HAL open science

Une variante de la méthode de Projection régularisée pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce

Nadjib Boussetila, Tahar Bechouat

▶ **To cite this version:**

Nadjib Boussetila, Tahar Bechouat. Une variante de la méthode de Projection régularisée pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. CARI 2022, Oct 2022, Tunis, Tunisie. hal-03712841

HAL Id: hal-03712841

https://inria.hal.science/hal-03712841v1

Submitted on 4 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une variante de la méthode de Projection régularisée pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce

Nadjib BOUSSETILA[*1] **and Tahar BECHOUAT**[2]

[1]Université 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
[2]Université Mohamed-Chérif Messaadia Souk Ahras, Algérie

*E-mail : n.boussetila@mail.com, boussetila.nadjib@univ-guelma.dz

Résumé

Dans ce travail, on propose une procédure de régularisation et d'approximation numérique pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce, basée sur la méthode LSQ projetée, où le sous-espace de projection est formé par les fonctions d'ondes sphéroïdales. Pour le paramètre de régularisation on adopte un choix a posteriori basé sur la méthode de Morozov cubique amortie. L'étude est justifiée par une analyse théorique détaillée (convergence, estimations d'erreur) sous certaines hypothèses de régularité imposées sur le noyau et les données du problème en question.

Mots-Clés

Equations de Frédholm de première espèce, Méthode LSQ projetée, Méthode de Morozov cubique amortie, PSWFs.

I INTRODUCTION

Pour $s \in \mathbb{N}$, on note par $\mathcal{H}^s(]a,b[,\mathbb{R})$ l'espace de Sobolev usuel.

On considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b k(s,t)f(t)dt = g(s), \ \ s \in [a,b], \tag{1}$$

où $k(.,.) \in L^2([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$ est le noyau, $g \in \mathbb{H} = L^2(]a,b[,\mathbb{R})$ est la donnée et f est l'inconnu recherché dans l'espace $\mathbb{H}$.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme : $\mathsf{K} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \ \mathsf{K}f = g$, où l'opérateur K est donné par

$$(\mathsf{K}f)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \ \ s \in [a,b], \tag{2}$$

est un opérateur compact d'image $\mathcal{R}(\mathsf{K})$ non fermée, le noyau $k(.,.)$ est supposé non dégénéré, alors dans ce cas, l'équation intégrale (1) décrit une situation d'un problème mal posé.

On suppose dans ce paragraphe que le problème (1) admet une solution généralisée, i.e., une solution LRN (Least Residual Norm solution) de norme minimale $\widehat{f}$, donnée par l'inverse généralisé K^+ de l'opérateur K : $\widehat{f} = \mathsf{K}^+ g$. Sous ces conditions l'opérateur K^+ n'est pas continu (car $\mathcal{R}(\mathsf{K})$ n'est pas fermé) et doit être régularisé pour qu'on puisse le calculer.

Dans cette étude, on propose une méthode de filtrage spectral appartenant à la famille des méthodes de projection-régularisée [**Bechouat2021**], où la projection considérée dans cette investigation est de type Kantorovich (elle est appelée aussi projection de Ritz). Cette démarche nous ramène à l'étude d'une procédure de régularisation en dimension finie. Dans notre approche, on étudie une variante de la méthode de Projection-régularisée de type Tikhonov basée sur les PSWFs (prolate spheroidal wave functions).

II FONCTIONS D'ONDES SPHÉROÏDALES

Dans cette Section, on rappelle plusieurs propriétés importantes liées aux fonctions d'ondes sphéroïdales (en anglais : *Prolate spheroidal wave functions*), qui seront utiles par la suite. Le lecteur peut trouver un exposé exhaustif sur ce sujet dans la référence [**Osipov2013**].

D'après l'étude théorique et numérique élaborée par Boyd [**Boyd**], les fonctions d'ondes sphéroïdales d'ordre zéro sont des généralisations des polynômes de Legendre, lorsque $c > 0$, qui oscillent plus uniformément sur l'intervalle $[-1, 1]$ que les polynômes de Chebyshev ou de Legendre. Cette propriété donne une résolution spatiale plus uniforme, qui se traduit par la qualité de l'approximation par ces fonctions.

