



HAL
open science

Modélisation des processus de fragmentation à l'aide des processus de branchement

Gaetano Agazzotti

► **To cite this version:**

Gaetano Agazzotti. Modélisation des processus de fragmentation à l'aide des processus de branchement. Probabilités [math.PR]. 2022. hal-03708575

HAL Id: hal-03708575

<https://inria.hal.science/hal-03708575>

Submitted on 29 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DES MINES DE NANCY
& INSTITUT ÉLIE CARTAN

RAPPORT DE PARCOURS RECHERCHE 2022

Modélisation
des processus de fragmentation
à l'aide des processus de branchement

Gaetano AGAZZOTTI

encadré par

Madalina DEACONU et Antoine LEJAY



Inria

Table des matières

1	Introduction	4
2	Préliminaires mathématiques	5
2.1	Processus de Galton-Watson	5
2.1.1	Notations et interprétations	5
2.1.2	Quelques propriétés	6
2.1.3	Distinction des cas et informations sur ξ	9
2.1.4	Théorèmes limites	11
2.2	Mouvement brownien	15
2.3	Modèle F-KPP	17
2.3.1	Modèle	17
2.3.2	Propriétés	18
3	Équation de diffusion-fragmentation	21
3.1	Modèle de diffusion-fragmentation	21
3.2	Existence d'une solution par méthode de point fixe	23
3.2.1	Construction d'une suite grâce au principe de Picard	23
3.2.2	Construction d'une norme et relation entre $\ \delta_{k+1}\ $ et $\ \delta_k\ $	25
3.2.3	Convergence de la suite δ_k	30
3.2.4	Passage du temps court en temps long	32

4	Simulation numérique pour différents noyaux de fragmentations	33
4.1	Noyau de fragmentation d'équi-répartition	33
4.2	Noyau de fragmentation aléatoire	35
4.3	Noyau fixe	37
4.4	Conclusion	38
5	Simulation numérique pour différentes durées de vie	39
5.1	Evolution de la population en fonction du temps	39
5.1.1	Approche heuristique pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \neq 0$	39
5.2	Résolution théorique des cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$	41
5.2.1	Équation de la population	41
5.2.2	Cas $\alpha = 0$	41
5.2.3	Cas $\alpha = 1$	43
5.3	Résultats pour d'autres valeurs de α	44
5.4	Validation numérique de l'hypothèse	45
5.5	Indépendance numérique de la diffusion, de la masse et de la durée de vie	46
6	Bilan et Perspectives	48
7	Annexes	49
7.1	Processus de Galton-Watson	49
7.2	Modèle de diffusion-fragmentation	51

Chapitre 1

Introduction

L'étude de populations dont les caractéristiques sont régies par certaines équations est un vaste domaine de recherche mathématique. On peut mentionner par exemple les modèles proie-prédateur (Lokta-Volterra), le modèle SIR et le modèle logistique ([7]). Nous avons effectué ce parcours recherche autour des processus dits de fragmentation-diffusions. Ces processus ont pour but de modéliser un système de particules qui se meuvent (diffusion) et peuvent se casser (fragmentation) en d'autres particules plus petites. Notre but est, étant donné la loi de la durée de vie des particules et la façon dont elle se cassent, de savoir à tout instant le nombre de particules d'une masse et d'une position donné.

Un des premiers modèles utilisé pour décrire ce type de comportement est le modèle F-KPP qui vit le jour dans un article de 1947 [2]. Dans cet article, les particules bougent mais les auteurs considèrent que toutes les particules ont la même masse.

D'autres modèles tiennent compte de la masse. Par exemple, dans [9, 4, 1], on considère des particules qui peuvent grossir et qui se cassent au bout d'un certain temps. Ceci mène à étudier une EDP dont les dérivées sont d'ordre 1 en temps et en espace. Cependant, cette équation ne prend pas en compte le mouvement des particules.

Aussi, certains auteurs considèrent une diffusion portant sur la masse des particules [10]. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la diffusion porte sur la variable spatiale alors que d'autres modèles aussi appelés dits de diffusion-fragmentation, appliquent la diffusion et la fragmentation sur la même caractéristique. Notre motivation vient de la modélisation de phénomènes tels les avalanches.

Une grande partie de notre travail a porté sur deux thèmes. Le premier est l'étude de l'existence d'une solution par méthode de point fixe [8] et le deuxième porte sur la modélisation de l'étude démographique de la population. Pour parvenir à cette étude, il a été nécessaire de s'approprier des éléments mathématiques théoriques tels que les processus de Galton-Watson et le mouvement brownien (étudiés dans [11] et [3]).

Chapitre 2

Préliminaires mathématiques

2.1 Processus de Galton-Watson

Introduction

Les processus de Galton-Watson vont servir à modéliser l'évolution d'une population où chaque individu donne naissance à un nombre aléatoire d'enfants et où ce nombre suit la même loi de probabilité d'un individu à l'autre. On supposera de plus que les individus sont indépendants.

2.1.1 Notations et interprétations

Modèle 2.1.1: Galton-Watson

- ★ un seul individu à la première génération,
- ★ chaque individu à un nombre d'enfants suivant la même loi de probabilité,
- ★ les individus sont indépendants entre eux.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et (E, \mathcal{E}) un espace mesurable où $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

- Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on définit $X_k^{(n)}$ des variables aléatoires discrètes **i.i.d.** définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on notera $p_i = \mathbb{P}(X_k^{(n)} = i)$.
- On définit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_k^{(n)}. \end{cases}$$

On appellera $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **processus de Galton-Watson** ou **processus de branchement**.

- On notera Φ la fonction génératrice des $X_k^{(n)}$ et, pour tout $n \geq 1$, Φ_n la fonction génératrice de Z_n .
- Comme les $X_k^{(n)}$ sont i.i.d., on notera X une variable aléatoire ayant la même loi que les $X_k^{(n)}$ et on supposera que X est intégrable. On notera alors $m = \mathbb{E}(X)$.

2.1.2 Quelques propriétés

La question de l’extinction ou de la survie d’une population est une question clef. Définissons la probabilité que la lignée s’éteigne.

Définition 2.1.1: Probabilité d’extinction

On définit $\tau := \inf \{n \in \mathbb{N} | Z_n = 0\}$ (fini ou pas) appelé **instant d’extinction** et :

$$\xi := \mathbb{P}(\tau < \infty).$$

On appelle ainsi ξ **probabilité d’extinction**.

La probabilité que la lignée s’éteigne est ξ . Ainsi, c’est la probabilité qu’à partir d’un certain rang n , $Z_n = 0$. C’est donc également la probabilité que $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$.

Proposition 2.1.1

La probabilité d’extinction vérifie l’égalité suivante :

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si il n’y a plus d’individus à une génération, il n’y aura plus à la prochaine. Ainsi, on a $\{Z_n = 0\} \implies \{Z_{n+1} = 0\}$. La suite $(\{Z_n = 0\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d’événements. Ainsi, on a :

$$\{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}.$$

Par le théorème de la limite croissante, il vient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Or, par la définition, on a $\xi = \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0)$ et donc $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

Proposition 2.1.2: Fonction génératrice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction génératrice vérifie l'égalité :

$$\Phi_{n+1}(t) = \Phi_n(\Phi(t)).$$

Il vient immédiatement que $\Phi_n = \Phi^n$ où Φ^n est la composée n fois de la fonction Φ

Démonstration :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$.

Par définition de la fonction génératrice on a :

$$\Phi_{n+1}(t) = \mathbb{E}(t^{Z_{n+1}}) = \mathbb{E}\left(t^{\sum_{k=1}^{Z_n} X_k^{(n)}}\right).$$

En conditionnant, il vient :

$$\Phi_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(t^{\sum_{k=1}^{Z_n} X_k^{(n)}} | Z_n = i) \mathbb{P}(Z_n = i).$$

L'indépendance par rapport à la valeur de Z_n donne :

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(t^{\sum_{k=1}^i X_k^{(n)}} | Z_n = i) \mathbb{P}(Z_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(t^{\sum_{k=1}^i X_k^{(n)}}) \mathbb{P}(Z_n = i). \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'indépendance des $(X_k^{(n)})_k$,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=1}^i \mathbb{E}(t^{X_k^{(n)}}) \mathbb{P}(Z_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(t^X)^i \mathbb{P}(Z_n = i). \end{aligned}$$

On retrouve la définition de la fonction génératrice évaluée en $\mathbb{E}(t^X)$,

$$\Phi_{n+1}(t) = \Phi_n(\mathbb{E}(t^X)),$$

et on retrouve l'énoncé :

$$\Phi_{n+1}(t) = \Phi_n(\Phi(t)).$$

Donc, comme la fonction génératrice de Z_1 est la même que celle de X (à la première génération, il n'y a qu'un individu, ainsi le nombre d'enfants qu'il fait est égale à Z_1). Par récurrence immédiate, on aboutit au résultat souhaité.

Proposition 2.1.3

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de la taille de la $n^{\text{ième}}$ génération est donnée par :

$$\mathbb{E}(Z_n) = m^n.$$

Démonstration :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$. En utilisant la Proposition 2.1.2 et la dérivée de la composée, il vient :

$$\Phi'_{n+1} = (\Phi_n \circ \Phi)' = \Phi' \times \Phi'_n \circ \Phi.$$

Par récurrence immédiate et en utilisant le fait (comme au-dessus) que $\Phi = \Phi_1$, on a : $\Phi'_n = (\Phi')^n$. **L'exposant désigne ici le produit.** D'après les propriétés sur les fonctions génératrices, on a :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \Phi'_n(1) = (\Phi(1)')^n = m^n.$$

Nous avons conçu un code permettant de visualiser les résultats et les arbres sur un processus de Galton-Watson (Annexe 1). Voici un exemple d'arbre obtenu avec une loi progéniture dont la moyenne vaut $m = 1,7$ et la taille de la population finale de l'ordre de la centaine. L'affichage est réalisé avec la librairie Tkinter de Python. Dans la Figure 2.1, on voit donc la population expérimentale, celle attendue et l'arbre associé. La croissance exponentielle prévue est bien vérifiée.

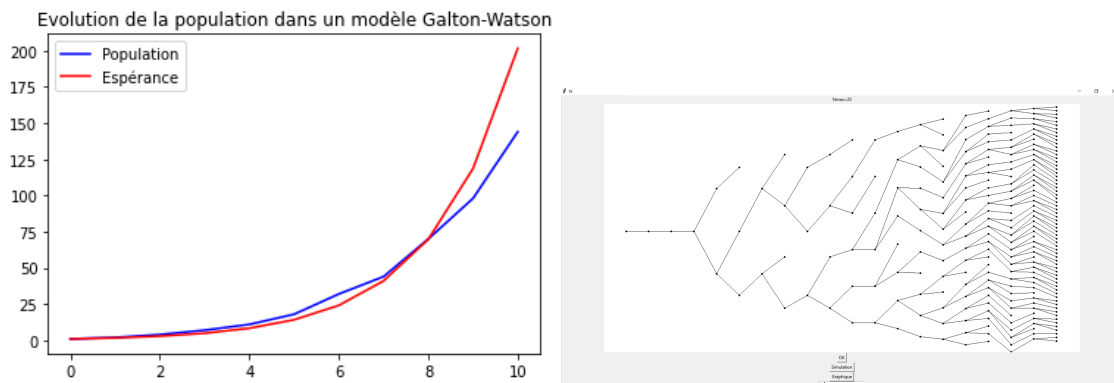


FIGURE 2.1 – Population et arbre d'un processus de Galton-Watson

Sans se lancer dans de nombreux calculs, on peut déjà distinguer un cas. En effet, on voit que si $m < 1$, Z_n tend vers 0 (i.e. que la lignée s'éteindra). Il est logique que si chaque individu donne naissance à moins d'un enfant en moyenne, la taille des générations diminue pour atteindre 0. On peut même aller plus loin, dans le cas où $m > 1$, on peut donner la taille de la population totale espérée.

Proposition 2.1.4: Taille de population

On note $N := \sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ et l'on appelle **taille de la population**. Si $m < 1$, la taille moyenne de la population est :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - m}.$$

Démonstration :

La démonstration est directe par définition de N :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m^i = \frac{1}{1 - m}.$$

2.1.3 Distinction des cas et informations sur ξ

A présent, on va chercher à trouver des informations sur la valeur de ξ en fonction de la valeur de m .

