



**HAL**  
open science

## Performances de LoRa sur les canaux de Rice et Nakagami

Jules Courjault, Baptiste Vrigneau, Olivier Berder, Manav Bhatnagar

► **To cite this version:**

Jules Courjault, Baptiste Vrigneau, Olivier Berder, Manav Bhatnagar. Performances de LoRa sur les canaux de Rice et Nakagami. GRETSI 2022 – 28ème colloque du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images, Sep 2022, Nancy, France. hal-03929522

**HAL Id: hal-03929522**

**<https://inria.hal.science/hal-03929522v1>**

Submitted on 8 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Performances de LoRa sur les canaux de Rice et Nakagami

Jules COURJAULT<sup>1</sup> Baptiste VRIGNEAU<sup>1</sup> Olivier BERDER<sup>1</sup> Manav R. BHATNAGAR<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Univ Rennes, CNRS, IRISA, 6 rue de Kerampont, 22300 LANNION

<sup>2</sup>Indian Institute of Technology, Delhi, Hauz Khaz, New Delhi 110016, Inde

jules.courjault@irisa.fr, baptiste.vrigneau@irisa.fr  
olivier.berder@irisa.fr, manav@ee.iitd.ac.in

**Résumé** – Les applications telles que les fermes connectées, les villes intelligentes ou l’industrie 4.0 utilisent de plus en plus les *Low Power Wide Area Networks* (LPWAN), permettant un bon compromis entre la portée, le débit et la consommation d’énergie. Cependant, seulement quelques études théoriques sont disponibles pour aider à la conception de ces réseaux avant un déploiement. Une nouvelle approche basée sur la fonction de Marcum est proposée ici pour estimer la probabilité d’erreur binaire de LoRa. La méthode proposée est appliquée avec un bruit gaussien pour les canaux de Nakagami et Rice.

**Abstract** – Emerging applications such as connected farms, wildness monitoring, smart cities, and Factory of the Future leverage emerging Low Power Wide Area Networks (LPWAN), allowing a good trade-off between radio range, data rate, and energy consumption. However, only few theoretical studies of these recent technologies are available to help network designers to optimize real field deployments. A new approach based on Marcum function is proposed in this paper to estimate the performance in terms of Bit Error Rate of LoRa. The method is proposed for Ricean and Nakagami fading.

## 1 Introduction

Depuis plusieurs années, le nombre d’objets connectés augmente de façon exponentielle pour différentes applications telles que les fermes connectées, l’industrie 4.0, la santé... De nombreuses solutions sont apparues pour répondre aux besoins de transmissions sans fils à faible coût énergétique, appelées *Low Power Wide Area Networks* (LPWAN). La technologie LoRa [1] est l’une des ces solutions, elle est portée par Semtech et l’alliance LoRa. Cette technologie permet d’avoir un débit allant de 0,3 kbps à 50 kbps dans les bandes libres 433 MHz, 868 MHz ou 915 MHz en utilisant le principe de l’étalement linéaire de fréquence. Bien que le brevet décrive précisément la technique utilisée, l’étude théorique des performances n’est pas suffisante, en particulier lorsqu’un canal à évanouissement dégrade la communication. Lors de précédents travaux [2], une approximation de la Probabilité d’Erreur Symbole (PES) a été trouvée pour une transmission dans un canal de Rayleigh, les travaux présentés ici en sont une généralisation, avec pour principales contributions : l’approximation précise et asymptotique de la PES pour les canaux de Nakagami et de Rice, puis une validation des expressions proposées par simulations. Le reste de l’article s’organise de la façon suivante : la section 2 résume l’état de l’art sur l’approximation des performances LoRa. Les approximations proposées dans cet article sont présentées dans la section 3, suivies par une validation des résultats par simulations en section 4. Enfin, la section 5 présente les conclusions et perspectives de travaux.

## 2 État de l’art

Dans un but de concision, seules les équations nécessaires sont rappelées dans cette section, le lecteur se reportera aux différentes références citées pour plus de détails. Le récepteur est basé sur une FFT puis un maximum.

