce cas on peut suivre les démarches de KESAVAN et VANNINATHAN [10]. ■

8. - CONCLUSIONS

La méthode de MIYOSHI est bien adaptée pour les équations de Von Karman parce que l'on obtient l'approximation du déplacement, de la fonction d'Airy et du tenseur de contraintes (dérivées secondes de la fonction d'Airy). Mais on a vu qu'il y a une difficulté sérieuse, même dans le cas linéaire, qui nous a conduit à supposer que f est un polynôme de degré 2. Donc, bien qu'une méthode mixte soit en principe plus facile à mettre en oeuvre qu'une méthode conforme la méthode conforme décrite dans KESAVAN [9] reste préférable si f est une fonction quelconque. On a démontré la convergence de la méthode avec l'hypothèse minimale de régularité, à savoir, la solution appartient à l'espace $H^3(\Omega)$, mais pour obtenir l'ordre de convergence il faut plus de régularité ce qui n'était pas nécessaire pour la méthode conforme.

En ce qui concerne le cas d'une plaque soumise à une pression uniforme ($f = -1/2(x^2 + y^2)$) si l'on ne s'intéresse pas au tenseur de contraintes il existe une meilleure méthode mixte, à savoir, celle de CIARLET et RAVIART [7]. Cette méthode a comme inconnues u et $-\Delta u$ et donc est plus facile à programmer (la méthode de MIYOSHI a comme inconnues $u, \sigma_{11}, \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{22}$). Les résultats de SCHOLZ [17] sur l'équation biharmonique montrent que l'on peut utiliser cette méthode même avec des éléments de Lagrange du type 1.

REFERENCES

- [1] BAUER L., REISS E., Non linear buckling of rectangular plates, SIAM, Num. Anal., Vol. 13, pp. 603-627, 1965.
- [2] BREZZI F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, RAIRO, Analyse Numérique, R-2, pp. 129-151, 1974.
- [3] BREZZI F., RAVIART P.A., Mixed finite element methods for fourth order elliptic equations, Rapport Interne N° 9, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1976.
- [4] CANUTO C., Eigenvalue approximations by mixed methods, RAIRO, Analyse Numérique, 12, pp. 27-50, 1978.
- [5] CIARLET P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] CIARLET P.G., Derivation of the Von Karman equations from three-dimensional elasticity, Proceedings of the Fourth Conference on Basic Problems in Numerical Analysis, Plzen, 1978 (à paraître).
- [7] CIARLET P.G., RAVIART P.A., A mixed finite element method for the biharmonic equation, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, Ed. C. de Boor, pp. 125-145, 1974.
- [8] KESAVAN S., Homogenization of elliptic eigenvalue problems, Applied Mathematics and Optimization (à paraître).
- [9] KESAVAN S., La méthode de KIKUCHI appliquée aux équations de Von Karman, Numerische Mathematik (à paraître).
- [10] KESAVAN S., VANNINATHAN M., Sur une méthode d'éléments finis mixte pour l'équation biharmonique, RAIRO, Analyse Numérique, 11, N° 3, pp. 255-270, 1977.
- [11] KIKUCHI F., An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi-linear elliptic equations, Report N° 542, Institute of space and Aeronautical Science, Univ. of Tokyo, Japan, 1976.
- [12] KONDRAT'EV V.A., Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trudy Moskov. Mat. Obsc., 16, pp. 209-292, 1967.
- [13] MERCIER B., RAPPAZ J., Eigenvalue approximation via non-conforming and hybrid finite element methods, Rapport Interne N° 33, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1978.

- [14] MIYOSHI T., A finite element method for the solution of fourth order partial differential equations, Kumamoto J. Sc. (Math.), 9, pp. 87-116, 1973.
- [15] RANNACHER R., Non conforming finite element methods for eigenvalue problems in linear plate theory, Preprint N° 191, Univ. of Bonn, W. Germany, 1978.
- [16] RANNACHER R., On non-conforming and mixed finite element methods for plate bending problems, The linear case, RAIRO, Analyse Numérique, (à paraître).
- [17] SCHOLZ R., Approximation von Sattelpunkten mit Finiten Elementen, Bonner Math. Schrifter, 89, pp. 53-66, 1976.
- [18] STRANG G., FIX G.J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1973.