Proposition 2.1.5: Point fixe de Φ en tant que probabilité d'extinction

La probabilité d'extinction est le plus petit point fixe de Φ , i.e.

$$\xi = \inf\{t \in [0, 1] | t = \Phi(t)\}.$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons déjà que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \Phi_n(0)$. D'où par la Proposition 2.1.1, on a :

$$\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(\Phi_{n-1}(0)).$$

Par propriété des séries entières (ou des fonction génératrices), on a que Φ est continue. On peut donc écrire que :

$$\xi = \Phi(\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{n-1}(0)) = \Phi(\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(0)) = \Phi(\xi).$$

On a donc montré que ξ est un point fixe de Φ . Montrons que c'est le plus petit. Soit ξ' un autre point fixe de Φ . Remarquons que Φ est croissante (même convexe). On a alors $\Phi_n(0) \leq \Phi_n(\xi') = \xi'$ (en effet, si ξ est un point fixe de Φ , c'est aussi un point fixe de la $n^{\text{ième}}$ composée de Φ , donc d'après la Proposition 2.1.2, c'est aussi un point fixe de Φ_n).

En passant à la limite dans l'inégalité $\Phi_n(0) \leq \xi'$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(0) = \xi$ d'après la Proposition 2.1.1, on a que $\xi \leq \xi'$. ξ est donc le plus petit point fixe de Φ .

Proposition 2.1.6: 3 cas des arbres de Galton-Watson

On distingue 3 cas pour les processus de Galton-Watson :

- Si $m < 1$, $\xi = 1$ p.s. (**cas sous-critique**)
- Si $m = 1$, $\xi = 0$ p.s. si $p_1 = 1$ et $\xi = 1$ p.s. si $p_1 \neq 1$ (**cas critique**)
- Si $m > 1$, $\xi \in [0, 1[$ p.s. (**cas sur-critique**).

Démonstration :

Cas sous-critique : La fonction Φ est convexe, donc Φ est au-dessus de ses tangentes, en particulier, la tangente en 1 d'équation $T_1 : y = m(x - 1) + 1$. Ainsi, on a que $d(x) := \Phi(x) - x \geq (x - 1)(m - 1)$. Or $d(0) = -(m - 1) > 0$ et $d(1) = 0$. Comme d est une fonction affine, on en déduit que $d(x) > 0$ sur $[0, 1[$. Donc d s'annule uniquement en 1. Par la proposition 2.1.5, on a $\xi = 1$.

Cas critique : Nous distinguons 2 cas, $p_1 = 1$ et $p_1 \neq 1$.

Si $p_1 = 1$, alors $\Phi(t) = t$. Or, tous les points du segment unité sont des points fixes de Φ . Par la Proposition 2.1.5, $\xi = 0$.

Si $p_1 \neq 1$, comme $m = 1$, on a $p_0 = 0$ et on sait qu'il existe un $k \geq 2$ tel que $p_k \neq 0$. Ainsi, Φ est strictement convexe. Φ est donc strictement supérieure à ses tangentes, dont celle en 1. On a donc que, comme $m = 1$:

$$\forall x \in [0, 1[, d(x) > (x - 1)(m - 1) = 0.$$

Finalement, d s'annule donc uniquement en 1, d'où $\xi = 1$.

Cas sur-critique : Soit $h > 0$. On a $d(1 - h) = d(1) - hd'(1) + O(h^2)$. Or $d'(1) = \Phi'(1) - 1 = m - 1$ et $d(1) = 0$, donc $d(1 - h) = -h(m - 1) + O(h^2)$. Pour h , suffisamment petit, $d(1 - h)$ est donc négatif. Comme $d(0) = p_0 \geq 0$ et que d est continue, d s'annule donc sur $[0, 1[$. Ainsi, $\xi \in [0, 1[$.

2.1.4 Théorèmes limites

Proposition 2.1.7: Cas sous-critique

Pour $m < 1$ et $\sigma < \infty$, il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \underset{+\infty}{\sim} Cm^n.$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1$ d'après la Proposition 2.1.6. Ainsi, on en déduit :

$$\begin{aligned} 1 - \Phi_{n+1}(0) &= 1 - \Phi(\Phi_n(0)) \\ &= 1 - \Phi(1 - (1 - \Phi_n(0))) \\ &= 1 - [\Phi(1) - (1 - \Phi_n(0))\Phi'_n(1) + K] \text{ (où } K \text{ est un } O((1 - \Phi_n(0))^2)). \end{aligned}$$

On peut utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 car la dérivée seconde de Φ en 1 existe, en effet, $\Phi''(1) = \sigma^2 < \infty$. Par convexité de Φ , le reste d'ordre 2 est positif à partir d'un certain rang (abrégé A.P.D.C.R.). En effet, à l'ordre 1, comme Φ est au-dessus de ses tangentes, le reste d'ordre suivant (*i.e.* ordre 2) doit compenser pour approcher Φ . K doit donc être positif A.P.D.C.R.. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 1 - \Phi_{n+1}(0) &= 1 - 1 + (1 - \Phi_n(0))\Phi'(1) - K \\ &= m(1 - \Phi_n(0)) - K. \end{aligned}$$

A.P.D.C.R. n_0 , il existe $L > 0$ tel que, pour tout $n > n_0$:

$$m(1 - \Phi_n(0)) - L(1 - \Phi_n(0))^2 \leq 1 - \Phi_{n+1}(0) \leq m(1 - \Phi_n(0)). \quad (2.1)$$

Par récurrence immédiate sur la deuxième partie de l'inégalité, on a :

$$1 - \Phi_n(0) \leq m^n. \quad (2.2)$$

En divisant (2.1) par $m(1 - \Phi_n(0))$, on a ($m^{-1} = m^{-(n+1)}/m^{-n}$) :

$$1 - \frac{L(1 - \Phi_n(0))}{m} \leq \frac{m^{-(n+1)}(1 - \Phi_{n+1}(0))}{m^{-n}(1 - \Phi_n(0))} \leq 1.$$

En combinant les inégalités (2.1) et (2.2), il résulte que :

$$1 - Lm^{n-1} \leq \frac{m^{-(n+1)}(1 - \Phi_{n+1}(0))}{m^{-n}(1 - \Phi_n(0))} \leq 1.$$

Comme $m < 1$, il existe n_1 , tel que pour tout $n > \max(n_1, n_0)$, $1 - Lm^{n-1} > 0$. Ainsi, on a :

$$\ln(1 - Lm^{n-1}) \leq \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}(1 - \Phi_{n+1}(0))}{m^{-n}(1 - \Phi_n(0))}\right) \leq 0.$$

On pose alors $u_n = m^{-n}(1 - \Phi_n(0))$, on a donc :

$$\ln(1 - Lm^{n-1}) \leq \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 0.$$

Comme Lm^{n-1} tend vers 0 à l'infini, on a $\ln(1 - Lm^{n-1}) \sim_{+\infty} -Lm^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, par encadrement, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est le terme général d'une série convergente. Or, on a que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ qui est le terme général d'une série convergente (par encadrement) et télescopique.

Par propriété sur les séries télescopiques, il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = C'$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{C'} := C > 0.$$

Par définition de u_n : $\lim_{n \rightarrow +\infty} m^{-n}(1 - \Phi_n(0)) = C$. Or comme $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \Phi_n(0)$, on a $\mathbb{P}(Z_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \Phi_n(0)$. Rappelons également que $\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{P}(\tau > n)$, en effet, si il y a des individus à la génération n , c'est que dans le cas d'une extinction, celle-ci arrivera nécessairement à une génération $p > n$.

On a donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m^{-n}\mathbb{P}(\tau > n) = C$, i.e. :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \sim_{+\infty} C m^n \text{ où } C \in \mathbb{R}_+^*.$$

Proposition 2.1.8: Cas critique

Pour $m < 1$ et $\sigma < \infty$, la probabilité de survie après un temps n admet l'équivalent :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \sim_{\infty} \frac{2}{n\sigma^2}.$$

Démonstration :

Comme $\Phi''(1) = \sigma^2 < \infty$, on peut faire un développement de Taylor à l'ordre 2 sur $[0, 1]$. On a donc :

$$\forall t \in [0, 1], \Phi(t) = \Phi(1) + (1-t)\Phi'(1) + \frac{(1-t)^2}{2}\sigma^2 + (1-t)^2\alpha(t) \text{ où } \lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = 0.$$

D'où, comme $\Phi(1) = 1$ et $\Phi'(1) = 1$ (cas critique), on a :

$$\forall t \in [0, 1], \Phi(t) = t + \frac{(1-t)^2}{2}\sigma^2 + (1-t)^2\alpha(t) \text{ où } \lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = 0.$$

Soit $t \in [0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\Phi(t)} - \frac{1}{1-t} &= \frac{1-t-1+\Phi(t)}{(1-\Phi(t))(1-t)} \\ &= \frac{\Phi(t)-t}{(1-\Phi(t))(1-t)}. \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor au numérateur et au dénominateur, puis en factorisant par $(1-t)$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\Phi(t)} - \frac{1}{1-t} &= \frac{\frac{(1-t)^2}{2}\sigma^2 + (1-t)^2\alpha(t)}{(1-\Phi(t))(1-t)} \\ &= \frac{\frac{(1-t)}{2}\sigma^2 + (1-t)\alpha(t)}{1-\Phi(t)} \\ &= \frac{\frac{(1-t)}{2}\sigma^2 + (1-t)\alpha(t)}{1-t - \frac{(1-t)^2}{2}\sigma^2 - (1-t)^2\alpha(t)} \\ &= \frac{\frac{(1-t)}{2}\sigma^2 + (1-t)\alpha(t)}{(1-t)(1 - \frac{(1-t)}{2}\sigma^2 - (1-t)\alpha(t))} \\ &= \frac{\frac{\sigma^2}{2} + \alpha(t)}{1 - \frac{(1-t)}{2}\sigma^2 - (1-t)\alpha(t)}. \end{aligned}$$

Comme on a $\lim_{t \rightarrow 1} (1 - \frac{\sigma^2}{2}(1-t) - (1-t)\alpha(t)) = 1$, on peut faire un développement limité du dénominateur de la dernière égalité, il vient :

$$\frac{1}{1-\Phi(t)} - \frac{1}{1-t} = \left(\frac{\sigma^2}{2} + \alpha(t)\right) \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}(1-t) + (1-t)\alpha(t) + (1-t)\tilde{\alpha}(t)\right),$$

où $\lim_{t \rightarrow 1} \tilde{\alpha}(t) = 0$. Dans le membre de droite, le seul terme ne tendant pas vers 0 en 1 est $\sigma^2/2$. On peut donc définir une fonction R continue avec $\lim_{t \rightarrow 1} R(t) = 0$, telle que :

$$\frac{1}{1-\Phi(t)} - \frac{1}{1-t} = \frac{\sigma^2}{2} + R(t).$$

En évaluant cette équation successivement, en $\Phi_k(t)$ pour $k \leq n$ où n est fixé, on a les égalités suivantes (par la Proposition 2.1.2) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \Phi(t)} - \frac{1}{1 - t} &= \frac{\sigma^2}{2} + R(t) \\ \frac{1}{1 - \Phi_2(t)} - \frac{1}{1 - \Phi(t)} &= \frac{\sigma^2}{2} + R(\Phi(t)) \\ &\dots \\ \frac{1}{1 - \Phi_n(t)} - \frac{1}{1 - \Phi_{n-1}(t)} &= \frac{\sigma^2}{2} + R(\Phi_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

En sommant toutes ces égalités, il vient :

$$\frac{1}{1 - \Phi_n(t)} - \frac{1}{1 - t} = \frac{n\sigma^2}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} R(\Phi_i(t)).$$

En prenant cette égalité en $t = 0$ et en divisant par n , on a :

$$\frac{1}{n(1 - \Phi_n(0))} - \frac{1}{n} = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} R(\Phi_i(0)).$$

On avait déjà vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(0) = 1$ et par continuité de R , soit $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $R(\Phi_n(0)) \leq \epsilon$. Ainsi, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} R(\Phi_i(0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n_0} R(\Phi_i(0)) + \frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^{n-1} R(\Phi_i(0)).$$

Or, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n_0} R(\Phi_i(0))$ tend vers 0 car c'est une somme finie. De plus, $\frac{1}{n} \sum_{i=n_0+1}^{n-1} R(\Phi_i(0)) \leq \frac{n-n_0}{n} \epsilon \rightarrow \epsilon$. Ainsi, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} R(\Phi_i(0)) \leq \epsilon$ à partir d'un certain rang n_0 .

On a donc que :

$$\frac{1}{n(1 - \Phi_n(0))} \sim \frac{\sigma^2}{2}.$$

Nous avons vu à la fin de la démonstration du cas sous-critique que $\mathbb{P}(\tau > n) = 1 - \Phi_n(0)$.

On a donc bien que :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \sim \frac{2}{n\sigma^2}.$$

2.2 Mouvement brownien

L'étude de quelques propriétés du mouvement paraît indispensable à l'étude des trajectoires des particules. Intuitivement, une trajectoire brownienne est « une trajectoire qui à tout moment, a la même probabilité d'aller à droite ou à gauche ». Définissons formellement le mouvement brownien.

