Sur la loi du maximum de certains processus stochastiques

Jean Diebolt

▶ **To cite this version:**

Jean Diebolt. Sur la loi du maximum de certains processus stochastiques. Annales de l'ISUP, 1979, XXIV (3-4), pp.31-67. hal-04081964

HAL Id: hal-04081964
https://hal.science/hal-04081964

Submitted on 26 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
1979, XXIV, fasc. 3-4, 31-67

SUR LA LOI DU MAXIMUM DE CERTAINS PROCESSUS STOCHASTIQUES

par Jean DIEBOLT

Mots clés :

Enveloppe ; formule de Jacobi ; maximum ; processus gaussien.

Key words :

Envelope ; Jacobi formula ; maximum ; gaussian process.

Class :

A M S 60 G 99

Summary :

We prove, by geometric considerations, that the law of the maximum of certain processes of the form $X_t = \sum_1^N b_j (\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)$ has a density which admits a suitable integral representation ; from this we derive asymptotic properties of this density for gaussian processes of the mentionned type, then, we extend part of these results to the case $X_t = \sum_1^\infty b_j (\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)$, using both probabilistic and infinite dimensional analysis arguments (the last results are only announced).

Résumé :

Nous montrons, par des considérations géométriques, que la loi du maximum de certains processus de la forme $X_t = \sum_1^N b_j(\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)$ admet une densité qui possède une représentation intégrale ; on utilise cette représentation pour établir des propriétés asymptotiques de la densité en question dans le cas gaussien ; puis nous étendons une partie des résultats obtenus au cas $X_t = \sum_1^\infty b_j (\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)$, en utilisant à la fois des arguments probabilistes et des arguments d'analyse en dimension infinie (les résultats les plus récents sont seulement annoncés).

I - INTRODUCTION

(I.1) - Dans [11], V.S. Tsirel'son montre, en utilisant des résultats de Théorie Géométrique de la Mesure, appliqués à des convexes, qui sont des intersections finies de demi-espaces de $\mathbb{R}^N$, puis en passant à la limite quand N tend vers l'infini, que, pour une suite gaussienne de variables aléatoires de même loi dont le maximum est fini avec probabilité un, la loi de ce maximum admet une densité continue, continûment différentiable sur l'ensemble des réels où la fonction de répartition F du maximum est non nulle. Il obtient de plus l'équivalence, lorsque a tend vers l'infini :

$$F'(a) \sim t(a)\, b(a)^{-1}\, e^{-a^2}\, t(a)^2\, b(a)^{-2}/2$$

Ici, $b(a)$ vérifie : $a - b(a) \longrightarrow 0$ et $a(a-b(a)) \longrightarrow +\infty$ quand $a \longrightarrow \infty$, et $t(a)$ est défini par : $\Phi(t(a)) = F(b(a))$; $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} (2\pi)^{-1/2}\, e^{-\sigma^2/2}\, d\sigma$.

(I.2) - Dans [10] , L.A. Shepp et D. Slepian trouvent la loi du maximum sous forme d'une série d'intégrales doubles pour un processus gaussien stationnaire, de covariance r périodique et linéaire par morceaux. Ils dégagent une propriété de symétrie du processus, et une propriété d'indépendance conditionnelle qui leur permet l'utilisation de résultats relatifs au mouvement Brownien.

(I.3) - Dans [3], S. Berman établit que, si $X = (X_t,\ t \geqslant 0)$ est un processus gaussien stationnaire, de moyenne 0 et variance 1, de covariance C^2, pour tout $T > 0$, on a :

$$P(\sup_{[0,T]} X_t \geqslant a) \sim T(-r''(0))^{1/2}\, (2\pi)^{-1}\, e^{-a^2/2} \qquad (a \longrightarrow +\infty) .$$

Il utilise un lemme de D. Slepian, qu'on trouve dans [9], selon lequel, si les covariances de deux processus gaussiens stationnaires sont liées par l'inégalité $r_{Y^{(1)}}(\mathcal{C}) \leqslant r_{Y^{(2)}}(\mathcal{C})$ pour tout $\mathcal{C}$ de $[-T,T]$, alors on a :

$$P(\sup_{[0,T]} Y_t^{(1)} \geqslant a) \geqslant P(\sup_{[0,T]} Y_t^{(2)} \geqslant a) .$$

Avec ce lemme, il peut comparer, pour t assez petit, le processus X au processus Y, de covariance $\cos t(-r''(0))^{1/2}$, qui correspond au cas $N = 1$ de mon étude. Notons qu'il a besoin au cours de sa démonstration, qui est assez longue, de résultats sur le nombre de croisements en montant du niveau a par X_t, $0 \leqslant t \leqslant t$, ainsi que d'une formule qui simplifie l'expression de la probabilité $P(X_o \geqslant a, X_s \geqslant a)$. Ce sont là, avec le lemme de Slepian, des ingrédients que l'on retrouve dans plusieurs travaux sur la loi du logarithme itéré pour le maximum sur $[0,T]$ d'un processus gaussien stationnaire, $(T \longrightarrow +\infty)$ ([4], [5], [8] par exemple), dont je ne m'occupe pas ici (les trajectoires des processus que j'étudie sont 2π-périodiques).

(I.4) - Enfin, Fernique [6] établit des majorations et des minorations d'expressions dont le prototype est $P(\max_{[0,T]} X_t \geqslant a)$, X étant un processus gaussien, en vue d'obtenir des renseignements sur les propriétés des trajectoires des processus gaussiens.

(I.5) - Les méthodes que j'emploie sont entièrement originales ; quant aux résultats, ils le sont aussi, sauf le corollaire (VI.13), qui est contenu dans [3] (voir (I.3)).

Je remercie le Professeur Paul KREE de m'avoir orienté vers l'étude des problèmes de dépassement par un processus d'un niveau donné, et de m'avoir toujours utilement conseillé.

Je remercie Paul DEHEUVELS de m'avoir appris les bases et les applications de la Théorie des Valeurs Extrêmes, de m'avoir fait connaître les articles fondamentaux (de S. Berman, H. Cramer, J. Pickands III en particulier) concernant l'étude des Valeurs Extrêmes pour des processus gaussiens.

Enfin, je remercie Jean-Pierre RAOULT, qui m'a toujours témoigné une bienveillante attention.

.../.

II - PRESENTATION DE L'ARTICLE

(II.1) - Soit N un entier supérieur ou égal à deux ; soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilité ; pour $\omega \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$, considérons $X_t(\omega) = \sum_1^N b_j(\xi_j(\omega) \cos jt + \eta_j(\omega) \sin jt)$; on suppose, dans toute la suite, que tous les coefficients b_j sont non-nuls, afin de simplifier l'exposé général uniquement.

(II.2) - Soit $\underset{\sim}{\xi}(\omega)$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N}$: $(\xi_1(\omega), \eta_1(\omega), \ldots, \xi_N(\omega), \eta_N(\omega))$; nous supposerons que les variables aléatoires composantes de $\underset{\sim}{\xi}$ sont d'ordre deux, deux-à-deux orthogonales, qu'elles sont toutes centrées et de variance un, enfin que la loi de $\underset{\sim}{\xi}$ admet une densité continue et bornée, que nous noterons φ.

(II.3) - Dans ces conditions, le processus X défini en (II.1) est à trajectoires 2π -périodiques, analytiques ; il est séparable ; il est stationnaire au sens large et sa fonction de covariance est $r(\tau) = \sum_1^N b_j^2 \cos j\tau$.

(II.4) - Soit J l'intervalle $[0, 2\pi]$; nous noterons sup par sup ; soit $Z(\omega) = \sup_j X_t(\omega)$; c'est une variable aléatoire, d'après (II.3). Le but des § III, IV, V est d'établir que la loi de Z admet une densité f_Z qui possède une représentation intégrale de la forme :

$$(II.5) \qquad f_Z(a) = \int_0^{2\pi} dt \int_{D(a)} A^{-1}(aA_1/A^2 - u_2(A_2^2A^2 - A_1^4)^{1/2} / AA_1)\, \varphi(M(a,t,u))\, du_2 \ldots du_{2N-1}$$

pour $a \geqslant 0$ avec : $A^2 = \sum_1^N b_j^2$, $A_1^2 = \sum_1^N j^2 b_j^2$, $A_2^2 = \sum_1^N j^4 b_j^2$, tandis que $D(a)$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^{2N-2}$ dont nous préciserons plus loin la définition et les propriétés ; en particulier, $D(a)$ est indépendant de la loi de $\underset{\sim}{\xi}$, et ne dépend

.../...

que des coefficients b_j ; enfin, M(b,t,u) est un "paramétrage" de C(a), défini en (III.3), et que nous évoquons en (II.6).

A partir du § VI, nous nous intéressons au cas gaussien. Au § VI, on explore quelques propriétés de f_Z . Au § VII, nous étudions le "passage à la limite" quand N tend vers l'infini.

(II.6) - La démonstration de (II.5) repose sur la remarque suivante :

$X_t(\omega) = \langle \Xi(\omega), f(t) \rangle$; ici, $\langle x,y \rangle = \sum_1^{2N} x_i y_i$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{2N}$, et f(t) a pour composantes : (b_1 cost, b_1 sint,...,b_N cos Nt, b_N sin Nt). Ainsi,

$$(II.7)\quad P(Z \leqslant a) = \int_{C(a)} \varphi(x)\, dx \quad (a > 0)$$

En étudiant la géométrie de C(a), on en découvre un paramétrage naturel M(b,t,u), ce qui nous conduit à un "changement de variables" dans (II.7).

(II.8) - Nous noterons H l'espace euclidien $(\mathbb{R}^{2N}, \langle , \rangle)$, et $\|x\|$ la norme de l'élément x de H . Remarquons enfin que (J,f) est un arc paramétré fermé, analytique, dont l'image f(ℝ) est incluse dans la sphère de centre 0 et de rayon A de H, soit S(A).

