



HAL
open science

Ecuaciones de Navier-Stokes de hombre pobre aplicadas a llamas premezcladas

Sergio Elaskar, Pascal Bruel

► **To cite this version:**

Sergio Elaskar, Pascal Bruel. Ecuaciones de Navier-Stokes de hombre pobre aplicadas a llamas premezcladas. MACI 2023 - IX Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, IMAL; CIMEC; Sinc(i); Dpto. de Matematica, UNL.; AR-SIAM; ASAMACI, May 2023, Santa Fe, Argentina. hal-04186270

HAL Id: hal-04186270

<https://inria.hal.science/hal-04186270>

Submitted on 23 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE HOMBRE POBRE APLICADAS A LLAMAS PREMEZCLADAS

Sergio Elaskar[†] y Pascal Bruel[‡]

[†]*Departamento de Aeronáutica, FCEFYN e Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba y CONICET, Córdoba, Argentina, selaksar@unc.edu.ar*

[‡]*Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), University Pau & Pays Adour, Pau, Francia, pascal.bruel@univ-pau.fr*

Resumen: Se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes de hombre pobre para llamas premezcladas usando un modelo físico basado en las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y de una variable que mide el progreso de la combustión. Para obtener estas ecuaciones, se asume una representación de Fourier de las variables y luego se implementa el procedimiento de Galerkin. El resultado es un sistema dinámico discreto en 4D.

Palabras clave: *llamas premezcladas, ecuaciones de hombre pobre, procedimiento de Galerkin*

2000 AMS Subject Classification: 21A54 - 55P54

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Navier-Stokes del hombre pobre (PMNS) fue el nombre dado por Frisch [1] a un sistema dinámico discreto (algebraico) que, a pesar de su sencillez, verificaba algunos de los aspectos de las ecuaciones de Navier-Stokes [2]. Frisch utilizó un mapa cuadrático que puede transformarse en un mapa logístico. Como una mejora del modelo, se implementaron combinaciones lineales de mapas logísticos [3]. Posteriormente se encontró al analizar los resultados que contenían transferencia de calor además del flujo de fluido, que no se podía garantizar que este enfoque funcionara [2]. Esto motivó a buscar un reemplazo para el mapa logístico como fuente de fluctuaciones temporales a pequeña escala, especialmente en problemas donde se debe modelar física adicional como reacciones químicas y transferencia de calor [4]. El enfoque adoptado fue implementar una representación de Galerkin de las ecuaciones de Navier-Stokes y de cualquier otra ecuación necesaria para la especificación completa del problema físico. Actualmente este tipo de sistema es utilizado en la construcción de los términos no resueltos en la simulación de grandes vórtices para flujos turbulentos [5].

Una llama premezclada es una onda de deflagración que se propaga en una mezcla de combustible y oxidante. Por ejemplo, gasolina y oxígeno en el aire, respectivamente. La llama premezclada deja productos de combustión que no reaccionan, por ejemplo, una mezcla de vapor de agua, dióxido de carbono y nitrógeno a una temperatura de aproximadamente 2000 K. Este es un fenómeno físico-químico muy complejo, sin embargo para describir su estructura puede utilizarse un modelo simplificado que involucra la ecuación de continuidad, las ecuaciones de Navier-Stokes (conservación de cantidad de movimiento) y una ecuación de balance para la variable que determina el progreso de la combustión [6].

2. LLAMA PREMEZCLADA

Un análisis detallado del conjunto general de ecuaciones de equilibrio que modelan los flujos reactivos puede encontrarse en [7]. Aquí, un conjunto menos general de ecuaciones que se usan comúnmente para modelar llamas turbulentas es implementado. Para tal fin se aceptan las siguientes hipótesis simplificativas: la mezcla es un gas ideal, el número de Mach es mucho menor que uno, flujo adiabático, no hay fuerzas volumétricas, son despreciables los efectos de Soret y Dufour, la difusión debida al gradiente de presión y la viscosidad, además los flujos de masa y de calor se aproximan mediante las leyes de Fick y Fourier respectivamente. Por lo tanto, en un sistema de referencia inercial con un sistema Cartesiano de coordenadas, la combustión premezclada resulta modelada por el siguiente conjunto de ecuaciones de equilibrio [6]:

- Ecuación de conservación de masa (o continuidad):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

donde ρ es la densidad, $V = (u_1, u_2, u_3)$ el vector velocidad, $X = (x_1, x_2, x_3)$ el vector posición (coordenadas espaciales), y t el tiempo.

- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (Navier-Stokes):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

siendo el tensor de tensiones para un fluido newtoniano:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

p es la presión, μ la viscosidad y δ_{ij} el delta de Kronecker.

