

# Un algorithme de complétion de données via la représentation intégrale de l'opérateur Stecklov-Poincaré

Chaima Abid<sup>\*1</sup>, Amel Ben Abda<sup>1</sup>, Riadh Ben Fatma<sup>1</sup>, Yosra Boukari<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ENIT-LAMSIN, Université de Tunis el-Manar, Tunisia.

\*E-mail : [chayma.abid@enit.utm.tn](mailto:chayma.abid@enit.utm.tn)

---

## Résumé

Dans ce travail, nous proposons un algorithme de complétion de données dans le cas de l'équation de Helmholtz. Plus précisément, notre objectif consiste à reconstruire les données manquantes sur une partie inaccessible du bord du domaine tout en connaissant les mesures des données de Cauchy sur la partie accessible. L'algorithme proposé est basé sur la représentation intégrale de l'opérateur de Stecklov-Poincaré, qui nous ramène à la fin à la résolution d'un système linéaire singulier. Pour remédier à ce caractère mal posé, l'algorithme GMRES [2] est utilisé. La performance de l'algorithme est montrée à travers des tests numériques menés dans le cas 3D qui nous donnent une reconstruction avec une grande précision pour différents niveaux de bruits rajoutés.

## Mots-Clés

Complétion de données, Stecklov-Poincaré, l'équation de Helmholtz, La méthode GMRES

---

## I INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans cet article à la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation de Helmholtz. Notre objectif est de récupérer les données manquantes sur une partie de la frontière d'un domaine borné à partir de données surdéterminées sur la partie accessible de la frontière. Le problème de Cauchy considéré est connu d'être mal posé au sens de Hadamard, ce qui est dû à la dépendance continue aux données de sa solution qui ne peut pas être toujours garantie. De plus, le problème de complétion des données est hautement instable. Il existe une large littérature qui traite du problème inverse considéré [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [14]. Nous nous intéressons à la formulation du problème de Cauchy en une équation d'interface sur la partie inaccessible de la frontière. Cette méthode est introduite par [9] et elle a été étendue au cas de l'équation de Helmholtz par [11]. Dans ce travail, nous présentons une combinaison de l'algorithme GMRES proposé par [11] et de la représentation intégrale de l'opérateur Stecklov-Poincaré en s'inspirant de [13]. Quelques résultats numériques sont ensuite fournis pour montrer l'efficacité de la méthode pour différentes valeurs du nombre d'onde et différents niveaux de bruit.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons le problème inverse et nous le formulons sous forme d'une équation définie sur la partie de la frontière où les données sont manquantes. Dans la section 3, nous écrivons l'opérateur de Stecklov-Poincaré en utilisant l'équation intégrale de frontière. La section 4 est consacrée à la description de l'algorithme GMRES. La dernière partie est consacrée à la conclusion.

## II LE PROBLÈME DE CAUCHY-HELMHOLTZ

Soit  $\Omega \subset R^3$  un domaine borné lipschitzien de bord  $\Gamma$ . On note par  $\nu$  le vecteur normal extérieure à  $\Gamma$  et on suppose que  $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_i$  pourrait se décomposer en deux parties disjointes  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_i$ , tel que  $\Gamma_c \cap \Gamma_i = \emptyset$ . Connaissant la mesure du flux  $\varphi$  et du potentiel  $f$  sur la frontière accessible  $\Gamma_c$ , notre problème de complétion des données peut être exprimé comme le problème de Cauchy suivant : pour un nombre d'onde fixe  $k$ , trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu u = \varphi & \text{sur } \Gamma_c \\ u = f & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (1)$$

Ce problème est bien connu d'être mal posé au sens de HADAMARD [1] puisque la dépendance continue de la solution par rapport aux données ne peut être toujours garantie. L'unicité de la solution pourrait être démontrée par une application direct du théorème de Holmgren [12]. Cependant, l'existence de la solution de ce problème n'est assurée que pour les données compatibles  $(\varphi, f)$ .

Plusieurs approches de régularisation ont été proposées dans la littérature pour résoudre ce caractère mal posé du problème de Cauchy (1). Dans ce travail, nous nous sommes inspirés des outils de décomposition de domaines pour pouvoir écrire le problème de complétion de données sous forme d'une équation surfacique sur l'interface inaccessible. Ainsi, le problème (1) pourrait être décomposé en deux problèmes sous-jacents ayant la même donnée de Dirichlet sur  $\Gamma_i$  égale à  $\lambda$ , L'idée est alors de considérer  $\lambda$  comme l'inconnue de notre problème afin de compléter les données sur la partie inaccessible du bord et trouver, par la suite, la solution de (1).

