



HAL
open science

Suivi de vibrations pour la localisation de dommages : application à une maquette du pont de Saint Nazaire

Ambroise Cadoret, Clément Freyssinet, Md Delwar Hossain Bhuyan, Yann Lecieux, Michael Döhler, Laurent Mevel

► To cite this version:

Ambroise Cadoret, Clément Freyssinet, Md Delwar Hossain Bhuyan, Yann Lecieux, Michael Döhler, et al.. Suivi de vibrations pour la localisation de dommages: application à une maquette du pont de Saint Nazaire. Diagonobéton 2023 - 8e congrès international francophone Diagonobéton, Oct 2023, Nantes, France. pp.1-8, 10.26168/ajce.41.4.21 . hal-04304473

HAL Id: hal-04304473

<https://inria.hal.science/hal-04304473v1>

Submitted on 24 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Suivi de vibrations pour la localisation de dommages : application à une maquette du pont de Saint Nazaire

Ambroise Cadoret¹⁻³, Clément Freyssinet², Md Delwar Hossain Bhuyan¹, Yann Lecieux², Michael Döhler¹ et Laurent Mevel¹

¹ Institut national de recherche en sciences et technologies du numérique, Campus de Beaulieu, 263 Avenue Général Leclerc, CS 74205 35042 Rennes, France

² Laboratoire GeM (UMR CNRS 6183), Université de Nantes, CNRS, École Centrale de Nantes, 2, rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 3, France

³ IFP Energies nouvelles (IFPEN), France

RESUME Pour évaluer la méthode de localisation de dommages SDDL, un benchmark à partir des données issues uniquement de capteurs a été proposé. Des essais ont été réalisés en laboratoire sur une maquette à l'échelle 1/200 de la travée centrale du pont de Saint-Nazaire équipée d'accéléromètres. Le dommage introduit simule la rupture d'une paire de câbles supportant le pont. La méthode SDDL a permis d'identifier les modifications de la matrice de souplesses de la maquette en exploitant les données mesurées par des accéléromètres soumis à un bruit blanc. Dans un second temps, un modèle éléments finis de la structure est utilisé dans le cadre d'une analyse statique pour la cartographie des éléments endommagés sans qu'il soit nécessaire de le mettre à jour. Sur la maquette, un endommagement particulier a pu être correctement localisé dans un contexte où d'une part le décalage fréquentiel entre l'état sain et l'état endommagé n'est que de l'ordre de 1% pour les modes de vibrations utiles à l'analyse et que d'autre part la correspondance entre les modes calculés par éléments finis et les modes identifiés lors des essais n'est qu'approximative.

Mot-clefs Contrôle de santé des structures, Analyse modale opérationnelle, SDDL.

I. INTRODUCTION

Pour localiser des dommages dans le cadre du contrôle de santé des structures (SHM), deux approches sont classiquement employées : les méthodes basées sur les données ou sur les modèles. Les premières citées sont utilisées pour des structures particulières en combinaison avec des grilles de capteurs denses et ne sont pas toujours adaptées à des structures quelconques. Les méthodes basées sur des modèles supposent la mise à jour des paramètres du modèle de la structure saine sur la base des mesures du système endommagé. Les dommages sont alors localisés dans les régions où les paramètres sont modifiés. En théorie cette technique est applicable à tous types de structures. Toutefois dans le cadre de l'analyse modale opérationnelle, exposée ici, peu de modes de vibrations sont généralement identifiés grâce aux données tandis que les modèles peuvent être constitués d'un très grand nombre de paramètres. Leur identification a ainsi peu de probabilités d'aboutir car elle conduit à la résolution d'un problème mal conditionné.