III - ETUDE GEOMETRIQUE DE C(a) ; RELATION AVEC L'ENVELOPPE $E(a) = \bigcup_t G(t,a)$ ET PARAMETRAGE M DE CELLE-CI

(III.1) - Nous allons d'abord introduire le convexe C(a),

$C(a) = \{ x \in H \mid \langle x , f(t) \rangle \leqslant a \quad \forall t \in J \}$, $a > 0$: on a, par définition de Z :

$$(III.2)\quad P(Z \leqslant a) = \int_{C(a)} \varphi(x)\, dx \quad .$$

.../...

Remarque : Il existe a_o tel que, pour $a \geqslant a_o$, on ait $\int_{C(a)} \varphi(x)\, dx > 0$; en effet, la famille $(C(a),\ a \in R_+^*)$ est croissante, et, s'il n'existait pas un tel a_o, alors on aurait $P(Z = +\infty) = 1$, ce qui contredirait le fait que, pour tout ω, $Z(\omega)$ est fini.

Soit $F(a) = Fr\ C(a)$ la frontière de $C(a)$:

(III.3) - Lemme et définition de C(a) :

Lemme

a) Pour tout $a > 0$, $F(a) = \{x \in H \mid \sup < x , f(t)> = a\}$;

b) La famille $(F(b),\ b \in [0,a])$ est une partition de $C(a)$

Démonstration :

a) Posons $F_1(a) = \{ x \in H \mid \sup < x , f(t)> = a\}$; il s'agit de montrer que $F(a) = F_1(a)$. Montrons d'abord que $F_1(a) \subset F(a)$: en effet, l'ensemble $F_1(a)$ est inclus dans $C(a)$; soit $x \in F_1(a)$: la fonction continue $t \longrightarrow < x, f(t)>$ atteint son maximum en un certain point $t_o \in J$; tout voisinage de x contient un point qui n'appartient pas à $C(a)$, car, pour tout $\eta > 0$, on a :

$<x + (\eta/2A)\ f(t_o)\ ,\ f(t_o)> = a + A\eta/2 > a$, et $x + (\eta/2A)\ f(t_o) \in B(x,\eta)$

(boule ouverte de H de centre x, de rayon η). D'autre part, l'ensemble $\{x \in C(a) \mid \sup < x , f(t) > < a\}$ est ouvert dans H, parce que si x est dans cet ensemble, il existe $\alpha > 0$ tel que $\sup < x, f(t)> = a - \alpha$, et alors, pour tout $y \in H$ tel que $\|y\| < \frac{\alpha}{2A}$, on a, pour tout t :

$$\begin{aligned} < x + y , f(t) > &= < x, f(t)> + < y , f(t)> \\ &\leqslant a - \alpha + \|y\|\ \|f(t)\| \\ &\leqslant a - \alpha + \frac{\alpha}{2A} \cdot A \\ &\leqslant a - \frac{\alpha}{2} \\ &< a \end{aligned}$$

.../...

On en déduit que le complémentaire de $F_1(a)$ dans $C(a)$ est un ouvert de $C(a)$ qui contient l'intérieur de $C(a)$, donc $F_1(a) = F(a)$.

b) se déduit immédiatement de a) . □

(III.4) - Définition de l'enveloppe E(a)

Pour tout t , les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont non nuls et orthogonaux, donc indépendants. Posons :

(III.5) $G(t,a) = \{x \in H \mid < x, f(t) > = a \text{ et } < x, f'(t) > = 0 \}$.

(III.6) - L'enveloppe E(a) des hyperplans affines tangents à la sphère S(A) le long de l'arc (J,f), d'équations $< x, f(t) > = a$, est la réunion de ses "générateurs" $G(t,a)$, $t \in J$.

(III.7) - Lemme

L'ensemble F(a) est inclus dans l'ensemble E(a).

Démonstration :

On vient de voir que, si $x \in F(a)$, il existe $t = t_o$ tel que $< x, f(t_o) > = a$; de plus $< x, f(t) > \leqslant a$ pour tout t. Ainsi, au point t_o , la fonction C^1 $t \longrightarrow < x, f(t) >$ atteint son maximum, donc sa dérivée en t_o , soit $< x, f'(t_o)>$ est nulle. □

(III.8) - Nous allons paramétrer F(a), et, pour cela, utiliser le repère de Frenet de l'arc (J,f) ; puis, nous utiliserons ce paramétrage pour le calcul de l'intégrale (II.5) : il nous faudra préciser, pour tout t , quelle partie de $G(t,a)$ est contenue dans F(a). Il nous faut d'abord établir un lemme, qui est en relation avec la stationarité de X :

(III.9) - Lemme

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, il existe une transformation orthogonale U_τ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait :

.../...

(III.10) $f^{(k)}(t+\tau) = U_\tau f^{(k)}(t)$.

Démonstration :

Il suffit de prendre pour matrice de U_τ, la matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & & & \\ \sin\tau & \cos\tau & & 0 & \\ & & \cos N\tau & -\sin N\tau & \\ & 0 & \sin N\tau & \cos N\tau & \end{bmatrix}$$

□

Autre lemme, indispensable celui-ci, pour définir le repère de Frenet de (J,f) :

(III.11) - Lemme

Pour tout t, $(f(t), f'(t), \ldots, f^{(2N-1)}(t))$ est une base de H.

Démonstration :

Vu (III.10), il suffit de montrer que $(f(0), \ldots, f^{(2N-1)}(0))$ est une base de H. Or, soit H_1 le sous-espace vectoriel de H formé des vecteurs dont les composantes de rang impair sont nulles, et H_2 celui des vecteurs de composantes de rang pair nulles : H est somme directe orthogonale de H_1 et H_2 les dérivées d'ordre pair de f en 0 appartiennent à H_1 , celles d'ordre impair à H_2 ; on est ramené à montrer que les dérivées d'ordre pair (respectivement impair) sont indépendantes dans H_1 (respectivement H_2). Il suffit d'examiner le déterminant de leurs composantes, qui est un déterminant de Van der Monde, au facteur $b_1 \ldots b_j \ldots b_N \neq 0$ près. □

(III.12) - Lemme

Pour tout $(t,\tau) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

.../...

(III.13) $$< f^{(k)}(t+\tau), f^{(\ell)}(t) > = (-1)^{\ell} r^{(k+\ell)}(\tau) .$$

Démonstration :

On montre d'abord que pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$< f(t), f(s) > = r(t-s)$ puis on dérive cette relation k fois en t et ℓ fois en s, et enfin, on remplace t par $t+\tau$ et s par t. □

(III.14) - Définition des fonctions $[A,B](t)$:

Lorsque deux fonctions vectorielles A et B vérifient la propriété suivante : pour tout $(t,\tau) \in \mathbb{R}^2$, $< A(t+\tau), B(t) >$ est une fonction indépendante de t, nous noterons : $[A,B](\tau) = < A(t+\tau), B(t) >$.

Ainsi, (III.13) s'écrit : $[f^{(k)}, f^{(\ell)}] = (-1)^{\ell} r^{(k+\ell)}$.

(III.15) - Nous allons maintenant orthonormaliser la base $(f(t),\ldots,f^{(2N-1)}(t))$ de H par le procédé de Gram-Schmidt. On a vu que $f(0), f^{(2)}(0),\ldots \in H_1$ et $f'(0), f^{(3)}(0),\ldots \in H_2$; appliquant U_t, on trouve que les dérivées d'ordre pair de f en t et celles d'ordre impair appartiennent à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, qui sont $U_t H_1$ et $U_t H_2$; de plus, d'après (III.13), les coefficients de la combinaison linéaire exprimant les $F_j(t)$ en fonction de $f(t)$ et de ses premières dérivées sont indépendantes de t : on peut les calculer par exemple en considérant le cas $t = 0$. $F_{2k}(0)$ s'exprime à l'aide de $f(0), f''(0),\ldots,$ et $f_{2k+1}(0)$ à l'aide de $f'(0), f^{(3)}(0),\ldots$ D'où :

(III.16)
$$\begin{cases} F_{2k} = \alpha_{2k,1} f + \alpha_{2k,2} f^{(2)} + \ldots + \alpha_{2k,k+1} f^{(2k)} \\ F_{2k+1} = \alpha_{2k+1,1} f^{(1)} + \ldots + \alpha_{2k+1,k+1} f^{(2k+1)} \end{cases} .$$

.../...

Exemple de calcul des constantes :

(III.17) $\alpha_{1,2} = A_1^2/A(A_2^2 A^2 - A_1^4)^{1/2}$ et $\alpha_{2,2} = A^2/A(A_2^2 A^2 - A_1^4)^{1/2}$.

Dans ces conditions, on trouve :

(III.18) $[F_k , F_\ell] = (-1)^{k+\ell} [F_\ell , F_k]$

(III.19) $F_k(t + \mathcal{C}) = U_{\mathcal{C}} F_k(t)$

$(F_o,\ldots,F_{2N-1})$ est une base orthonormale de H , tandis que $(F_1,\ldots,F_{2N-1})$ est une base orthonormale de l'hyperplan vectoriel tangent en $f(t)$ à la sphère $S(A)$ et que $(af/A^2 ; F_2,\ldots,F_{2N-1})$ est un repère affine de $G(t,a)$ (défini en (III.5)). On en déduit le paramétrage (non injectif) suivant de $E(a)$, noté m_a , défini par :

(III.20) $m_a(t,u) = aF_o(t)/A + \sum_2^{2N-1} u_j(F_j(t)$.

Ici, t décrit J , et $u = (u_2,\ldots u_{2N-1})$ décrit $\mathbb{R}^{2N-2}$; ce paramétrage est tel que, si l'on fixe t , l'application $u \longrightarrow m_a(t,u)$ est un isomorphisme affine de $\mathbb{R}^{2N-2}$ sur la "génératrice" $G(t,a)$.

Il nous importe à présent de savoir quand et où le paramétrage m_a est une immersion On a le lemme suivant, dans lequel $\partial.m_a$ désigne la famille des vecteurs

$$\frac{\partial m_a}{\partial t} , \frac{\partial m_a}{\partial u_2} , \ldots , \frac{\partial m_a}{\partial u_{2N-1}} :$$

.../...

