



**HAL**  
open science

# Codage de source zéro-erreur pour un réseau de Gray-Wyner lorsque l'information adjacente peut être présente

Nicolas Charpenay, Maël Le Treust, Aline Roumy

► **To cite this version:**

Nicolas Charpenay, Maël Le Treust, Aline Roumy. Codage de source zéro-erreur pour un réseau de Gray-Wyner lorsque l'information adjacente peut être présente. XXVIIIème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images (GRETSI'22), Sep 2022, Nancy, France. pp.1-4. hal-03866341

**HAL Id: hal-03866341**

**<https://hal.science/hal-03866341>**

Submitted on 22 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Codage de source zéro-erreur pour un réseau de Gray-Wyner lorsque l'information adjacente peut être présente

Nicolas CHARPENAY<sup>1</sup>, Maël LE TREUST<sup>2</sup>, Aline ROUMY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>IRISA, Rennes, France

<sup>2</sup>ETIS UMR 8051, CY Université, ENSEA, CNRS, Cergy, France

<sup>3</sup>INRIA, Rennes, France

nicolas.charpenay@irisa.fr, mael.le-treust@ensea.fr, aline.roumy@inria.fr

**Résumé** – Nous présentons un problème de codage de source zéro-erreur, dans lequel un encodeur transmet de l'information à plusieurs décodeurs avec différentes informations adjacentes (abrégé en "SI" pour *side-information*) et différentes variables aléatoires demandées. Nous donnons une borne intérieure et extérieure pour la région des débits réalisables. De plus, nous explicitons des cas particuliers (par ex. SI constante), où ces bornes coïncident. La borne intérieure repose sur les classes de type, avec des lemmes de recouvrement et d'empilement dans ces classes ; la propriété zéro-erreur est garantie par un dispositif de correction.

**Abstract** – We introduce a zero-error network source coding problem, in which an encoder transmits information to multiple decoders with different side-information (SI) and different desired source random variables. We give an inner and an outer bound for the achievable rate region. These bounds coincide in particular cases (e.g. constant SI). The inner bound relies on type classes, with covering and packing in type classes, and coset partitions; the zero-error property is ensured by a correcting argument.

## 1 Introduction

Considérons le scénario de la Figure 1. Les symboles de source  $(X^n, Y^n)$  et SI  $(U^n, V^n)$  sont tirés de manière i.i.d. et sont connus à l'encodeur. Celui-ci transmet l'information à l'aide de codes à longueur variable sur quatre canaux parfaits aux débits respectifs  $R_0, R_{x_1}, R_{x_2}, R_y$ . Les décodeurs  $x_1$  et  $x_2$  veulent reconstruire la suite  $X^n$ , et le décodeur  $y$  veut  $Y^n$ . En outre, le décodeur  $x_1$  (resp.  $y$ ) a accès à la SI  $U^n$  (resp.  $V^n$ ). Nous recherchons les débits  $(R_0, R_{x_1}, R_{x_2}, R_y)$  réalisables en zéro-erreur, i.e. avec probabilité d'erreur au décodage nulle.

Ce scénario est lié à plusieurs classes de problèmes de codage de source avec SI. La première est celle où tous les encodeurs et décodeurs ont accès à la même SI. Dans de tels problèmes, les contraintes zéro-erreur et  $\epsilon$ -erreur (i.e. compression sans perte avec probabilité d'erreur qui tend vers 0) mènent aux mêmes débits réalisables, grâce au codage conditionnel.

Une autre classe est celle des problèmes avec SI aux décodeurs, mais pas à l'encodeur. Dans ces problèmes, les contraintes zéro-erreur et  $\epsilon$ -erreur ne donnent pas les mêmes débits réalisables, en général. La contrainte zéro-erreur amène à utiliser des concepts issus de la théorie des graphes : Witsenhausen a étudié dans [1] le modèle de Slepian et Wolf avec contrainte zéro-erreur, en utilisant le nombre chromatique du graphe caractéristique de la distribution de source.

Une troisième classe est celle où l'encodeur a accès à toutes les SI, et les décodeurs ont différentes SI. La caractérisation des débits réalisables peut alors être faite avec un lemme d'empilement et le dispositif de correction suivant : en cas d'erreur au décodage, toutes les suites sont transmises. Cela permet l'extension de résultats  $\epsilon$ -erreur au cas zéro-erreur avec les mêmes débits, par exemple, dans un cas particulier du problème de Sgarro dans [2] où les SI sont directement transmises aux décodeurs. Dans [3] nous avons étudié un problème de cette classe, et nous avons caractérisé la région des débits réalisables.