Définition 2.2.1: Mouvement brownien

Soit $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique. Le processus B est appelé *mouvement brownien* si :

- ★ ses trajectoires $t \mapsto B_t$ sont p.s. continues
- ★ pour tout $n \geq 2$, tous $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ sont indépendantes
- ★ pour $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t - s)$.

C'est un processus stationnaires à accroissements indépendants . On le qualifie de mouvement brownien standard si $B_0 = 0$.

On trouve parfois le mouvement brownien défini par la caractérisation suivante.

Proposition 2.2.1: Caractérisation du mouvement brownien par la covariance

Soit $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique. B est un mouvement brownien si et seulement si B est un processus stochastique gaussien, centré, avec des trajectoires continues, et de covariance :

$$\forall t, s \geq 0, \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t).$$

Démonstration :

Le mouvement brownien a d'importantes propriétés permettant de construire des mouvements browniens à partir d'eux-mêmes. **Sens direct :** Soient $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ et $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. On a alors $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ des variables gaussiennes indépendantes (par hypothèse). Ainsi, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est alors un vecteur gaussien comme combinaison linéaire de vecteurs gaussiens. De plus, en supposant $t \geq s$ sans perte de généralités, on a :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_s, B_t) &= \mathbb{E}((B_s - \mathbb{E}(B_s))(B_t - \mathbb{E}(B_t))) \\ &= \mathbb{E}(B_s B_t) \quad (B \text{ processus centré}) \\ &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= 0 + s = s \quad (\text{accroissements indépendants et loi normale}) \end{aligned}$$

$$= \min(s, t).$$

Ainsi, comme B a des trajectoires continues, le sens direct est montré.

Sens indirect : Soit B processus stochastique gaussien, centré, avec des trajectoires continues, et de covariance :

$$\forall t, s \geq 0, \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t).$$

Soit $t \geq s \geq 0$. On a $B_t - B_s$ qui suit une loi normale de moyenne 0 (processus gaussien, centré). De plus, sa variance vaut $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t + s - 2s = t - s$ (par hypothèse), ce qui montre le troisième point. Ainsi, B est donc un mouvement brownien.

Proposition 2.2.2: Transformations de browniens

Soit B un mouvement brownien. Les processus stochastiques suivants, pour $t \geq 0$:

- * $-B_t$,
- * $B_{t+s} - B_s$ pour $s \geq 0$,
- * $a^{-\frac{1}{2}}B_{at}$ pour $a > 0$,

sont aussi des mouvements browniens.

Démonstration :

On utilise la caractérisation ci-dessus. On montre facilement que ce sont des processus gaussiens, centrés, à trajectoires continues (composée de fonctions continues) et que $\forall t, s \geq 0, \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$. Traitons la covariance du dernier cas.

Soit $t \geq s \geq 0, a > 0$ et B un mouvement brownien. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a^{-\frac{1}{2}}B_{at}, a^{-\frac{1}{2}}B_{as}) &= \mathbb{E}(a^{-\frac{1}{2}}B_{at}a^{-\frac{1}{2}}B_{as}) \\ &= a^{-1}\mathbb{E}(B_{at}B_{as}) \\ &= a^{-1}as \\ &= s = \min(s, t). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

A présent, voyons un moyen de construire un mouvement brownien. L'idée est de prendre une marche aléatoire d'un certain pas et de faire tendre celui-ci vers 0.

Proposition 2.2.3: Théorème de Donsker : construction du mouvement brownien

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire i.i.d., centrées, de variance σ^2 et de carré intégrable. L'interpolation affine des variables $\sum_{i=0}^n X_i$ converge en loi vers un mouvement brownien. Autrement dit,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor} X_i + (nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{Loi} B,$$

où B est un mouvement brownien.

Démonstration :

On trouvera la démonstration dans l'ouvrage de William Feller [5].

Pour fixer les idées, nous avons également programmé une approximation de mouvement brownien (cf. le théorème de Donsker). On peut le voir dans la Figure 2.2.



FIGURE 2.2 – Mouvement brownien construit comme limite de marche aléatoire, par le théorème de Donsker

2.3 Modèle F-KPP

2.3.1 Modèle

Grâce aux processus de Galton-Watson et au mouvement brownien, il est désormais possible d'introduire un modèle de diffusion-fragmentation, ici le F-KPP [8].

Modèle 2.3.1: F-KPP (1937)

- ★ On considère une particule à l'instant 0,
- ★ Chaque particule a une durée de vie suivant une loi exponentielle (de paramètre 1),
- ★ Chaque particule suit une trajectoire brownienne,
- ★ A la mort d'une particule, deux particules se créent,
- ★ Les particules sont indépendantes entre elles.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on notera :

- ★ $\mathcal{N}(t)$ l'ensemble des particules en vie à l'instant t et $n(t) = \text{Card}\mathcal{N}(t)$ le nombre de particules en vie,
- ★ $X_i(t)$ la position de la particule $i \in \mathcal{N}(t)$,
- ★ $M(t) = \max_{i \in \mathcal{N}(t)} X_i(t)$, position de la particule la plus à droite.

2.3.2 Propriétés

La première propriété porte sur la croissance du nombre de particule en vie.

Proposition 2.3.1: Démographie exponentielle

La population en vie croît de manière exponentielle, autrement dit, pour $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}(n(t)) = e^t.$$

Démonstration :

Pour prouver ce résultat, on va faire une distinction de cas selon la durée de vie de la première particule que l'on notera τ . Soit $t \geq 0$:

- ★ si $\tau \geq t$, on a $n(t) = 1$
- ★ si $\tau < t$, la particule originelle se casse et donne naissance à deux particules indépendantes. Cela revient à considérer le nombre de particules de deux processus indépendants à $t - \tau$. C'est à dire que $\mathbb{E}(n(t)) = 2\mathbb{E}(n(t - \tau))$.

Ainsi, on a :

$$\mathbb{E}(n(t)) = \mathbb{P}(\tau \geq t) + 2\mathbb{E}(n(t - \tau))\mathbb{P}(\tau < t).$$

Or, les particules ont une durée de vie suivant une loi exponentielle de paramètre 1, d'où $\mathbb{P}(\tau \geq t) = e^{-t}$ et $\mathbb{P}(\tau \in dt) = e^{-t}dt$.

De plus, on a, en décomposant sur toutes les fragmentations possibles :

$$\mathbb{E}(n(t - \tau))\mathbb{P}(\tau < t) = \int_0^t \mathbb{E}(n(t - u))\mathbb{P}(\tau \in du).$$

Ainsi, il vient :

$$\mathbb{E}(n(t)) = e^{-t} + 2 \int_0^t \mathbb{E}(n(t - u))e^{-u} du. \quad (2.3)$$

On dérive l'équation (2.3),

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{E}(n(t)) &= -e^{-t} + 2\mathbb{E}(n(t - t))e^{-t} + 2 \int_0^t \partial_t \mathbb{E}(n(t - u))e^{-u} du \\ &= -e^{-t} + 2e^{-t} + 2 \int_0^t \partial_t \mathbb{E}(n(t - u))e^{-u} du \quad (1 \text{ particule initialement}) \\ &= -e^{-t} + 2\mathbb{E}(n(t)) - 2 \int_0^t e^{-u} \mathbb{E}(n(t - u)) du \quad (\text{IPP}) \end{aligned}$$

et avec (2.3), on a,

$$\partial_t \mathbb{E}(n(t)) = 2\mathbb{E}(n(t)) - \mathbb{E}(n(t))$$

et finalement,

$$\partial_t \mathbb{E}(n(t)) = \mathbb{E}(n(t)) \text{ et } \mathbb{E}(n(0)) = 1.$$

On a bien $\mathbb{E}(n(t)) = e^t$.

Proposition 2.3.2: Equation solution F-KPP

Le modèle F-KPP est régi par l'équation suivante :

$$\partial_t u(t, x) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x) = u(t, x)(1 - u(t, x)).$$

Les solutions sont de la forme :

$$u(t, x) = \prod_{i \in N(t)} f(x + X_i(t)) \text{ et } u(0, x) = f(x)$$

où f est une fonction bornée. De plus, si $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, alors :

$$u(t, x) = \mathbb{P}(M(t) > x).$$

Proposition 2.3.3: Théorème de Bramson

Pour la condition initiale $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, on a :

$$u(t, m(t) + x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} w(x)$$

où $m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t) + C + o(1)$ et $\frac{1}{2}w'' + \sqrt{2}w' + w(w - 1) = 0$.

De plus, $u(t, x) = w(x - \sqrt{2}t)$ est donc solution de F-KPP.

Grâce à une programmation en Class, nous avons aussi mis au point un algorithme pouvant simuler le modèle F-KPP, adaptable à l'équation de diffusion-fragmentation. Ainsi, on peut observer dans la Figure 2.3 les trajectoires, la population et l'histogramme des positions à l'arrivée des particules au temps maximum fixé.

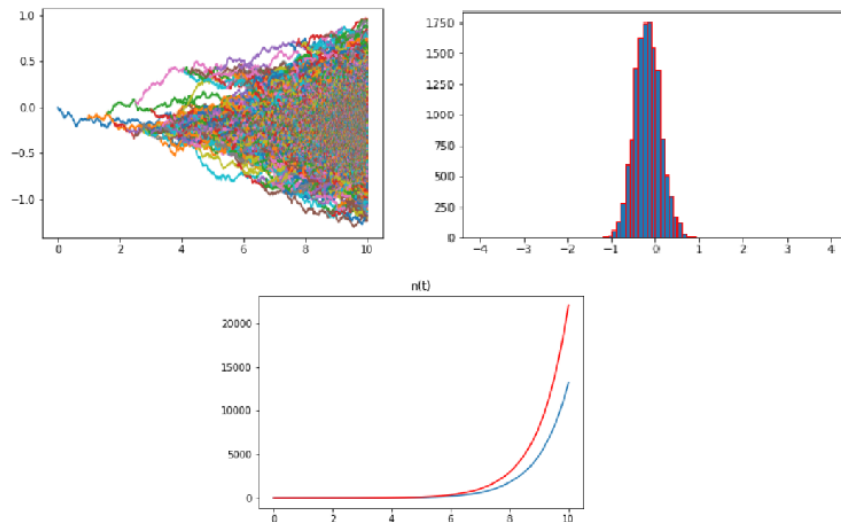


FIGURE 2.3 – Trajectoires, la population et l'histogramme des positions à l'arrivée des particules dans le modèle F-KPP

Pour la population, la courbe rouge est la population attendue et la bleue celle obtenue. On a bien une croissance exponentielle.

Chapitre 3

Équation de diffusion-fragmentation

Pour modéliser les phénomènes de diffusion-fragmentation de façon plus complexe, il faut tenir compte de la masse des particules. Nous noterons $c(t, x, m)$ le nombre de particule de masse m , à un endroit x , à un instant t .

Dans ce chapitre, on décrira le nouveau modèle, l'équation qui le régit et un résultat trouvé. On s'attachera dans la suite du parcours recherche à étudier, l'existence, l'unicité et tester d'autres loi de durée de vie.

Notons une nouvelle fois que le terme de diffusion-fragmentation fait référence à une diffusion spatiale. Il n'a pas le même sens que celui rencontré dans [9], [4] et [1].

3.1 Modèle de diffusion-fragmentation

Modèle 3.1.1: Modèle de diffusion-fragmentation

- ★ On considère une particule à l'instant 0 et de masse M ,
- ★ Chaque particule a une durée de vie suivant une loi (qui peut dépendre de sa masse, de sa position),
- ★ Chaque particule suit une trajectoire brownienne,
- ★ A la mort d'une particule de masse m , deux particules de masse m' et $m - m'$ avec $0 < m' < m$ naissent avec une probabilité $p(m'|m)$,
- ★ Les particules sont indépendantes entre elles.

Pour trouver l'équation régissant un tel modèle, nous adopterons en premier lieu une approche discrète en temps, masse et position. Par simplicité, nous considérerons également que les particules se meuvent uniquement selon un axe. Nos notations seront les suivantes :

- ★ h le pas de notre processus discret (volontairement imprécis ici)
- ★ $c_{i,j,k} = \mathbb{E}(c(i, j, k))$
- ★ σ la probabilité de se mouvoir par unité de temps
- ★ ρ la probabilité de se fragmenter par unité de temps en une particule de masse inférieure
- ★ $p(m'|m)$ la probabilité que lors d'une fragmentation, une particule de masse m se scinde en deux particules dont une est de masse m' .