(III.21) - Lemme

a) On a la relation $\text{gram}(\partial.m_a) = (aA_1/A^2 - \sum_{2}^{2N-1} uj \lessdot Fj , F_1' >)^2$

b) Plus précisément, on a :

(III.22) $\quad \text{gram}(\partial.m_a) = (aA_1/A^2 - \mu u_2)^2$, avec

$$\mu = (A_2^2 A^2 - A_1^4)^{1/2} / AA_1$$

c) L'application dérivée de m_a est de rang strictement inférieur à (2N-1) si et seulement si u vérifie l'équation :

(III.23) $\quad \mu u_2 = aA_1/A^2$.

Ce sont les points de "l'arête de rebroussement" de $E(a)$, définie comme la réunion quand $t \in J$ des sous-espaces affines de codimension 3 définis par les 3 équations :

(III.24) $\quad < x, f(t) > = a/A^2$, $< x, f'(t) > = 0$, $< x, f''(t) > = 0$.

Démonstration :

a) Comme $\dfrac{\partial m_a}{\partial u_j} = Fj$, on a donc :

$$\text{gram}(\partial.m_a) = \begin{vmatrix} \left\| \frac{\partial m_a}{\partial t} \right\|^2 & < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_2 > & \cdots & < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_{2N-1} > \\ < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_2 > & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_{2N-1} > & & & \end{vmatrix}$$

.../...

Un raisonnement par récurrence sur n montre que le déterminant $\Delta(a_1,\dots,a_n)$ défini comme :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 1 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_n & & & 1 \end{vmatrix}$$

vaut $a_1 - \sum_2^n a_i^2$.

Par conséquent, $\text{gram}\,(\partial.m_a) = \left\| \frac{\partial m_a}{\partial t} \right\|^2 - \sum_2^{2N-1} < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_j >^2$. Comme les vecteurs $F_o ,\dots, F_{2N-1}$ forment une base orthonormale, on a :

$\text{gram}(\partial.m_a) = < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_o >^2 + < \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_1 >^2$. Or, $< \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_o >$ est nul car $\frac{\partial m_a}{\partial t}$ est tangente à la sphère $S(A)$; en effet, pour $2 \leqslant j \leqslant 2N-1$, on a

$< f' , F_j > + < f, F_j' > = 0$, et aussi $< f', F_j > = A_1 < F_1 , F_j > = 0$.

Enfin, $< \frac{\partial m_a}{\partial t} , F_1 > = aA_1/A^2 - \sum_2^{2N-1} u_j < F_1' , F_j >$.

□

b) De la théorie de Frenet résulte que $< F_1' , F_j > = 0$ pour $j \geqslant 3$. On a

$F_1 = f'/A_1$, donc $F_1' = f''/A_1$; mais $F_2 = \alpha_{2,1} f + \alpha_{2,2} f''$, d'où

$\alpha_{2,2} f'' = F_2 - \alpha_{2,1} AF_o$, et enfin :

(III.25) $\quad F_1' = - (A_1/A) F_o + ((A_2^2A^2 - A_1^4)^{1/2}/AA_1) F_2$.

□

.../...

c) m_a' est de rang 2N-1 si et seulement si gram($\partial . m_a$) est non nul.

D'autre part, d'après (III.25), si x vérifie les équations de "l'arête de rebroussement", alors :

$$- (A_1/A) < x, F_o > + \mu < x, F_2 > = 0 \quad .$$

IV - ETUDE DE LA PARTIE DE G(t,a) QUI EST DANS F(a)

Nous avons vu en (III.7) que F(a) est inclus dans E(a), qui est réunion des "génératrices" G(t,a) lorsque t décrit J ; nous avons mis en évidence un repère affine privilégié de G(t,a), pour $t \in J$; ceci nous a permis de paramétrer, pour chaque t, la "génératrice" G(t,a), au moyen de l'application $u \to m_a(t,u)$, $u \in \mathbb{R}^{2N-2}$; et de paramétrer E(a) avec m_a . Nous verrons au § V comment déduire de tout cela un paramétrage de la réunion des E(b), lorsque b varie entre 0 et a, qui contient C(a), et comment en extraire un "changement de variables" dans l'intégrale (II.7) pour obtenir la formule (II.3). Il s'agit ici de déterminer, pour chaque t, quelle est la partie de G(t,a) qui est contenue dans F(a). Nous allons montrer que cette partie est identique à l'intersection de G(t,a) avec C(a) : notons $\Delta(t,a) = F(a) \cap G(t,a)$ et

$$D(t,a) = \{u \in \mathbb{R}^{2N-2} \mid m_a(t,u) \in \Delta(t,a)\} \quad .$$

(IV.1) - Lemme

On a l'égalité : $\Delta(t,a) = C(a) \cap G(t,a)$.

Démonstration :

L'inclusion de $\Delta(t,a)$ dans $C(a) \cap G(t,a)$ est évidente. Inversement, soit $x \in C(a) \cap G(t,a)$. Alors, x vérifie $\sup < x, f(s) > \leqslant a$, et $< x, f(t) > = a$ (et $< x, f'(t) > = 0$).

Ainsi, $\sup < x, f(s) > = a$, et $x \in F(a) \cap G(t,a)$.

□

.../...

(IV.2) - Lemme

a) Pour tout t, $\Delta(t,a)$ et $D(t,a)$ sont des convexes fermés dans H et dans $\mathbb{R}^{2N-2}$ respectivement.

b) Pour tout t, pour tous a, a' > 0 , $\Delta(t,a')$ se déduit de $\Delta(t,a)$ par l'homothétie vectorielle de H de rapport a'/a ; il en est de même de $D(t,a')$ et $D(t,a)$ dans $\mathbb{R}^{2N-2}$.

Démonstration :

a) C(a) est un convexe fermé de H, ainsi que G(t,a) ; leur intersection l'est aussi c'est $\Delta(t,a)$. Quant à $D(t,a)$, il s'obtient à partir de $\Delta(t,a)$ au moyen d'un isomorphisme affine.

b) Là encore, C(a) et G(t,a) partagent la propriété énoncée.

□

Essayons maintenant de mieux caractériser D(t,a) :

(IV.3) - Lemme

L'ensemble D(t,a) est indépendant de t ; notons-le D(a) ; D(a) est défini comme l'ensemble des $u \in \mathbb{R}^{2N-2}$ qui vérifient, pour chaque $\mathcal{C} \in J$, l'inéquation :

$$\sum_{2}^{2N-1} u_j \, [f,F_j] \quad (\mathcal{C}) \leqslant a(1 - (r(\mathcal{C})/A^2)) \quad .$$

Démonstration :

Par (IV.1), $\Delta(t,a) = \left\{ m_a(t,u) \,|\, u \in \mathbb{R}^{2N-2} \text{ et } < m_a(t,u), f(s)> \leqslant a \quad \forall s \right\}$

tandis que $D(t,a) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{2N-2} \,|\, < m_a(t,u), f(s)> \leqslant a \quad \forall s \right\}$.

D'après (III.10), (III.19) et (III.21), on a :

$< m_a(t,u) , f(s) > = < m_a(0,u), f(s-t) >$, de sorte que

$D(t,a) = \left\{ u \in R^{2N-2} \; < m_a(0,u), f(s-t)> \leqslant a \quad \forall s \right\}$.

□

.../...

On a la formule :

(IV.4) $$F(a) = \bigcup_J \Delta(t,a) \quad .$$

Il est clair que $0 \in D(a)$, pour tout $a > 0$. Nous allons maintenant montrer que $D(a)$ n'est pas d'intérieur vide ; avant cela, établissons le lemme suivant :

(IV.5) - Lemme

Pour tout j compris entre 2 et 2N-1, le rapport $z_j(t) = [f,F_j](t)/(1 - (r(t)/A^2))$ qui est bien défini pour $t \not\equiv 0 \ (2\pi)$, tend vers une limite finie quand t tend vers zéro.

Démonstration :

Lorsque t tend vers zéro, numérateur et dénominateur tendent vers zéro ; plus précisément, $1 - (r(t)/A^2) = (\rho^2/2)\, t^2 + o(t^2)$, avec :

(IV.6) $$\rho = A_1/A \quad .$$

D'autre part, d'après (III.12) et (III.16), on a :

$[f,F_{2k}] = \alpha_{2k,1}\, r + \ldots + \alpha_{2k,k+1}\, r^{(2k)}$, de sorte que $[f, F_{2k}]$ est de la forme

$\sum_1^N \beta_{2k,i}$ cosit, avec $\sum_1^N \beta_{2k,i} = 0$, puisque, pour $t = 0$, $[f,F_{2k}] = 0$.

On en déduit que $[f,F_{2k}] = \gamma_{2k}\, t^2 + o(t^2)$ avec $\gamma_{2k} = -\sum_1^N \beta_{2k+1,i}/2$.

De même, $[f,F_{2k+1}] = \alpha_{2k+1,1}\, r^{(1)} + \ldots + \alpha_{2k+1,k+1}\, r^{(2k+1)} = \sum_1^N \beta_{2k+1,i}$ sin it .

Sa dérivée vaut $[f', F_{2k+1}] = A_1 [F_1,F_{2k+1}] = \sum_1^N i\, \beta_{2k+1,i}$ cosit, et, comme cette dérivée est nulle pour $t = 0$, il vient $\sum_1^N i\, \beta_{2k+1,i} = 0$, et finalement

$[f, F_{2k+1}] = \gamma_{2k+1}\, t^3 + o(t^3)$.

□

On notera encore z_j la fonction obtenue sur J par prolongement par continuité.

.../...

(IV.7) - Lemme

Soit $z(t)$ la norme euclidienne du vecteur $z(t) = (z_2(t), \ldots, z_{2n-1}(t))$.
Alors $M = \sup z(t)$ est strictement positif.