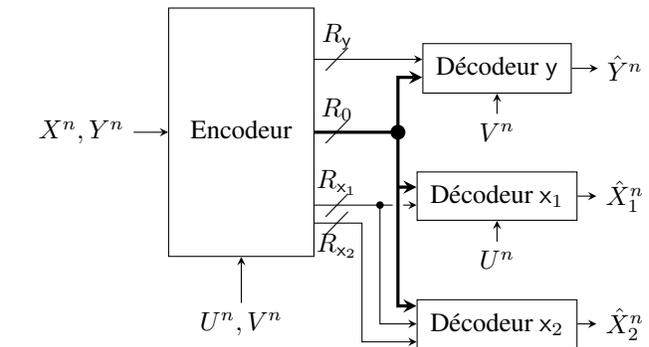


FIGURE 1 – Codage de source zéro-erreur pour un réseau de Gray-Wyner quand l'information adjacente peut être présente.

Un lemme de recouvrement peut y être utilisé pour caractériser les débits réalisables : par exemple le problème  $\epsilon$ -erreur de Gray et Wyner (GW) [4]. Dans [5], Timo et al. ont étudié une configuration GW avec SI aux décodeurs et ont donné une borne intérieure sur la région des

débits réalisables. Dans [6], Benammar et Zaidi ont considéré une configuration GW avec pertes, avec SI seulement aux décodeurs, et avec une hypothèse sur les variables à reconstruire.

Toutefois, les outils proposés dans la littérature ne sont pas adaptés à cette configuration zéro-erreur. En effet, les preuves de [5] et notre travail précédent [3] sont concurrents : les fonctions d'encodage pour les canaux  $R_{x_1}, R_y, R_0$  sont contraintes par le schéma de [5]; tandis que celles pour  $R_{x_1}, R_{x_2}$  sont contraintes par le schéma de [3]. La fonction d'encodage pour le canal  $R_{x_1}$  devrait donc remplir deux rôles différents.

Dans ce papier, nous donnons une borne intérieure et extérieure sur l'ensemble des tuples de débits réalisables en zéro-erreur. L'algorithme d'encodage utilise les partitions en cosets et une partition en classes aléatoire. Les algorithmes de décodage sont basés sur les  $V$ -enveloppes des suites de SI, et la propriété zéro-erreur est assurée par un dispositif de correction.

Le cardinal d'un ensemble fini  $\mathcal{S}$  est noté  $|\mathcal{S}|$ , son complémentaire est  $\mathcal{S}^c$ . L'ensemble des lois de probabilité sur  $\mathcal{S}$  est noté  $\Delta(\mathcal{S})$ . La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$  est notée  $P_X \in \Delta(\mathcal{X})$ . On note les suites  $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ . Quand les entropies sont calculées avec d'autres lois que  $P_X$ , celles-ci sont indiquées en indice (par ex.  $H_Q(X)$ ). La loi uniforme est notée Unif. La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$  est notée  $P_{X|Y}$ , et la loi jointe  $P_{X,Y}$ . On note  $\{0, 1\}^*$  l'ensemble des mots binaires. Les logarithmes sont en base 2.

## 2 Présentation et résultats principaux

La configuration de la Figure 1 est décrite par :

- Quatre variables aléatoires  $(U, V, X, Y)$ . On note  $n$  la taille de bloc du schéma de codage, et  $(U^n, V^n, X^n, Y^n)$  la suite des copies i.i.d. de  $(U, V, X, Y)$ .
- Un encodeur qui observe  $(U^n, V^n, X^n, Y^n)$ . Il transmet via le canal  $f_0$  à débit  $R_0$  à tous les décodeurs, via le canal  $f_{x_1}$  à débit  $R_{x_1}$  aux décodeurs  $x_1$  and  $x_2$ , et via le canal  $f_{x_2}$  (resp.  $f_y$ ) à débit  $R_{x_2}$  (resp.  $R_y$ ) au décodeur  $x_2$  (resp.  $y$ ).
- Les décodeurs  $x_2$  et  $x_1$  (resp.  $y$ ) veulent retrouver  $X^n$  (resp.  $Y^n$ ), le décodeur  $x_1$  (resp.  $y$ ) observe la SI  $U^n$  (resp.  $V^n$ ).

