



**HAL**  
open science

## La notion de nombre réel : une solution simplexe ?

Gilles Dowek

► **To cite this version:**

| Gilles Dowek. La notion de nombre réel : une solution simplexe ?. 2014. hal-04055835

**HAL Id: hal-04055835**

**<https://inria.hal.science/hal-04055835>**

Preprint submitted on 3 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La notion de nombre réel : une solution simplexe ?

Gilles Dowek

[I]l y a bien un détour par une complexité apparente [...] mais ce détour a rendu plus simple et surtout plus efficace le contrôle du système. Cela correspond à ma définition de la simplexité.

Alain Berthoz, *La Simplexité*, p. 31

## 1. De la thèse de Church-Turing au principe de densité bornée de l'information

Le développement de la théorie de la calculabilité, dans les années trente du XX<sup>e</sup> siècle, s'est accompagné de la proposition d'une thèse, *la thèse de Church-Turing*, selon laquelle toutes les fonctions calculables par une méthode effective sont calculables par une machine de Turing, ou, plus simplement, par un ordinateur ordinaire équipé d'une mémoire suffisante.

La signification de cette thèse dépend beaucoup de ce que nous appelons *une méthode effective*. Si nous entendons par là une méthode qui peut être réalisée par une machine, c'est-à-dire un système physique équipé d'un protocole de communication, nous obtenons une thèse sur le monde physique : *la forme physique de la thèse de Church-Turing*, qui signifie essentiellement que tout système physique peut, en principe, être simulé par un ordinateur.

Un des aspects surprenants de cette thèse vient du fait que les ordinateurs sont des objets discrets, alors que le monde physique nous semble, au moins à première vue, continu. La forme physique de la thèse de Church-Turing semble donc impliquer que des systèmes continus puissent être simulés par des systèmes discrets.

Cette thèse semble également impliquer que la physique puisse être exprimée en utilisant uniquement des variables discrètes. Elle nous mène donc à nous interroger sur l'origine du caractère continu de la physique tant sur le plan épistémologique : pourquoi avons nous besoin de variables continues pour exprimer la physique ? qu'ontologique : le monde physique, en soi, est-il discret ou continu ? et, surtout, comment pouvons-nous donner un sens à cette dernière question ?

Une des origines de la notion de nombre réel est une idéalisation du processus de

mesure. La mesure de la longueur d'un segment, par exemple, se définit comme le nombre de fois qu'il est possible de reporter un étalon le long de ce segment. Plus précisément, ce nombre entier est une approximation inférieure de la longueur du segment avec, comme précision, la longueur de l'étalon – ou le double de cette longueur, si jamais le dernier report est incertain. Une mesure plus précise est obtenue en divisant l'étalon en dix parties égales, par exemple, et en reportant un dixième de l'étalon le long du segment à mesurer. En divisant à nouveau ce dixième d'étalon, nous obtenons une mesure plus précise encore, ... Le résultat de chaque comparaison est donc un nombre rationnel et seule la possibilité hypothétique de la répétition à l'infini de ce processus de comparaison, mène à penser la grandeur physique mesurée, en soi, comme la limite d'une suite de nombres rationnels croissante et majorée, c'est-à-dire comme un nombre réel.

Cette conception des grandeurs physiques comme des nombres réels, mène cependant à un certain nombre de paradoxes. Par exemple, l'idée que la distance séparant les deux mâchoires d'un pied à coulisse est, en soi, un nombre réel implique que nous puissions enregistrer dans cette grandeur une suite infinie de chiffres, c'est-à-dire une quantité infinie d'information.

En faits, cela est impossible, parce qu'il est impossible, sauf selon cette idéalisation du processus de mesure, de mesurer la centième décimale de cette grandeur. Nous pouvons toutefois imaginer que cette limitation n'est pas uniquement due aux instruments de mesure qui nous donnent accès au monde physique, mais au monde physique lui-même. Cela nous mène à imaginer qu'il existe une borne absolue à la quantité d'information que nous pouvons enregistrer dans un système de taille donnée, à la densité que l'information peut avoir dans le monde. Cette idée est apparue simultanément à la fin des années soixante-dix du XX<sup>e</sup> siècle, dans les travaux de Jacob Bekenstein et dans ceux de Robin Gandy. L'une des motivations de Gandy était précisément de « démontrer » la forme physique de la thèse de Church-Turing. Bien entendu, il ne peut y avoir, en physique, de démonstrations absolues, mais Gandy a montré que certaines hypothèses, parmi lesquelles figure cette hypothèse d'une densité bornée de l'information, impliquaient la forme physique de la thèse de Church-Turing.

