HAL
open science

Quelles sont les bonnes échelles de relocalisation ?

Léon Fauste

▶ **To cite this version:**

Léon Fauste. Quelles sont les bonnes échelles de relocalisation ?. Modélisation et simulation. 2021. hal-03551985

HAL Id: hal-03551985

https://inria.hal.science/hal-03551985v1

Submitted on 2 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport de stage : Quelles sont les bonnes échelles de relocalisation ?

Léon FAUSTE

Du 5 avril au 31 Aout 2021

Table des matières

Introduction **4**

Introduction détaillée **5**
Les limites planétaires 5
Le compromis du choix d'échelle dans la démarche de l'équipe STEEP . . 8
L'analyse de flux de matière 10

1 L'approche MESMIS **13**
1.1 Qu'est-ce que la méthode MESMIS ? 13
1.2 Historique des utilisations de MESMIS 14
1.3 Description détaillée de la méthode MESMIS 15
1.4 Des questions de recherche 17
1.5 Qu'est-ce que la soutenabilité ? 20

2 Le modèle d'affectation des sols **24**
2.1 Le modèle général 24
2.2 Propriétés de la modélisation générale 33
2.3 Une modélisation linéaire : comment se comportent les affectations des sols ? 37
2.4 Points forts et lacunes de la modélisation 47
2.5 Exemples 49

3 Un modèle liant l'AFM, MESMIS et MusiaSEM **53**
3.1 L'approche MusiaSEM 53
3.2 Le modèle d'un territoire 54
3.3 Description mathématique 56
3.4 Création de scénarios 58
3.5 Résumé du modèle 58
3.6 Comment trouver les caractéristique des secteurs 59
3.7 Scénarios envisagés sur la filière agricole 60
3.8 Remarques sur le modèle proposé 61

Conclusion **62**

Références **66**

ANNEXES **67**

A Pertes en fonction de l'échelle [López-Ridaura et al., 2005a] **67**
A.1 Les activités observées 67
A.2 La modélisation 67
A.3 Les indicateurs 67
A.4 Les scénarios 67
A.5 Les résultats 67

B Évaluation de la soutenabilité d'un projet [López-Ridaura et al., 2002] 69
B.1 Les activités observées 69
B.2 La modélisation 69
B.3 Les indicateurs 69
B.4 Les scénarios et résultas 70

C Indice de soutenabilité pour la production de bioénergie [Valdez-Vazquez et al., 2017] 70
C.1 Les activités observées 70
C.2 La modélisation 70
C.3 Les indicateurs 70
C.4 L'indice de soutenabilité 71

D Étude sur le riz en Camargue [Delmotte et al., 2016] 72
D.1 Les activités observées 72
D.2 La modélisation 72
D.3 Les indicateurs 72
D.4 Les scénarios 72
D.5 Les résultats 73

E Retour sur 28 cas d'étude MESMIS [Speelman et al., 2007] 74
E.1 Les activités observées 74
E.2 La modélisation 74
E.3 Les indicateurs 74
E.4 Les scénarios et résultats 75

F Les Greniers d'Abondances 76

G Un exemple de modélisation 78
G.1 Initialisation du contexte bio-physique et socio-économique et définition des acteurs principaux. 78
G.2 Définitions des indicateurs de tout types. 79
G.3 Définition des objectifs, des critères (contraintes) et des indicateurs d'évaluation. 80
G.4 Définition et quantification des activités d'utilisation des sols. 80
G.5 Quantification des indicateurs. Articulation des différentes échelles. . 80
G.6 Analyse des scénario et des compromis. 81
G.7 Recommandation d'alternatives socio-technique et d'axes de recherches. 82
G.8 Remarques sur ce modèle 82

H Scénarios avec un seul critère à une seule échelle 83

I Preuves des résultats des parties 2.3.4 et 2.3.5 92

J Le programme python 96

Introduction

L'équipe STEEP travaille sur la problématique des limites planétaires [Rockström et al., 2009]. Cette question a un caractère urgent et vital pour nos sociétés actuelles. Ce problème a été mis en évidence il y a déjà 50 ans par le rapport Meadows commandé par le Club de Rome et publié en 1972 [Meadows et al., 1972]. Depuis, les sociétés ne se sont toujours pas emparé des enjeux et n'ont pas encore changé de trajectoire.
Dans un contexte de reconfiguration des organisations socio-techniques du territoire, la relocalisation de certaines activités productives est une composante importante, par exemple en termes de résilience. La question centrale est :"Quelles sont les bonnes échelles de relocalisation ?" posée de manière un peu plus formelle à travers l'objectif suivant : "Éclairer les compromis à trancher dans le choix d'échelles géographiques de relocalisation d'activités productives".