Soit $\mathcal{B}_c$ l'espace de Paley-Wiener (espace des fonctions à bande limitée) défini par

$$\mathcal{B}_c = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{ support } \mathcal{F}(f) \subseteq [-c, c] \right\},$$

où $c > 0$ est un nombre réel, appelé largeur de la bande et $\mathcal{F}(f)$ désigne la transformée de Fourier de f.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à bande limitée de taille $c > 0$. On sait bien que cette fonction admet l'écriture suivante : pour tout t dans $\mathbb{R}$, il existe une fonction $\sigma \in L^2(-1, 1)$ telle que

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \sigma(s) \exp(icst) ds. \tag{3}$$

En d'autres termes, f est une fonction à bande limitée de taille c, si le support de la transformée de Fourier de f est dans l'intervalle $[-c, c]$.

On note par $\psi_c^j(.)$, $j \geq 0$, les fonctions d'ondes sphéroïdales (PSWFs), qui sont les fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville L_c [1], défini par

$$\mathsf{L}_c(\psi)(.) = -(1 - t^2)\frac{d^2}{dt^2}\psi(.) + 2t\frac{d}{dt}\psi(.) + c^2 t^2 \psi(.).$$

Ces fonctions (PSWFs) possèdent les propriétés suivantes :

P1. Elles forment un système orthogonal de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

1. Opérateur différentiel de Legendre perturbé. Pour le cas particulier $c = 0$, L_0 correspond à l'opérateur de Legendre classique.

P2. Elles forment une base orthonormée de $L^2(-1,1)$, c'est-à-dire,

$$\forall j \geq 0, \left\|\psi_c^j\right\|_{L^2(-1,1)} = 1, \quad \forall i \neq j \left\langle \psi_c^j, \psi_c^i \right\rangle = 0.$$

P3. Elles forment une base orthogonale de l'espace $\mathcal{B}_c$.

Soit f une fonction dans l'espace $\mathcal{B}_c$. Pour tout $t \in [-1,1]$, le développement de Fourier de la fonction $f(t)$ dans la base PSWFs est donné par la formule :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_c^j(t), \tag{4}$$

où $a_j = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\psi_c^j(t)dt.$

Les résultats démontrés dans le travail(cf. [**Bonami2017**]) nous donnent un outil de mesure sur l'approximation spectrale par les fonctions PSWFs dans les fonctions qui appartiennent à l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_1^s(I) = \mathcal{H}^s(I)$, $I = [-1,1]$.

Notation. Pour $c > 0$, on note par $(\psi_c^n)_{n\geq 0}$ la base propre engendrée par les fonctions propres de l'opérateur intégral (compact) :

$$F_c(f)(x) = \int_{-1}^{1} e^{icxy} f(y)dy, \quad i^2 = -1.$$

Cet ensemble de fonctions propres forme une base orthonormale dans $L^2(-1,1)$. Il est bien connu aussi que ces fonctions $(\psi_c^n)_{n\geq 0}$ sont des fonctions propres de l'opérateur $Q_c = \dfrac{c}{2\pi} F_c^* F_c$ qui est auto-adjoint, compact et positif :

$$Q_c(f)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(c(x-y))}{\pi(x-y)} f(y)dy.$$

Soit $(\lambda_n = \lambda_n(c))_{n\geq 0}$ les valeurs propres de l'opérateur Q_c associées aux fonctions pourpres $(\psi_{n,c})_{n\geq 0}$. On a

$$1 > \lambda_0(c) > \lambda_1(c) > \ldots \lambda_n(c) > \ldots > 0, \quad \lambda_n(c) \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow +\infty.$$

Théorème 1:
Soit c un nombre réel positif. Supposons que $f \in \mathcal{H}^s(I)$, pour certain $s > 0$. Alors, pour tout entier $N \geq 1$, on a

$$\|f - \mathsf{P}_N f\|_{L^2(I)} \leq c_0(1+c^2)^{-s/2} \|f\|_{\mathcal{H}^s} + c_0\sqrt{\lambda_N(c)}\, \|f\|_{L^2(I)}, \tag{5}$$

où c_0 est une constante ne dépendant que de s et $\mathsf{P}_N f = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} a_j \psi_c^j(t)$.