Démonstration :

Supposons que $M = 0$; alors, on aurait, pour tout j, $2 \leqslant j \leqslant 2N-1$, $\langle f(t), F_j(0) \rangle = 0$ pour tout t ; donc, pour chaque t, $f(t)$, orthogonal au sous-espace vectoriel de H engendré par les vecteurs $F_j(0)$, $2 \leqslant j \leqslant 2N-1$, appartiendrait au plan vectoriel engendré par $f(0)$ et $f'(0)$. On aurait en particulier nullité du mineur

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_1 \cos t \\ 0 & b_1 & b_1 \sin t \\ b_2 & 0 & b_2 \cos 2t \end{vmatrix} ;$$

Or, ce mineur vaut $b_1^2 b_2(\cos 2t - \cos t)$, et par hypothèse, $b_1 b_2 \neq 0$. □

(IV. 8) - Lemme

L'intérieur du convexe $D(a)$ n'est pas vide, et de plus $D(a)$ contient la boule de centre 0 et de rayon a/M de $\mathbb{R}^{2N-2}$, notée $B'(0, a/M)$:

Démonstration :

Soit $u \in B'(0, a/M)$; d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient, pour tout t

$$\left| \sum_2^{2N-1} u_j \, z_j(t) \right| \leqslant |u| \, |z(t)| \leqslant \frac{a}{M} \cdot M = a \quad .$$

□

Un lemme qui nous servira pour montrer l'injectivité du paramétrage d'un ouvert de $C(a)$ que nous allons définir et étudier au § V :

.../...

(IV.9) - Lemme

Si $b \neq b'$ ou $t \not\equiv t'$ (2π), alors : $\Delta(t,b)^{o} \cap \Delta(t',b)^{o} = \emptyset$

($\Delta(t,b)^{o}$ désigne l'image par l'isomorphisme affine $u \longrightarrow m_b(t,u)$ de l'intérieur de $D(b)$).

Démonstration :

a) supposons d'abord que : $b \neq b'$; si $x \in \Delta(t,b)^{o}$, on a $\sup < x,f(s)> = b$, et si $x \in \Delta(t',b')^{o}$, $\sup <x,f(s)> = b'$

□

b) supposons maintenant que : $b = b'$ et $t \not\equiv t'$ (2π) ; soit $x \in \Delta(t,b)^{o} \cap \Delta(t',b)^{o}$: x est de la forme $m_b(t,u)$, avec $u \in D(b)^{o}$, et en outre, $< m_b(t,u), f(t') > = b$, donc $< m_b(0,u), f(\tau) > = b$, avec $\tau = t' - t \not\equiv 0$ (2π).

Ainsi, $\sum_{2}^{2N-1} u_j z_j(\tau) = b$. Comme $b > 0$, il est impossible que $z(\tau) = 0$.

D'autre part, nous allons montrer à la fin de cette démonstration que, pour $t \not\equiv 0$ (2π), le vecteur $f(t)$ n'est pas dans le plan engendré par $f(0)$ et $f'(0)$.

Dans ces conditions, l'hyperplan affine de H d'équation $< x, f(\tau)> = b$ coupe $G(0,b)$, qu'il divise en deux régions :

$\{x \in G(0,b) | < x, f(\tau) > > b\}$ et $\{x \in G(0,b) | < x, f(\tau)> < b\}$.

Dans tout voisinage de $m_b(0,u)$, on trouve des points de chacune de ces régions ; donc, dans tout voisinage de u, on trouve des points de $D(b)^{o}$ qui vérifient $\sum_{2}^{2N-1} u_j z_j(\tau) > b$, ce qui est absurde.

Un raisonnement élémentaire montre que, pour $t \not\equiv 0$ (2π), $f(t)$, $f(0)$, $f'(0)$ ne sont pas coplanaires.

□

Enfin, un dernier lemme va établir que sur l'ouvert $D(a)^{o}$, on a $|a\ \rho/A - \mu\ u_2| = a\ \rho/A - \mu\ u_2$ (voir III.22 et IV.6), sa preuve est immédiate.

.../...

(IV.10) - Lemme

(IV.11) - Soit $P(a) = \{u \in \mathbb{R}^{2N-2} \mid \mu u_2 < \rho\, a/A\}$. On a l'inclusion :

(IV.12) $D(a)^o \subset P(a)$.

V - DEFINITION DU PARAMETRAGE M DE C(a) ; ETABLISSEMENT D'UN DIFFEOMORPHISME, OBTENU PAR RESTRICTION DE M , ENTRE UN OUVERT V ET UN OUVERT W DE C(a) ; LE COMPLEMENTAIRE DE W DANS C(a) EST NEGLIGEABLE ; DEMONSTRATION DE (II.5) ET PREMIERES CONSEQUENCES.

Nous allons paramétrer C(a) par l'application M suivante :

(V.1) $M(t,b,u) = m_b(t,u) = bf(t)/A^2 + \sum_{2}^{2N-1} u_j F_j(t)$.

Ici, t décrit J, b décrit $[0,a]$, u décrit D(b). M est une fonction analytique de (t,b,u). Nous voulons utiliser le théorème de changement de variable dans l'intégrale (II.7), avec pour difféomorphisme de changement de variable, la fonction M, convenablement restreinte à un ouvert V qui sera simplement :

(V.2) $V = \{(t,b,u) , t \in]0,2\pi[, b \in]0,a[, u \in D(b)^o \}$.

Il nous faudra montrer que $M_{|V} : V \longrightarrow M(V) = W$ est un difféomorphisme, et que $C(a) \setminus W$ est négligeable.

(V.3) - Lemme

L'ensemble V est un ouvert de H.

Démonstration :

On remarque tout de suite que $V =]0,2\pi[\times V_1$, avec

(V.4) $V_1 = \{(b,u) \in \mathbb{R}^{2N-1} , b \in]0,a[, u \in D(b)^o \}$.

Il s'agit donc de montrer que V_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^{2N-1}$.

On utilise de façon décisive la propriété de croissante de la famille $(D(b)^o, b > 0)$ soit $(b_o,u_o) \in V_1$; c'est-à-dire que $b_o \in]0,a[$, et que $u_o \in D(b_o)^o$.

.../...

Il existe une boule $B'(u_o,\sigma)$, $\sigma > 0$, de $\mathbb{R}^{2N-2}$, contenue dans $D(b_o)^o$. Deux cas se présentent : ou bien $u_o \neq 0$, et le point $(1 + (\sigma/2|u_o|))$, u_o est encore dans $D(b_o)^o$, donc u_o appartient à $(1 + (\sigma/2|u_o|))^{-1}$. $D(b_o)^o = D((1 + (\sigma/2|u_o|))^{-1}.b_o)^o$, et par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que $u_o \in D(b_o - \eta)^o$. Ou bien $u_o = 0$, et dans ce cas, la conclusion précédente subsiste. On a vu au lemme (IV.8) que $D(b)$ est d'intérieur non vide, pour tout $b > 0$; par suite, il existe $\rho > 0$ tel que la boule $B'(u_o,\rho)$ soit incluse dans $D(b_o - \eta)^o$, et ceci implique que $]b_o - \eta, b_o + \eta[\times B'(u_o,\rho)$ est inclus dans V_1 : en effet, si $b \in]b_o - \eta , b_o + \eta[$, et $u \in B'(u_o,\rho)$ (η étant choisi pour que $]b_o - \eta, b_o + \eta[$, soit inclus dans $]0,a[$ alors $u \in D(b_o - \eta)^o$; donc, puisque $b > b_o - \eta$, et en vertu de la croissance en b de la famille $(D(b)^o, b > 0)$, u appartient à $D(b)^o$, et par suite $(b,u) \in V_1$.

□

Nous allons maintenant calculer le jacobien de M , et montrer que $M_{|V}$ est un difféomorphisme local, de sorte que $W = M(V)$ sera un ouvert (inclus dans $C(a)$.

(V.5) - Lemme

a) $\det M' = A^{-1}(a\,\rho/A - \mu\, u_2)$ pour $u \in D(b)^o$

b) $M_{|V}$ est un difféomorphisme local de V sur $W = M(V)$

c) W est un ouvert de H.

Démonstration :

a) Calculons le déterminant de Gram de $M'(t,b,u)$:

$$\text{gram } M' = \begin{pmatrix} A^{-2} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\text{gram}(\partial.m_L)} \\ 0 & \end{pmatrix} = A^{-2}(b\,\rho/A - \mu\, u_2)^2 \quad .$$

Mais $u \in D(b)^o$, donc, d'après (IV.14), $u \in P(a)$, et par conséquent,

$|\det M'| = (\text{gram } M')^{1/2} = A^{-1}(b\,\rho/A - \mu\, u_2) > 0$.

□

.../...

b) De a) et du théorème d'inversion locale, on déduit que $M_{|V}$ est un difféomorphisme local. D'où aussi c).

Par conséquent,

(V.6) $W = M(V)$ est un ouvert de H (contenu dans C(a). Pour montrer que $M_{|V} : V \longrightarrow W$ est un difféomorphisme, il reste à prouver que $M_{|V}$ est injective : c'est ce que nous avons déjà fait en démontrant le lemme (IV.9). Ainsi $M_{|V} : V \longrightarrow W$ est un difféomorphisme.

□

Pour pouvoir démontrer (II.5), il reste à établir que $C(a) \setminus W$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue (canonique) de H.

(V.7) - Lemme

L'ensemble $C(a) \setminus W$ est négligeable.

Démonstration :

On sait que $C(a) = M([0,2\pi] \times \{(b,u),\ b \in [0,a]\ ,\ u \in D(b)\})$

et que $W = M(]0,2\pi[\times \{(b,u),\ b \in]0,a[\ ,\ u \in D(b)^{o}\})$.

Nous avons à montrer, d'une part, que $M(\{0\} \times \{(b,u),\ b \in [0,a],\ u \in D(b))\}$ est négligeable ; et d'autre part, que

$M(]0,2\pi[\times \{(b,u),\ b \in [0,a]\ ,\ u \in Fr(D(b))\})$ est aussi négligeable :

a) Montrons que $M(\{0\} \times \{(b,u),\ b \in [0,a],\ u \in D(b)\})$ est négligeable : cela est dû au fait que l'ensemble $\{0\} \times \{(b,u),\ b \in [0,a],\ u \in D(b)\}$ de $\mathbb{R}^{2N}$ est inclus dans l'hyperplan $t = 0$, qui est négligeable, et au fait que l'image d'un ensemble négligeable par une fonction C^1 est négligeable.