Les échelles choisies actuellement sont probablement trop grandes au vu des pressions écologiques (voir par exemple [Rockström et al., 2009], [Tapia et al., 2021]) mais des échelles trop petites ont des impacts lourds sur la productivité comme le montre cet article [López-Ridaura et al., 2005a]. Comment trancher ce dilemme et trouver des échelles acceptables ?
Face au manque d'étude sur le sujet, je souhaite proposer une méthodologie pour éclairer la question et apporter des éléments d'aide à la décision dans le choix d'échelle dans les processus de relocalisation. On veut pouvoir observer ce qui est "perdu" ou "gagné" selon certains indicateurs lorsque que l'on organise l'économie à une échelle ou à une autre.
Pour faire ceci, mon point de départ est un outil utilisé par l'équipe : l'analyse de flux de matière (voir [Courtonne et al., 2015]) que l'on couple avec deux autres modèles ([López-Ridaura et al., 2005a] [Giampietro and Ramos-Martin, 2009]). Le cœur de mon travail fût de proposer une avancée **méthodologique** en étudiant les différents modèles et comprendre comment les coupler.

[López-Ridaura et al., 2005a] propose un modèle (issu de l'approche MESMIS) pour étudier le choix d'échelle dans la relocalisation des activités agricoles. La première partie présente l'approche et son historique ainsi que les études qu'on aimerait pouvoir mener avec cette méthode, les questions auxquelles ont aimerait pouvoir répondre et les facteurs que l'on voudrait prendre en compte.
Dans une seconde partie, on étudiera en détail les mathématiques de ce modèle qui se trouve être un modèle d'optimisation sous contraintes. Les résultats principaux portent sur l'influence ou non de certaines contraintes, la forme (et la sparsité) de la solution optimale et la linéarité par morceaux de l'objectif. Ces résultats confirment bien que le modèle semble insuffisant pour étudier notre question dans sa globalité. Cette partie a été allégée des longues preuves que l'on retrouve dans les annexes H et I.
On présentera un programme Python qui résout le problème et on apportera des illustrations graphiques.
Pour palier certaines des faiblesses du modèle, la dernière partie présente un nouveau modèle liant l'analyse de flux de matière, l'approche MESMIS et l'approche Muisia-SEM (Une méthode qui sera présentée succinctement au début de cette partie). Ce modèle sera le point de départ de la thèse qui en découle et qui a commencé le premier septembre 2021.
Les trois parties ont été pensées pour pouvoir être lues indépendamment.

Introduction détaillée

Les limites planétaires

Les pressions anthropiques exercées sur le système terrestre ont atteint une ampleur telle qu'un changement brutal de l'environnement mondial ne peut plus être exclu. Le concept de limites planétaires introduit dans [Rockström et al., 2009] se présente comme un concept clef pour comprendre l'écologie des systèmes mondiaux. Une large équipe a cherché à identifier des indicateurs sur lesquels les société humaines ont un grand impact et qui influent fortement nos capacités à vivre, survivre et produire sur la planète Terre et ils en ont identifié neuf.

Présentons les caractéristiques communes de ces indicateurs et de leur limites planétaires. Tout d'abord, Les indicateurs peuvent être agrégés à l'échelle de la planète. Ensuite, ils ont une réponse sur l'environnement qui n'est pas linéaires. On retrouve des *points de bascule* où les écosystèmes ou les systèmes géologiques s'effondrent brutalement. C'est l'approche de ces *points de bascule* que l'on nomme limites planétaires. Enfin ces limites sont interdépendantes au sens où le dépassement d'une seule de ses limites peut déplacer les autres.
Le dépassement de ses limites peut nous faire changer de période géologique, pour nous faire passer de l'holocène (dont la spécificité est d'avoir un climat stable depuis environ 10 000 ans permettant l'essor de l'agriculture) à l'anthropocène (la période marquée à des échelles de temps géologiques par les activités humaines).