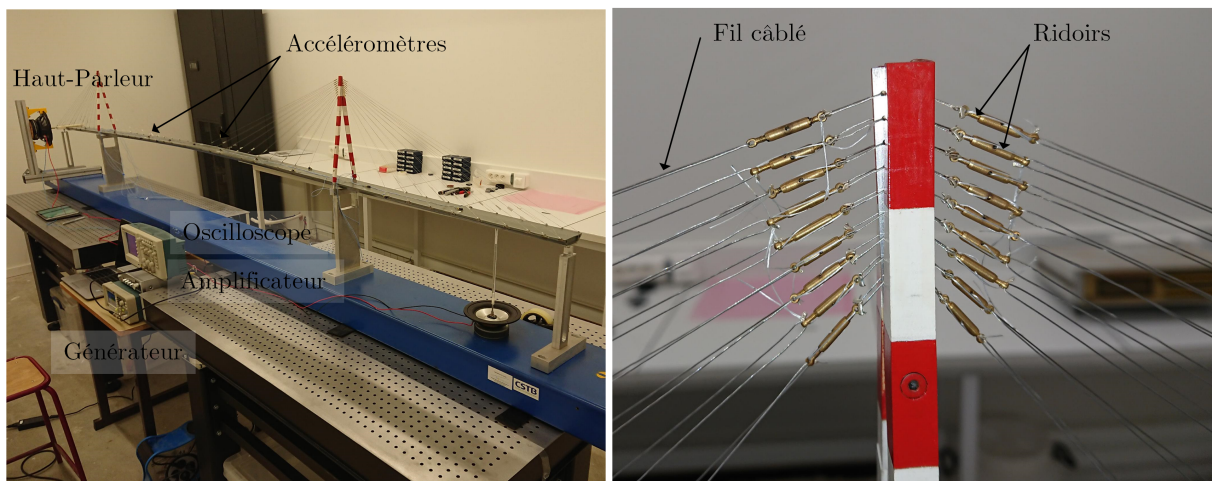
Des techniques de localisation alternatives combinent les approches des méthodes basées sur les données et sur les modèles. Elles s'appuient sur des mesures de l'état de référence et de l'état endommagé. Un modèle éléments finis de la structure étudiée est utilisé pour définir des indicateurs d'endommagements, mais sans nécessiter la mise à jour des paramètres. Cette étude est consacrée à l'évaluation d'une de ces méthodes : la SDDLV pour *Stochastic Dynamic Damage Locating Vector*. Depuis ses premiers développements, elle a fait l'objet de nombreux tests principalement sur des structures virtuelles (Bhuyan et al. 2017). Les mises en application avec des données issues de mesures réelles se sont en revanche limitées à l'étude d'une poutre en vibration Bhuyan et al. (2017) et de la structure 'Yellow Frame' (Johnson et al. 2004). Il semblait donc pertinent d'évaluer la méthode SSDLV sur une structure représentative d'un ouvrage réel. Une maquette du pont de Saint Nazaire a ainsi été utilisée comme objet d'étude (Bhuyan et al. 2018).

II. STRUCTURE TESTÉE, CAPTEURS ET PROTOCOLE D'ESSAIS

Le pont de Saint-Nazaire est un pont à haubans situé à l'embouchure de la Loire. Il est constitué de deux viaducs d'accès réalisés en béton précontraint et d'une structure centrale : un caisson métallique haubanée.

A. La maquette du pont de Saint-Nazaire

Lors de l'analyse vibratoire seule la partie centrale du pont a été étudiée. Les mesures ont été réalisées sur une maquette de la structure à l'échelle 1/200^{ème} (voir Figure 1), soit un modèle de 3,6 m de long, placé sur deux marbres dans une pièce à l'humidité et à la température contrôlée (20°C 50% HR).



(a) Vue d'ensemble avec le système d'excitation et d'acquisition (b) Détail du montage des haubans et du système de mise en tension

FIGURE 1 – La maquette du pont de Saint-Nazaire

Après application du facteur d'échelle, les caractéristiques du modèle réduit sont les suivantes :

- Les pylônes : ils sont en acier, avec des sections de dimension 4 mm × 6 mm dans la partie inférieure. Les deux pièces formant un triangle sont assemblées sur la pièce supérieure, un fer plat de section 10 mm × 2 mm. Cette pièce est percée pour fixer les câbles.
- Les piles : leurs dimensions sont celles des piles réelles à l'échelle 1/200. Elles sont fabriquées en aluminium car ce matériau a une densité très proche de celui du béton (aluminium $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$).