Plaçons-nous à un instant k dans le plan masse-position. La probabilité de changer de position est alors σh et celle de se scinder ρh . On a alors :

$$c_{i,j,k+1} = c_{i,j,k} + \frac{\sigma h}{2}(c_{i+1,j,k} + c_{i-1,j,k}) + \sum_{l=j+1}^{\infty} hp(j|l)c_{i,l,j} - \rho hc_{i,j,k} - \sigma hc_{i,j,k}.$$

En effet, à l'instant d'après on a :

- ★ $c_{i,j,k}$ ce qu'il y avait au temps précédent,
- ★ $\frac{\sigma h}{2}(c_{i+1,j,k} + c_{i-1,j,k})$ les particules qui viennent de gauche ou de droite,
- ★ $\sum_{l=j+1}^{\infty} hp(j|l)c_{i,l,j}$ les particules de masse supérieure qui, en se scindant, ont généré une particule de masse j ,
- ★ $-\rho hc_{i,j,k}$ les particules les particules qui se sont scindées,
- ★ $-\sigma hc_{i,j,k}$ les particules qui ont bougé.

Ce qui donne alors :

$$c_{i,j,k+1} - c_{i,j,k} = \frac{\sigma h}{2}(c_{i+1,j,k} + c_{i-1,j,k} - 2c_{i,j,k}) + \sum_{l=j+1}^{\infty} hp(j|l)c_{i,l,j} - \rho hc_{i,j,k}.$$

De plus, si $h = \Delta t / (\Delta x)^2 = \Delta m \Delta t$ (à homogénéité près), on a :

$$\frac{c_{i,j,k+1} - c_{i,j,k}}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2} \frac{(c_{i+1,j,k} + c_{i-1,j,k} - 2c_{i,j,k})}{\Delta x^2} + \sum_{l=j+1}^{\infty} \Delta m p(j|l)c_{i,l,j} - \rho \Delta m c_{i,j,k}.$$

Sous de bonnes hypothèses, on a :

$$\partial_t c(t, x, m) = \frac{\sigma}{2} \partial_{xx}^2 c(t, x, m) + \int_m^{\infty} p(m|m')c(t, x, m)dm' - a(m)c(t, x, m).$$

On peut réécrire l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$\partial_t c(t, x, m) - \frac{\sigma}{2} \partial_{xx}^2 c(t, x, m) = \int_m^\infty p(m|m') c(t, x, m) dm' - a(m) c(t, x, m).$$

Cette réécriture, si anodine soit-elle, permet de mettre en évidence 2 choses : une partie diffusion (à gauche) et une partie fragmentation (à droite). A l'instar du cas discret, l'intégrale concerne les particules de masse supérieures qui, lors de leur fragmentation, donnent naissance à une particule de masse m et $a(x)$ et le taux de fragmentation des particules de masse m .

Si a est constant, le taux de fragmentation est indépendant de tout paramètre.

Définition 3.1.1: Équation de diffusion-fragmentation

L'équation régissant le nombre de particules du modèle de diffusion-fragmentation est :

$$\partial_t c(t, x, m) - \frac{\sigma}{2} \partial_{xx}^2 c(t, x, m) = \int_m^\infty p(m|m') c(t, x, m) dm' - a(m) c(t, x, m). \quad (3.1)$$

3.2 Existence d'une solution par méthode de point fixe

Le but de cette section est de prouver l'existence d'une solution par méthode de point fixe. Pour cela, définissons tout d'abord une fonction utile, appelée *noyau de la chaleur*, pour x et y réels et t positif :

$$H(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}.$$

L'objectif de cette partie est donc de prouver la Proposition 3.2.1

Proposition 3.2.1: Existence d'une solution

Sur $]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, l'équation

$$\partial_t c(t, x, m) - \frac{\sigma}{2} \partial_{xx}^2 c(t, x, m) = \int_m^\infty p(m|m') c(t, x, m) dm' - a(m) c(t, x, m)$$

admet une unique solution.

3.2.1 Construction d'une suite grâce au principe de Picard

Le but est de construire une suite de fonctions $(u_n)_{\mathbb{N}}$ convergente, dont la limite vérifie le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \mathcal{F}u \\ u(0, \cdot, \cdot) = u_0(\cdot, \cdot) = \delta_{0,M}(\cdot, \cdot). \end{cases}$$

Initialisons la suite avec :

$$u^0(t, x, m) = a \in \mathbb{R}.$$

Puis, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit u^{k+1} comme la solution au problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \mathcal{F}u^k \\ u(0, \cdot, \cdot) = u_0(\cdot, \cdot) = \delta_{0,M}(\cdot, \cdot). \end{cases}$$

Par la formule de Duhamel [6], on a :

$$u^{k+1}(t, x, m) = \int_{\mathbb{R}} H(t, x - x')u_0(x', m)dx' + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(t - t', x - x')\mathcal{F}u^k(t', x', m)dx'dt'.$$

Cette solution est appelée solution « mild ». Elle sont construites à travers la notion de semi-groupes que nous n'expliquerons pas ici (cf. [6]).

Le but est de montrer que cette suite ainsi définie est de Cauchy (et donc construire une norme associée). Pour ce faire, le plan est le suivant :

- ★ Trouver une relation entre δ_k et $\mathcal{F}\delta_k$
- ★ Trouver une relation entre $\mathcal{F}\delta_k$ et δ_{k+1}
- ★ Montrer que la suite est contractante
- ★ Montrer qu'elle est uniformément bornée
- ★ Montrer que la suite est de Cauchy.

Dans la suite, on pose :

$$\delta_{k+1} := u^{k+1} - u^k.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\delta_{k+1}(t, x, m) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(t - t', x - x')\mathcal{F}\delta_k(t', x', m)dx'dt'.$$

On verra par la suite que si on trouve une norme et une constante $K < 1$ telles que :

$$\|\delta_{k+1}\| \leq K\|\delta_k\|,$$

alors la suite est de Cauchy à condition que $\|u^1 - u^0\|$ soit fini.

3.2.2 Construction d'une norme et relation entre $\|\delta_{k+1}\|$ et $\|\delta_k\|$

Pour toute méthode de point fixe, il est impératif de définir une métrique. On a construit une norme L^1 en temps et L^2 en espace et en masse.

Notation 3.2.1

On définit sur l'espace des fonctions définies sur $]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la norme suivante :

$$\|f(t, x, m)\| = \left(\int_0^T \sup_{x, m} |f(t, x, m)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Norme et relation entre $\|\delta_{k+1}\|$ et $\|\mathcal{F}\delta_k\|$

Lemme 3.2.1: Relation entre $\|\delta_{k+1}\|$ et $\|\mathcal{F}\delta_k\|$

Pour k entier naturel, $\|\delta_{k+1}\|$ et $\|\mathcal{F}\delta_k\|$ sont liés par l'inégalité :

$$\|\delta_{k+1}\| \leq T \|\mathcal{F}\delta_k\|.$$

Démonstration :

On a :

$$\delta_{k+1}(t, x, m) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(t - t', x - x') \mathcal{F}\delta_k(t', x', m) dx' dt'.$$

En réécrivant $H = \sqrt{H}\sqrt{H}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \delta_{k+1}(t, x, m) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(x - x', t - t') \mathcal{F}\delta_k(x', t', m) dx' dt' \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{H(x - x', t - t')} \sqrt{H(x - x', t - t')} \mathcal{F}\delta_k(x', t', m) dx' dt' \\ &\leq \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{H(x - x', t - t')}^2 dx' dt' \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{H(x - x', t - t')}^2 \mathcal{F}\delta_k(x', t', m)^2 dx' dt' \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On utilise désormais le fait que $\left(\int_{\mathbb{R}} H = 1 \right)$, on a donc :

$$\delta_{k+1}(t, x, m) \leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{H(x - x', t - t')}^2 \mathcal{F}\delta_k(x', t', m)^2 dx' dt' \right)^{1/2}.$$

On majore ensuite par le sup de $\mathcal{F}\delta_k$, on le sort de l'intégrale et on utilise à nouveau le fait que $\left(\int_{\mathbb{R}} H = 1\right)$. Il vient :

$$\begin{aligned}\delta_{k+1}(t, x, m) &\leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \sqrt{H(x-x', t-t')}^2 \sup_{x'} \mathcal{F}\delta_k(x', t', m)^2 dx' dt' \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \sup_{x'} \mathcal{F}\delta_k(x', t', m)^2 \int_{\mathbb{R}} \sqrt{H(x-x', t-t')}^2 dx' dt' \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{T} \left(\int_0^T \sup_x |\mathcal{F}\delta_k(x, t', m)|^2 dt' \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On prend le supremum sur m et en élevant au carré, on a :

$$\delta_{k+1}(t, x, m) \leq T \left(\int_0^T \sup_{x, m} |\mathcal{F}\delta_k(x, t', m)|^2 dt' \right).$$

On peut également prendre le supremum sur le membre de gauche,

$$\sup_{x, m} \delta_{k+1}(t, x, m)^2 \leq T \left(\int_0^T \sup_{x, m} |\mathcal{F}\delta_k(x, t', m)|^2 dt' \right).$$

Désormais, on intègre en temps de 0 à T et on sépare les intégrales indépendantes :

$$\begin{aligned}\int_0^T \sup_{x, m} \delta_{k+1}(t, x, m)^2 dt &\leq \int_0^T T \left(\int_0^T \sup_{x, m} |\mathcal{F}\delta_k(x, t', m)|^2 dt' \right) dt \\ \text{donc, } \int_0^T \sup_{x, m} \delta_{k+1}(t, x, m)^2 dt &\leq \left(\int_0^T \sup_{x, m} |\mathcal{F}\delta_k(x, t', m)|^2 dt' \right) \int_0^T T dt.\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\int_0^T \sup_{x, m} \delta_{k+1}(t, x, m)^2 dt \leq \left(\int_0^T \sup_{x, m} |\mathcal{F}\delta_k(x, t', m)|^2 dt' \right) T^2$$

et par la définition de la norme :

$$\|\delta_{k+1}\| \leq T \|\mathcal{F}\delta_k\|.$$

Relation entre $\|\mathcal{F}\delta_k\|$ et $\|\delta_k\|$

Lemme 3.2.2: Relation entre $\|\mathcal{F}\delta_k\|$ et $\|\delta_k\|$

Pour k entier naturel, $\|\mathcal{F}\delta_k\|$ et $\|\delta_k\|$ sont liés par l'inégalité :

$$\|\mathcal{F}\delta_k\| \leq 2 \sup_m |a(m)| \|\delta_k\|.$$

Démonstration :

Comme \mathcal{F} est un opérateur linéaire, on peut se contenter de faire les calculs pour $\mathcal{F}c$ et pas $\mathcal{F}\delta_k$.

Calculons alors $\|\mathcal{F}c\|$.

On a :

$$\|\mathcal{F}c\|^2 = \int_0^T \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m,m')c(t,x,m')dm' - a(m)c(t,x,m) \right|^2 dt.$$

De plus, comme $|a - b| \leq |a| + |b|$ implique que $|a - b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$, alors :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}c\|^2 &\leq \int_0^T \sup_{x,m} \left(\left| \int_m^\infty b(m,m')c(t,x,m')dm' \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \int_m^\infty b(m,m')c(t,x,m')dm' \right| |a(m)c(t,x,m)| + |a(m)c(t,x,m)|^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Et encore :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}c\|^2 &\leq \int_0^T \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m,m')c(t,x,m')dm' \right|^2 \\ &\quad + 2 \sup_{x,m} \left| a(m)c(t,x,m) \int_m^\infty b(m,m')c(t,x,m')dm' \right| + \sup_{x,m} |a(m)c(t,x,m)|^2 dt. \end{aligned}$$

Examinons chacun des termes du second membre.