**Définition 2.1** Pour tout  $n$ , et  $(R_0^{(n)}, R_{x_1}^{(n)}, R_{x_2}^{(n)}, R_y^{(n)}) \in \mathbb{R}_+^4$ , un  $(n, R_0^{(n)}, R_{x_1}^{(n)}, R_{x_2}^{(n)}, R_y^{(n)})$  code de source zéro-erreur est composé de fonctions d'encodage  $(f_0, f_{x_1}, f_{x_2}, f_y)$  et de fonctions de décodage  $(g_{x_1}, g_{x_2}, g_y)$  définies par :

$$\begin{aligned} f_0, f_{x_1}, f_{x_2}, f_y &: \mathcal{U}^n \times \mathcal{V}^n \times \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \rightarrow \{0, 1\}^*, \\ g_{x_1} &: (\{0, 1\}^*)^2 \times \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad g_{x_2} : (\{0, 1\}^*)^3 \rightarrow \mathcal{X}^n, \\ g_y &: (\{0, 1\}^*)^2 \times \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{Y}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

telles que  $R_i^{(n)} = \frac{1}{n} \mathbb{E}[l(f_i(S^n))]$  pour tout  $i \in \{0, x_1, x_2, y\}$ , où  $l(\cdot)$  est la longueur d'un mot, et  $S^n = (U^n, V^n, X^n, Y^n)$ . Ces fonctions doivent avoir la propriété zéro-erreur :  $\hat{X}_1^n = \hat{X}_2^n = X^n$  et  $\hat{Y}^n = Y^n$  avec probabilité 1, où

$$\hat{X}_1^n \doteq g_{x_1}(f_0(S^n), f_{x_1}(S^n), U^n), \quad (2)$$

$$\hat{X}_2^n \doteq g_{x_2}(f_0(S^n), f_{x_1}(S^n), f_{x_2}(S^n)), \quad (3)$$

$$\hat{Y}^n \doteq g_y(f_0(S^n), f_y(S^n), V^n). \quad (4)$$

**Définition 2.2** Un tuple de débits  $(R_0, R_{x_1}, R_{x_2}, R_y) \in \mathbb{R}_+^4$  est réalisable s'il existe une suite de  $(n, R_0^{(n)}, R_{x_1}^{(n)}, R_{x_2}^{(n)}, R_y^{(n)})$  codes de source zéro-erreur tels que  $R_i^{(n)} \rightarrow R_i \quad \forall i$ .

**Théorème 2.3 (Borne intérieure)** Les tuples  $(R_0, R_{x_1}, R_{x_2}, R_y)$  satisfaisant les inégalités suivantes, pour un certain ensemble fini  $\mathcal{W}$  et une certaine loi  $P_{U,V,W,X,Y} = P_{U,V,X,Y} P_{W|U,V,X,Y}$  sont réalisables :

$$R_0 \geq I(U, V, X, Y; W) - \min(I(U; W), I(V; W)), \quad (5)$$

$$R_{x_1} \geq H(X|U, W), \quad (6)$$

$$R_{x_2} \geq I(X; U|W) + \min(I(U; W), I(V; W)), \quad (7)$$

$$R_y \geq H(Y|V, W). \quad (8)$$

La preuve du Théorème 2.3 est exposée en Sec. 4.

**Théorème 2.4 (Borne extérieure)** Les tuples  $(R_0, R_{x_1}, R_{x_2}, R_y)$  qui sont réalisables doivent satisfaire pour un certain ensemble fini  $\mathcal{W}$  et loi  $P_{U,V,W,X,Y} = P_{U,V,X,Y} P_{W|U,V,X,Y}$  les inégalités

$$R_0 \geq I(X, Y; W|U, V), \quad (9)$$

$$R_{x_1} \geq H(X|U, W), \quad (10)$$

$$R_y \geq H(Y|V, W), \quad (11)$$

$$R_0 + R_{x_1} + R_{x_2} \geq H(X). \quad (12)$$

La preuve du Théorème 2.4 suit les arguments de la réciproque de [4, Théorème 4].

## 3 Comparaison aux résultats précédents

Ici, nous décrivons la région réalisable dans des cas où notre borne intérieure est optimale. D'abord, considérons la variante zéro-erreur du problème GW [4] en prenant  $U$  et  $V$  constantes, sans le décodeur  $x_2$ . Notre borne intérieure s'écrit :

$$R_0 \geq I(X, Y; W), \quad R_{x_1} \geq H(X|W), \quad (13)$$

$$R_y \geq H(Y|W), \quad R_{x_2} \geq 0, \quad (14)$$

D'après la réciproque de [4, Theorem 4], la borne est optimale.