- Ecuación de balance de la variable que determina el progreso de la combustión

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_k} \right)}{\partial x_k} + W \quad k = 1, 2, 3 \quad (4)$$

la variable progreso de la combustión puede definirse como

$$c = \frac{Y_u - Y}{Y_u - Y_b} = \frac{T - T_u}{T_b - T_u} \quad (5)$$

donde Y es la fracción de masa para el combustible y T la temperatura estática. Los subíndices u y b indican los estados previos y posterior a la combustión respectivamente. Por lo tanto se verifica que $0 \leq c \leq 1$. Además W es la expresión de la velocidad de reacción y resulta

$$W = \frac{\rho(1-c)}{t_r} e^{-\Theta/T} \quad (6)$$

Θ depende del combustible usado y se encuentra tabulada. Donde t_r es la escala de tiempo correspondiente a la reacción química involucrada y depende de la composición de la mezcla, también puede depender de c , pero siguiendo lo explicado en [6] se desprejará esta dependencia.

Este modelo resulta de considerar las siguientes adicionales simplificaciones (además de las hipótesis enumeradas al principio de esta sección): la química de la combustión se reduce a una sola reacción global irreversible, la presión estática no depende del tiempo, el número de Lewis es igual a uno para todas las especies y los c_p tanto de las especies como de la mezcla son constantes.

3. ECUACIONES DE HOMBRE POBRE EN LLAMAS PREMEZCLADAS

En esta sección, las ecuaciones de Navier-Stokes de hombre pobre para llamas premezcladas se derivarán de manera similar a la presentada en [2] para flujos incompresibles y [5] para flujos compresibles. Debido a que se está derivando un modelo para fluctuaciones a pequeña escala, se asume que $(X, t) \in \Omega \times t$, donde $\Omega \in R^3$ es una celda de cuadrícula típica en la que se ha discretizado el dominio, y t es un tiempo característico.

Como primer paso deben expresarse las ecuaciones dadas en la sección previa en forma adimensional. Para tal fin todas las variables son adimensionalizadas:

$$x_i \rightarrow l_c x_i; \quad t \rightarrow t_c t; \quad u_i \rightarrow \frac{l_c}{t_c} u_i; \quad \rho \rightarrow \rho_c \rho; \quad T \rightarrow T_c T; \quad x \rightarrow l_c x; \quad k \rightarrow k_c k; \quad p \rightarrow R \rho_c T_c p; \quad (7)$$

donde el subíndice c indica valores característicos o de referencia. M y Re son los números de Mach y Reynolds respectivamente. Además $A_{ps} = \frac{D}{l_c u_c}$ es un valor adimensional y D es la difusividad molecular de la mezcla. Las ecuaciones resultan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial(u_i)}{\partial x_k} = -\frac{\rho}{\gamma M^2} (T_b - T_u) \frac{\partial c}{\partial x_i} - \frac{1}{\gamma M^2} (T - u + c(T - b - T_u)) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

siendo el tensor de tensiones adimensional

$$\tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c u_k)}{\partial x_k} = A_{ps} \frac{\partial \left(\rho \frac{\partial c}{\partial x_k} \right)}{\partial x_k} + \frac{\rho(1-c)}{t_r} e^{-\Theta/T}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Con la finalidad de obtener las ecuaciones de hombre pobre para llamas pmezcladas, se asume que las variables u_i y c pueden ser expresadas por series de Fourier. Se destaca que usando los argumentos esgrimidos en [5] se considera la aproximación $\rho = cte$.

$$u_i(X, t) = \sum_s^\infty a_{i,K^s}(t) \varphi_{K^s}(X), \quad c(X, t) = \sum_s^\infty h_{K^s}(t) \varphi_{K^s}(X) \quad (12)$$

donde $K^s = (k_1^s, k_2^s, k_3^s)$. Además, $\{\varphi_{K^s}(X)\}$ es un conjunto completo de funciones base ortonormales en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto es factible pensar a las funciones φ_{K^s} como funciones complejas exponenciales.

Si se introducen las ecs. (12) en ecs. (9) y (10), se obtiene

$$\sum_s^\infty \dot{a}_{i,K^s} + \sum_{l,m}^\infty \left(\imath a_{j,K^l} a_{i,K^m} \varphi_{K^l} k_j^m \varphi_{K^m} \right) = -\frac{T_b - T_u}{\gamma M^2} \sum_s^\infty (\imath h_{K^s} k_i^s \varphi_{K^s}) + \frac{1}{Re} \sum_s^\infty \varphi_{K^s} \left(-a_{i,K^s} (k_i^s)^2 - a_{j,K^s} k_i^s k_j^s \right) \quad (13)$$

donde $\imath = \sqrt{-1}$ y el punto sobre la variable indica derivación con respecto al tiempo. En esta última ecuación aparecen términos complejos. Pero se tiene interés sólo en soluciones reales correspondientes a la física real de flujo de fluidos. Para evitar los términos imaginarios se establece que $a_{i,k} = a_{i,-k}^*$, donde el asterisco denota complejo conjugado.