Par conséquent, chercher la solution  $u$  de (1) revient à trouver  $\lambda$  qui fait coïncider  $v$  et  $w$ , où  $v$  et  $w$  sont respectivement les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$(P_v) \begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = f & \text{sur } \Gamma_c \\ v = \lambda & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (P_w) \begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu w = \varphi & \text{sur } \Gamma_c \\ w = \lambda & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases}$$

En utilisant le fait que  $v|_{\Gamma_i} = w|_{\Gamma_i} = \lambda$ , et en appliquant le théorème d'unicité de Holmgren , nous avons alors  $v = w$  n'est satisfait que si nous avons

$$\partial_\nu v = \partial_\nu w \quad \text{sur } \Gamma_i. \quad (2)$$

On pose  $v = v_1 + v_2$  et  $w = w_1 + w_2$ , où  $v_1, v_2, w_1$  et  $w_2$  sont, respectivement, solutions des systèmes suivants :

$$(P_{v_1}) \begin{cases} \Delta v_1 + k^2 v_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ v_1 = \lambda & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (P_{v_2}) \begin{cases} \Delta v_2 + k^2 v_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_2 = f & \text{sur } \Gamma_c \\ v_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$$

$$(P_{w_1}) \begin{cases} \Delta w_1 + k^2 w_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu w_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ w_1 = \lambda & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (P_{w_2}) \begin{cases} \Delta w_2 + k^2 w_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu w_2 = \varphi & \text{sur } \Gamma_c \\ w_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases}$$

Afin d'écrire l'équation surfacique satisfaite par l'inconnue  $\lambda$ , nous désignons par  $v_1$  et  $w_1$  les prolongements de  $\lambda$  définis par  $H_v(\lambda) = v_1$  et  $H_w(\lambda) = w_1$ . Nous désignons par  $v_2$  et  $w_2$  les extensions de  $f$  et  $\varphi$  de  $\Gamma_i$  dans  $\Omega$  définies par  $R_v(f) = v_2$  et  $R_w(\varphi) = w_2$ .

Par conséquent, nous pouvons, en utilisant (2), résoudre le système (1) en résolvant le problème de Stecklov-Poincaré défini sur la frontière inconnue comme suit :

$$S\lambda = \chi \quad \text{sur} \quad \Gamma_i,$$

ou  $\chi = \partial_\nu R_w(\varphi) - \partial_\nu R_v(f)$  et  $S\lambda = S_v(\lambda) - S_w(\lambda)$  avec

$$S_v(\lambda) = \partial_\nu H_v(\lambda) = \partial_\nu v_1|_{\Gamma_i} \quad \text{et} \quad S_w(\lambda) = \partial_\nu H_w(\lambda) = \partial_\nu w_1|_{\Gamma_i} \quad (3)$$

### III UNE FORMULATION DE L'OPÉRATEUR DE STECKLOV-POINCARÉ PAR DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Dans le but de donner une expression de l'opérateur de Stecklov-Poincaré par les équations intégrales de frontière, nous commençons par présenter le potentiel simple et double couche définis respectivement, comme suit :

$$SL_{\Gamma_l}\varphi(x) = \int_{\Gamma_l} \varphi(y) G(x,y) ds, \quad \text{et} \quad DL_{\Gamma_l}\psi(x) = \int_{\Gamma_l} \psi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} ds, \quad \forall x \in R^3 \setminus \Gamma_l, \quad l = i, c.$$

où  $G$  est la fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz donnée par

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}; \quad \forall x,y \in R^3, x \neq y.$$

Il est clair que toute solution de l'équation de Helmholtz pourrait être représentée comme combinaison de potentiel de simple couche et de double couche. Ainsi, une représentation intégrale de  $v_1$  et  $w_1$  sera définie par :

$$v_1(x) = SL_{\Gamma_c}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_c} - DL_{\Gamma_c}(v_1|_{\Gamma_i}) + DL_{\Gamma_i}(v_1|_{\Gamma_i}) - SL_{\Gamma_i}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_i}, \quad (4)$$

et

$$w_1(x) = SL_{\Gamma_c}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_c} - DL_{\Gamma_c}(w_1|_{\Gamma_c}) + DL_{\Gamma_i}(w_1|_{\Gamma_i}) - SL_{\Gamma_i}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_i}. \quad (5)$$