Une autre configuration intéressante est celle où  $Y$  et  $V$  sont constantes, ce qui donne le problème de [3]. On a dans ce cas

$$\begin{array}{ll} \text{Borne intérieure :} & \text{Borne extérieure :} \\ R_0 \geq I(U, X; W), & R_0 + R_{x_1} \geq H(X|U), \end{array} \quad (15)$$

$$R_{x_1} \geq H(X|U, W), \quad R_0 + R_{x_1} + R_{x_2} \geq H(X). \quad (16)$$

$$R_{x_2} \geq I(U; X|W), \quad (17)$$

$$R_y \geq 0, \quad (18)$$

La borne extérieure est obtenue en sommant (9), (10); et en supprimant (11). En montrant que les points extrêmes du polyèdre décrit par la borne extérieure sont atteignables, on conclura par *time-sharing* que ces bornes coïncident. Ces points sont  $(R_0 + R_{x_1}, R_{x_2}) = (H(X|U), I(U; X))$  et  $(H(X), 0)$ ; atteints avec la borne intérieure en prenant  $W$  constante et  $W = X$ .

On obtient le problème de Timo et al. [5] en enlevant les SI à l'encodeur, et le décodeur  $x_2$ . Alors on a la chaîne de Markov  $(U, V) \rightarrow (X, Y) \rightarrow W$ , et la même borne intérieure :

$$R_0 \geq \max(I(X, Y; W|U), I(X, Y; W|V)), \quad (19)$$

$$R_{x_1} \geq H(X|U, W), \quad (20)$$

$$R_{x_2} \geq 0, \quad (21)$$

$$R_y \geq H(Y|V, W). \quad (22)$$

## 4 Preuve du Théorème 2.3

### 4.1 Préliminaires

Dans cette section,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des ensembles finis. Le simplexe  $n$ -discrétisé  $\Delta_n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subset \Delta(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$  est l'ensemble des types (i.e. distributions empiriques) réalisés par des suites de longueur  $n$ . Pour un type  $Q_{A,B} \in \Delta_n(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , on note les types marginaux  $Q_A$  et  $Q_B$ ; et les types conditionnels  $Q_{A|B}$ ,  $Q_{B|A}$ .

**Définition 4.1 (Classe de type,  $V$ -enveloppe)** Pour tout type  $Q_{A,B} \in \Delta_n(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , la classe de type associée est :

$$\mathcal{T}_{Q_{A,B}} = \{(a^n, b^n) \in \mathcal{A}^n \times \mathcal{B}^n \mid (a^n, b^n) \text{ a pour type } Q_{A,B}\}.$$

Pour toute loi conditionnelle  $V_{A|B} \in \Delta(\mathcal{A})^{|\mathcal{B}|}$ , et type  $Q_B \in \Delta_n(\mathcal{B})$ , la  $V_{A|B}$ -enveloppe d'une suite  $b^n \in \mathcal{T}_{Q_B}$  est

$$\mathcal{T}_{V_{A|B}}(b^n) = \{a^n \in \mathcal{A}^n \mid (a^n, b^n) \in \mathcal{T}_{V_{A|B}Q_B}\}. \quad (23)$$

### 4.2 Recouvrement, partition en cosets

Le lemme suivant est différent du lemme d'empilement de [7, Lemme 10.1], car ce dernier montre l'existence d'une famille de "bons" mots de code, au lieu de les tirer aléatoirement suivant une loi donnée. Les preuves des Lemmes 1 et 2 sont une conséquence de [7, Lemma 2.6].

**Lemme 1 (Recouvrement, empilement)** Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Q_{A,B} \in \Delta_k(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ,  $P_{\bar{A}} \in \Delta(\mathcal{A})$ ,  $R > 0$ . Pour tout  $n \in k\mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{C}^{(n)} \doteq (\bar{A}_{[1]}^n, \dots, \bar{A}_{[2^{nR}]}^n)$  une famille de suites aléatoires, de loi satisfaisant la condition marginale  $\bar{A}_{[i]}^n \sim P_{\bar{A}}^{\otimes n}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 2^{nR}\}$ . Soit  $R_c \doteq I_Q(A; B) + D(Q_A \| P_{\bar{A}})$ , on a pour tout  $b^n \in \mathcal{T}_{Q_B}$  :

$$\Pr(\exists a^n \in \mathcal{C}^{(n)}, (a^n, b^n) \in \mathcal{T}_{Q_{A,B}}) \quad (24)$$

$$\begin{cases} \leq 2^{-n(R_c - R) + o(n)} & \text{si } R < R_c \\ = 1 - \exp[-2^{n(R - R_c) + o(n)}] & \text{si } R > R_c \text{ et si les suites} \\ & \text{de } \mathcal{C}^{(n)} \text{ sont i.i.d.} \end{cases}$$