□

b) Montrons que $Fr(D(b))$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{2N-2}$, pour tout $b > 0$: nous revenons aux notations (IV.6), (IV.7). Nous remarquons pour commencer que, pour $t \not\equiv 0\ (2\Pi)$, les vecteurs $z(t)$, $z'(t)$,..., $z^{(2N-2)}(t)$, sont linéairement indépendants : on peut pour cela montrer que, dans les mêmes conditions, les vecteurs

.../...

$([f,F_o]\ (t)\ ,\ldots,\ [f,F_{2N-1}]\ (t))$, $([f',F_o]\ (t)\ ,\ldots,\ [f',F_{2N-1}]\ (t)),\ldots,$ $([f^{(2N-1)},F_o]\ (t)\ ,\ldots,\ [f^{(2N-1)},F_{2N-1}]\ (t))$, sont linéairement indépendants ; or, la matrice associée à ce système de vecteurs n'est autre que la matrice du système libre $(f(t)\ ,\ldots,\ f^{(2N-1)}\ (t))$ dans la base $(F_0(0),\ldots,F_{2N-1}(0))$. En conséquence, $|z(t)| \neq 0$ pour $t \not\equiv 0\ (2\pi)$.

Nous remarquons ensuite que $Fr(D(b))$ est incluse dans l'enveloppe des hyperplans $\langle u,\ z(t)\rangle = a$ de $\mathbb{R}^{2N-2}$: il nous suffit de montrer que cette enveloppe est négligeable, et pour cela nous la paramétrons comme nous l'avons fait pour $E(a)$: soit $K_o = \frac{z}{|z|}$ $(t \not\equiv 0\ \ (2\pi))$, et $(K_o,\ldots,K_{2N-3})$ construit par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de $(z,\ldots z^{(2N-3)})$ $(t \not\equiv 0\ (2\pi))$. On forme le paramétrage C^∞ : $Q(t,w) = bz(t)/|z(t)|^2 + \sum_2^{2N-3} w_j\ K_j(t)$, $t \in]0,2\pi[$, $w \in \mathbb{R}^{2N-4}$. Q est fonction C^∞ de (t,w). D'après le théorème de Sard, l'image par Q de l'ensemble fermé L des points où le jacobien de Q s'annule est négligeable. En utilisant d'autre part un recouvrement dénombrable de $]0,2\pi[\times \mathbb{R}^{2N-4} \setminus L$ par des ouverts dont les images par Q soient des sous-variétés de dimension 2N-3 de $\mathbb{R}^{2N-2}$, donc de mesure nulle, on établit finalement que $Q(]0,2\pi[\times \mathbb{R}^{2N-4})$ est négligeable, et par suite, (comme dans a)), que $Q(J \times \mathbb{R}^{2N-4})$ est négligeable. □

c) déduisons de b) que $M(]0,2\pi[\times Y)$ est négligeable, Y étant l'ensemble $\{(b,u),\ b \in [0,a]\ ,\ u \in Fr(D(b))\}$: il suffit de montrer que Y est négligeable dans $\mathbb{R}^{2N-1}$. On suppose que $a > 0$, (comme partout).

Puisque $Fr(D(a))$ est négligeable d'après b), pour tout $\eta > 0$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^{2N-2}$ contenant $Fr(D(a))$, et de mesure inférieure ou égale à η/a. On montre alors facilement que l'ensemble $\{(b,u).\ 0 \leqslant b \leqslant a,\ u \in (b/a)U\}$ à une mesure de Lebesgue inférieure ou égale à η .

□

.../...

Nous parvenons donc enfin au théorème annoncé :

(V.8) - Théorème

Si la densité φ est continue et bornée, la loi de Z admet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, une densité $f_Z(a)$ continue qui est nulle pour $a \leqslant 0$, et admet, pour $a > 0$, l'expression suivante :

$$f_Z(a) = \int_0^{2\Pi} dt \int_{D(a)} A^{-1}(a\,\rho/A - \mu\, u_2)\ \varphi\ (M(a,t,u))\ du_2 \ldots du_{2N-1}$$

qui n'est autre que (II.5).

Démonstration :

Le cas où $a \leqslant 0$ étant clair, on suppose que $a > 0$: d'après l'ensemble des lemmes précédents, et en appliquant à (II.7) le "changement de variables" M, on obtient :

$$J(a) = P(Z \leqslant a) = \int_0^{2\Pi} dt \int_0^a \Phi(b,t)\ db, \text{ avec :}$$

$$\Phi(b,t) = \int_{D(b)} A^{-1}(b\,\rho/A - \mu\, u_2)\ \varphi\ (M(b,t,u))\ du_2 \ldots du_{2N-1}\ .$$

On en déduit que :

$$(V.9) \qquad P(Z \leqslant a) = \int_0^{2\Pi} dt \int_0^a \Phi(b,t)\ db\ .$$

Nous allons montrer dans le lemme suivant (V.10) que le convexe fermé D(1) est compact. Voici ce qu'on en déduit : on remarque d'abord que, puisque $D(b) = b.D(1)$, le "changement de variables" $u = bv$ donne :

$\Phi(b,t) = b^{2N-1} \int_{D(b)} A^{-1}(\rho/A - \mu\, v_2)\ \varphi\ (bM(1,t,v))\ dv$. Posons $K = \sup \varphi$. D'une part, pour tout t, l'application $\Phi_t : b \longmapsto \Phi(b,t)$ est continue, car, pour tous t et v, l'application $b \longmapsto \varphi(bM(1,t,v))$, composée de fonctions continues, est continue, de sorte que l'application $b \longmapsto (\rho/A - \mu\, v_2)\ \varphi\ (bM(1,t,v))$ l'est aussi, et cette fonction est majorée uniformément en t et v par $(\rho/A + \mu \sup_{D(1)} |v_2|)\ K$, sur le compact D(1).

.../...

Ainsi, $\Phi_t(b)$ est majorée par $b^{2N-1} A^{-1}(\rho/A + \mu \sup_{D(1)}|v_2|)K \int_{D(1)} dv$, et ceci est borné lorsque b varie dans un intervalle borné. On peut donc, dans (V.9), dériver en a sous le signe somme, et on obtient $f_Z(a) = \int_0^{2\Pi} \Phi(a,t)\, dt$, ce qui conduit à (II.5).

Reste à montrer le lemme annoncé ; il est équivalent de montrer que C(1) est compact :

(V.10) - Lemme

L'ensemble C(1) est fermé borné, donc compact.

Démonstration :

On notera $(e_1, \ldots, e_{2N})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2N}$; on notera [t] la partie entière de t ($t \in \mathbb{R}^+$).

Soit $L_1 = SEV(\{e_{4j+1}, e_{4j+2} ; j \geqslant 0, 4j+2 \leqslant 2N\})$ le sous-espace vectoriel egendré par les vecteurs e_{4j+1}, e_{4j+2}, $j \geqslant 0$, $4j+2 \leqslant 2N$; soit p_1 la projection orthogonale associée.

Soit $L_2 = SEV(\{e_{4j-1}, e_{4j} ; j \geqslant 1, 4j \leqslant 2N\})$ le supplémentaire orthogonal de L_1, et p_2 la projection associée.

On a $p_1 + p_2 = Id_{2N}$, donc $\langle x, f(t)\rangle = \langle p_1 x, p_1 f(t)\rangle + \langle p_2 x, p_2 f(t)\rangle$.

Remarquons que $p_1 f(t) = (b_1 \cos t, b_1 \sin t, 0, 0, b_3 \cos 3t, b_3 \sin 3t, 0, 0, \ldots)$ et que $p_2 f(t) = (0, 0, b_2 \cos 2t, b_2 \sin 2t, 0, 0, b_4 \cos 4t, b_4 \sin 4t, 0, 0, \ldots)$, de sorte que $p_1 f(t + \Pi) = - p_1 f(t)$, tandis que $p_2 f(t + \Pi) = p_2 f(t)$ on parvient ainsi à l'équivalence suivante :

(V.11) $\quad x \in C(1) \iff \forall t, \langle p_2 x, p_2 f(t)\rangle \leqslant 1 - |\langle p_1 x, p_1 f(t)\rangle|$.

On en déduit l'implication suivante :

(V.12) $\quad x \in C(1) \implies \forall t, \langle p_2 x, p_2 f(t)\rangle \leqslant 1$

Notons $C_1(a)$ (respectivement $C_2(a)$) l'ensemble des y de L_1 (respectivement L_2) tels que $\langle y, p_1 f(t)\rangle \leqslant a$ quel que soit t (respectivement $\langle y, p_2 f(t)\rangle \leqslant a$).

.../...

On a donc :

(V.13) $\quad x \in C(1) \Rightarrow p_2 x \in C_2(1)$

Ceci s'écrit encore :

(V.14) $\quad p_2 C(1) \sqsubset C_2(1)$

Ainsi, si $C_2(1)$ est borné, alors $p_2 C(1)$ l'est aussi. Mais alors, il existe un réel positif K tel que l'on ait (à cause de (V.11))

(V.15) $\quad |\langle p_1 x,\ p_1 f(t)\rangle| \leqslant 1 + K \qquad \forall t$

Notons $\Gamma_1(a)$ l'ensemble des y de L_1 tels que l'on ait $|\langle\ , p_1 f(t)\rangle| \leqslant a \quad \forall t$. Nous allons montrer que $\Gamma_1(a)$ est compact (a est supposé positif). En effet, on peut d'abord construire une suite de $n = 2\,[(N+1)/2]$ points $t_1, \ldots, t_n$, tels que $(p_1 f(t_1), \ldots, p_1 f(t_n))$ forme une base de L_1 ; notons $t'_1 = t_1 + \Pi, \ldots, t'_n = t_n + \Pi$ on a $p_1 f(t'_j) = - p_1 f(t_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

Soit $y \in \Gamma_1(a)$: notons $\varepsilon_j(y)$ le signe de $\langle y, p_1 f(t_j)\rangle$,et considérons la base (l_j) de L_1 dont la composante de rang j est $p_1 f(t_j)$ si $\varepsilon_j(y) = 1$ et $p_1 f(t'_j)$ si $\varepsilon_j(y) = -1$ (par convention, on choisit que : $\varepsilon_j(y) = 1$ si $\langle y, p_1 f(t_j)\rangle = 0$). Alors y appartient à l'ensemble des éléments z de L_1 tels que $0 \leqslant \langle z, l_j\rangle \leqslant a$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, ensemble qui est compact. En fin de compte, y peut appartenir à 2^n simplexes de ce type, donc $\Gamma_1(a)$ est compact.