En utilisant le fait que la trace de  $v_1$  et  $w_1$  sur  $\Gamma_i$  est  $\lambda$ , de même la trace de  $v_1$  et la trace normale de  $w_1$  sont nulles sur  $\Gamma_c$ , nous pouvons écrire (4) et (5) comme suit

$$v_1(x) = SL_{\Gamma_c}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_c} + DL_{\Gamma_i}(\lambda) - SL_{\Gamma_i}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_i},$$

et

$$w_1(x) = DL_{\Gamma_i}(\lambda) - SL_{\Gamma_i}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_i} - DL_{\Gamma_c}(w_1|_{\Gamma_c}).$$

En prenant la trace normale de  $v_1$  et  $w_1$  sur  $\Gamma_i$  et en utilisant les propriétés de trace des potentiels de double couche et simple couche, nous obtenons

$$\frac{\partial v_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_i} = K'_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_c} + T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i}(\lambda) - \left(K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} - \frac{I}{2}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_i}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_i} = T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i}(\lambda) - (K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} - \frac{I}{2})\left(\frac{\partial w_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}\right) - T_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}(w_1|_{\Gamma_c}), \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} K'_{\Gamma_l \rightarrow \Gamma_i} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_l) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \\ \varphi(x) &\mapsto \int_{\Gamma_l} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x} ds(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_l) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \\ \psi(x) &\mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma_i, |x-y| > \varepsilon} \psi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} ds(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \\ \psi(x) &\mapsto \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma_c} \psi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} ds(y). \end{aligned}$$

En substituant (6) à (7), on obtient

$$\left(K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} + \frac{I}{2}\right) S(\lambda) = T_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}(w_1|_{\Gamma_c}) + K'_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_c}\right).$$

L'opérateur  $K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i}$  est compact puisque c'est un opérateur intégral avec un noyau. Il est facile de montrer que  $(K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} + \frac{I}{2})$  est inversible en utilisant l'alternative de Fredholm. Par conséquent, l'opérateur de Stecklov-Poincaré peut être écrit à l'aide d'équations intégrales comme suit

$$S(\lambda) = \left(K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} + \frac{I}{2}\right)^{-1} \left(T_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}(w_1|_{\Gamma_c}) + K'_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_c}\right)\right). \quad (8)$$

## IV APPLICATION DE LA GMRES ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

### 4.1 Application de la GMRES

Il est clair que l'opérateur Stecklov-Poincaré défini par (8) est un opérateur compact, ce qui nous ramène à la fin à la résolution d'un système linéaire singulier. Pour remédier à ce caractère mal posé, la méthode GMRES préconditionnée par  $S_w$  a été appliquée. Nous rappelons que l'opérateur  $S_w$  est défini par (3) et en utilisant (7) une représentation intégrale pourrait être donnée par :

$$S_w(\lambda) = (K'_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i} + \frac{I}{2})^{-1} (T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i}(\lambda) - T_{\Gamma_c \rightarrow \Gamma_i}(w_1|_{\Gamma_c}))$$

Ainsi, la nouvelle équation à résoudre est la suivante :

$$S_w^{-1} S \lambda = S_w^{-1} \chi. \quad (9)$$

La solution approchée  $\lambda_m$  que nous cherchons est de la forme  $\lambda_m \in \lambda_0 + z_m$ , où  $\lambda_0$  est une estimation initiale de la solution  $\lambda$ , et  $z_m$  est un élément du sous-espace de Krylov

$$K_m(S_w^{-1}S, r_0) = \{r_0, S_w^{-1}Sr_0, \dots, (S_w^{-1}S)^{m-1}r_0\}.$$

avec  $r_0 = S_w^{-1}\chi - S_w^{-1}S\lambda_0$ .