**Remarque 4.2** Pour  $P_{\bar{A}} = P_A$ , on a  $R_c = I(A; B)$ . Pour  $P_{\bar{A}} = \text{Unif}(\mathcal{X})$ , on a  $R_c = \log |\mathcal{A}| - H(A|B)$ .

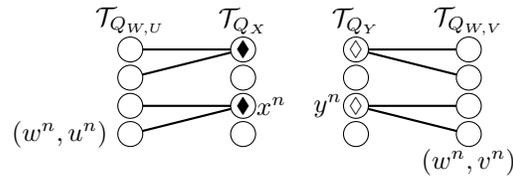
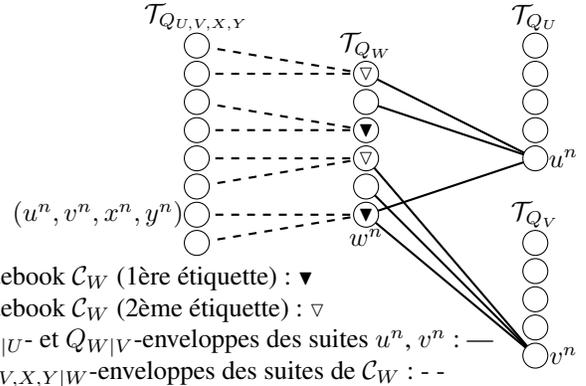
**Définition 4.3 (Matrices génératrices, coset)** Supposons  $|\mathcal{A}|$  premier, on munit  $\mathcal{A} \simeq \mathbb{Z}/|\mathcal{A}|\mathbb{Z}$  d'une structure de corps. Pour tout  $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , une matrice génératrice  $n \times k$  est un élément  $\mathbf{G} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathcal{A})$ . Une matrice de contrôle associée à  $\mathbf{G}$  est une matrice  $\mathbf{H} \in \mathcal{M}_{n-k,n}(\mathcal{A})$  telle que  $\text{Im } \mathbf{G} = \text{Ker } \mathbf{H}$ . Le syndrome d'une suite  $a^n \in \mathcal{A}^n$  est  $\mathbf{H}a^n$ . Le coset associé au syndrome  $\mathbf{H}a^n$  est  $\text{Ker } \mathbf{H} + a^n = \{\tilde{a}^n \in \mathcal{A}^n \mid \mathbf{H}\tilde{a}^n = \mathbf{H}a^n\}$ .

**Lemme 2 (Partition en cosets)** Supposons  $|\mathcal{A}|$  premier. Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Q_{A,B} \in \Delta_k(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ,  $R_c = \log |\mathcal{A}| - H_Q(A|B)$  et  $R < R_c$  tels que  $kR/\log |\mathcal{A}| \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in k\mathbb{N}$ , soit  $\mathbf{G}^{(n)} \in \mathcal{M}_{n,nR/\log |\mathcal{A}|}(\mathcal{A})$  une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. de loi  $\text{Unif}(\mathcal{A})$ . Alors on a pour tout  $(a^n, b^n) \in \mathcal{T}_{Q_{A,B}}$  :

$$\Pr\left(\exists \tilde{a}^n \in \text{Im } \mathbf{G}^{(n)} + a^n \setminus \{a^n\}, (\tilde{a}^n, b^n) \in \mathcal{T}_{Q_{A,B}}\right) \leq 2^{-n(R_c - R) + o(n)}. \quad (25)$$

## 4.3 Preuve de la borne intérieure

### 4.3.1 Algorithme d'encodage



Coset de  $x^n$  :  $\blacklozenge$       Coset de  $y^n$  :  $\diamond$   
 $Q_{U,W|X}$ - et  $Q_{V,W|Y}$ -envelopes des suites de cosets : —

FIGURE 2 – Une illustration de l'algorithme d'encodage.