- Le tablier central : dans la réalité c'est un assemblage soudé de plusieurs sections différentes renforcées par des longerons qui limitent les déformations. Le modèle réduit est constitué d'une unique pièce dont la section est identique en tout point du caisson. Il est réalisé avec une feuille d'acier de 0,1 mm d'épaisseur. Il est renforcé par une mousse légère de Rohacell (de densité 50 kg/m^3) assemblée à la feuille d'acier avec une colle époxy.
- Les haubans : ils sont réalisés en fil câblé d'un diamètre de 0,38 mm. La tension est imposée à une paire de câbles par vissage d'un ridoir de modélisme (voir Figure 1).

B. Capteur, excitation et système d'acquisition

Sur le modèle réduit sont positionnés dix-neuf accéléromètres piézoélectriques miniatures (0.8 g) de sensibilité 100 mV/g. Neuf d'entre eux sont utilisés pour mesurer des accélérations verticales et les autres des accélérations horizontales. Les signaux sont collectés sur un enregistreur de données (HBM MX16101) à la fréquence d'acquisition de 4800 Hz. L'excitation est assurée par un haut-parleur de type boomer (voir Figure 1). Il est alimenté par un générateur de bruit blanc (+/- 5V crête à crête, commercialisé par Tektronix, avec la référence AFG). Le signal est amplifié par un amplificateur stéréo et contrôlé par un oscilloscope.

C. Protocole d'essais

Pour constituer la base de données du comportement à l'état sain, le pont est mis en vibration successivement dans les directions horizontales puis verticales pendant une durée de 10 minutes par une sollicitation de type bruit blanc. Suite à cet enregistrement un dommage est infligé à la structure.

Le scénario retenu est la rupture d'un câble supportant le pont. Il est introduit en dévissant un ridoir ce qui revient à supprimer une paire de haubans. Seule la rigidité de la structure est modifiée et non sa masse. L'exemple traité ici est celui d'un dommage affectant la paire de câbles 19 située au centre du pont et visible sur la figure 2. Une fois le ridoir dévissé, le pont est à nouveau mis en vibration successivement dans les directions horizontales puis verticales pendant une durée de 5 minutes.

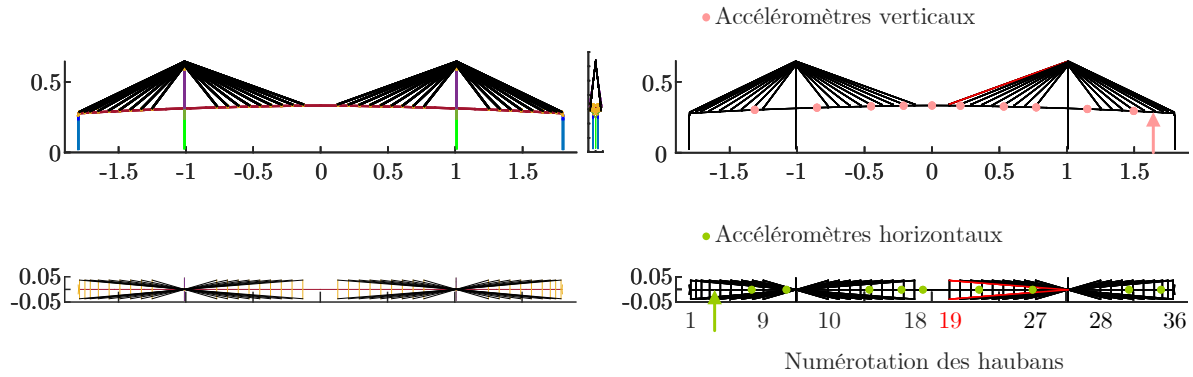
III. MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS DE LA MAQUETTE