Afin de construire une base orthonormale  $l^2$  du sous-espace de Krylov  $K_m(S_w^{-1}S, r_0)$ , la méthode d'Arnoldi a été appliquée, ce qui nous permet d'avoir après  $k$  étapes un système orthonormal  $V_{k+1}$  et une matrice de Hessenberg  $\tilde{H}_k$  de taille  $(k+1) \times k$  qui satisfait la relation suivante :

$$\tilde{H}_k = V_{k+1}^T S_w^{-1} S V_k.$$

Par conséquent, nous pouvons définir  $z_m = V_k y_k$  où  $y_k = H_k^{-1} r_0 e_1$  ( $e_1$  est le vecteur unitaire) et par la suite la solution approchée est donnée par :

$$\lambda_m = \lambda_0 + V_k y.$$

Par conséquent, afin de résoudre le système préconditionné (9), nous avons appliqué une combinaison de la méthode GMRES proposée dans [11] et de la représentation intégrale de frontière utilisant les opérateurs considérés décrits ci-dessus. Il est à noter que l'algorithme GMRES s'exécute jusqu'à ce que la norme du résidu soit suffisamment petite, ce qui est une conséquence de la projection sur le sous-espace de Krylov.

## 4.2 Résultats numériques

Pour la mise en oeuvre numérique, nous avons utilisé la bibliothèque Gypsilab [15] qui offre une interface simple pour la résolution des équations intégrales de frontière en dimension 3.

Nous considérons  $\Gamma_i = S_{(O, r_1)}$  et  $\Gamma_c = S_{(O, r_2)}$  les sphères centrées à l'origine  $O = (0, 0)$  avec un rayon  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 1,5$  respectivement. Nous utilisons 1000 points de discrétisations sur chaque frontière  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_i$ , où  $\Gamma_c$  est la limite accessible et  $\Gamma_i$  est la limite intérieure, comme le montre la Fig. 1.

Nous avons comparé les résultats reconstruits par la GMRES dans le cas où la solution exacte est une onde incidente à point source  $G(x, x_0)$ , où  $x_0 = (0, 0, 20)$  et avec un nombre d'onde fixé  $k = 1$ .

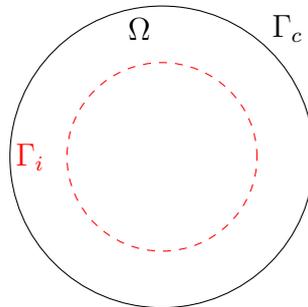


FIGURE 1 – Représentation de la géométrie du domaine.

La Fig. 2 montre que l'algorithme GMRES préconditionné par  $S_w^{-1}$  donne une bonne reconstruction de la solution sur la frontière interne  $\Gamma_i$  avec des précisions élevées.

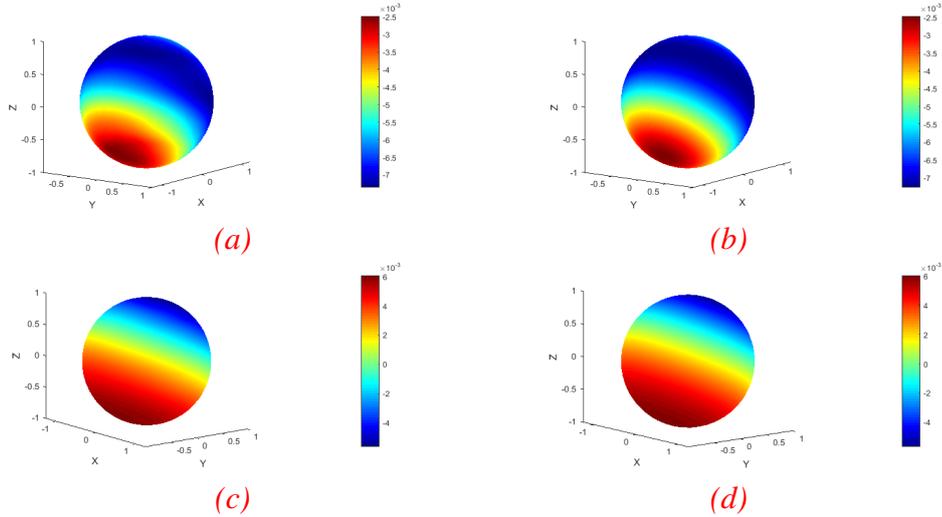


FIGURE 2 – Reconstruction de la solution par l’algorithme GMRES : la partie imaginaire de la solution reconstruite sur  $\Gamma_i$  (a), la partie imaginaire de la solution exacte sur  $\Gamma_i$  (b), la partie réelle de la solution reconstruite  $\Gamma_i$  (c) et (d) la partie réelle de la solution exacte sur  $\Gamma_i$  (c).