★1^{er} terme :

En prenant le sup sur c à l'intérieur de l'intégrale pour l'en faire sortir, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m,m')c(t,x,m')dm' \right|^2 &\leq \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m,m') \sup_{m'} c(t,x,m') dm' \right|^2 \\ &\leq \sup_{x,m} \left| \sup_{m'} c(t,x,m') \int_m^\infty b(m,m') dm' \right|^2. \end{aligned}$$

Ensuite, on peut utiliser l'inégalité de produit pour le supremum et élargir l'intégrale de b en partant de 0 car $b \geq 0$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m, m') c(t, x, m') dm' \right|^2 &\leq \sup_{x,m} \left| \sup_{m'} c(t, x, m') \right|^2 \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m, m') dm' \right|^2 \\ &\leq \sup_m \left| \int_0^\infty b(m, m') dm' \right|^2 \sup_{x,m} \left| \sup_{m'} c(t, x, m') \right|^2. \end{aligned}$$

Or comme $\int_0^\infty b(m, m') dm' = a(m)$, on a :

$$\sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m, m') c(t, x, m') dm' \right|^2 \leq \sup_m |a(m)|^2 \sup_{x,m} |c(t, x, m)|^2.$$

★2^{ème} terme :

En utilisant l'égalité du produit pour le supremum, prenant le supremum de c à l'intérieur de l'intégrale pour l'en sortir, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{x,m} |a(m)c(t, x, m) \int_m^\infty b(m, m') c(t, x, m') dm'| & \tag{11} \\ &\leq \sup_{x,m} \left| a(m)c(t, x, m) \right| \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m, m') c(t, x, m') dm' \right| \\ &\leq \sup_{x,m} \left| a(m)c(t, x, m) \right| \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m, m') \sup_{m'} c(t, x, m') dm' \right| \\ &\leq \sup_{x,m} \left| a(m)c(t, x, m) \right| \sup_{x,m} \left| \sup_{m'} c(t, x, m') \int_m^\infty b(m, m') dm' \right|. \end{aligned}$$

En réutilisant l'inégalité du supremum pour le produit et en élargissant l'intégrale de b en partant de 0, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{x,m} |a(m)c(t, x, m) \int_m^\infty b(m, m') c(t, x, m') dm'| \\ &\leq \sup_{x,m} \left| a(m)c(t, x, m) \right| \sup_{x,m} \left| \sup_{m'} c(t, x, m') \right| \sup_{x,m} \left| \int_m^\infty b(m, m') dm' \right| \\ &\leq \sup_{x,m} \left| a(m)c(t, x, m) \right| \sup_{x,m} |c(t, x, m')| \sup_{x,m} \left| \int_0^\infty b(m, m') dm' \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité utilisé pour le 1er terme et en assemblant les termes, il vient :

$$\begin{aligned} & \sup_{x,m} |a(m)c(t, x, m) \int_m^\infty b(m, m')c(t, x, m')dm'| \\ & \leq \sup_{x,m} |a(m)c(t, x, m)| \sup_{x,m} |c(t, x, m)| \sup_{x,m} |a(m)| \\ & \leq \sup_{x,m} |a(m)| \sup_{x,m} |c(t, x, m)| \sup_{x,m} |c(t, x, m)| \sup_{x,m} |a(m)| \\ & \leq \sup_m |a(m)|^2 \sup_{x,m} |c(t, x, m)|^2. \end{aligned}$$

★3^{ème} terme :

On a simplement :

$$\sup_{x,m} |a(m)c(t, x, m)|^2 \leq \sup_{x,m} |a(m)|^2 \sup_{x,m} |c(t, x, m)|^2.$$

En remplaçant dans l'inégalité de départ, on obtient :

$$\|\mathcal{F}c\|^2 \leq \int_0^T 4 \sup_m |a(m)|^2 \sup_{x,m} |c(t, x, m)|^2 dt = 4 \sup_m |a(m)|^2 \|c\|^2.$$

D'où par linéarité de \mathcal{F} , on a :

$$\|\mathcal{F}\delta_k\|^2 \leq 4 \sup_m |a(m)|^2 \|\delta_k\|^2.$$

Conclusion

Nous pouvons dès lors établir une relation entre δ_{k+1} et δ_k . Celle-ci est est l'élément clef pour montrer que la suite est de Cauchy.

Proposition 3.2.2

Pour k entier naturel, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|\delta_{k+1}\| \leq K \|\delta_k\| \text{ avec } K < 1$$

si, et seulement si,

$$T < \frac{1}{2 \sup_m |a(m)|}.$$

Démonstration :

D'après les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2, on a :

$$\|\delta_{k+1}\| \leq T \|\mathcal{F}\delta_k\| \text{ et } \|\mathcal{F}\delta_k\| \leq 2 \sup_m |a(m)| \|\delta_k\|,$$

d'où, en les combinant,

$$\|\delta_{k+1}\| \leq K \|\delta_k\| \text{ avec } K = 2T \sup_m |a(m)|.$$

Ainsi, $K < 1$ est équivalent à $T < \frac{1}{2 \sup_m |a(m)|}$.

3.2.3 Convergence de la suite δ_k

Pour montrer que la suite est de Cauchy, nous devons montrer que

$$\|u_1 - u_0\|$$

est fini. Montrons un résultat plus fort que nécessaire pour montrer que la suite de Cauchy.

Lemme 3.2.3

Dans le cas où $T < \frac{1}{2 \sup_m |a(m)|}$, on a :

$$\sup_k \|u^k\| < +\infty.$$

Démonstration :

Comme u^0 est constante, on a que $\|u^0\| < +\infty$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on avait :

$$u^{k+1}(t, x, m) = \int_{\mathbb{R}} H(t, x - x') u_0(x', m) dx' + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(t - t', x - x') \mathcal{F}u^k(t', x', m) dx' dt'.$$

On a déjà montré que :

$$\left\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(t - t', x - x') \mathcal{F}u^k(t', x', m) dx' dt' \right\| \leq K \|u^k\|.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} H(t, x - x') u_0(x', m) dx' = \int_{\mathbb{R}} H(t, x - x') \delta_{0, M}(x', m) dx = H(t, x) \delta_M(m).$$

Or, comme $\|H\delta_M\| := \lambda < \infty$, on a pour tout k strictement positif :

$$\|u^{k+1}\| \leq \lambda + K\|u^k\|.$$

Par récurrence, il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u^{k+1}\| \leq \lambda \sum_{i=1}^k K^i + K^k \|u^0\|.$$

Comme $K < 1$, λ fini et $\|u^0\| \leq \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u^k\| \leq R \in \mathbb{R}.$$

On a donc bien $\|\sup_k u^k\| < +\infty$.

Proposition 3.2.3

Dans le cas où $T < \frac{1}{2 \sup_m |a(m)|}$, la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Démonstration :

On a montré précédemment que :

$$\|u^{k+1} - u^k\| \leq K\|u^k - u^{k-1}\|.$$

D'où,

$$\|u^{k+1} - u^k\| \leq K^k \|u^1 - u^0\|.$$

Montrons que la suite est de Cauchy. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} \|u^p - u^q\| &= \left\| \sum_{k=q}^{p-1} (u^{k+1} - u^k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=q}^{p-1} \|u^{k+1} - u^k\| \quad (\text{Inégalité triangulaire}) \\ &\leq \sum_{k=q}^{p-1} K^k \|u^1 - u^0\| \quad (\text{Proposition 2.2.2 par récurrence}) \end{aligned}$$

$$\leq \|u^1 - u^0\| \sum_{k=q}^{p-1} K^k.$$

Ainsi, la suite est de Cauchy si $\|u^1 - u^0\| < +\infty$ (le second terme est le reste d'une série convergente).

Comme $\|u^1 - u^0\| \leq \|u^1\| + \|u^0\|$ et par le résultat précédent, la suite est de Cauchy.

Finalement, comme l'espace est complet, la suite converge. Ainsi, si $u := \lim_{k \rightarrow \infty} u^k$, alors $\|u\| \leq R$ et par continuité des opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{F} , u vérifie le problème et est donc solution. Nous avons donc bien prouvé l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation pour un temps suffisamment petit.

3.2.4 Passage du temps court en temps long

Pour montrer que la solution existe pour $T > 1/2 \sup |a(m)|$, on peut procéder par recollement en considérant de nouvelles conditions initiales $u(T, x)$.

Or, la norme que nous utilisons sur $[0, T]$ ne nous permet pas d'affirmer quelque chose sur $u(T, x)$, il faut faire appel à des théorèmes d'analyses fins permettant de faire le lien entre les normes de différents espaces. Nous n'avons pas eu le temps d'aborder cette partie il faudrait la traiter pour avoir l'existence de la solution sur un temps arbitrairement grand.

Chapitre 4

Simulation numérique pour différents noyaux de fragmentations

Comme nous l'avons vu précédemment, un élément important de l'équation de diffusion-fragmentation est le noyau de fragmentation. Nous en avons testé quelques uns parmi les plus classiques, à savoir :

- ★ Noyau de fragmentation d'équi-répartition
- ★ Noyau de fragmentation aléatoire
- ★ Noyau de fragmentation fixe.

Afin de fixer les idées idées, nous travaillerons ici avec une loi de vie exponentielle de densité :

$$f(t) = \frac{m}{m_0} e^{-\frac{m}{m_0} t},$$

où m est la masse de la particule et m_0 un paramètre. Rappelons que c'est la densité de probabilité de la durée de vie d'une particule de masse m (après ce temps, elle se fragmente).

4.1 Noyau de fragmentation d'équi-répartition

Ce noyau de fragmentation est le plus intuitif. Lors d'une fragmentation, la particule se scinde en deux particules de masses égales.

Ainsi, ce noyau est défini par :

$$\forall m \in \mathbb{R}_+, p(x|m) = \delta_{m/2}.$$

Nous présentons le résultat sous forme de différents graphiques évoluant au cours du temps.

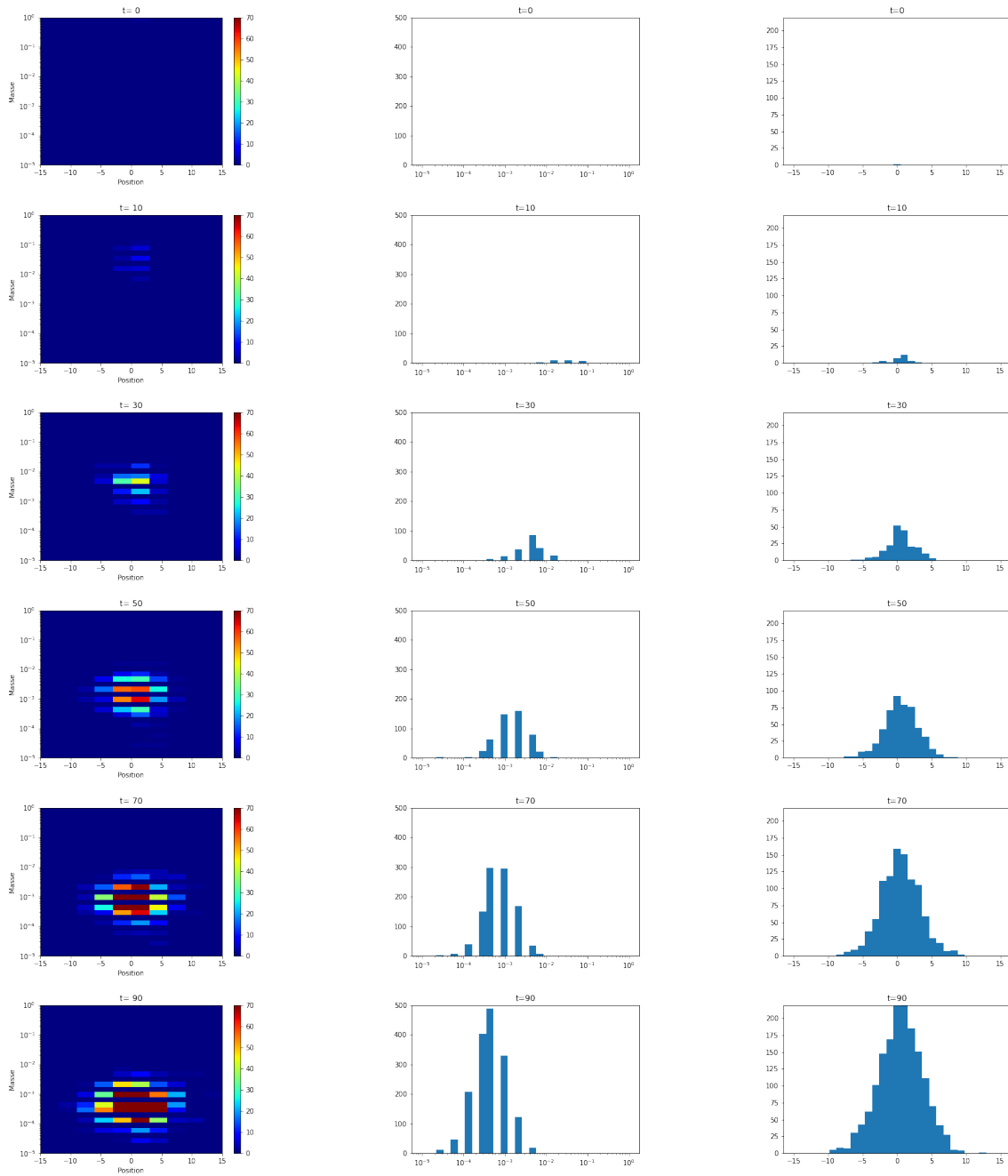


FIGURE 4.1 – De gauche a droite : Evolution du nombre de particules en fonction de la masse et de la position, histogramme des masses, histogrammes des positions. (Pour un noyau aléatoire)

On observe ainsi sur le plan Masse-Position une « bosse » qui se déplace vers les masses plus

petites (les particules se cassent en d'autres nécessairement plus petites, c'est donc attendu).

Sur la deuxième colonne, on peut observer la répartition des masses au cours du temps, il s'agit d'une vue horizontale de la première image. La bosse n'est pas symétrique et grossit au cours du temps.