Le modèle par éléments finis est constitué d'un assemblage de poutres et de barres en 3 dimensions. Les problèmes statiques ou aux valeurs propres sont résolus avec un algorithme MATLAB dédié à cette application pour optimiser l'interface avec les outils d'analyse développés dans le même environnement. Le tablier est discrétisé avec 50 éléments poutres de sections et de propriétés matérielles identiques (groupe d'éléments 1 dans le tableau 1 et sur la figure 2). Les piles aux extrémités sont constituées de deux groupes et sont modélisées avec des éléments poutres, la partie colonne (groupe 2) et la partie tête de pile (groupe 3). Les piles centrales comprenant les pylônes sont modélisées avec six groupes d'éléments poutres : les colonnes (groupe 4), les chevêtres en forme de V (groupes 5 et 6), les pylônes en forme de A (groupe 7 et groupe 8), et la partie verticale en acier percée pour la fixation des câbles (groupe 9). Le groupe 10 contient des éléments rigides indéformables. Ils relient les haubans au tablier du pont à l'emplacement des points de fixations réels. Les haubans sont modélisés avec des éléments de type treillis (groupe 11). Au total le modèle est constitué de 1038 degrés de libertés. Les six degrés de libertés aux extrémités des colonnes de chaque pile sont fixés réduisant le problème à 1002 degrés de libertés.

L'étalonnage du modèle est effectué par comparaison avec les modes de vibrations enregistrés à l'état sain. Lors de cette analyse, la masse volumique ρ^t et les moments quadratiques I_y^t et I_z^t sont identifiés.

Groupe	ρ kg/m ³	E GPa	A mm ²	I_y mm ²	I_z mm ²	Couleur Figure 2
1	ρ^t	210	20.4	I_y^t	I_z^t	—
2	2700	69	200	1670	6670	—
3	7800	210	240	8000	2880	—
4	2700	69	1800	1216000	60000	—
5	2700	69	900	152000	30000	—
6	2700	69	900	152000	30000	—
7	7800	210	24	32	72	—
8	7800	210	24	32	72	—
9	7800	210	20	6,33	166,66	—
10	0	Inf	-	-	-	—
11	7800	210	0,1134	0	0	—

TABLE 1 – Propriétés des groupes d’éléments constitutifs du modèle EF. Les moments quadratiques sont donnés dans la base locale où l’axe \vec{x} est aligné avec la direction longitudinale de l’élément.



(a) Groupes d’éléments listés dans le tableau 1

(b) Capteurs et dommage (paire de haubans 19 en rouge)

FIGURE 2 – Modélisation de la maquette du pont de Saint Nazaire

IV. LOCALISATION DE DOMMAGES PAR LA MÉTHODE SDDL

A. Modélisation des systèmes dynamiques

Le comportement du pont est décrit par un système dynamique linéaire invariant dans le temps :

$$M\ddot{\mathcal{X}}(t) + C\dot{\mathcal{X}}(t) + K\mathcal{X}(t) = f(t) \quad (1)$$

où $M, C, K \in \mathbb{R}^{d \times d}$ sont respectivement les matrices de masse, d’amortissement et de rigidité, t est le temps continu, $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^d$ désigne les déplacements aux d degrés de liberté de la structure et $f(t)$ les forces externes. Ce système dynamique (1) est observé aux coordonnées r ($r \ll d$) où $f(t)$ est remplacée par une force fictive $e(t) \in \mathbb{R}^r$ appliquée uniquement aux positions des capteurs. En posant $x = [\mathcal{X}^T \quad \dot{\mathcal{X}}^T]^T$, un modèle d’espace d’état à temps continu est obtenu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c e(t) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c e(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^r$ le vecteur des observations ou des mesures (output), $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de transition d'état et $C_c \in \mathbb{R}^{r \times n}$ la matrice d'observation ou de mesure. $n = 2d$ est l'ordre du système. L'entrée du système étant remplacée par la force fictive $e(t) \in \mathbb{R}^r$, la matrice de commande et la matrice d'action directe sont respectivement de taille $B_c \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $D_c \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Les matrices A_c et C_c contiennent l'information modale de la structure. Elles sont à la base du calcul de l'indicateur d'endommagement dans la méthode SDDLTV et sont identifiées à partir des mesures (Döhler & Mevel 2012).