### 2.1 Problèmes liés à l’expression théorique

Dans [3, 4] on retrouve l’expression théorique exacte de la PES pour un canal à Bruit Blanc Additif Gaussien (BBAG). Il y est aussi expliqué que cette expression ne peut être évaluée numériquement de façon exacte pour une valeur de SF supérieure à 6, à cause des coefficients binomiaux. Dans [5], on peut aussi retrouver les expressions exactes pour les canaux de Nakagami, Rice et Rayleigh. Cependant, même si les auteurs ont réussi à évaluer ces expressions pour certaines valeurs du Rapport Signal sur Bruit (RSB), des tests nous ont montré qu’on ne pouvait obtenir une évaluation fiable pour d’autres valeurs du RSB. Il est donc nécessaire d’utiliser une approximation de ces expressions, afin de pouvoir évaluer de façon précise les performances d’une communication LoRa dans différentes situations.

### 2.2 Approximations existantes

Dans la littérature on retrouve différentes approximations pour le canal BBAG, les plus précises étant présentées dans [4], et dans nos travaux précédents, dont on

rappels les résultats [3] :

$$\text{PES}(\gamma) = 1 + \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k e^{-\frac{N \cdot \gamma (k-1)}{k}} Q_1 \left( \sqrt{\frac{2N}{k}} \gamma, \sqrt{kz_c} \right), \quad (1)$$

avec  $Q_1$  la fonction de Marcum de premier ordre [6] :

$$Q_1(a, b) \triangleq \int_b^{\infty} x e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_0(ax) dx. \quad (2)$$

Le seuil  $z_c$  s'exprime de la façon suivante :

$$z_c(\epsilon) = -2 \log(\alpha_1 \epsilon + \alpha_0), \quad (3)$$

$$\alpha_0 = (3e^{-z_c(1)/2} - e^{-z_c(3)/2})/2, \quad (4)$$

$$\alpha_1 = (e^{-z_c(3)/2} - e^{-z_c(1)/2})/2. \quad (5)$$

L'ordre  $\epsilon$  du développement donne déjà de bons résultats pour 1. On trouve aussi des expressions pour le canal de Rayleigh. Les auteurs de [4] proposent 2 approximations, basées sur la fonction  $Q$ , l'une complexe et l'autre plus simple mais moins précise. Dans [2], on retrouve aussi deux approximations, basées sur des exponentielles, l'une valable à haut RSB, l'autre pour tout RSB.

## 3 Cas d'un canal à évanouissement

### 3.1 Formulation du problème

Dans la suite des travaux nous considérons le modèle de transmission suivant :  $r(t) = hs(t) + w(t)$ , avec  $h$  le coefficient d'atténuation du canal,  $s(t)$  le signal LoRa transmis, et  $w(t)$  un BBAG. La variable  $h$  est une variable aléatoire complexe, indépendante et identiquement distribuée et est supposée constante pendant la transmission d'un symbole LoRa. Après démodulation on obtient le signal suivant, en utilisant la linéarité de la transformée de Fourier :  $R_p[k] = h\sqrt{N}\delta(k+l-N) + W_p[k]$ . Ainsi la probabilité  $\bar{\mathbb{P}}_l$  sachant  $h$  que le symbole soit décodé correctement est :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_l &= \Pr [\forall k \neq N-l : |R_p[k]|^2 < |R_p[N-l]|^2] \\ &= F_{\chi_2^2} \left( \frac{|h\sqrt{N} + W_p[N-l]|^2}{\sigma_n^2} \right)^{N-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Comme décrit dans [2] on obtient :

$$\bar{\mathbb{P}}_l = \left( 1 - \exp \left( -\frac{|h\sqrt{N} + W_p[N-l]|^2}{\sigma_n^2} \right) \right)^{N-1}. \quad (7)$$