Sur la troisième colonne, on observe les positions qui tendent à se distribuer normalement autour de 0 (propriétés du mouvement brownien).

On observe des stries dans les histogrammes de masses et dans le plan Masse-Position. Cela est dû au fait que ce noyau de fragmentation ne donne naissance qu'à des particules de masse puissance entière de $1/2$. Notons également que le fait que les stries soient également réparties est dû à l'échelle logarithmique en masse.

4.2 Noyau de fragmentation aléatoire

Ce noyau décrit une situation dans laquelle, lors d'une fragmentation, une particule de masse m se casse en deux particules de masses aléatoires (*i.e.* une particule de masse Um et une autre $(1 - U)m$ où U suit une loi uniforme sur $[0,1]$).

Mathématiquement, cela donne :

$$\forall m \in \mathbb{R}_+, p(x, m) = \frac{1}{m} \mathbf{1}_{x \leq m}.$$

En d'autres termes, la loi de la masse fille est une loi uniforme sur $[0, m_{\text{mère}}]$.

On observe cette fois-ci une répartition continue de la masse. Néanmoins, le comportement global demeure le même. Entre autre, on observe toujours cette distribution normale des positions et cette bosse asymétrique dans la distribution des masses.

Les distributions asymptotiques tendent à être les mêmes.

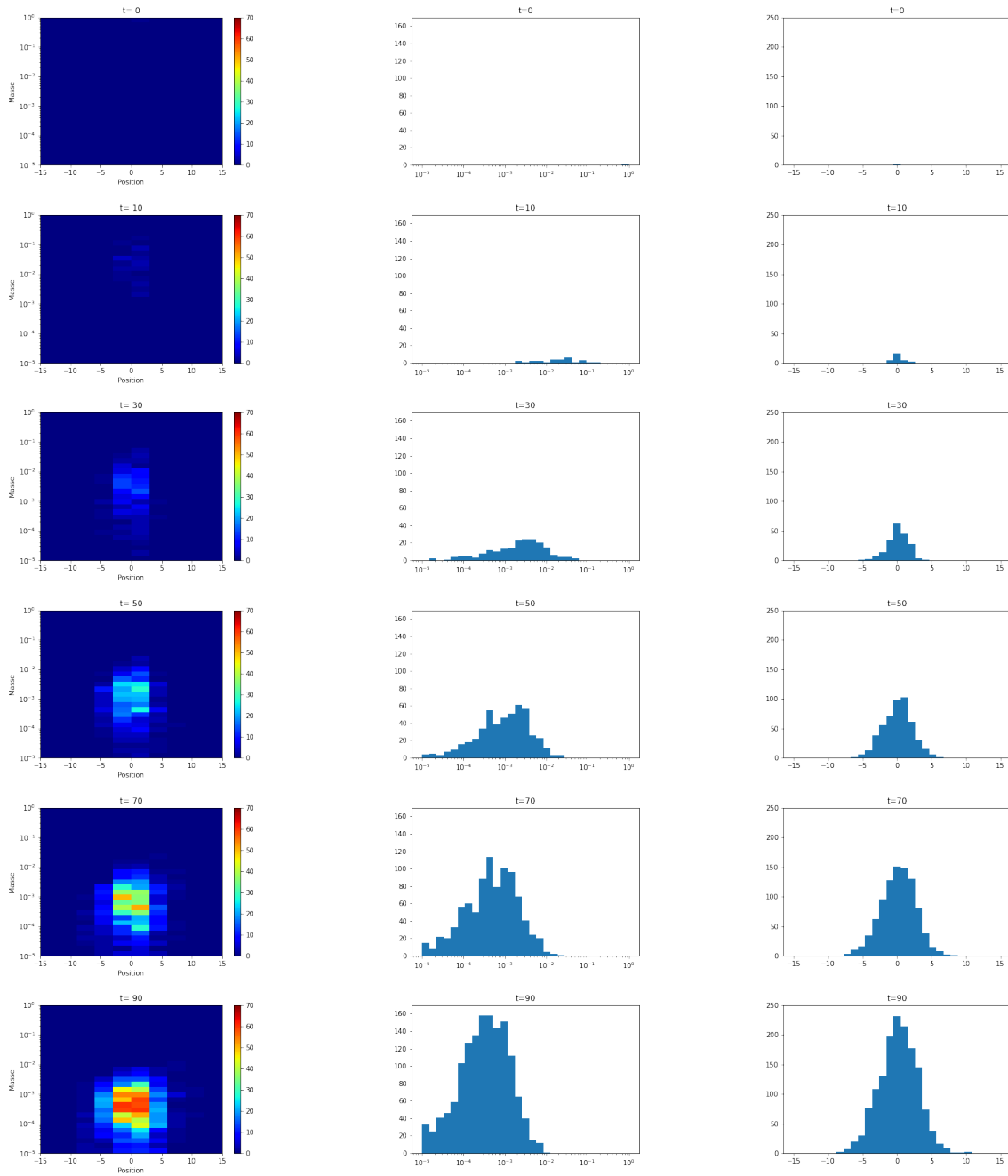


FIGURE 4.2 – De gauche a droite : Evolution du nombre de particules en fonction de la masse et de la position, histogramme des masses, histogrammes des positions. (Pour un noyau aléatoire)

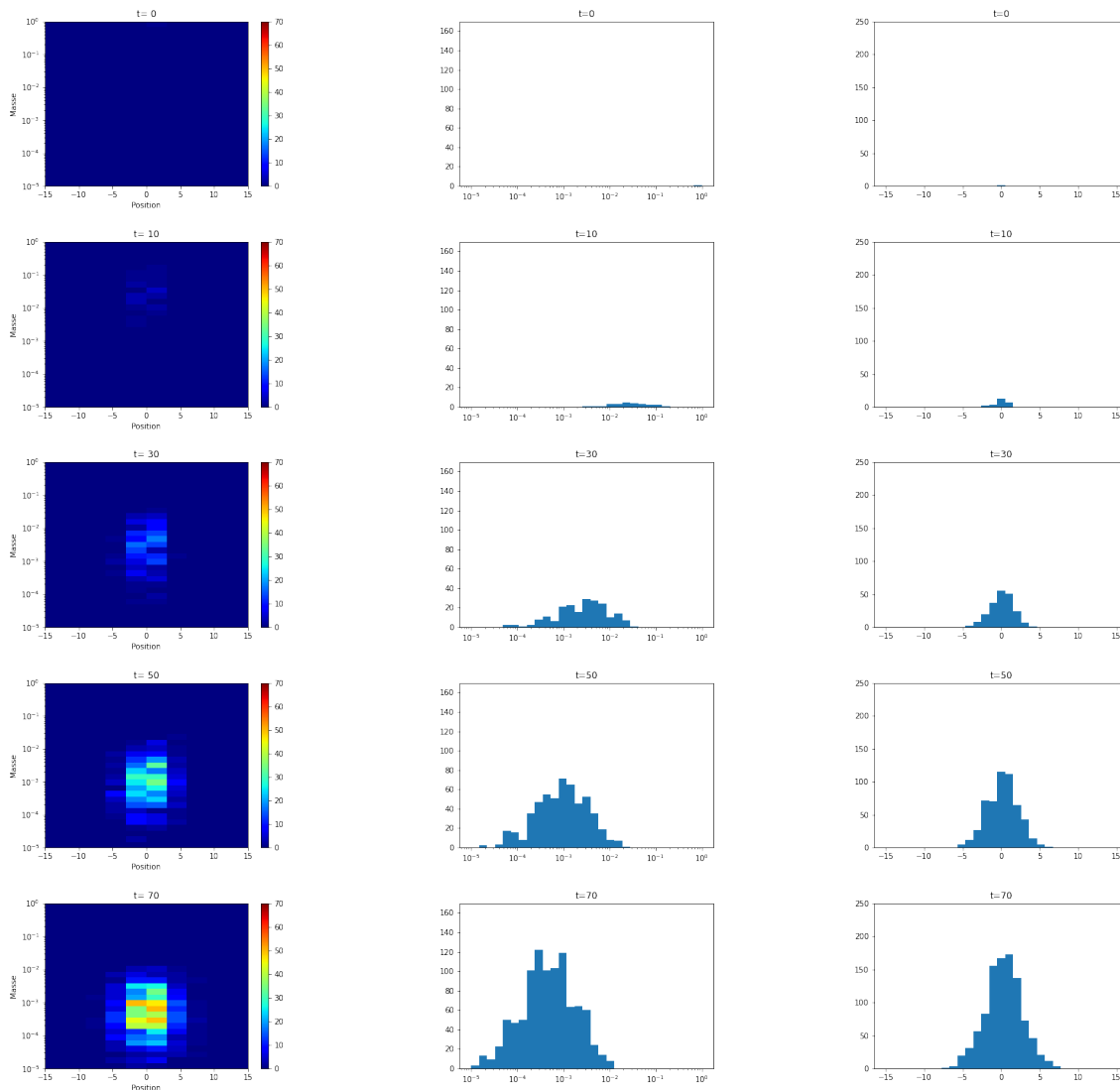
4.3 Noyau fixe

L'idée est qu'à chaque fragmentation, on veut découper la particules en 2 particules différentes mais que cette découpe soit fixe pour toutes les fragmentations.

Autrement dit, pour $\alpha \in]0, 1[$, on veut une particule de masse αm et une de masse $(1 - \alpha)m$,

$$\forall m \in \mathbb{R}_+, p(x|m) = \delta_{\alpha m}.$$

On a simulé un exemple pour $\alpha = 0,8$.



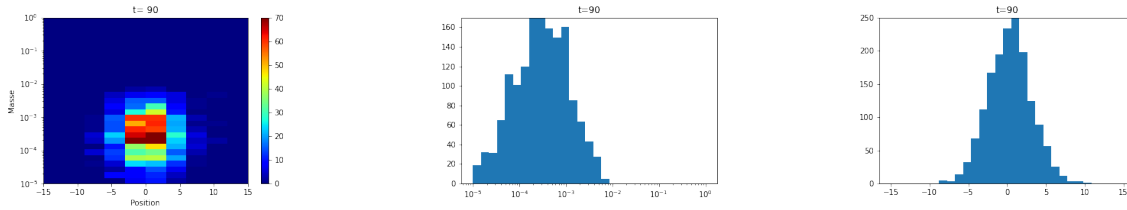


FIGURE 4.3 – De gauche a droite : Evolution du nombre de particules en fonction de la masse et de la position, histogramme des masses, histogrammes des positions. (Pour un noyau fixe)

On observe ainsi exactement le même comportement que pour le noyau aléatoire.

4.4 Conclusion

Nous n'avons mentionné ici qu'un seul type de durée de vie, néanmoins, nous n'avons constaté de durée de vie pour laquelle le comportement asymptotique serait impacté.

Même si le noyau peut jouer sensiblement au début, il n'influe, d'après nos simulations, quasiment pas sur le régime asymptotique du comportement.

Chapitre 5

Simulation numérique pour différentes durées de vie

Lors de ce parcours recherche, nous nous sommes concentrés sur un type de durée de vie en particulier, à savoir pour $\alpha > 0$ et pour tout $m > 0$; la densité du prochain temps de fragmentation est

$$f_m^\alpha(t) = \left(\frac{m}{m_0}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{m}{m_0}\right)^\alpha t}.$$

Nous avons cherché à savoir comment évoluait le groupe de particules formé en fonction de α . Nous avons tout d'abord étudié l'évolution de la population en fonction du temps et par la suite observer une indépendance numérique entre la diffusion des particules et leur durée de vie.

Notons qu'avec cette durée de vie, une particule de masse m vie en moyenne un temps égal à $\left(\frac{m_0}{m}\right)^\alpha$. De plus, toutes les masses sont plus petites que la masse totale $M = 1$. A masse égale, plus α est grand, plus sa durée de vie sera importante et moins la population évoluera.

5.1 Evolution de la population en fonction du temps

On note $n(t)$ le nombre de particules à l'instant t .

5.1.1 Approche heuristique pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \neq 0$

On se place dans le cas simplifié d'un noyau de fragmentation binaire.

Cas $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, chaque particule a une espérance de vie indépendante de sa masse et égale à 1. Supposons que les particules vivent exactement pendant le temps indiqué par leur espérance. De cette façon, on a :

- ★ $n(0) = 1$
- ★ $n(1) = 2$
- ★ $n(2) = 4$
- ★ $n(3) = 8$.

Plus généralement, on s'attend à :

★ $n(k) = 2^k$.

Ainsi, on s'attend ainsi à avoir un comportement de type exponentiel.

Cas $\alpha \neq 0$

Une particule de masse m a d'après les propriétés d'une loi exponentielle une durée de vie $\left(\frac{m_0}{m}\right)^\alpha$ en moyenne.