B. Principe de la méthode SDDLTV

Le système 1 modélisé à l'état sain puis à l'état endommagé (\sim) s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$\hat{y}(s) = G(s)f(s) \quad , \quad \tilde{y}(s) = \tilde{G}(s)\tilde{f}(s) \quad (3)$$

Les matrices de souplesses du système sont pour ces deux états $G(s = 0)$ et $\tilde{G}(s = 0)$. Si les matrices de masses M et d'amortissement C demeurent inchangées alors la modification de la fonctions de transfert $\delta G(s) = G(s) - \tilde{G}(s)$ est liée uniquement à une baisse locale de la rigidité de la structure. Partant de ce constat, la méthode SDDLTV suppose l'existence d'un vecteur de chargement $v(s)$ conduisant à une réponse identique $\hat{y}(s) = \tilde{y}(s)$ de la structure saine et de la structure endommagée (Bernal 2010) impliquant :

$$\delta G(s)v(s) = 0 \quad (4)$$

$v(s)$ est ainsi un vecteur du noyau de l'application $\delta G(s)$. Les structures saines et endommagées étant supposées de même masse et de même amortissement, la conservation de l'énergie totale implique une énergie de déformation inchangée lors de l'application de $v(s)$. Ainsi le chargement $v(s)$ induit des contraintes nulles dans les éléments dont la rigidité varie *i.e.* dans les éléments endommagés. Cette propriété est à la base de la méthode SDDLTV dans laquelle le *locating vector* $v(s)$ permet de cartographier les dommages.

C. Calcul d'un indicateur de l'endommagement

le noyau de $\delta G(s)$ est évalué à partir des mesures uniquement grâce à l'expression 5 (Bernal 2010) :

$$G(s) = R(s)D_c + D_c, \quad \text{où } R(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} \begin{bmatrix} C_c A_c \\ C_c \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

I est la matrice identité de taille $r \times r$, 0 la matrice nulle de taille $r \times r$ et \dagger désigne le pseudo-inverse de Moore-Penrose. Les matrices $\delta G(s)$ et $\delta R(s)^T = \tilde{R}(s)^T - R(s)^T$ ayant le même noyau (Bernal 2010), $v(s)$ est calculé grâce à une décomposition en valeurs singulières de $\delta R(s)^T$:

$$\delta R(s)^T = U\Sigma V^H = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^H, \quad (6)$$

où $U, \Sigma, V \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $\Sigma_2 \approx 0$ et H est la matrice adjointe ou transconjuguée. $v(s)$ est choisi dans V_2 , par exemple sa dernière colonne. Le modèle EF statique de la structure est alors utilisé pour construire une matrice $\mathcal{L}_{\text{model}}(s)$ permettant de calculer les contraintes dans chaque élément en réponse au chargement $v(s)$ (Bernal 2010), soit :

$$S(s) = \mathcal{L}_{\text{model}}(s)v(s). \quad (7)$$

Pour statuer sur l'état d'endommagement potentiel d'un élément structurel, les composantes de contraintes sont évaluées avec le test statistique du χ^2 . Il nécessite le calcul de la covariance du vecteur de contraintes

Σ_S (Marin et al. 2015). Le test est effectué pour chaque élément t après avoir sélectionné les composantes de contraintes associées : $S_t(s)$ dans le vecteur $S(s)$ d'une part et d'autre part après avoir extrait les composantes de la matrice de covariance Σ_{S_t} dans la matrice de covariance Σ_S :