Finalement, si $C_2(1)$ est borné, $p_1 C(1)$ et $p_2 C(1)$ le sont aussi, donc C(1) est borné.

Recommençons l'opération précédente sur L_2, qui est de dimension $2[N/2]$, si $[N/2] \geqslant 2$: on définit $p_1^{(2)}$ et $p_2^{(2)}$, de même que $L_1^{(2)}$ et $L_2^{(2)}$, de manière qu'on ait $p_1^{(2)} f(t+(\Pi/2)) = - p_1^{(2)} f(t)$ et $p_2^{(2)} f(t+(\Pi/2)) = p_2^{(2)} f(t)$; la dimension de $L_2^{(2)}$ est $2\,[N/4]$; on définit aussi $C_1^{(2)}(a)$, $C_2^{(2)}(a)$, $\Gamma_1^{(2)}(a)$; on trouve :

.../...

(V.16) $p_2 x \in C_2(a) \Longleftrightarrow \forall t, \langle p_2^{(2)} x, p_2^{(2)} f(t)\rangle \leqslant 1 - |\langle p_1^{(2)} x, p_1^{(2)} f(t)\rangle|$

(V.17) $x \in C(1) \Rightarrow p_2 x \in C_2(1) \Rightarrow p_2^{(2)} x \in C_2^{(2)}(1)$

(V.18) $p_2^{(2)} C(1) \sqsubset C_2^{(2)}(1)$

Si $C_2^{(2)}(1)$ est borné, alors $p_2^{(2)} C(1)$ l'est aussi, donc, par un raisonnement analogue au précédent, $p_1^{(2)} C(1)$ est borné, donc $p_2 C(1)$ est borné, donc $C(1)$ est borné.

On construit de proche en proche, pour $[N/2^{q-1}] \geqslant 1$, les projections $p_1^{(q)}$ et $p_2^{(q)}$, les sous-espaces vectoriels $L_1^{(q)}$ et $L_2^{(q)}$, ce dernier étant de dimension $2[N/2^{q-1}]$, les ensembles $C_1^{(q)}(a)$, $C_2^{(q)}(a)$, $\Gamma_1^{(q)}(a)$. Si $C_2^{(q)}(1)$ est borné, alors $C(1)$ est borné.

Pour un certain q, on a $[N/2^{q-1}] = 1$. Dans ce cas, $C_2^{(q)}(1)$ est simplement le disque de centre 0 et de rayon $1/b_k$ de $L_2^{(q)}$, donc est borné ; par conséquent $C(1)$ est borné. □

(V.19) Corollaire :

Sous les mêmes hypothèses, si φ est radiale, et si on note $\alpha(\|x\|^2) = \varphi(x)$, on obtient la formule, pour $a > 0$:

(V.20) $$f_Z(a) = 2\pi \int_{D(a)} A^{-1}(a\rho/A - \mu u_2)\, \alpha\left(\frac{a^2}{A^2} + |u|^2\right) du$$

(V.21) Corollaire :

Si Ξ est gaussienne, on trouve, pour $a > 0$

(V.22) $$f_Z(a) = \int_{D(a)} e^{-\frac{a^2}{2A^2}} A^{-1}(a\rho/A - \mu u_2)\, (2\pi)^{-(N-1)}\, e^{-|u|^2/2}\, du$$

Nous allons dorénavant exploiter (V.22).

.../...

VI - PROPRIETES DE LA DENSITE f_Z dans le cas gaussien :

(VI.1) Théorème :

La fonction f_Z donnée par (V.22) est analytique sur $\mathbb{R}_+^*$

Démonstration :

Faisons dans (V.22) le changement de variable u = av ; on trouve

$$(VI.2) \qquad f_Z(a) = A^{-1}(2\Pi)^{-(N-1)} a^{2N-1} e^{-a^2/2A^2} (\rho/A \int_{D(1)} e^{-a^2|v|^2/2} dv - \mu \int_{D(1)} v_2 e^{-a^2|v|^2/2} dv) \quad \text{pour } a > 0.$$

Puisque d'après le lemme (V.10), D(1) est compact, on peut écrire :

$$(VI.3) \qquad \int_{D(1)} e^{-a^2|v|^2/2} = \sum_0^\infty (-1)^n a^{2n} 2^{-n} (n!)^{-1} \int_{D(1)} |v|^{2n} dv$$

De même, on a :

$$(VI.4) \qquad \int_{D(1)} v_2 e^{-a^2|v|^2/2} dv = \sum_0^\infty (-1)^n a^{2n} 2^{-n} (n!)^{-1} \int_{D(1)} v_2 |v|^{2n} dv .$$

Ainsi, $f_Z(a)$ est égal, pour $a > 0$, à la somme d'une série entière en a, de rayon de convergence infini, et f_Z est bien analytique sur l'ensemble de $\mathbb{R}_+^*$. □

On déduit de la démonstration ci-dessus le corollaire (VI.5) :

(VI.5) Corollaire :

Pour $a > 0$ voisin de 0, $f_Z(a)$ est équivalent à :

$$(VI.6) \qquad A^{-1}(2\Pi)^{-(N-1)} (\rho A^{-1} \int_{D(1)} dv - \mu \int_{D(1)} v_2 dv) a^{2N-1}$$

pourvu que le coefficient de a^{2N-1} ci-dessus soit non nul. (Ceci prouve qu'il est positif ou nul).

.../...

(VI.7) Théorème :

Posons $\nu = \rho(A\mu)^{-1}$ et $\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} (2\Pi)^{-1/2} e^{-\sigma^2/2} d\sigma$.

On a l'encadrement :

(VI.8) $f_Z(a) \geqslant \rho A^{-2} a e^{-a^2/2A^2} (1 - e^{-a^2/2M^2} (\sum_0^{N-2} (a^2/2M^2)^k/k!))$

(VI.9) $f_Z(a) \leqslant \rho A^{-2} a e^{-a^2/2A^2} (\Phi(a\nu) + \nu^{-2}(2\Pi)^{-1/2} a^{-1} e^{-a^2\nu^2/2})$

Démonstration :

Le convexe D(a) est inclus dans $\overline{P(a)}$ (voir(IV.12)), demi-espace de $\mathbb{R}^{2N-2}$ défini par $u_2 \leqslant a\nu$; sur cet ensemble $\overline{P(a)}$, l'intégrande du second membre de (V.22) est positif ou nul , et, par suite, on obtient (VI.8) en remplaçant dans (V.22) D(a) par B'(O,a/M), et (VI.9) en remplaçant dans (V.22) D(a) par P(a).

On fait usage de l'égalité :

(VI.10) $\int_{B'(O,a/M)} (2\Pi)^{-(N-1)} e^{-|u|^2} du = 1 - e^{-a^2/2M^2} (\sum_0^{N-2} (a^2/2M^2)^k/k!))$

(VI.11) Corollaire :

Quand a tend vers l'infini, on a l'équivalence :

(VI.12) $f_Z(a) \sim \rho A^{-2} a e^{-a^2/2A^2}$

(VI.13) Corollaire :

Quand a tend vers l'infini, on a l'équivalence :

(VI.14) $P(Z \geqslant a) \sim \rho e^{-a^2/2A^2}$

(VI.15) Remarque : dans (VI.9) apparaît la quantité $\Phi(a\nu) + (2\Pi)^{-1/2} (a\nu)^{-1} e^{-a^2\nu^2/2} = 1 + (2\Pi)^{-1/2}(a\nu)^{-1} e^{-a^2\nu^2/2} - \int_{a\nu}^{\infty} (2\Pi)^{-1/2} e^{-\sigma^2/2} d\sigma$

Or, le développement asymptotique de $\int_{a\nu}^{\infty} (2\Pi)^{-1/2} e^{-\sigma^2/2} d\sigma$

admet pour deux premiers termes : $(2\Pi)^{-1/2}(a\nu)^{-1} e^{-a^2\nu^2/2} - (2\Pi)^{-1/2}(a\nu)^{-3} e^{-a^2\nu^2/2}$.

Ainsi, (VI.9) fournit :

.../...

(VI.16) $f_Z(a) \leqslant \rho A^{-2}\, a\, e^{-a^2/2A^2}\, (1 + (2\Pi)^{-1/2}(a\nu)^{-3}\, e^{-a^2\nu^2/2} + O(a^{-3}\, e^{-a^2\nu^2/2})$

(VI.17) Remarque : dans [3], Berman démontre que, si $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien stationnaire centré, de variance 1, de covariance C^2, alors, pour tout $T > 0$, $P\,(\sup_{[0,T]} X_t > a) \sim T(-r''(0))^{1/2}\,(2\Pi)^{-1}\, e^{-a^2/2}$, lorsque $a \to \infty$.

Nos formules (VI.8) et (VI.9), applicables dans un cas bien plus particulier, sont beaucoup plus précises, et s'appliquent à la densité de Z.