Corollaire 1:
Soient $c \geq 1$, $s > 0$ et $f \in \mathcal{H}^s(I)$. Il existe des constantes $M \geq \sqrt{2}$ et $\widehat{M}$, $\widehat{M}_s$, $q > 0$, tel que, lorsque $N \geq \max(cM, 3)$, alors

$$\|f - \mathsf{P}_N f\|_{L^2(I)} \leq \widehat{M}_s(1+N^2)^{-s/2} \|f\|_{\mathcal{H}^s} + \widehat{M}\exp(-qN)\, \|f\|_{L^2(I)}. \tag{6}$$

III APPROXIMATION DE RANG FINI

Soient n un nombre entier positif et $\left\{\varphi_{a,b}^{j}\right\}_{j\geq 0}$ une base orthonormée dans l'espace $\mathbb{H} = L^2(a,b)$. On définit les opérateurs $\mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^{n}$ par :

$$\mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^{n} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{n+1},\ \mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^{n}(f) = \left(\left\langle f, \varphi_{a,b}^{0}\right\rangle_{\mathbb{H}}, \left\langle f, \varphi_{a,b}^{1}\right\rangle_{\mathbb{H}}, \ldots, \left\langle f, \varphi_{a,b}^{n}\right\rangle_{\mathbb{H}}\right)^{t}, \tag{7}$$

où f est une fonction dans $\mathbb{H}$ et $\left\langle f, \varphi_{a,b}^{j}\right\rangle_{\mathbb{H}} = \displaystyle\int_a^b f(t)\varphi_{a,b}^{j}dt$, $j = 0, 1, ..., n$.

L'équation originale (1) est remplacée par l'équation

$$\mathsf{K}_n(f) = \mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^{n}(g), \tag{8}$$

où $\mathsf{K}_n := \mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^{n}\mathsf{K}$ est un opérateur de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'opérateur K est défini par l'expression (2).

Lemme 1:
Soit $\mathsf{K}_n : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{n+1}$ donné par la formule (8). Alors K_n est un opérateur borné, et son opérateur adjoint $\mathsf{K}_n^* : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{H}$ est donné par :

$$\mathsf{K}_n^*(u) = \sum_{j=0}^{n} u_j \mathsf{K}^*\left(\varphi_{a,b}^{j}\right)(.),\ u \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{9}$$

où K^* est l'adjoint de K.

Maintenant, on fixe la base hilbertienne et on considère les $n+1$ fonctions de PSWFs $\left\{\psi_c^j\right\}_{j=0}^{n}$. La proposition suivante, nous montre que $\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n$ est une approximation de rang fini de $\mathsf{K}^*\mathsf{K}$, où $\mathsf{K}_n := \mathcal{T}_{\psi_{c,-1,1}}^{n}\mathsf{K} = \mathcal{T}_{\psi_c}^{n}\mathsf{K}$.

Proposition 1:
On suppose que $\mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{H}^s$ pour certains $s > 0$ et soit l'opérateur $\mathsf{K}_n = \mathcal{T}_{\psi_c}^{n}\mathsf{K}$ défini par la formule (8), où $\left\{\psi_c^j\right\}_{j=0}^{n}$ sont les $n+1$ fonctions PSWFs, pour certains $c \geq 1$. Alors, il existe des constantes $M \geq \sqrt{2}$ et $\widehat{M}$, $\widehat{M}_s$, $q > 0$, tel que, pour tout $n \geq \max(cM, 3)$, on a

$$\|(\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n - \mathsf{K}^*\mathsf{K})f\|_{\mathbb{H}} \leq \gamma(f)\varepsilon(n,s) \to 0 \text{ si } n \to \infty, \tag{10}$$

où $\gamma(f) = 2\left\|\mathsf{K}\right\|^2 \max(\ \widehat{M}_s \left\|f\right\|_{\mathcal{H}^s}, \widehat{M}\left\|f\right\|_{\mathbb{H}})$ et $\varepsilon(n,s) = (1+n^2)^{-s/2} + \exp(-qn)$.

Supposons que $g \in \mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{H}^s$ et $g^\delta \in \mathbb{H}$ tels que

$$\left\|g - g^\delta\right\|_{\mathbb{H}} \leq \delta, \tag{11}$$

où $\delta \in (0,1)$ est le niveau de bruit.