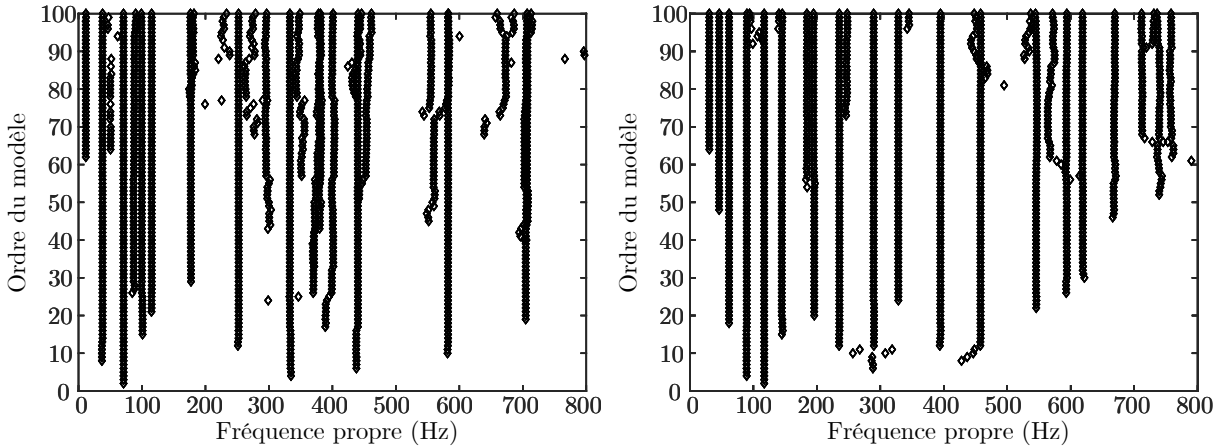
$$\chi_t^2 = S_t^T \Sigma_{S_t}^{-1} S_t \quad (8)$$

Puisque les contraintes dans les éléments endommagés sont nulles en théorie, le dommage est localisé sur l'élément t associé à la plus faible valeur de χ_t^2 .

V. RÉSULTATS ET DISCUSSION

A. Analyse modale

Les fréquences propres sont d'abord extraites à l'aide d'un algorithme *Stochastic Subspace Identification* où SSI pour l'identification des paramètres du tablier ρ^t , I_{22}^t , I_{33}^t . Outre la calibration du modèle EF ces mesures permettent l'identification du modèle dynamique de la structure saine (A_c et C_c). Dans un second temps, l'analyse est menée sur les signaux de la structure endommagée pour identifier \tilde{A}_c et \tilde{C}_c . L'analyse des mesures par la méthode SSI permet de tracer les diagrammes de stabilisation de la figure 3 pour les directions horizontales et verticales. Les fréquences propres liées à différents modes y sont visibles : elles correspondent aux fréquences qui restent inchangées quelque soit l'ordre du modèle considéré.



(a) Diagramme de stabilisation pour une sollicitation horizontale (b) Diagrammes de stabilisation pour une sollicitation verticale

FIGURE 3 – Diagramme de stabilisation des mesures de vibrations de la maquette du pont de Saint Nazaire

Il convient ensuite d'apparier les modes mesurés avec ceux calculés par éléments finis en utilisant le critère *Module Assurance Critérium* où MAC. Une matrice est alors constituée des coefficients de l'équation 9 :

$$MAC^{ij} = \frac{(\varphi^i{}^T \varphi_{\text{ref}}^j)^2}{(\varphi^i{}^T \varphi^i)(\varphi_{\text{ref}}^j{}^T \varphi_{\text{ref}}^j)} \quad (9)$$

Où φ^i est le champ de déplacement EF du mode i et φ_{ref}^j est le déplacement mesuré pour le mode j . Les premiers modes apparés dans les directions horizontales et verticales sont représentés sur la figure 4.

Après la calibration du modèle numérique des écarts persistent entre les fréquences calculées $f(p)$ et mesurées f_{ref} pour les 13 modes apparés (voir l'exemple de la figure 4 où ξ désigne l'amortissement). Les