(VI.18) Remarque : la fonction positive croissante $\ell(a)$ définie par :

(VI.19) $$\ell(a) = \int_{D(a)} (2\Pi)^{-(N-1)}\, e^{-|u|^2/2}\, du,$$

tend vers un quand a tend vers l'infini. Posons :

(VI.20) $$m(a) = \int_{D(a)} (2\Pi)^{-(N-1}\, u_2\, e^{-|u|^2/2}\, du\ .$$

On a le résultat suivant :

(VI.21) Proposition :

La fonction m(a) tend vers zéro quand a tend vers l'infini

Démonstration :

En effet, $\int_{B'(0,a/M)} u_2\, e^{-|u|^2/2}\, du = 0$, donc

$m(a) = \int_{D(a)\setminus B'(0,a/M)} u_2\, e^{-|u|^2/2}\, du$, et par conséquent

$|m(a)| \leqslant \int_{P(a)\setminus B'(0,a/M)} |u_2|\, e^{-|u|^2/2}\, du$, qui tend vers zéro quand a tend vers l'infini.

Enfin, signalons sans démonstration le théorème suivant, qui est une conséquence des divers résultats et des diverses démonstrations précédentes :

.../...

(VI.22) Théorème :

Soit Z_T la variable aléatoire $Z_T = \sup_{[0,T]} X_t$, pour $0 \leqslant T \leqslant 2\Pi$

La loi de Z_T admet une densité $f_{Z_T}(a)$ qui vérifie quand a tend vers l'infini :

(VI.23) $$f_{Z_T}(a) \sim T(2\Pi)^{-1} \rho A^{-2} a\, e^{-a^2/2A^2}$$

(En fait, on obtient des encadrements plus précis).

VII - PASSAGE A LA LIMITE QUAND N TEND VERS L'INFINI : COMPORTEMENT DU MAXIMUM D'UN PROCESSUS DE LA FORME $X_t = \sum_1^\infty b_j(\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)$ TEL QUE :

$b_j \neq 0$ POUR TOUT j, ET QUE : $\sum_1^\infty j^4 b_j^2 < \infty$.

Nous allons dans ce § nous attacher particulièrement à étudier en quoi la loi du maximum Z^N du processus $X_t^N = \sum_1^N b_j(\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)$ permet d'approcher la loi du maximum Z de $(X_t\ ,\ t \in J)$. On montrera en outre que la loi de Z admet une densité continue f_Z, limite uniforme sur tout compact de la suite des densités f_{Z^N} de Z^N. On notera Y_t^N le reste de la série dont la somme est égale à X_t, de sorte que $X_t = X_t^N + Y_t^N$; on notera $Z_1^N = \sup Y_t^N$; on notera r la covariance de X_t , r_N celle de X_t^N ; A^2 désignera la série $\sum_1^\infty b_j^2$, $(A^N)^2$ sa somme partielle d'ordre N ; de même pour A_1, A_1^N, A_2, A_2^N .

(VII.1) Il nous faut d'abord trouver des hypothèses portant sur la suite $(b_j\ ,\ j \geqslant 1)$, pour que la série $\sum_1^\infty b_j(\xi_j \cos jt) + \eta_j \sin jt)$ admette, sur J, un maximum qui soit une variable aléatoire non dégénérée, c'est-à-dire une variable aléatoire qui ne soit pas égale à $+\infty$ avec probabilité 1.

Nous choisissons une version séparable du processus X.

.../...

Notre hypothèse minimale est que : $\sum_1^\infty b_j^2 < \infty$; sous cette hypothèse, pour chaque b, la série converge dans $L^2(\Omega)$ vers une variable aléatoire gaussienne de moyenne zéro et de variance $\sum_1^\infty b_j^2 = A^2$.

Passons à la non-dégénérescence de Z : on a la relation

(VII.2) $$\left|\sum_1^\infty b_j(\xi_j \cos jt + \eta_j \sin jt)\right| \leq \sum_1^\infty |b_j| (\xi_j^2 + \eta_j^2)^{1/2} .$$

Posons :

(VII.3) $$U_j = |b_j| (\xi_j^2 + \eta_j^2)^{1/2} \quad \text{pour } j \geq 1.$$

Les variables aléatoires U_j sont indépendantes et positives. Pour montrer que la série $\sum_1^\infty U_j$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie, soit U, appliquons le théorème des Trois Séries de Kolmogorov ([7] p. 237).

On a d'abord pour tout $c > 0$:

$$P(|U_j| \geq c) = P(U_j \geq c) = P(\xi_j^2 + \eta_j^2 \geq c^2/b_j^2) = e^{-c^2/2b_j^2} \quad \text{car } (\xi_j^2 + \eta_j^2)$$

suit la loi du X^2 à deux degrés de liberté. Une condition suffisante pour que la série $\sum_1^\infty P(|U_j| \geq c)$ converge pour certaines valeurs de $c > 0$ (au moins) est :

(VII.4) La suite $(b_j^2 \log j,\ j \geq 1)$ est bornée.

$c > 0$ étant choisi, il est claire que les séries $\sum_1^\infty E(U_j^c)$ et $\sum_1^\infty \sigma^2(U_j^c)$ convergent.

On a évidemment $Z \leq U$, et donc $P(Z < \infty) \geq P(U < \infty) = 1$ sous l'hypothèse (VII.4).

Notons que tout cela s'applique aussi à $Y^N = (Y_t^N,\ t \in J)$ et à Z_1^N.

(VII.5) Proposition :

Si la série $\sum_1^\infty b_j^2$ converge, alors la suite $(Z^N, N \geq 1)$ tend vers Z en moyenne quadratique, donc aussi en probabilité.

.../...

Démonstration :

Remarquons d'abord que, puisque $X_t = X_t^N + Y_t^N$ pour $t \in J$, $N \geqslant 1$, on a la relation :

(VII.6) $\quad |Z - Z^N| \leqslant Z_1^N$.

Il s'agit donc de montrer que si $\sum_1^\infty b_j < \infty$, Z_1^N tend vers zéro en moyenne quadratique quand N tend vers l'infini.

Mais $Z_1^N \leqslant \sum_{N+1}^\infty U_j$, et puisque les U_j sont indépendants, il vient

$$E\left((Z_1^N)^2\right) \leqslant \sum_{N+1}^\infty E\left(U_j^2\right) \leqslant 2\sum_{N+1}^\infty b_j^2$$

□

On en déduit, d'après [7] p. 168, le résultat suivant :

(VII.7) Corollaire :

Si $\sum_1^\infty b_j^2 < \infty$, la fonction de répartition de Z^N au point a, soit $F_N(a)$, converge vers la fonction de répartition de Z au point a, soit F(a), dès que a est point de continuité de F.

(VII.8) Remarque : la méthode de démonstration de la proposition c. de [7] p. 168 ne permet pas d'estimer précisément le comportement de l'écart entre $F_N(a)$ et F(a) quand N tend vers l'infini. Nous allons chercher à obtenir à ce sujet des résultats plus utiles :

(VII.9) Théorème :

La suite des fonctions F_N converge uniformément vers F quand N tend vers l'infini, pourvu que $\sum_1^\infty b_j^2 < \infty$

Démonstration :

a) On a vu que, pour $N \geqslant 1$, on a : $|Z - Z^N| \leqslant Z_1^N$. Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

.../...

$$P(Z \geqslant a) \leqslant P(Z^N + Z_1^N \geqslant a)$$

$$= \int_0^\infty P(Z^N \geqslant a - x)\, dF_{Z_1^N}(x)$$

$$= \int_0^\varepsilon P(Z^N \geqslant a - x)\, dF_{Z_1^N}(x) + \int_\varepsilon^\infty P(Z^N \geqslant a-x)\, dF_{Z_1^N}(x)$$

$$P(Z \geqslant a) \geqslant P(Z^N - Z_1^N \geqslant a)$$

$$= \int_0^\varepsilon P(Z^N \geqslant a + x)\, dF_{Z_1^N}(x) + \int_\varepsilon^\infty P(Z^N \geqslant a + x) dF_{Z_1^N}(x)$$

b) d'après (VI.9), on a, pour $a > 0$, et puisque $\Phi(a\nu) \leqslant 1$:

$$f_{Z^N}(a) = f_N(a) \leqslant (\rho(A^N)^{-2} a + \rho(A^N)^{-2} \nu^{-1} (2\pi)^{-1/2} e^{-a^2\nu^2/2}) e^{-a^2/2(A^N)^2},$$

avec $\rho = A_1^N / A^N$, $\mu = ((A_2^N)^2 (A^N)^2 - (A_1^N)^4)^{1/2} (A^N A_1^N)^{-1}$, donc

$$\nu = \rho(A\mu)^{-1} = A_1^N (A^N)^{-2} ((A^N A_2^N)^2 - (A_1^N)^4)^{-1/2} A_1^N A^N$$

$$= (A_1^N)^2 (A^N)^{-1} ((A^N A_2^N)^2 - (A_1^N)^4)^{-1/2}$$

On a les majorations suivantes, pour $N \geqslant N_0$, $N_0 \geqslant 1$ donné :

$$\rho(A_N)^{-2} \leqslant A_1 (A^{N_0})^{-3} = \rho'(N_0)$$

$$\nu^{-1} \leqslant (A^2 A_2^2 - (A_1^{N_0})^4)^{1/2} (A^{N_0})^{-1} (A_1^{N_0})^{-2}$$

$$\rho(A^N)^{-2} \nu^{-1} \leqslant (A^2 A_2^2 - (A_1^{N_0})^4)^{1/2} (A^{N_0})^{-4} (A_1^{N_0})^{-2} A_1$$

$$= \nu''(N_0)$$

$$\nu \geqslant (A^2 A_2^2 - (A_1^{N_0})^4)^{-1/2} (A^{N_0}) (A_1^{N_0})^2 = \nu'(N_0)$$

et finalement, pour $a \geqslant 0$:

(VII.10) $f_N(a) \leqslant (a\rho'(N_0) + \nu''(N_0)(2\pi)^{-1/2} e^{-a^2(\nu'(N_0))^2/2}) e^{-a^2/2A^2}$

Notons le second membre de (VII.10) $X_{N_0}(a)$.

.../...