Notons  $Z$  la variable  $Z \triangleq \gamma \cdot |h\sqrt{N} + W_p[N-l]|^2$ , alors la variable aléatoire  $Z$  suit une loi de chi-2 non-centrée avec 2 degrés de liberté et le paramètre de décentralisation  $\lambda = \gamma \cdot 2|h\sqrt{N}|^2$ . La PES avec une atténuation dans le canal peut s'exprimer à partir de celle d'un canal BBAG avec l'équation :  $\text{PES}_h(\gamma) = \text{PES}(|h|^2\gamma)$ . On doit alors définir

la distribution de  $h$  et calculer la moyenne de la façon suivante :

$$\text{PES}_h(\gamma) = \int_0^{+\infty} \text{PES}(x\gamma) f_{|h|^2}(x) dx, \quad (8)$$

avec  $f_{|h|^2}(x)$ , la fonction de densité de probabilité (ddp) du module carré de  $h$ . Les résultats obtenus dans [3] peuvent donc être réutilisés, il faut maintenant réussir à résoudre l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \text{PES}_h(\gamma) &= 1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\epsilon+1} C_N^k (-1)^k \times \\ &\int_0^{+\infty} e^{-\frac{N\gamma x(k-1)}{k}} Q_1 \left( \sqrt{\frac{2N}{k}} \gamma x, \sqrt{kz_c} \right) f_{|h|^2}(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

### 3.2 Application au canal de Nakagami

Le canal de Nakagami est défini par le paramètre  $m$ , correspondant à la diversité, c'est une valeur réelle supérieure à 0,5. La ddp de l'atténuation est donné par [7] :  $f_{|h|^2}(x) = \frac{m^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-mx}$ , avec  $\Gamma$  la fonction Gamma. En insérant l'expression de  $f_{|h|^2}(x)$  dans (9), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \text{PES}_{\text{Naka}}(\gamma) &= 1 + \frac{m^m}{\Gamma(m)} \sum_{k=1}^{\epsilon+1} C_N^k (-1)^k \times \\ &\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{N\gamma(k-1)}{k} + m\right)x} Q_1 \left( \sqrt{\frac{2N}{k}} x\gamma, \sqrt{kz_c} \right) x^{m-1} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Cette forme d'intégrale a été étudiée dans [8] avec la notation généralisée suivante :

$$\mathcal{F}(k, l, a, b, p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} Q_1(a\sqrt{x}, b) x^{k-1} dx. \quad (11)$$

Ainsi, en appliquant ce résultat à notre problème, i.e. quand  $k$  représente le paramètre du canal et  $l$  est égal à 1, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(m, 1, a, b, p) &= \frac{\Gamma(m)}{p^m} + \frac{2^m \Gamma(m) e^{-\frac{b^2}{2}}}{\tilde{p}} \times \\ &\left( {}_1F_1 \left( m; 2; \frac{a^2 b^2}{2\tilde{p}} \right) - \Phi_2 \left( 1, m, 1; \frac{b^2}{2}, \frac{a^2 b^2}{2\tilde{p}} \right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

avec  ${}_1F_1$  la fonction hypergéométrique confluyente,  $\Phi_2$  la seconde fonction de Humbert et les paramètres suivants :

$$a = \sqrt{\frac{2N}{k}} \gamma, b = \sqrt{kz_c}, p = N\gamma \frac{k-1}{k} + m, \tilde{p} = a^2 + 2p. \quad (13)$$

La combinaison de ce résultat avec (10) donne :

$$\begin{aligned} \text{PES}_{\text{Naka}}(\gamma) &= 1 + m^m \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k \frac{1}{p^m} + \frac{2^m e^{-\frac{b^2}{2}}}{\tilde{p}^m} \times \\ &\left( {}_1F_1 \left( m; 2; \frac{a^2 b^2}{2\tilde{p}} \right) - \Phi_2 \left( 1, m, 1; \frac{b^2}{2}, \frac{a^2 b^2}{2\tilde{p}} \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{PES}_{\text{Naka}}(\bar{\gamma}) = 1 + \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k \left( \left( \frac{\bar{\gamma}^k - 1}{\bar{\gamma}} + 1 \right)^{-m} + \frac{e^{-\frac{z_c k}{2}}}{(\bar{\gamma} + 1)^m} \left( {}_1F_1 \left( m; 2; \frac{z_c}{2} \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + 1} \right) - \Phi_2 \left( 1, m; 1; \frac{z_c k}{2}, \frac{z_c}{2} \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + 1} \right) \right) \right) \quad (15)$$