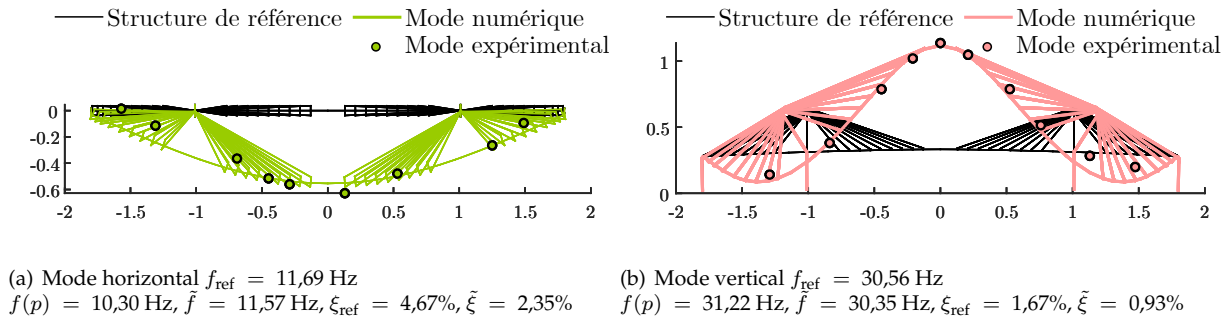


FIGURE 4 – Modes de vibrations mesurés et calculés pour la maquette du pont de Saint-Nazaire

modes appariés laissent apparaître quelques différences par exemple le mode horizontal observé à 11.69 Hz. L'écart moyen entre les fréquences calculées et mesurées est de 7%. Cette différence n'est pas censée affecter la procédure de localisation puisque la méthode SDDLTV ne nécessite pas une correspondance parfaite entre les données mesurées et le modèle à l'état de référence. Le modèle EF doit permettre de cartographier les contraintes dans les différents éléments de la structure ce qui exige une fidélité moindre qu'avec une méthode de localisation basée sur sa mise à jour. À l'inverse, l'influence de l'endommagement sur le décalage fréquentiel ($f_{\text{ref}} - \tilde{f}$) est faible : de l'ordre de 1%. Ce constat est à mettre en perspective avec la faible sensibilité du modèle numérique à la rupture d'un câble et donc avec la difficulté à localiser un endommagement grâce à une méthode d'analyse basée sur la mise à jour d'un modèle paramétrique.

B. Localisation de l'endommagement

Les résultats de la localisation des endommagements sont obtenus pour les 36 paires de câbles à partir du calcul de χ_t^2 en considérant 13 variables de Laplace s au voisinage des valeurs propres Λ_c de A_c . Un critère identique a été appliqué pour les choisir : $s = 0,98\Lambda_c$. Les valeurs de χ_t^2 représentées sur la figure 5 sont normalisées de telle sorte à ce que la plus petite valeur soit de 1. Les contraintes estimées à partir des modes issus du modèle EF sont représentées sur la figure 5 a). Elles ont été obtenues en introduisant un dommage artificiel, soit en abaissant de 90% la valeur de la rigidité dans la paire de câbles 19. Le diagramme de χ_t^2 permet de visualiser l'effet de la troncature modale sur les résultats puisque seuls 13 modes sont appariés. Si le dommage est correctement localisé sur la paire de câbles 19 ($\chi_{19}^2 = 1$), il apparaît également que la valeur χ_{10}^2 est faible. La discrimination entre un endommagement dans les paires de câbles 19 et 10 peut s'avérer délicate dans cet exemple.

Les contraintes estimées à partir des données expérimentales sont quant à elles représentées sur la figure 5 b). Dans cet exemple, l'endommagement est correctement localisé au niveau de la paire de câbles 19 ($\chi_{19}^2 = 1$). Il faut toutefois noter que plusieurs autres câbles présentent des valeurs de χ_t^2 proches de 1. Il s'agit comme attendu de la paire 10 mais également des paires 17 et 18 située à proximité de l'élément enlevé et enfin de la paire 27. Le cas test proposé ici est extrêmement sévère dans la mesure où enlever un câble induit une redistribution des contraintes dans toutes les paires restantes. Il n'est donc pas à exclure qu'enlever le câble 19 conduise à détendre d'autres câbles. Les résultats obtenus tendent donc à montrer l'efficacité de la méthode SDDLTV pour localiser un dommage qui reste globalement stable selon les variables de Laplace choisies.