Nous allons construire des fonctions d'encodage et décodage atteignant à  $\delta$  près les débits de (5) à (8), avec  $\delta$  arbitrairement petit. Fixons  $P_{W|U,V,X,Y}$  et  $\delta > 0$ , et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour tout type  $Q_{U,V,X,Y} \in \Delta_n(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ , soit  $Q_{U,V,W,X,Y}$  le type de  $\Delta_n(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  qui a  $Q_{U,V,X,Y}$  comme distribution marginale et qui minimise  $D(P_{U,V,W,X,Y} \| Q_{U,V,W,X,Y})$ , de sorte que l'on ait  $Q_{U,V,W,X,Y} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{U,V,W,X,Y}$ .

À présent, pour un type fixé  $Q_{U,V,W,X,Y}$ , partitionnons  $\mathcal{T}_{Q_X}$  (resp.  $\mathcal{T}_{Q_Y}$ ) en  $2^{nH_Q(X|U,W)+n\delta}$  (resp.  $2^{nH_Q(Y|V,W)+n\delta}$ ) cosets, à l'aide de matrices génératrices et de contrôle adéquates  $\mathbf{G}_X$  et  $\mathbf{H}_X$  (resp.  $\mathbf{G}_Y$  et  $\mathbf{H}_Y$ ), cf. Lemme 2. Cela est possible car  $|\mathcal{X}|$  et  $|\mathcal{Y}|$  peuvent être supposés premiers sans perte de généralité en étendant  $Q$  avec des zéros si nécessaire.

Soit  $\mathcal{C}_W$  un ensemble formé de  $2^{nI_Q(U,V,X,Y;W)+n\delta}$  suites aléatoires tirées de  $\mathcal{W}^n$  indépendamment suivant la loi  $Q_W$ . Soit  $\mathcal{Z}$  fini tel que  $|\mathcal{Z}| = |\mathcal{C}_W|/2^{n \min(I_Q(U;W), I_Q(V;W)) - n\delta} = 2^{nI_Q(U,V,X,Y;W) - n \min(I_Q(U;W), I_Q(V;W)) + 2n\delta}$ .

Partition en classes aléatoire : une étiquette  $B(\bar{w}^n)$  tirée uniformément dans  $\mathcal{Z}$  est assignée à chaque suite  $\bar{w}^n \in \mathcal{C}_W$ , de sorte que  $2^{n \min(I_Q(U;W), I_Q(V;W)) - n\delta + o(n)}$  suites portent la même étiquette (avec grande probabilité). On note  $\mathcal{C}_W^{[B(w^n)]}$  l'ensemble des suites de  $\mathcal{C}_W$  portant l'étiquette  $B(w^n)$ .

À présent, soit  $(u^n, v^n, x^n, y^n)$  une réalisation de la source, soit  $Q_{U,V,X,Y}$  leur type, et  $Q_{U,V,W,X,Y}$  le type complété par la méthode ci-dessus. L'encodeur détermine une suite  $w^n \in \mathcal{T}_{Q_{W|U,V,X,Y}}(u^n, v^n, x^n, y^n) \cap \mathcal{C}_W$  (en suivant les pointillés sur

la Figure 2) et son étiquette  $B(w^n)$ . L'encodeur envoie :

$$f_{x_1}(u^n, v^n, x^n, y^n) = b(\mathbf{H}_X x^n), \quad (26)$$

$$f_{x_2}(u^n, v^n, x^n, y^n) = \iota, \quad (27)$$

$$f_y(u^n, v^n, x^n, y^n) = b(\mathbf{H}_Y y^n), \quad (28)$$

$$f_0(u^n, v^n, x^n, y^n) \quad (29)$$

$$= b\left(Q_{U,V,W,X,Y}, B(w^n), \begin{cases} E, x^n, y^n & \text{si } E = 1 \\ E & \text{si } E = 0 \end{cases}\right),$$

où  $b(\cdot)$  est l'expression en binaire, et  $\iota$  dénote l'index de  $x^n$  dans  $(\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n) \cap \bigcup_{\bar{w}^n \in \mathcal{C}_W^{[B(w^n)]}} \mathcal{T}_{Q_{X|W}}(\bar{w}^n)$ .