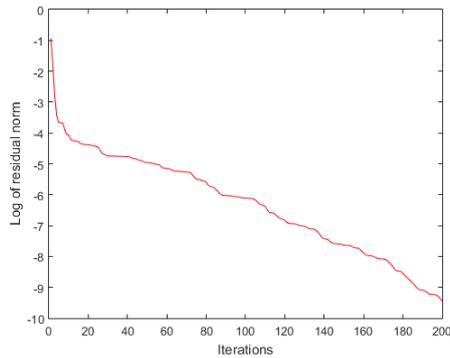


FIGURE 3 – Convergence de l’algorithme GMRES preconditionné par  $S_w$ .

% de bruit rajouté	Nombre d’itérations	$\frac{\ u_{exa}-u_{cal}\ _{L^2(\Gamma_i)}}{\ u_{exa}\ _{L^2(\Gamma_i)}}$	$\frac{\ u_{exa}-u_{cal}\ _{L^\infty(\Gamma_i)}}{\ u_{exa}\ _{L^\infty(\Gamma_i)}}$
0 %	10	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$
2.5 %	9	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$
5 %	5	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-2}$
10 %	4	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$2.55 \cdot 10^{-2}$

TABLE 1 – Influence du bruit sur le nombre d’itérations nécessaires pour avoir convergence.

Dans la Fig.3, nous présentons l’évolution du log de la norme résiduelle pour valider la convergence rapide de notre algorithme (la norme résiduelle est de l’ordre de  $10^{-3}$  en moins de 10 itérations).

Pour tester la précision de cet algorithme, nous présentons dans le tableau 1 les résultats obtenus pour différents niveaux de bruits ajoutés, en précisant le nombre d’itérations nécessaires à la convergence et les erreurs relatives associées. Les résultats montrent la dépendance linéaire de l’erreur relative par rapport au niveau de bruit rajouté et la performance de notre algorithme, en effet l’erreur est du même ordre de grandeur que le bruit.

## V CONCLUSION

Dans le présent travail, l’algorithme GMRES est appliqué à une équation surfacique satisfaite par l’opérateur Stecklov-Poincaré, définie uniquement sur la partie inaccessible du bord du domaine, dans le but de reconstruire les données de Cauchy manquantes associées à l’équation de Helmholtz. Les résultats numériques sont très satisfaisants et la méthode utilisée se révèle être efficace pour les problèmes de complétion de données dans le cadre de l’équation de Helmholtz.

## Références Bibliographiques

- [1] J. HADAMARD. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, 1923.
- [2] Y. SAAD et M. H. SCHULTZ. « GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems ». In : *SIAM Journal on scientific and statistical computing* 7.3 (1986), pages 856-869.
- [3] M. R. BAI. « Application of BEM (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 92.1 (1992), pages 533-549.
- [4] B.-K. KIM et J.-G. IH. « On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 100.5 (1996), pages 3003-3016.
- [5] Z. WANG et S. F. WU. « Helmholtz equation-least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 102.4 (1997), pages 2020-2032.
- [6] S. F. WU et J. YU. « Reconstructing interior acoustic pressure fields via Helmholtz equation least-squares method ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 104.4 (1998), pages 2054-2060.
- [7] L. MARIN, L. ELLIOTT, P. HEGGS, D. INGHAM, D. LESNIC et X. WEN. « Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations ». In : *Computational Mechanics* 31.3-4 (2003), pages 367-377.
- [8] L. MARIN, L. ELLIOTT, P. HEGGS, D. INGHAM, D. LESNIC et X. WEN. « BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method ». In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28.9 (2004), pages 1025-1034.
- [9] F. B. BELGACEM et H. EL FEKIH. « On Cauchy's problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory ». In : *Inverse Problems* 21.6 (2005), page 1915.
- [10] L. MARIN. « Boundary element-minimal error method for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations ». In : *Computational Mechanics* 44.2 (2009), page 205.
- [11] R. BEN FATMA. « Complétion de données pour l'équation de Helmholtz : Application à quelques problèmes inverses ». In : (2012).
- [12] F. JOHN. *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013. ISBN : 9781468493351.
- [13] Y. BOUKARI et H. HADDAR. « A convergent data completion algorithm using surface integral equations ». In : *Inverse Problems* 31.3 (2015), page 035011.
- [14] L. CAILLÉ, L. MARIN et F. DELVARE. « A meshless fading regularization algorithm for solving the Cauchy problem for the three-dimensional Helmholtz equation ». In : *Numerical Algorithms* 82.3 (2019), pages 869-894.
- [15] *Gypsilab is freely available under GPL 3.0 license, see. <https://github.com/mattthieuaussal/gypsilab>.*