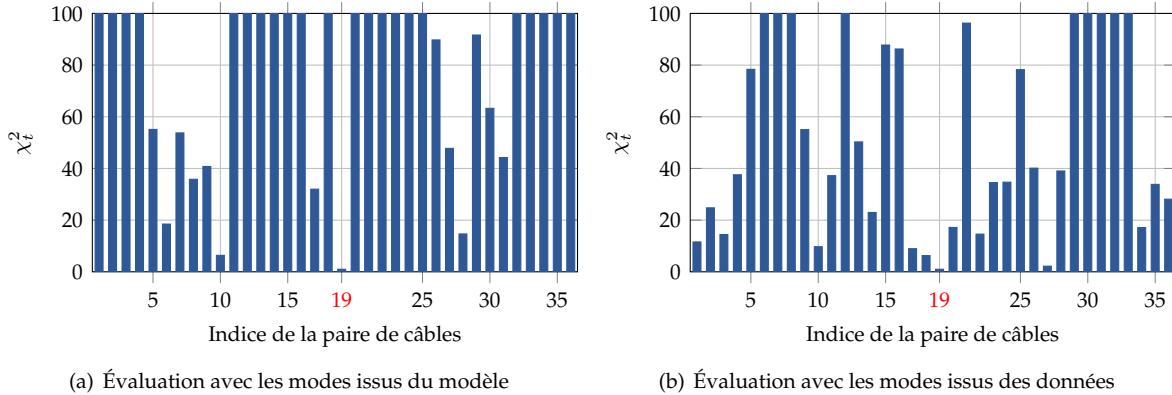


FIGURE 5 – Localisation des dommages sur la maquette du pont de Saint-Nazaire avec la méthode SDDL

VI. CONCLUSION

Dans cet exemple, la méthode de localisation de dommages SDDL a été testée sur une maquette du pont de Saint-Nazaire. Elle a permis de contourner la difficulté inhérente à l'utilisation d'une méthode d'analyse basée sur la mise à jour d'un modèle paramétrique. La méthode SDDL permet d'identifier les modifications de la matrice de souplesses grâce à l'analyse des décalages des modes de vibrations. Ensuite un modèle EF est utilisé en analyse statique pour la cartographie des éléments endommagés sans qu'il soit nécessaire de le mettre à jour. Sur la maquette, un endommagement particulier a pu être correctement localisé alors même que le décalage fréquentiel entre l'état sain et l'état endommagé est en moyenne plus faible que celui observé entre les modes calculés et les modes identifiés lors des essais. C'est un point important dans le cadre de l'application d'une méthode de localisation pour l'analyse des données issus d'un ouvrage en conditions de service pour lequel le modèle EF ne sera probablement pas fidèle et qui souligne l'intérêt de tester désormais la capacité de la méthode SDDL à être opérée en conditions *in situ*.

RÉFÉRENCES

- Bernal, D. (2010), 'Load vectors for damage location in systems identified from operational loads', *Journal of Engineering Mechanics* **136**(1), 31–39.
- Bhuyan, M. D. H., Döhler, M., Lecieux, Y., Mevel, L. & Schoefs, F. (2017), 'Statistical damage localization with stochastic load vectors using multiple mode sets', *Structural Health Monitoring* **16**(5), 518–535.
- Bhuyan, M. D. H., Lecieux, Y., Thomas, J.-C., Lupi, C., Schoefs, F., Döhler, M. & Mevel, L. (2018), Statistical vibration-based damage localization on Saint-Nazaire Bridge mockup, in '2018 - 40th IABSE Symposium', Nantes, France, pp. 1–8.
- Döhler, M. & Mevel, L. (2012), 'Fast multi-order computation of system matrices in subspace-based system identification', *Control Engineering Practice* **20**(9), 882–894.
- Johnson, E. A., Lam, H. F., Kafatygiotis, L. S. & Beck, J. L. (2004), 'Phase i asc structural health monitoring benchmark problem using simulated data', *Journal of Engineering Mechanics* **130**(1), 3–15.
- Marin, L., Döhler, M., Bernal, D. & Mevel, L. (2015), 'Robust statistical damage localization with stochastic load vectors', *Structural Control and Health Monitoring* **22**, 557–573.