Enfin en remplaçant les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p$ , et  $\tilde{p}$  puis en simplifiant on obtient l'expression (15). En considérant un haut RSB,  $\bar{\gamma}/(\bar{\gamma} + 1)$  tend vers 1 et en ré-organisant la somme, il vient l'approximation :

$$\text{PES}_{\text{Naka}}(\bar{\gamma}) \simeq \frac{\mathcal{A}_{\text{Naka}}}{\bar{\gamma}^m}, \quad (16)$$

où  $\bar{\gamma} = N\gamma/m$  et  $\mathcal{A}_{\text{Naka}}$  est défini par (17).

### 3.3 Application au canal de Rice

Le canal de Rice considère une transmission en ligne de vue avec des multi-trajets, il est défini par le paramètre  $K$  qui représente la répartition de la puissance entre ces deux composantes [7]. La ddp de  $|h/\sigma|^2$  suit une loi de chi-2 non-centrée à 2 degrés de liberté, la ddp de  $|h|^2$  s'exprime alors de la façon suivante :

$$f_{|h|^2}(x) = (1 + K)e^{-K} e^{-(1+K)x} I_0 \left( 2\sqrt{K(1+K)x} \right),$$

avec  $I_0(\cdot)$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et d'ordre 0. La PES moyenne pour un canal de Rice s'exprime alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{PES}_{\text{Rice}}(\gamma) = 1 + \frac{(1+K)e^{-K}}{N} \sum_{k=1}^{\epsilon+1} C_N^k (-1)^k \times \\ \int_0^\infty e^{-\left(\frac{2N\gamma(k-1)}{k} + K+1\right)x} \times \\ Q_1 \left( \sqrt{\frac{2N}{k}} x\gamma, \sqrt{kz_c} \right) I_0(2\sqrt{K(K+1)x}) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Des résultats sur les intégrales impliquant la fonction de Marcum et les fonctions de Bessel modifiées apparaissent dans [9]. Les auteurs définissent la fonction  $\text{In}$  de la manière suivante [9, eq.(1)] :

$$\begin{aligned} \text{In}(a, b, c, p, \mu_1, \mu_2) = \\ \int_0^{+\infty} e^{-pt} Q_{\mu_1}(a\sqrt{t}, b)t^{\frac{\mu_2-1}{2}} I_{\mu_2-1}(c\sqrt{t}) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

On peut ainsi exprimer la  $\text{PES}_{\text{Rice}}$  :

$$\text{PES}_{\text{Rice}}(\gamma) = 1 + \frac{(1+K)e^{-K}}{N} \times \sum_{k=1}^{\epsilon+1} C_N^k (-1)^k \text{In}(a, b, c, p, 1, 1), \quad (20)$$

avec les paramètres suivants :

$$a = \sqrt{\frac{2N}{k}}\gamma, \quad b = \sqrt{kz_c}, \quad p = N\gamma \frac{k-1}{k} + (1 + \kappa), \quad (21)$$

$$c = 2\sqrt{\kappa(\kappa+1)}. \quad (22)$$

Le cas particulier  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  permet de faire des simplifications, et grâce aux résultats [9, eq.(22)] on obtient :

$$\begin{aligned} \text{In}(a, b, c, p, 1, 1) = \\ \frac{1}{p} e^{\frac{c^2}{4p}} Q_1 \left( \frac{ac}{\sqrt{2p(2p+a^2)}}, b\sqrt{\frac{2p}{2p+a^2}} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Ainsi en remplaçant  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $p$  par leurs expressions littérales et en combinant les différents résultats exposés on obtient l'expression (24). Comme pour le canal de Nakagami, une approximation plus simple à calculer à haut RSB peut être trouvée. À partir de (24) et en appliquant  $\bar{\gamma} \gg 1$ , il vient en séparant le terme  $k = 1$  :

$$\begin{aligned} \text{PES}_{\text{Rice}}(\bar{\gamma}) \simeq 1 - Q_1 \left( \sqrt{2K}, \sqrt{\frac{z_c}{\bar{\gamma}}} \right) \\ + \sum_{k=2}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k \left( \frac{\bar{\gamma}^k - 1}{\bar{\gamma}} \right)^{-1} e^{-K} Q_1 \left( 0, \sqrt{z_c(k-1)} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