Le bit d'erreur  $E$  est à 1 ssi il y a une ambiguïté au décodage, i.e. l'un des évènements suivants est réalisé. Ils correspondent à un échec des partitions en classes/cosets aléatoires :

$$\mathcal{E}_1 = \{\nexists w^n \in \mathcal{C}_W, \text{ t.q. } (u^n, v^n, w^n, x^n, y^n) \in \mathcal{T}_{Q_{U,V,W,X,Y}}\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \{\exists \tilde{w}^n \neq w^n, \tilde{w}^n \in \mathcal{C}_W^{[B(w^n)]} \cap \mathcal{T}_{Q_{W|U}}(u^n)\},$$

$$\mathcal{E}_3 = \{\exists \tilde{w}^n \neq w^n, \tilde{w}^n \in \mathcal{C}_W^{[B(w^n)]} \cap \mathcal{T}_{Q_{W|V}}(v^n)\},$$

$$\mathcal{E}_4 = \{\exists \tilde{x}^n \neq x^n, \tilde{x}^n \in \mathcal{T}_{Q_{X|U,W}}(u^n, w^n) \cap (\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n)\},$$

$$\mathcal{E}_5 = \{\exists \tilde{y}^n \neq y^n, \tilde{y}^n \in \mathcal{T}_{Q_{Y|V,W}}(v^n, w^n) \cap (\text{Ker } \mathbf{H}_Y + y^n)\}.$$

### 4.3.2 Algorithme de décodage et propriété zéro-erreur

S'il y a une ambiguïté, tous les décodeurs ont leur suite de source via le canal  $f_0$ . Sinon, ils procèdent comme suit.

Le décodeur  $x_1$  obtient  $B(w^n)$  avec le canal  $f_0$  (car  $\mathcal{E}_1^c \Rightarrow w^n$  est défini), et avec la SI  $u^n$ , il recherche dans la  $V$ -enveloppe  $\mathcal{T}_{Q_{W|U}}(u^n)$  les suites dont l'étiquette est  $B(w^n)$ , et en déduit  $w^n$  ( $\mathcal{E}_2^c \Rightarrow w^n$  est retrouvée par le décodeur  $x_1$ ). Le coset  $(\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n)$  est alors extrait du canal  $f_{x_1}$ , le décodeur  $x_1$  détermine l'ensemble  $\mathcal{T}_{Q_{X|U,W}}(u^n, w^n) \cap (\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n)$  et retrouve  $x^n$  ( $\mathcal{E}_4^c \Rightarrow x^n$  est retrouvé avec zéro-erreur). Ces opérations sont représentées par les traits pleins sur la Figure 2.

Le décodeur  $y$  procède symétriquement et retrouve  $y^n$  avec l'aide de  $v^n$  car les évènements  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_5$  ne sont pas réalisés.

Le décodeur  $x_2$  détermine d'abord l'ensemble  $(\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n) \cap \bigcup_{\bar{w}^n \in \mathcal{C}_W^{[B(w^n)]}} \mathcal{T}_{Q_{X|W}}(\bar{w}^n)$  en utilisant le syndrome  $\mathbf{H}_X x^n$  transmis dans le canal  $f_{x_1}$ , et  $Q_{U,V,W,X,Y}, B(w^n)$  transmis dans le canal  $f_0$ . Alors en utilisant l'index envoyé sur le canal  $f_{x_2}$ , le décodeur  $x_2$  retrouve  $x^n$  avec zéro-erreur.

### 4.3.3 Probabilité d'une ambiguïté au décodage

Bornons  $\Pr(\mathcal{E}_1)$ . On a  $\Pr(\mathcal{E}_1) \leq 2^{-n\delta+o(n)}$  par le Lemme 1, avec  $\mathcal{A} = \mathcal{W}, \mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, Q_{A,B} = Q_{W,(U,V,X,Y)}$  et  $P_{\bar{A}} = Q_W$ . A présent, bornons  $\Pr(\mathcal{E}_2)$ . L'ensemble  $\mathcal{C}_W^{[B(w^n)]} \setminus \{w^n\}$  est composé de  $2^{n \min(I_Q(U;W), I_Q(V;W)) - n\delta + o(n)}$  suites de loi  $Q_W$ . On utilise alors le Lemme 1 avec  $\mathcal{A} = \mathcal{W}, \mathcal{B} = \mathcal{U}, Q_{A,B} = Q_{W,U}$  and  $P_{\bar{A}} = Q_W$  :

$$\Pr(\mathcal{E}_2) \leq 2^{n \min(I_Q(U;W), I_Q(V;W)) - n\delta - nI_Q(U;W) + o(n)} \quad (30)$$

$$\leq 2^{-n\delta+o(n)}. \quad (31)$$

De même  $\Pr(\mathcal{E}_3) \leq 2^{-n\delta+o(n)}$ . Enfin, on utilise le Lemme 2 avec  $\mathcal{A} = \mathcal{X}, \mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{W}, Q_{A,B} = Q_{X,(U,W)}$  :

$$\Pr(\mathcal{E}_4) \leq 2^{n(\log |\mathcal{X}| - H_Q(X|U,W) - \delta - \log |\mathcal{X}| + H_Q(X|U,W)) + o(n)}$$

$$\leq 2^{-n\delta+o(n)}. \quad (32)$$

De même  $\Pr(\mathcal{E}_5) \leq 2^{-n\delta+o(n)}$ , d'où  $\Pr(E = 1) \leq 5 \cdot 2^{-\delta n + o(n)}$ .