Ahora se implementa el procedimiento de Galerkin. Se multiplica ambos lados de la ec. (13) por φ_{K^s} y se integra en el dominio Ω . Por la propiedad de orto-normalidad se obtiene

$$\dot{a}_{i,K^s} + \sum_{l,m}^\infty (a_{j,K^l} a_{i,K^m} A_{s,k,m}) = -\frac{T_b - T_u}{\gamma M^2} h_{K^s} k_i^s - \frac{1}{Re} \left(a_{i,K^s} \|K^s\|^2 + a_{j,K^s} k_i^s k_j^s \right) \quad (14)$$

siendo $\|K^s\|$ el modulo del vector número de onda para el modo s , y $A_{s,k,m} = k_j^m \int_\Omega \varphi_{K^s} \varphi_{K^l} \varphi_{K^m} d\Omega$.

Si se trunca el sistema a un único nodo ($s = m = l$), la ec. (14) se reduce a

$$\dot{a}_i + \sum_j^3 (A_j a_j a_i) = -\frac{T_b - T_u}{\gamma M^2} h k_i - \frac{1}{Re} \left(a_i \|K\|^2 + k_i \sum_j^3 (a_j k_j) \right) \quad (15)$$

con $A_j = k_j \int_\Omega \varphi_K \varphi_K \varphi_K d\Omega$. En la ec. (15) se han omitido los supra-índices especificando el nodo.

Trabajando de forma similar con la ec. (11) se obtiene

$$\dot{h} + \sum_j^3 (a_j h A_j) = -A_{ps} \|K\|^2 h + \bar{W} \quad (16)$$

donde

$$\bar{W} = \int_\Omega \varphi_K W d\Omega = \int_\Omega \varphi_K \frac{\rho(1-c)}{t_r} e^{-\Theta/T} d\Omega \quad (17)$$

Finalmente, si se emplea el esquema de Euler hacia adelante en el paso de tiempo $\Delta t = \tau$ para discretizar la derivada temporal, las ecs. (15) y (17) se reducen a los siguientes mapas (ecuaciones discretas)

$$a_i^{n+1} = a_i^n - \tau \left[\sum_j^3 (A_j a_j^n a_i^n) + \frac{T_b - T_u}{\gamma M^2} h^n k_i + \frac{1}{Re} \left(a_i^n \|K\|^2 + k_i \sum_j^3 (a_j^n k_j) \right) \right] \quad (18)$$

$$h^{n+1} = h^n - \tau \left(\sum_j^3 (a_j^n h^n A_j) + A_{ps} \|K\|^2 h^n - \bar{W}^n \right) \quad (19)$$

donde los supraíndices n y $n + 1$ indican pasos de avance temporal.

Las ecs. (18) y (19) determinan el sistema de ecuaciones de hombre pobre para llamas premezcladas y forman un mapa tetra-dimensional (a_1, a_2, a_3, h) .

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se han deducido las ecuaciones de Navier-Stokes de hombre pobre para llamas premezcladas. El fenómeno de llamas premezcladas es sumamente complejo y para describirlo se ha utilizado un modelo simplificado dado en [6] que se basa en las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y de una variable que mide el progreso de la combustión. En dicho modelo se ha aplicado la metodología descrita en [2] y [5] para alcanzar las ecuaciones de hombre pobre en llamas premezcladas, la cuales forman un sistema dinámico discreto en un espacio de estados tetra-dimensional (ver ecs. (18) y (19)). Además de las ventajas y restricciones que tienen las ecuaciones de Navier-Stokes de hombre pobre, para obtener las ecs. (18) y (19) se ha considerado la hipótesis de densidad constante, ya usada en [5], y la dependencia del término \bar{W} ha sido sólo parcialmente considerada. En principio habría, por lo menos, dos alternativas para tratar este término, una es considerarlo como un parámetro de control más del sistema. Una segunda sería no obviar la dependencia con c e iniciar algún proceso iterativo para solucionar el sistema (18) y (19), aunque incurriríamos en un mayor costo computacional para su alcanzar la solución.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la SECyT de la Universidad Nacional de Córdoba y a ... por financiar esta investigación.

REFERENCIAS

- [1] U. FRISCH, *Turbulence, the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [2] J. McDONOUGH, *Introductory Lectures on Turbulence: Physics, Mathematics and Modeling*, University of Kentucky, 2007.
- [3] S. MUKERJI, J. McDONOUGH, M. MENGÜÇ, S. MANICKAVASAGAM AND S. CHUNG, *Chaotic map models of soot fluctuations in turbulent diffusion flames*, Int. J. Heat Mass Transfer (1998), pp.4095-4112.
- [4] J. McDONOUGH AND M. HUANG, *A low-dimensional model of turbulence-chemical kinetics interactions* in Proceedings of Third Int. Symp. on Scale Modeling, Nagoya, Japan, (2000), Paper ISSM3-E8.
- [5] J. STRODTBECK, J. McDONOUGH AND P. HISLOP, *Characterization of the dynamical behavior of the compressible "poor man Navier-Stokes equations"*, International Journal of Bifurcation and Chaos (2012), 1230004 (19 pages).
- [6] A. LIPATNIKOV, *Fundamentals of Premixed Turbulent Combustion*, CRC Press, Boca Raton, 2012.
- [7] F. WILLIAMS, *Combustion Theory*, Benjamin/Cummings, 2nd edn. Menlo Park, 1985.