Or  $Q_1(0, b) = e^{-\frac{b^2}{2}} \simeq 1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \frac{b^2}{2}$  et  $Q_1(a, b) \simeq 1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \frac{b^2}{2}$  si  $b$  est petit. On obtient l'approximation à haut RSB suivante :

$$\begin{aligned} \text{PES}_{\text{Rice}}(\bar{\gamma}) \simeq e^{-K} e^{-\frac{z_c}{2\bar{\gamma}}} + \\ \sum_{k=2}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k \left( \frac{\bar{\gamma}^k - 1}{\bar{\gamma}} \right)^{-1} e^{-K} e^{-\frac{z_c}{2}(k-1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

## 4 Résultats de simulations

Cette section compare les résultats théoriques à des simulations de Monte-Carlo pour le canal de Nakagami dans la première sous-section et au canal de Rice dans la seconde sous-section. Les comparaisons permettent de valider les expressions théoriques des approximations précises et à haut RSB pour les 2 canaux étudiés.

**Canal de Nakagami** La problématique lors du calcul numérique de (15) réside dans le calcul de la fonction hypergéométrique confluyente ainsi que la fonction de Humbert. Cependant, des bibliothèques sont disponibles pour le calcul de ces fonctions dans les langages de programmations classiques. La figure 1 compare les approximations (15) et (16) avec des simulations de Monte-Carlo pour différentes valeurs de  $m$  (0.5, 0.6, 0.75, 1, 1.5, 3). Sur cette figure on constate que les approximations suivent bien les différentes simulations. L'approximation à haut RSB permet d'avoir une approximation précise de la diversité  $m$  du canal.

$$\mathcal{A}_{\text{Naka}} = \sum_{k=2}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k \binom{k}{k-1}^m + {}_1F_1\left(m; 2; \frac{z_c}{2}\right) \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k e^{-\frac{z_c}{2}k} - \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k e^{-\frac{z_c}{2}k} \Phi_2\left(1, m; 1; \frac{z_c k}{2}, \frac{z_c}{2}\right) \quad (17)$$

$$\text{PES}_{\text{Rice}}(\bar{\gamma}) = 1 + \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k \left(\bar{\gamma} \frac{k-1}{k} + 1\right)^{-1} e^{-K \frac{\bar{\gamma} \frac{k-1}{k} + 1}{\bar{\gamma} \frac{k-1}{k} + 1}} Q_1\left(\sqrt{\frac{2K}{k} \frac{\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma} \frac{k-1}{k} + 1)(\bar{\gamma} + 1)}}, \sqrt{k z_c \frac{\bar{\gamma} \frac{k-1}{k} + 1}{\bar{\gamma} + 1}}\right) \quad (24)$$

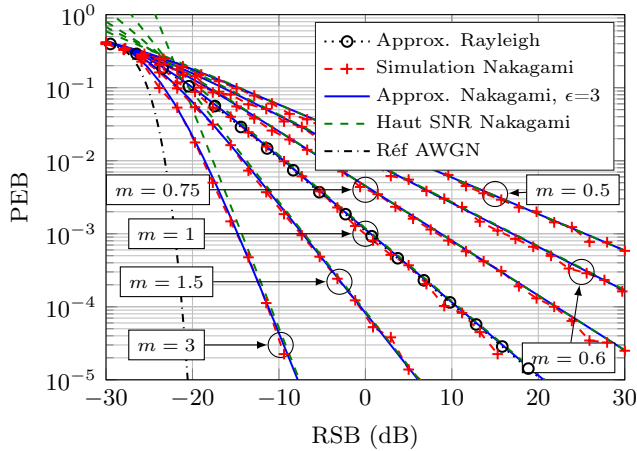


FIGURE 1 – Comparaison de (15) avec les simulations pour  $SF = 12$  et un canal de Nakagami.