Présentons les indicateurs et leurs limites :

Processus du système Terre	Indicateurs	Limites planétaires
Changement climatique	CO2 atmosphérique (ppm) Énergie à la surface de la terre $W.m^{-2}$	$350-550ppm$ $1.0-1.5W.m^{-2}$
Acidification de l'océan	Concentration en ion carbonate moyenne	$\geq$ 80% du niveau pré-industriel
Dégradation de l'ozone stratosphérique	Concentration en O	$<$ 5% de réduction par rapport au niveau pré-industriel.
Aérosol atmosphérique	Concentration des microparticule dans l'atmosphère	à déterminer
Cycle Bio-géo-chimique	Accélération du cycle du Phosphore (P) par rapport au cycle naturel Total de N_2 retiré de l'atmosphère par les activités humaines	10x $35MtNyr^{-1}$ (25% de l'azote fixé par le cycle terrestre)
Utilisation d'eau potable	Consommation d'eau Bleue	$< 4000km^3yr^{-1}$
Changement d'affectation des sols	% de la surface terrestre recouvert de terres	$<$ 15% des terres non gelées.

	cultivées	
Perte de biodiversité	Taux d'extinction (extinction par million d'espèce par an)	10 E/MSA
Pollution chimique	Emission, concentration ou effet sur l'écosystème de pollution organique persistantes	à déterminer

Source : Traduit de [Rockström et al., 2009]

En 2009, l'état du système Terre à été évalué comme résumé sur le graphique 1. On remarque que 3 indicateurs ont déjà dépassé les limites : Le changement climatique, l'extinction de la bio-diversité et le cycle de l'azote. 2 Indicateurs n'avaient pas encore été quantifiés et pour les autres indicateurs on peut distinguer 2 cas :

— Les indicateurs qui approchent leur limites (presque tous).
— L'indicateur où la situation s'améliore (uniquement la dégradation de l'ozone stratosphérique).

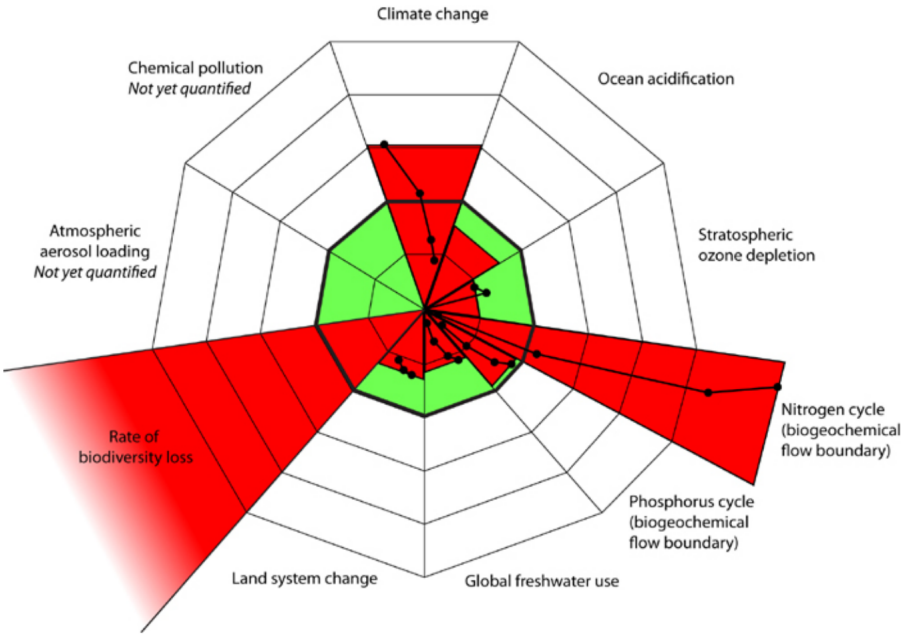


FIGURE 1 – L'état du système terre vis à vis des limites planétaire. [Rockström et al., 2009]