Proposition 2:
Soit $g \in \mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{H}^s$ et $g^\delta \in \mathbb{H}$. Supposons que l'inégalité (11) est satisfaite pour le niveau de bruit δ, alors le niveau d'erreur du vecteur $\mathcal{T}_{\psi_c}^{n}g^\delta := g^{n,\delta}$ à partir du vecteur $\mathcal{T}_{\psi_c}^{n}g := g^n$ peut être estimé comme suit :

$$\left\|g^{n,\delta} - g^n\right\|_2 \leq \delta. \tag{12}$$

IV RÉGULARISATION DE TIKHONOV EN DIMENSION FINIE

Considérons le système linéaire (8) obtenu à partir de la projection de l'équation (2) via l'opérateur $\mathcal{T}_{\psi_c}^n$.

Puisque le problème en question est mal posé, il est naturel que la solution généralisée $f^n := \mathsf{K}_n^+ g^n \in \mathcal{N}(\mathsf{K}_n)^\perp = \mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*)$ du problème (8) serait instable (où K_n^+ désigne l'inverse généralisé de Moore-Penrose de K_n). Pour stabiliser cette solution, on fait appel à la méthode de Tikhonov. Le problème régularisé en dimension finie s'écrit donc sous la forme :

$$(\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n + \alpha\mathsf{I})f_\alpha^{n,\delta} = \mathsf{K}_n^* g^{n,\delta}, \tag{13}$$

où $\alpha > 0$ est le paramètre de régularisation, et δ est le niveau d'erreur, tel que l'inégalité (12) est satisfaite. Il est bien connu que, si le paramètre de régularisation α est choisi en fonction du niveau de bruit δ tel que

$$\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0, \text{ alors } \lim_{\delta\to 0} \left\| f_\alpha^{n,\delta} - f^n \right\|_{\mathbb{H}} = 0.$$

Remarque 1:
L'expression $\mathsf{K}_n^*(u) = \sum_{j=0}^{n} u_j \mathsf{K}^*\left(\psi_c^j\right)(.)$ où $u \in \mathbb{R}^{n+1}$, nous permet de conclure que

$$\mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*) = span\{\mathsf{K}^*\psi_c^j,\ j = 0, 1, ..., n\}. \tag{14}$$

Puisque $\dim(\mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*)) \leq n+1$, alors $\mathbb{H}$ se décompose comme suit :

$$\mathbb{H} = \overline{\mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*)} + \mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*)^\perp = \mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*) + \mathcal{N}(\mathsf{K}_n).$$

Clairement, la solution régularisée $f_\alpha^{n,\delta}$ appartient à l'space $\mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n) = \mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*)$, ce qui implique que

$$f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{i=0}^{n} d_i \mathsf{K}^*\psi_c^i, \tag{15}$$

où $d_i (i = 0, 1, ..., n)$ sont des constantes inconnues à déterminer pour calculer explicitement la solution régularisée $f_\alpha^{n,\delta}$.

Remarque 2:
On suppose que l'opérateur K^* est injectif, alors les vecteurs $\mathsf{K}^*\psi_c^i$, $i = 0, 1, ..., n$ sont linéairement indépendants, et par conséquent $\dim(\mathcal{R}(\mathsf{K}_n^*)) = n+1$.

En remplaçant l'expansion (15) dans l'équation (13), on obtient l'équation suivante

$$\sum_{j=0}^{n}[\alpha d_j + \sum_{i=0}^{n} d_i \left\langle \mathsf{K}^*\psi_c^i, \mathsf{K}^*\psi_c^j \right\rangle_{\mathbb{H}}]\mathsf{K}^*\psi_c^j(t) = \sum_{j=0}^{n} \left\langle g^\delta, \psi_c^j \right\rangle_{\mathbb{H}} \mathsf{K}^*\psi_c^j(t),\ t \in [-1, 1]. \tag{16}$$

On peut écrire l'équation (16) sous la forme

$$\mathsf{K}^*(\sum_{j=0}^{n}[\alpha d_j + \sum_{i=0}^{n} d_i \left\langle \mathsf{K}^*\psi_c^i, \mathsf{K}^*\psi_c^j \right\rangle_{\mathbb{H}} - \left\langle g^\delta, \psi_c^j \right\rangle_{\mathbb{H}}]\psi_c^j(t)) = 0, t \in [-1,1]\,.$$