Pour chaque valeur  $b$  de la borne, la thèse selon laquelle il est impossible d'enregistrer une quantité d'information supérieure à  $b$  dans une sphère dont le rayon est  $1m$  est une thèse aussi réfutable que celle selon laquelle l'information, ou une particule, ne peut pas voyager plus vite que la vitesse de la lumière. Cette réfutabilité en fait une thèse sur le monde physique lui-même et non sur notre manière de le décrire. La question « le monde physique est-il discret ou continu ? » trouve ici une formulation objective, c'est-à-dire indépendante de notre description du monde.

Si nous abandonnons cette idéalisation du processus mesure, nous arrivons à l'idée que les mesures physiques ont pour résultat des nombres rationnels, et même, en prenant un étalon suffisamment petit, des nombres entiers.

## 2. Les nombres réels : une solution simplexe

Nous pouvons alors nous demander pourquoi les nombres réels ont été inventés, et

surtout utilisés en physique.

L'hypothèse que nous voudrions explorer ici est que l'invention des nombres réels est une solution simplexe au problème de l'appréhension du monde physique, c'est-à-dire une augmentation de la complexité apparente des objets qui simplifie notre manière de les appréhender. Nous illustrons cette idée avec deux exemples.

La parabole d'équation  $y = x^2 - 2$  ne coupe l'axe  $y = 0$  en aucun point d'abscisse rationnelle, puisqu'il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré soit égal à 2. Cependant, comme la fonction continue  $x \mapsto x^2 - 2$  prend une valeur négative en 1.4 et une valeur positive en 1.5, nous pouvons démontrer que, pour tout nombre rationnel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un rationnel  $x$  tel que la valeur de cette fonction en  $x$  soit inférieure en valeur absolue à  $\varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x (|x^2 - 2| \leq \varepsilon)$$

Nous pouvons même construire une suite de nombres rationnels croissante et majorée 1.4, 1.41, 1.414, ... telle que la suite des images de ces nombres par la fonction  $x \mapsto x^2 - 2$  tende vers 0. Nous avons ici deux formulations, relativement complexes l'une et l'autre, du théorème des valeurs intermédiaires.

En revanche, le simple fait de postuler une limite  $\sqrt{2}$  à cette suite nous permet de formuler ce même théorème d'une manière beaucoup plus simple : il existe un nombre dont l'image par cette fonction est 0

$$\exists x (x^2 - 2 = 0)$$

Second exemple : celui de la longueur de la diagonale du carré de côté 1. En transposant l'idée de mesure physique dans un domaine purement géométrique, nous pouvons définir, pour chaque nombre rationnel  $e$ , la  $e$ -longueur de la diagonale du carré, comme le plus grand nombre de la forme  $ke$ , où  $k$  est un nombre entier, tel qu'un segment de longueur  $ke$  soit plus court que la diagonale du carré.

Ainsi, en prenant pour  $e$  des valeurs 1, 1/10, 1/100, 1/1000, ... nous obtenons une suite de nombres 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... et nous pouvons définir la *longueur* de la diagonale du carré comme cette suite. En revanche, nous ne pouvons pas associer une longueur numérique à cette diagonale, comme nous le faisons pour le côté du carré. Seul le fait de postuler une limite  $\sqrt{2}$  à cette suite nous permet d'associer une telle longueur numérique à ce segment.

Ces deux exemples montrent à quel point l'introduction d'un objet complexe, comme le nombre  $\sqrt{2}$ , et plus généralement d'une notion complexe, comme celle de nombre réel, permet de simplifier à la fois l'expression du théorème des valeurs intermédiaires et la notion de longueur d'un segment qui, dans le cadre rationnel, est, non un simple nombre, mais une suite de nombres. Il nous est aujourd'hui très difficile d'imaginer à quoi ressembleraient les équations de Newton ou les équations de Maxwell, si nous devions ainsi les exprimer dans un cadre discret. Cela justifie la place centrale que les nombres réels ont pris en mathématiques et en physique.

Toutefois, et cela vaut peut-être pour tous les détours de complexité, il importe de ne

pas confondre les fictions qui nous aident à décrire le monde avec le monde lui-même, et c'est peut-être ce que nous faisons quand nous idéalisons le processus de mesure en postulant la possibilité d'une répétition à l'infini du processus de comparaison, c'est-à-dire que nous donnons un statut ontologique, et non plus seulement épistémologique, aux nombres réels, changement de statut qui, comme nous l'avons vu, est à l'origine de paradoxes, comme celui de la possibilité d'enregistrer dans une grandeur physique, une quantité infinie d'information.