La première particule meurt à $t = (m_0/m)^\alpha$ et crée deux autres particules de masse $1/2$. Après un temps $(m_0/(1/2))^\alpha$ après leur naissance, les deux particules meurent et ainsi de suite.

En généralisant, à un temps $\sum_{i=0}^{n-1} (m_0/(1/2^i))^\alpha$ on a 2^n particules. Autrement dit,

$$n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{m_0}{1/2^i} \right)^\alpha \right) = 2^n.$$

En réécrivant cette équation, il vient :

$$n \left(m_0^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i\alpha} \right) = 2^n.$$

On reconnaît une somme géométrique,

$$n \left(m_0^\alpha \frac{2^{\alpha n} - 1}{2^\alpha - 1} \right) = 2^n.$$

et en renommant les constantes $\left(\beta := \frac{m_0^\alpha}{2^\alpha - 1}\right)$, on a :

$$n(\beta(2^{\alpha n} - 1)) = 2^n.$$

Asymptotiquement, n serait donc du type :

$$n(t) \propto (\beta^{-1}t)^{1/\alpha}.$$

5.2 Résolution théorique des cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$

Dans le cas d'un noyau fixe, l'équation de diffusion fragmentation devient :

$$\partial_t c(x, t, m) - \partial_{xx}^2 c(x, t, m) = \left(\frac{2m}{m_0}\right)^\alpha c(x, t, 2m) - \left(\frac{m}{m_0}\right)^\alpha c(x, t, m).$$

5.2.1 Équation de la population

Proposition 5.2.1

Dans le cas du noyau d'équi-répartition, la dérivée temporelle de la variation est donnée par :

$$\partial_t n(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{m}{m_0}\right)^\alpha c(x, t, m) dx dm.$$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que

$$n(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c(x, t, m) dx dm$$

et d'intégrer par partie l'équation de la fragmentation diffusion.

Cette équation est à la base de la résolution théoriques des deux cas suivants.

5.2.2 Cas $\alpha = 0$

Proposition 5.2.2

Pour $\alpha = 0$, l'évolution de la population est exponentielle, elle est donnée par :

$$n(t) = e^t.$$

Démonstration :

Dans le cas où $\alpha = 0$, l'équation de la population devient :

$$\partial_t n(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c(x, t, m) dx dm.$$

Or, on a que :

$$n(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} c(x, t, m) dx dm.$$

L'équation devient donc :

$$\partial_t n(t) = n(t).$$

En intégrant cette EDO avec la condition initiale $n(0) = 1$, il vient :

$$n(t) = e^t.$$

On obtient avec notre algorithme la courbe suivante :

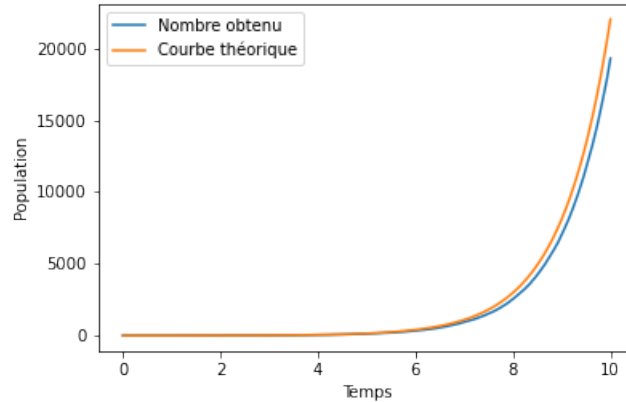


FIGURE 5.1 – Simulation numérique avec notre algorithme pour $\alpha = 0$.

5.2.3 Cas $\alpha = 1$

Proposition 5.2.3

Dans le cas $\alpha = 1$, la croissance est linéaire. Plus précisément, on a :

$$n(t) = \frac{M}{m_0}t + 1.$$

Démonstration :

L'équation de la population devient :

$$\partial_t n(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{m}{m_0} c(t, x, m) dx dm.$$

Or, avec M la masse total du système (conservatif), on a également :

$$M = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} mc(t, x, m) dx dm.$$

Donc, il vient :

$$\partial_t n(t) = \frac{M}{m_0}.$$

Finalement, avec $n(0) = 1$, on obtient :

$$n(t) = \frac{M}{m_0}t + 1.$$

En simulant la croissance avec notre algorithme, on obtient la courbe suivante :

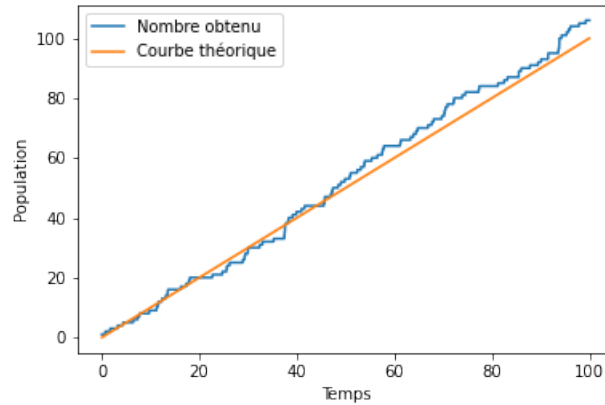


FIGURE 5.2 – Simulation numérique avec notre algorithme pour $\alpha = 1$

5.3 Résultats pour d'autres valeurs de α

Nous avons choisi quelques valeurs de α pour mener à bien nos simulations numériques. Ici, nous testerons $\alpha = 0.1, 0.5, 0.8, 1.3, 1.5, 2, 3$.

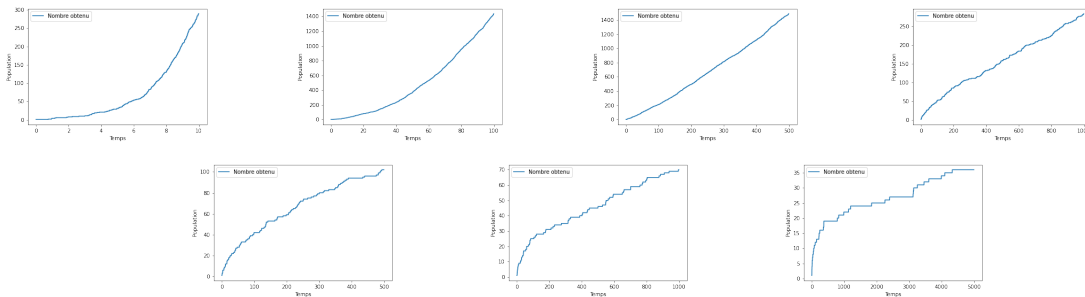


FIGURE 5.3 – Evolution de la population pour des valeurs de α différentes, de gauche à droite : 0.1, 0.5, 0.8, 1.3, 1.5, 2 et 3.

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer le point important de ce parcours que pour les valeurs de $\alpha > 1$, la fonction $n(t)$ est concave alors que pour les autres valeurs, elle est convexe. Il s'agira de quantifier cela dans la partie suivante.

Notons que pour des petites valeurs de α , il est difficile de simuler le processus sur un long temps avec le grand nombre de particules créé.

5.4 Validation numérique de l'hypothèse

L'approche heuristique nous amène à supposer asymptotiquement que l'évolution de $n(t)$ est de la forme $n(t) = ((2^\alpha - 1)t)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Pour « vérifier » ceci, nous allons tout d'abord tracer le graphique de la population en échelle log-log. Ainsi, si, l'hypothèse est correcte, nous devrions avoir :

$$\ln(n(t)) = \alpha^{-1} \ln(\beta) + \alpha^{-1} \ln(t).$$

Si asymptotiquement, nous obtenons une droite (signe que la fonction est polynomiale) alors la pente devrait être donnée par α^{-1} .

Comme mentionné auparavant, nous avons dû utiliser différentes échelles de temps pour les différentes valeurs de α . Il est impossible de simuler sur des grands temps des valeurs de α petites.

En effectuant les regressions linéaires, nous obtenons ceci :

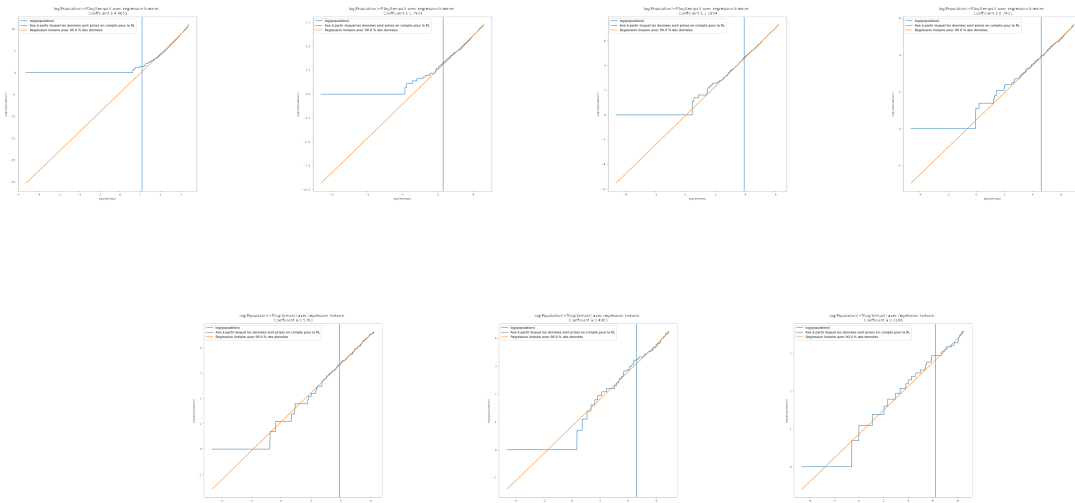


FIGURE 5.4 – Evolution de la population pour des valeurs de α différentes, de gauche à droite : 0.1, 0.5, 0.8, 1.3, 1.5, 2 et 3.

Les coefficients trouvés sont très proches de $1/\alpha$. Maintenant, traçons sur le graphe de $n(t)$ la fonction « attendue » ($y = ((2^\alpha - 1)t)^{\frac{1}{\alpha}}$).

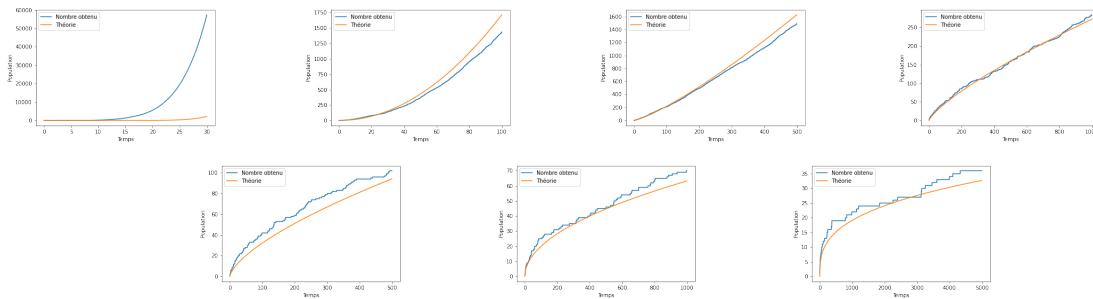


FIGURE 5.5 – Courbes théoriques et expérimentales pour les mêmes α

L’hypothèse de l’approche heuristique est donc validée pour des α standards. Pour les très petites valeurs de α , on voit qu’un écart important existe entre la valeur théorique et la prédiction numérique. Nous émettons alors deux hypothèses.

Premièrement, le pas pourrait être trop petit pour « suivre la cadence » de fragmentation réelle. En effet, dans un pas, une particule ne peut se casser qu’une fois tandis que qu’une particule en temps continu pourrait se casser plusieurs fois.

La seconde explication pourrait être théorique, si la prédiction s’avère correcte, alors il existe une discontinuité de comportement en $\alpha = 0$. Cette discontinuité pourrait se manifester ainsi.

5.5 Indépendance numérique de la diffusion, de la masse et de la durée de vie

Le mouvement des particules n’étant pas lié à leur masse, il paraît « logique » que les particules, quelle que soit leur masse, se diffusent de la même manière.

Nous avons testé numériquement ceci en observant la diffusion des particules en fonctions de leur masse. Plus précisément, nous avons regardé la distribution spatiale des masses pour les 4 quartiles de masse différents. Pour avoir un nombre de particule suffisant pour construire un histogramme, nous avons pris des valeurs de α plutôt « petites ».

Voici le résultat :

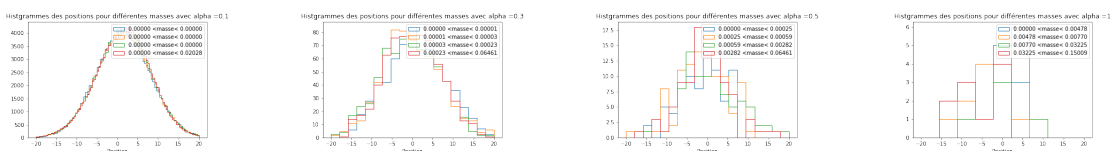


FIGURE 5.6 – Diffusion des particules pour $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 1$ pour $T = 30$.