Puisque l'opérateur K^* est injectif, alors

$$\sum_{j=0}^{n}[\alpha d_j + \sum_{i=0}^{n} d_i \left\langle \mathsf{K}^*\psi_c^i, \mathsf{K}^*\psi_c^j \right\rangle_{\mathbb{H}} - \left\langle g^\delta, \psi_c^j \right\rangle_{\mathbb{H}}]\psi_c^j(t) = 0, t \in [-1,1]\,.$$

Les PSWFs forment un système orthogonal dans $\mathbb{H}$ (elles sont donc linéairement indépendantes), on obtient donc l'équation suivante

$$\alpha d_j + \sum_{i=0}^{n} d_i B_j^i = g_j^{n,\delta}, j = 0, 1, \ldots, n, \tag{17}$$

où

$$B_j^i = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(s,\tau)k(t,\tau)\psi_c^i(s)\psi_c^j(t)dsdtd\tau,\ \ i,j = 0,1,...,n$$

et

$$g_j^{n,\delta} = \int_{-1}^{1} g^\delta(s)\psi_c^j(s)ds,\ \ j = 0,1,\ldots,n.$$

L'équation (17) peut être écrite comme un système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}_n\mathbf{d} = \mathbf{g}_n^\delta, \tag{18}$$

où $\mathbf{A}_n = \alpha\mathbf{I} + \mathbf{B}$, $\mathbf{I}$ est la matrice d'identité dans $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $\mathbf{B} = \left[B_j^i\right]_{i,j=0}^{n} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ est une matrice, $\mathbf{d} = (d_0, d_1, ..., d_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbf{g}_n^\delta$ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Théorème 2:
Le système (18) admet une solution unique dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

V CONVERGENCE DE LA MÉTHODE ET ESTIMATIONS D'ERREUR

Dans la régularisation de Tikhonov, les conditions $\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$, $\lim_{\delta\to 0}\dfrac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0$, sont suffisantes (et essentiellement nécessaires) pour la convergence. Il est bien connu que le taux de convergence (*cf.* [**Engl1996**]) dépend de la régularité de la solution exacte. Si $\widehat{f} \in \mathcal{R}((\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v)$, $v \in]0,1]$ et si $\alpha := \alpha(\delta) = c_0\delta^{2/2v+1}$ où $c_0 > 0$, alors

$$\left\|\widehat{f} - f_\alpha^\delta\right\|_{\mathbb{H}} = O(\delta^{2v/2v+1}).$$

Dans ce qui suit, on suppose que la solution généralisée $\widehat{f}$ de l'équation (1) satisfait la condition de source $\widehat{f} := \mathsf{K}^+g \in \mathcal{R}((\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v)$ où $v \in]0,1]$. Le lemme suivant nous donne une estimation pour la norme $\|(\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n)^v - (\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v\|_{\mathbb{H}}$.

Lemme 2:
Soit $g \in \mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{H}^s$ pour certain $s > 0$. Si $\widehat{f} \in \mathcal{R}((\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v)$ où $v \in]0,1]$. Alors, il existe des constantes $M \geq \sqrt{2}$ et $\widehat{M}$, $\widehat{M}_s$, et $q > 0$, tels que que, lorsque $n \geq \max(cM, 3)$ avec $c \geq 1$, alors

$$\left\|(\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n)^v \widehat{f} - (\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v \widehat{f}\right\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{4}{\pi}(\gamma(f)\varepsilon(n,s))^v, \tag{19}$$

où $\gamma(f)$ et $\varepsilon(n,s)$ sont définies dans la proposition 1.

Théorème 3:
Soit $g \in \mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{H}^s$ pour un certain $s > 0$. Si $\widehat{f} \in \mathcal{R}((\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v)$ où $v \in]0,1]$, alors pour tout $n \geq \max(cM, 3)$ avec $c \geq 1$, on a

$$\left\|\widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\right\|_{\mathbb{H}} \leq c_1[(\varepsilon(n,s))^v + \alpha^v + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}], \tag{20}$$

où $f_\alpha^{n,\delta} = (\mathsf{K}_n^*\mathsf{K}_n + \alpha\mathsf{I})^{-1}\mathsf{K}_n^* g^{n,\delta}$, $M \geq \sqrt{2}$ et la constante c_1 ne dépend pas de α, δ et n.