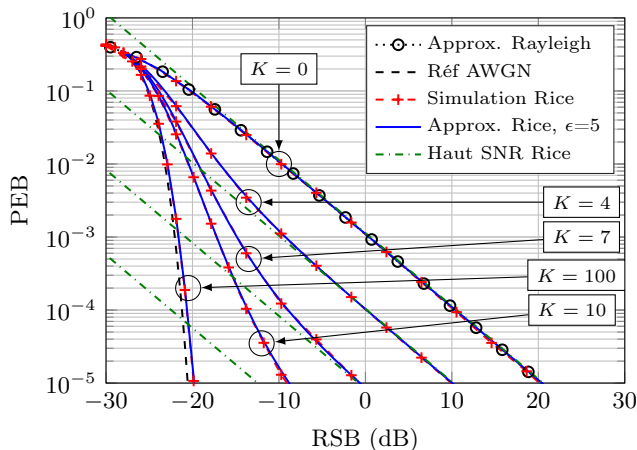


FIGURE 2 – Comparaison de (24) avec les simulations pour  $SF = 12$  et un canal de Rice.

**Canal de Rice** La figure 2 compare les approximations (24) et (26) avec des simulations de Monte-Carlo pour différentes valeurs de  $K$  (0,4,7,10,100) pour  $SF = 12$ . Comme on peut le constater, l'approximation (26) se confond avec les différentes simulations. On remarquera que  $K = 0$  correspond à un canal de Rayleigh et lorsque  $K \rightarrow \infty$  le canal tend vers un canal BBAG. Il en résulte que les cas BBAG et Rayleigh sont, respectivement, des bornes inférieure et supérieure. On observe alors 2 comportements de la PES : une tendance BBAG pour les faibles RSB et une tendance Rayleigh pour les hauts RSB. Ceci explique alors la diversité de 1 et le fait que l'approximation à faible RSB soit moins précise quand  $K$  augmente.

## 5 Conclusion

Bien que le standard LoRa soit de plus en plus connu, l'étude des performances théoriques n'est pas aisée dans un environnement de propagation réel. Quelques résultats sont disponibles dans l'état de l'art mais les résultats sont difficilement calculables numériquement. Dans ce papier nous avons introduit de nouvelles approximations de la probabilité d'erreur binaire pour les canaux de Nakagami et Rice. Ces expressions ont ensuite été validées par simulation. Ces expressions peuvent être, par exemple, associées à des simulateurs pour aider les architectes de réseaux avant un déploiement. L'une des perspectives liée à ses travaux est l'étude des performances LoRa en présence de bruits non gaussiens (lois  $\alpha$ -stable, gaussienne généralisée ou de Middleton) pour ensuite inclure une atténuation.

## Références

- [1] O. B. A. Seller et N. Sornin *Low power long range transmitter*, US Patent App. 14/170,170, 2014
- [2] J. Courjault, B. Vrigneau et O. Berder *Fast performance evaluation of LoRa communications over Rayleigh fading channels* IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC), 2019, Marrakech, Morocco
- [3] J. Courjault, B. Vrigneau, M. Gautier et O. Berder *Accurate LoRa Performance evaluation using Marcum Q-function*, IEEE Global communications Conference (Globecom), 2019, Waikoloa, HI, USA
- [4] T. Elshabrawy et J. Robert. *Closed form approximation of LoRa modulation BER performance*. IEEE Communications Letters, vol.22, no. 9, pp. 1778-1781, 2018.
- [5] C. F. Dias, E. Rodrigues De Lima, et G. Fraidenraich *Bit Error Rate Closed-Form Expressions for LoRa Systems under Nakagami and Rice Fading Channels* Sensors, vol. 19, no. 20, pp.4412,
- [6] J. I. Marcum *Table of Q functions* Rand Corporation, 1950
- [7] M. D. Yacoub *The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution* IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 49, no. 1, pp. 68-81, 2007
- [8] P. C. Sofotasios, S. Muhaidat, G. K. Karagiannidis et B. S. Sharif *Solutions to Integrals Involving the Marcum Q-Function and Applications* IEEE Signal Processing Letters, vol. 22, no. 10, pp. 1752-1756, 2015
- [9] N. Y. Ermolova and O. Tirkkonen *Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 11, pp. 2938-2944, 2014