### 4.3.4 Analyse des débits

Soit  $\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , le débit sur le canal  $f_0$  s'écrit :

$$R_0^{(n)} = \frac{\log |\mathcal{Z}| + \log |\Delta_n(\mathcal{S})| + 1 + \Pr(E = 1)n \log (|\mathcal{X}||\mathcal{Y}|)}{n} \\ \leq I_Q(U, V, X, Y; W) - \min(I_Q(U; W), I_Q(V; W)) + 2\delta \\ + 5 \log (|\mathcal{X}||\mathcal{Y}|) 2^{-n\delta+o(n)} + (1 + \log |\Delta_n(\mathcal{S})|)/n \quad (33) \\ \rightarrow I(U, V, X, Y; W) - \min(I(U; W), I(V; W)) + 2\delta.$$

Les débits suivants sont les exposants du nombre de cosets :  $R_{x_1}^{(n)} = \frac{1}{n} \log (2^{nH_Q(X|U,W)+n\delta}) \rightarrow H(X|U, W) + \delta$ , et symétriquement,  $R_y^{(n)} \rightarrow H(Y|V, W) + \delta$ . Le débit  $R_{x_2}^{(n)}$  s'écrit :

$$\frac{1}{n} \log \left| (\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n) \cap \bigcup_{\bar{w}^n} \mathcal{T}_{Q_{X|W}}(\bar{w}^n) \right| \quad (34)$$

$$= \frac{1}{n} \log \left[ \left| \bigcup_{\bar{w}^n} \mathcal{T}_{Q_{X|W}}(\bar{w}^n) \right| \frac{|\text{Ker } \mathbf{H}_X + x^n|}{|\mathcal{X}|} \right] + o(1) \quad (35)$$

$$\leq \frac{1}{n} \log |\mathcal{C}_W^{[B(w^n)]}| + \frac{1}{n} \log |\mathcal{T}_{Q_{X|W}}(w^n)| \\ + (\log |\mathcal{X}| - H_Q(X|U, W) - \delta) - \log |\mathcal{X}| + o(1) \quad (36)$$

$$= \min(I_Q(U; W), I_Q(V; W)) - \delta + H_Q(X|W) \\ - H_Q(X|U, W) - \delta + o(1) \quad (37)$$

$$= \min(I_Q(U; W), I_Q(V; W)) + I_Q(X; U|W) - 2\delta + o(1) \quad (38)$$

$$\rightarrow \min(I(U; W), I(V; W)) + I(X; U|W) - 2\delta, \quad (39)$$

où les unions sont prises sur  $\mathcal{C}_W^{[B(w^n)]}$ , et où (35) vient de l'indépendance des suites de  $\mathcal{C}_W$  et des coefficients de  $\mathbf{G}_X$ .

## Références

- [1] H. Witsenhausen, "The zero-error side information problem and chromatic numbers (corresp.)," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 22, no. 5, 1976.
- [2] A. Sgarro, "Source coding with side information at several decoders," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 23, no. 2, pp. 179–182, 1977.
- [3] N. Charpenay, M. Le Treust, and A. Roumy, "Zero-error source coding when side information may be present," *International Zurich Seminar on Information and Communication*, 2022.
- [4] R. Gray and A. Wyner, "Source coding for a simple network," *Bell System Technical Journal*, vol. 53, no. 9, 1974.
- [5] R. Timo, A. Grant, T. Chan, and G. Kramer, "Source coding for a simple network with receiver side information," in *2008 IEEE International Symposium on Information Theory*.
- [6] M. Benammar and A. Zaidi, "Rate-distortion region of a Gray–Wyner model with side information," *Entropy*, vol. 20, no. 1, p. 2, 2018.
- [7] I. Csiszár and J. Körner, *Information theory : coding theorems for discrete memoryless systems*. Cambridge University Press, 2011.