Par conséquent, nous avons le théorème suivant.

Théorème 4:
Soient $g \in \mathcal{R}(\mathsf{K}) \subset \mathcal{H}^s$ pour un certain $s > 0$ et $\widehat{f} \in \mathcal{R}((\mathsf{K}^*\mathsf{K})^v)$ où $v \in]0,1]$. Si $\alpha := \alpha(\delta) = O(\delta^{2/2v+1})$, alors pour tout $n \geq \max(cM, 3, \theta_l(\alpha), w_l(\alpha))$ avec $c \geq 1$, on a

$$\left\|\widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\right\|_{\mathbb{H}} \leq O(\delta^{2v/2v+1}), \tag{21}$$

où $M \geq \sqrt{2}$, $\theta_l(\alpha) = \left(1/(l\alpha)^{2/s} - 1\right)^{1/2}$ et $w_l(\alpha) = -\ln((1-l)\alpha)/q$ $(0 < l < 1)$.

VI CHOIX A POSTERIORI DU PARAMÈTRE DE RÉGULARISATION

Dans la pratique, le choix a priori du paramètre de régularisation $\alpha(\delta)$ dans le Théorème 4 rarement utilisé parce que il est basé sur la régularité de la solution qui est inconnue. L'une des stratégies a posteriori la plus utilisée est basée sur le principe d'écart de Morozov " Discrepancy Principle ". Dans la méthode de Morozov, le paramètre $\alpha(\delta)$ est choisi selon le critère :

$$\left\|g^\delta - \mathsf{K}f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta}\right\|_{\mathbb{H}} = \delta. \tag{22}$$

Dans cette Section, on s'intéresse à éstimer le paramètre $\alpha(\delta)$ par le principe général de Morozov, donné par

$$\left\|g^\delta - \mathsf{K}f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta}\right\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^\eta(\delta)\left\|f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta}\right\|_{\mathbb{H}}^2 = \delta^2, \tag{23}$$

où $\eta \in [1, +\infty]$. De toute évidence, le principe classique de Morozov (22) est un cas particulier du cas général (23).

Wang et Xiao [**Wang2001**], proposent un algorithme de convergence cubique pour choisir le bon paramètre de régularisation. Cet algorithme se résument comme suit :

Algorithme 1:
Step 1. Input $\alpha_0 > 0$, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, $e_{\max}$, set $e = 0$;

Step 2. Compute $f_{\alpha_e}^{n,\delta}$, $\dfrac{d}{d\alpha} f_{\alpha_e}^{n,\delta}$ and $\dfrac{d^2}{d\alpha^2} f_{\alpha_e}^{n,\delta}$;

Step 3. Compute $\phi(\alpha_e)$, $\phi'(\alpha_e)$ and $\phi''(\alpha_e)$ from formulas (24), (29) and (30);

Step 4. Solve for α_{e+1} from iterative formula (25);

Step 5. If $|\alpha_{e+1} - \alpha_e| \leq \epsilon$ or $e = e_{\max}$, STOP; otherwise, set e = e + 1, GOTO step 2.

où

$$\phi(\alpha) = \left\| g^\delta - \mathsf{K} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^\eta \left\| f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 - \delta^2, \tag{24}$$

et

$$\alpha_{e+1} = \alpha_e - \frac{2\phi(\alpha_e)}{\phi'(\alpha_e) + \sqrt{\phi'(\alpha_e)^2 - 2\phi(\alpha_e)\phi''(\alpha_e)}}. \tag{25}$$

Maintenant, on présente une méthode pratique pour calculer les quantités $\phi'(\alpha)$ et $\phi''(\alpha)$ dans l'Algorithme 1.