La fonction X_{N_0} est bornée sur $\mathbb{R}_+$: par $\rho'(N_0)\ A\ e^{-1/2} + \nu''(N_0)(2\Pi)^{-1/2} = K(N_0)$

Notons $X_{N_0}(a) = 0$ pour $a < 0$: on a finalement

(VII.11) $\quad 0 \leqslant f_N(a) \leqslant X_{N_0}(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $N \geqslant N_0$

et donc

(VII.12) $\quad 0 \leqslant f_N(a) \leqslant K(N_0)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $N \geqslant N_0$

c) D'après le théorème des accroissements finis, et d'après b), on a donc :

(VII.13) $\quad 0 \leqslant P(Z^N \geqslant a-x) - P(Z^N \geqslant a) \leqslant K(N_0)\varepsilon$ pour $N \geqslant N_0$,

pour tout a, pour $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

De même :

(VII.14) $\quad 0 \leqslant P(Z^N \geqslant a) - P(Z^N \geqslant a+x) \leqslant K(N_0)\varepsilon$ pour $N \geqslant N_0$,

pour tout a, pour $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Revenant à a), il vient :

$$P(Z \geqslant a) \leqslant (P(Z^N \geqslant a) + K(N_0)\varepsilon)\ P(|Z_1^N| < \varepsilon) + P(|Z_1^N| > \varepsilon)$$

$$P(Z \geqslant a) \geqslant (P(Z^N \geqslant a) - K(N_0)\varepsilon)\ P(|Z_1^N| < \varepsilon)$$

Il en résulte que, si on pose $G_N(\varepsilon) = P(|Z_1^N| > \varepsilon)$, on a :

(VII.15) $\quad P(Z^N \geqslant a) - G_N(\varepsilon) - K(N_0)\varepsilon \leqslant P(Z \geqslant a)$

$$\leqslant P(Z^N \geqslant a) + G_N(\varepsilon) + K(N_0)\varepsilon$$

D'où

(VII.16) $\quad |F(a) - F_N(a)| \leqslant K(N_0)\varepsilon + G_N(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$,

pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $N \geqslant N_0$.

Or, on a vu, au cours de la démonstration de la proposition (VII.5) que, pour tout $\varepsilon > 0$, $G_N(\varepsilon) \to 0$ $(N \to \infty)$.

.../...

Plus précisément, soit alors $\varepsilon_0 > 0$ donné ; on prend $\varepsilon = \varepsilon_0/2K(N_0)$; puis on remarque que d'après l'inégalité de Tchebitchev, on a :

(VII.17) $$G_N(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon^{-2} \left(\sum_{N+1}^{\infty} b_j^2\right) .$$

Il reste à choisir N assez grand pour que $2\varepsilon^{-2} \left(\sum_{N+1}^{\infty} b_j^2\right) = 8K(N_0)^2 \varepsilon_o^{-2} \left(\sum_{N+1}^{\infty} b_j^2\right)$ soit inférieur ou égal à $\varepsilon_0/2$: il suffit que :

$\sum_{N+1}^{\infty} b_j^2 \leqslant \varepsilon_0^3/16\, K(N_0)^2$. Dans ces conditions, on a :

(VII.18) $$|F(a) - F_{N'}(a)| \leqslant \varepsilon_0 \text{ pour tout } N' \geqslant N, \text{ pour tout } a.$$

□

(VII.19) Corollaire :

La fonction F est uniformément continue

Nous allons maintenant majorer $P(Z \geqslant a)$ en utilisant l'inégalité (VI.9) et le théorème (VII.9). Remarquons que l'inégalité (VI.8) n'étant pas uniforme en N, ne permet pas d'obtenir, par passage à la limite, une minoration de $P(Z \geqslant a)$; nous ne pouvons pas montrer ici le résultat (vrai, d'après Berman) : $P(Z \geqslant a) \sim \rho e^{-a^2/2A^2}$.

(VII.20) Théorème :

Supposons que la série $\sum_1^{\infty} j^4 b_j^2$ converge. Alors vient l'inégalité :

(VII.21)

$$P(Z \geqslant a) \leqslant \rho e^{-a^2/2A^2} \Phi(a\nu) + \rho(1+A^2\nu^2)^{-1/2}(1+A^{-1}\nu^{-1})(1 - \Phi(aA^{-1}(1+A^2\nu^2)^{1/2}))$$

.../...

Démonstration :

On montre d'abord l'inégalité (VII.21) pour Z^N, en remplaçant dans le second membre A, ρ, ν, par A^N, ρ^N, ν^N, respectivement, et en utilisant directement (VI.9). On obtient ainsi une inégalité du type $P(Z^N \geqslant a) \leqslant \psi_N(a)$. Or, quand N tend vers l'infini, les quantités A^N, ρ^N, ν^N convergent vers A, ρ, ν, respectivement. Par conséquent, pour tout $a > 0$, $\psi_N(a)$ converge, quand N tend vers l'infini, vers le second membre de (VII.21), soit $\psi(a)$. D'autre part, d'après le théorème (VII.9), $P(Z^N \geqslant a)$ converge vers $P(Z \geqslant a)$ quand N tend vers l'infini, et ce pour tout $a > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et donné ; pour N assez grand, ou a :

$P(Z \geqslant a) - \varepsilon/2 \leqslant P(Z^N \geqslant a) \leqslant \psi_N(a) \leqslant \psi(a) + \varepsilon/2$, donc $P(Z \geqslant a) \leqslant \psi(a) + \varepsilon$ □

Reprenons l'étude de la majoration de $G_N(\varepsilon)$: l'inégalité (VII.21) est applicable à Y^N et Z_1^N, toujours sous l'hypothèse $\sum_1^\infty j^4 b_j^{\,2} < \infty$. Dans ce cas, on a les équations :

$$A^2 = \sum_{N+1}^{\infty} b_j^{\,2}\ ,\quad \rho^2 = \Big(\sum_{N+1}^{\infty} j^2 b_j^{\,2}\Big)\Big(\sum_{N+1}^{\infty} b_j^{\,2}\Big)^{-1}\ ,\ \text{et :}$$

$$\nu = \Big(\sum_{N+1}^{\infty} b_j^{\,2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{N+1}^{\infty} j^2 b_j^{\,2}\Big)\Big(\Big(\sum_{N+1}^{\infty} b_j^{\,2}\Big)\Big(\sum_{N+1}^{\infty} j^4 b_j^{\,2}\Big) - \Big(\sum_{N+1}^{\infty} j^2 b_j^{\,2}\Big)^2\Big)^{-1/2}\ ,$$

et il peut être utile d'observer le comportement asymptotique de ces quantités dans chaque cas particulier.

Pour finir, nous énonçons trois résultats sans démonstration :

(VII.22) Théorème :

Soit X un processus gaussien centré à trajectoires 2Π - périodiques, dont la fonction de covariance s'écrit $r(\tau) = \sum_1^\infty b_j^{\,2} \cos j\tau$, avec $\sum_1^\infty j^6 b_j^{\,2} < \infty$ et $b_j \neq 0$, $\forall j \geqslant 1$, et tel que :

.../...

(VII.23) $\inf (A^2 - r^2/A^2 - r'^2/A_1^2) / (1 - r/A^2)^2 > 0$

La loi du maximum sur J de ce processus admet une densité continue f_Z, limite uniforme sur tout compact de la suite des densités f_{Z^N} des lois des maxima des processus sommes partielles. Cette densité est de la forme :

(VII.24) Si $a \leqslant 0$, $f_Z(a) = 0$ et si $a > 0$, il existe deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, ℓ et m, nulles en 0, telles que : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, ℓ est croissante, $\lim_{a \to \infty} \ell(a) = 1$, tandis que $|m(a)| \leqslant (2\Pi)^{-1}$ $\forall a \geqslant 0$, et que :

$$f_Z(a) = a \rho A^{-2} \ell(a) - \mu A^{-1} e^{-a^2/2A^2} m(a).$$

(VII.25) Corollaire :

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a l'équivalence :

(VII.26) $$f_Z(a) \sim a \rho A^{-2} e^{-a^2/2A^2}$$

On a enfin le théorème suivant, obtenu à partir de (VII.9)

(VII.27) Théorème :

Sous les hypothèses du théorème (VII.22), on a la majoration :

(VII.28) $$f_Z(a) \leqslant \rho A^{-2} a e^{-a^2/2A^2} (\Phi(a\nu) + \nu^{-1}(2\Pi)^{-1/2} a^{-1} e^{-a^2\nu^2/2})$$

-:-:-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.M. BERMAN - (1961). A law of large numbers for the maximum in a stationary gaussian sequence, Ann. Math. Statist. 33, p. 93-97.

[2] S.M. BERMAN - (1964). Limit theorems for the maximum term in stationary sequences, Ann. Math. Statist. 35, p. 502-516.

[3] S.M. BERMAN - (1971). Excursions above high levels for stationary gaussian processes, Pac. Jour. Math. 36, p. 63-79.

[4] H. CRAMER - (1962). On the maximum of a normal stationary stochastic process, Bull. Amer. Math. Soc. 68, p. 512-516.

[5] H. CRAMER - (1965). A limit theorem for the maximum values of certain stochastic processes, Theory Prob. Applications, p. 126-128.

[6] X.M. FERNIQUE - (1974). Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IV, Lecture Notes in Mathematics, 480, p. 32-96.

[7] M. LOEVE - (1955). Probability Theory, Van Nostrand C.

[8] J. PICKANDS III - (1967). Maxima of stationary gaussian processes, Z. Whars. verw. Geb. 7, p. 190-223.

[9] D. SLEPIAN - (1962). The one-sided barrier problem for gaussian noise, The Bell System Tech. J. XII, p. 463-501.

[10] L.A. SHEPP and D. SLEPIAN - (1976). First-passage time for a particular stationary periodic gaussian process, J. Appl. Prob. 13, p. 27-38.

[11] V.S. TSIREL'SON - (1975). The density of the distribution of the maximum of a gaussian process, Theory Prob. Applications, p. 847-856.

Reçu en Mai 1979

Jean DIEBOLT

22, rue Tournefort
Paris Ve