On observe ainsi une distribution se rapprochant d'une normale d'autant plus que le nombre est grand, *i.e.* que α est petit.

On observe donc que quelque soit α , les particules, quelle que soit leur masse, se diffusent de la même façon.

Chapitre 6

Bilan et Perspectives

Pendant ce parcours, nous avons au début essayé d'assimiler les objets mathématiques mis en jeu tels les processus de Galton-Watson, le mouvement brownien et le modèle F-KPP.

Par la suite, nous avons construit le modèle de diffusion-fragmentation et prouvé l'existence d'une solution pour un temps suffisamment petit.

Nous avons également mis au point un algorithme permettant de simuler les processus de fragmentation-diffusion, construit pour fournir toutes les données dont nous avons besoin. Grâce à celui-ci, nous avons pu tester différentes dépendances/indépendances entre la masse, la durée de vie, la diffusion, etc...

Finalement, par la résolution de deux cas théoriques et par une approche heuristique, nous avons émis une hypothèse qui semble vérifiée numériquement dans de nombreux cas.

De nombreuses questions restent ouvertes après cette année de parcours recherche.

Premièrement, il faudrait faire le recollement théorique de la solution pour passer de temps court en temps long. On aurait ainsi l'existence d'une solution pour un temps arbitrairement long.

Deuxièmement, il faudrait essayer de résoudre théoriquement l'équation de la population et valider (ou invalider) l'hypothèse numérique et heuristique émise. De plus, si elle était vérifiée, il faudrait étudier la différence de comportement en $\alpha = 0$.

Enfin, il faudrait redémontrer les cas théoriques pour des noyaux de fragmentations quelconques.

Chapitre 7

Annexes

7.1 Processus de Galton-Watson

Listing 7.1 – Code pour simuler le processus de Galton Watson

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Sun Oct 17 21:33:17 2021
4
5 @author: gaeta
6 """
7
8
9
10 from random import *
11 import matplotlib.pyplot as plt
12 from tkinter import *
13 from numpy.polynomial import Polynomial
14
15
16 L=[(0.2,0),(0.3,1),(0.5,2)]
17
18 def proba(L):
19
20     alea=random()
21     proba_cum=0
22     for i in L:
23         if proba_cum<alea and alea<proba_cum+i[0]:
24             return i[1]
25         proba_cum+=i[0]
26
27
```

```
28
29
30
31 class ArbreGW():
32
33     def __init__(self, L, nmax=15):
34
35         self.loi_proba=L
36         self.sortie=[[ (0, 1)]]
37         self.Z=[1]
38         self.gen_max=nmax
39
40
41         self.h, self.l=700, 1300
42         self.fen=Tk()
43         self.can=Canvas(self.fen,height=self.h,width=self.l,bg='white')
44         self.bouton=Button(self.fen,command=self.graphique,text='Graphique')
45         self.bouton1=Button(self.fen,command=self.simulation,text='Simulation'
46                             )
47         self.entree=Entry(self.fen)
48         self.bouton2=Button(self.fen,command=self.OK,text='OK')
49
50         self.strvar=StringVar()
51         self.lab=Label(self.fen,textvariable=self.strvar)
52
53
54
55         self.lab.pack()
56         self.entree.pack(side=BOTTOM)
57         self.bouton.pack(side=BOTTOM)
58         self.bouton1.pack(side=BOTTOM)
59         self.bouton2.pack(side=BOTTOM)
60         self.can.pack()
61         self.fen.mainloop()
62
63
64     def simulation(self):
65         print('b')
66         self.sortie=[[ (1, 1)]]
67         self.Z=[1]
68         i=1
69         while i<self.gen_max and self.Z[-1]!=0:
70             #print(i, 'pop tot:', self.Z)
71
72             Zn=0
73             fils=[]
74             for j in range(len(self.sortie[-1])):
```

```

75         #print('sortie',self.sortie[-1], 'j=',j)
76         alea=proba(self.loi_proba)
77         Zn+=alea
78         if alea!=0:
79             for k in range(1,alea+1):
80                 fils.append((k,j+1))
81         if len(fils)>0:
82             self.sortie+=[fils]
83         self.Z.append(Zn)
84         i+=1
85
86
87     def graphique(self):
88         self.can.delete('all')
89         k=1
90         r=2
91         a=self.h
92         b=self.l/(len(self.Z)+1)
93         self.can.create_oval(b-r,int(a/2)-r,b+r,int(a/2)+r,fill='black')
94         o=1
95         for i in range(1,len(self.sortie)):
96             Zn=self.Z[i] #3
97             a_bis=int(a/(Zn+1)) #a/4
98             b_bis=int((k+1)*b)
99             print(100*((a/(Zn+1))-a_bis)/a_bis, '% cart ')
100            print(a_bis,a/(Zn+1))
101            for j in range(1,Zn+1):
102                self.can.create_oval(b_bis-r,j*(a_bis)-r,b_bis+r,j*(a_bis)+r,
103                    fill='black')
104                self.can.create_line(b_bis,j*a_bis,b_bis-b,self.sortie[i][j
105                    -1][1]*(int(a/(self.Z[i-1]+1))))
106            k=k+1
107            #print(int(100*i/len(self.sortie)), '%')
108
109     def OK(self):
110         self.gen_max=int(self.entree.get())
111         self.strvar.set(str('Nmax='+str(self.gen_max)))
112
113 GW=ArbreGW(L)

```

7.2 Modèle de diffusion-fragmentation

Listing 7.2 – Code pour simuler le processus de diffusion-fragmentation

```

1 import numpy as np
2 from random import *

```

```
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from sklearn.linear_model import LinearRegression
5
6
7 def lin(start, stop, step=0.01):
8     """
9     Like np.linspace but uses step instead of num
10    This is inclusive to stop, so if start=1, stop=3, step=0.5
11    Output is: array([1., 1.5, 2., 2.5, 3.])
12    """
13    return np.linspace(start, stop, round((stop - start) / step + 1))
14
15
16
17 def noyau_frag(m):
18     a=random()
19     return 0.9*m,0.1*m
20     #return a*m,(1-a)*m
21
22
23 pas=0.5 #essayer avec 0.1 0.5 1
24 tmax=50
25 m0=1
26 alpha=0.1
27 mass_init=1
28
29
30
31
32
33 class particule:
34
35     def __init__(self, pas, temps=0, x0=0, branchement=0, masse=1): #il faut mettre
36         temps=pas
37         self.t=temps#-pas
38         self.x=x0
39         self.h=pas
40         self.hist=[None]*round(self.t/pas)+[self.x] #rajouter temps*[None]
41         pour branchement
42         self.b=branchement #nombre de branchement subis
43         self.masse=masse
44     def avance(self):
45
46         global nuage,m0,alpha #commande dessous : exponentielle de parametre m
47         . Plus m devient grand plus esperance de vie diminue.
48         # A DECOMMENTER SI TENIR COMPTE DE LA MASSE
49         if random()<1-np.exp(-self.h*(self.masse/m0)**alpha) and len([i for i
50             in self.hist if i!=None])>1: #je rajoute une conition pour pas qu'
```

```

    elle ne se splite des la naissance, sinon branchement plus que
    diadique
47     masse_mere,masse_fille=noyau_frag(self.masse)
48     nuage+=[particule(self.h,self.t,self.x,self.b+1,masse_fille)]
49     self.b+=1
50     self.masse=masse_mere
51     self.x=round(self.x+np.random.normal(0,self.h**0.5),2)
52     self.hist+=self.x]
53     self.t=round(self.t+self.h,2)
54
55
56
57 temps=lin(0,tmax,pas)
58 p=particule(pas,0,0) #creation premiere particule
59 nuage=[p]
60 nombre=[len(nuage)] #liste qui contient n(t) pour t variant
61
62
63 for i in range(round(tmax/pas)): #je parcours le temps
64     nombre+=len(nuage) #evolution du nombre de particule
65     nuage_bis=nuage#.copy() #sinon a chaque branchement on ajoute a nuage et
        ca n'en finit jamais
66
67     for j in nuage_bis:
68         j.avance()
69
70     if (i/round(tmax/pas)*100)%5==0: #affichage du pourcentage d'avanc e
71         print(100*i/round(tmax/pas), '%')
72         print(nombre[-1])
73
74
75
76 #REGRESSION LINEAIRE EN LOG LOG
77
78 logt,logn=np.log(temps),np.log(nombre)
79
80 pourcentage=.1
81
82
83 tronc=int(pourcentage*len(temps))
84 reg=LinearRegression().fit(logt[tronc:].reshape(-1,1),logn[tronc:].reshape
        (-1,1))
85 a,b=reg.coef_[0][0],reg.intercept_[0]
86
87 print('regression a partir de ',logt[tronc])
88 print('Coefficient de la regression : ',a,'Ordonne e l\'origine : ',b,np.
        exp(b))
89

```

```
90 plt.figure(figsize=(10, 10), dpi=80)
91
92
93 logt, logn=np.log(temps), np.log(nombre)
94 plt.plot(logt, logn, label='log(population)')
95 plt.axvline(logt[tronc], label='Axe partir duquel les données sont prises
    en compte pour la RL')
96 plt.plot(logt, a*logt+b, label='Regression lin aire avec '+str(100-100*
    pourcentage)+' % des données')
97 plt.legend()
98 plt.xlabel('log(temps)')
99 plt.ylabel('log(population)')
100 plt.title('log(Population)=f(log(temps)) avec regrssion lin aire. \n
    Coefficient '+str(round(a,4)))
101 plt.show()
102
103 #AFFICHAGE POPULATION EXP. VS. THEORIQUE
104 plt.plot(temps, nombre, label='Nombre obtenu')
105 print(alpha)
106 plt.plot(temps, [((2**alpha - 1)*i)**(1/alpha) for i in temps], label='Th orie'
    )
107 plt.xlabel('Temps')
108 plt.ylabel('Population')
109 plt.legend()
110 plt.show()
111
112 #AFFICHAGE DE LA DIFFUSION DES PARTICULES EN FONCTIONS DES MASSES
113 masse=[i.masse for i in nuage]
114 quant=[0]+quantiles(masse, n=4)+[max(masse)]
115 print(quant)
116 for i in range(len(quant)-1):
117     print(len([j.x for j in nuage if (j.masse<quant[i+1] and j.masse>quant[i])
    ]))
118     plt.hist([j.x for j in nuage if (j.masse<quant[i+1] and j.masse>quant[i])
    ], bins=np.linspace(-20, 20, 100), histtype='step', label='%.5f <masse< %.5
    f'%(quant[i], quant[i+1]))
119
120 plt.legend()
121 plt.xlabel('Position')
122 plt.title('Histogrammes des positions pour différentes masses avec alpha =' +
    str(alpha))
123 plt.savefig('Nouveau Dossier/'+str('0_1'))
124 plt.show()
```

Bibliographie

- [1] Étienne BERNARD, Pierre GABRIEL, *Asymptotic behavior of the growth-fragmentation equation with bounded fragmentation rate*, Journal of Functional Analysis 272 (2017) 3455–3485
- [2] Éric BRUNET. *Some aspects of the Fisher-KPP equation and the branching Brownian motion*. Statistical Mechanics. UPMC, 2016. fftel-01417420
- [3] Nicolas CHAMPAGNAT. *Processus de Galton-Watson et applications en dynamique des populations*. Master. École Supérieure des Sciences et Technologies de Hammam Sousse, Tunisie. 2015, pp.46.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01216832>
- [4] Marie DOUMIC-JAUFFRET, Leon M. TINE. *Estimating the Division Rate for the Growth-Fragmentation Equation*. Journal of Mathematical Biology, Springer Verlag (Germany), 2013, 67 (1), pp.69-103.
- [5] William FELLER. 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. I, Third edition, John Wiley Sons Inc., New York
- [6] John FRITZ. *Partial Differential Equations*. New York, NY : Springer, 2013. Print.
- [7] Trong HIEU NGUYEN. *Mathematical population dynamics models in deterministic and stochastic environments*. General Mathematics. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014.
- [8] V.I. ISTRATESCU , *Fixed point theory*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1981)
- [9] Philippe LAURENÇOT, Benoît PERTHAME. *Exponential decay for the growth-fragmentation/cell-division equation*. Communications in Mathematical Sciences, International Press, 2009, 7 (2), p. 503-510.
- [10] Philippe LAURENÇOT, Christoph WALKER. *The fragmentation equation with size diffusion : well-posedness and long-term behavior*. 2021.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03212142>
- [11] Jean-François LE GALL (1994), *Mouvement brownien : processus de branchement et superprocessus*, Cours de DEA.
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/jflegall/DEA94.pdf>