Soit $G(\alpha)$ la fonction donnée par

$$G(\alpha) = \left\| g^\delta - \mathsf{K} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha \left\| f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2. \tag{26}$$

La première dérivée de $G(\alpha)$ est donnée dans [**Kunisch1998**] par

$$\frac{d}{d\alpha} G(\alpha) = \xi(\alpha), \tag{27}$$

où $\xi(\alpha) = \left\| f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2$.
En utilisant (26) et (27), on a

$$\frac{d}{d\alpha} \left\| g^\delta - \mathsf{K} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 = -\alpha \frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha). \tag{28}$$

A partir de (28), la première et la deuxième dérivée de $\phi(\alpha)$ sont donnés par les formules

$$\frac{d}{d\alpha} \phi(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha) \frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha) + \eta \alpha^{\eta-1} \xi(\alpha), \tag{29}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \phi(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha) \frac{d^2}{d\alpha^2} \xi(\alpha) + (2\eta\alpha^{\eta-1} - 1) \frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha) + \eta(\eta+1)\alpha^{\eta-2} \xi(\alpha), \tag{30}$$

où

$$\frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha) = 2 \left\langle \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{\mathbb{H}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} \xi(\alpha) = 2 \left\langle \frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{\mathbb{H}} + 2 \left\| \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2.$$

Dans notre cas, pour les solutions approchées $f_\alpha^{n,\delta}$, on donne l'écriture exacte de ces expressions $\frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}$ et $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}$ dans l'Algorithme 1. D'après la formule (15), on a

$$\frac{d^l}{d\alpha^l} f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{j=0}^{n} \frac{d^l}{d\alpha^l} d_j(\alpha) \mathsf{K}^* \psi_c^j = \left\langle d^{(l)}(\alpha), \Psi \right\rangle_2 \text{ pour } \forall l \geq 0, \tag{31}$$

où

$$d^{(l)}(\alpha) = (\frac{d^l}{d\alpha^l} d_0(\alpha), \frac{d^l}{d\alpha^l} d_1(\alpha), ..., \frac{d^l}{d\alpha^l} d_n(\alpha))^t \text{ et } \Psi = (\mathsf{K}^* \psi_c^0, \mathsf{K}^* \psi_c^1, ..., \mathsf{K}^* \psi_c^n)^t.$$

En vertu du Lemme suivant, on donne l'écriture de la dérivé $\frac{d^l}{d\alpha^l} d_j(\alpha)$ pour $l \geq 1$, $0 \leq j \leq n$ et pour tous $\alpha > 0$.

Lemme 3:
Soit $d(\alpha)$ la solution du système (18) et soit $l \geq 1$, alors la dérivé $\frac{d^l}{d\alpha^l} d(\alpha)$ est la solution unique du système

$$\mathbf{A}_n \frac{d^l}{d\alpha^l} d(\alpha) = -l \frac{d^{l-1}}{d\alpha^{l-1}} d(\alpha), \, l \geq 1, \tag{32}$$

où la matrice $\mathbf{A}_n$ est définie dans le système (18).

Remarque 3:
Dans l'Algorithme 1, on calcule $\frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}$, $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}$ par la résolution des systèmes (32) (Lemme 3), pour $l = 1, 2$, et la formule (15).

Conclusion. Le présent travail est une variante améliorée de la méthode (LSQ)-projection. Cette procédure de régularisation avec deux paramètres α et N (α le paramètre de régularisation, N la dimension du sous-espace de projection) nous permet d'améliorer la qualité de la solution approchée régularisée : le paramètre N participe dans la troncature spectrale pour éliminer les hautes fréquences, et le paramètre α comme un coefficient correcteur.

RÉFÉRENCES

[1] T. Bechouat, N. Boussetila, F. Rebbani. A Variant of Projection-Regularization Method for Ill-Posed Linear Operator Equations, *International Journal of Computational Methods* Vol. 18, No. 04, 2150008 (2021).

[2] J.P. Boyd. Prolate spheroidal wavefunctions as an alternative to Chebyshev and Legendre polynomials for spectral element and pseudospectral algorithms, *Journal of Computational Physics*, 199, 688–716, (2004).

[3] A. Osipov, V. Rokhlin, H. Xiao, Prolate spheroidal wave functions of order zero, Springer 2013.

[4] A. Bonami, A. Karoui. Approximations in Sobolev spaces by prolate spheroidal wave functions, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol.42, No.3, 361–377, (2017).

[5] HW. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. Regularization of inverse problems, Springer 1996.

[6] Y. Wang, T. Xiao. Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems, *Inverse Problems*, Vol. 17, No. 2, 281, (2001).

[7] K. Kunisch, J. Zou. Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems, *Inverse Problems*, Vol. 14, No. 5, 1247, (1998).