Attardons nous sur le cas de l'ozone stratosphérique pour comprendre l'enjeu qu'il peut y avoir à repenser l'organisation de la société. L'ozone est un molécule formée de 3 atomes d'oxygène qui à 2 grands effets sur l'humain :

— S'il se trouve proche du sol (Le mauvais ozone), c'est un polluant qui résulte de nos activités. C'est un oxydant puissant qui réagit avec les muqueuse de nos poumons provoquant des complications de santé importantes.
— S'il se trouve dans les couches stratosphériques de l'atmosphère (Le bon ozone), il filtre les rayonnements UV (particulièrement les UVB). Il renvoie alors un

partie du rayonnement solaire ce qui refroidit le climat et protège les être vivants des rayonnement nocifs qui pourrait entraîner des cancers. Les UVB sont notamment les UV responsables des coups de soleil.

En 1974, 2 articles soulignent que les chlorofluorocarbures (CFC) -qui étaient utilisés massivement par les industries- relâchent du chlore dans la partie stratosphère et que le chlore présent dans la stratosphère détruit l'ozone dans un cycle où un atome de chlore peut détruire jusqu'à 100 000 molécules d'ozone [STOLARSKI and CICERON, 1974] [Molina and Rowland, 1974].

Les CFC sont des molécules dérivées des alcanes qui étaient utilisées à grande échelle car ils sont ininflammables, stables, inertes et faciles à produire. Ils étaient principalement utilisés dans les systèmes frigorifiques et les nettoyants industriels. Les compagnies ayant des intérêts économiques sont réticentes à agir mais les politiciens sont rapidement mis au courant et les recherches se multiplient. En 1978, les CFC sont interdits dans les bombes aérosols au USA mais l'utilisation massive reste d'actualité. En 1984, 40% de l'ozone stratosphérique a disparu [Farman et al., 1985].

En 1986, une expérience finit d'établir un lien sûr entre les CFC et la disparition de l'ozone [Anderson et al., 1989], la même année le premier traité international est signé pour tenter de limiter l'utilisation des CFC [wikipedia,]. S'en suivent 6 accords consécutifs qui ne font qu'augmenter les efforts à fournir sur le sujet. La mobilisation publique et les efforts de l'industrie ont permis de stopper et même d'inverser la tendance. Cela s'est fait en trouvant des substituts au CFC (dont les HCFC) et par un investissement de toute la société (politique, industrie, recherche et société civile). l'UNEP estime que ce changement de direction de la société à empêché plusieurs millions de cancers et économisé plusieurs milliards dans le secteur de la santé [UNEP,].

Les trous dans la couche d'ozone sont encore présents mais la communauté scientifique considère que nous avons fait le nécessaire et que la durée de vie des CFC et du chlore font que le trou au-dessus de l'arctique a atteint son maximum en 2001 et celui au-dessus de l'antarctique en 2011 [Goutail et al., 2021][NASA,]. Et il devrait continuer à diminuer si on ne re-émet pas de gazs destructeurs.

Pour tous les autres indicateurs, la destruction de l'équilibre de l'holocène s'accélère. Les ressemblances entre le problème de l'ozone stratosphérique et les 8 autres limites sont nombreuses : Ce sont des enjeux globaux, Nous avons commencé par un déni de l'existence du problème puis un déni de la culpabilité de nos société. Les industries offrent un refus du sacrifice économique des changements à opérer et expliquent que ce n'est pas possible. Ensuite la société civile s'en empare, obligeant les politiques et les scientifiques à s'investir d'avantage. On pourrait donc penser que le scénario sera le même : On va trouver des substituts et régler le problème.

Seulement, il y a des différences notables. Premièrement les CFC ne concernaient qu'une petite partie de l'économie mondiale alors que l'utilisation massive de l'azote, du phosphore, des ressources fossiles, de l'eau bleue et des sols sont la base de nos moyens de productions. Deuxièmement, il n'y a pas de substituts pour les sols, les eaux, Ni pour le phosphore et l'azote qui sont des éléments chimiques. Les substituts aux ressources fossiles apportent tous des compromis : L'énergie nucléaire ne remplace pas toute leurs utilisations (il n'y pas encore de moteur nucléaire dans les automobiles), influe énormément sur la consommation d'eau et pose de sérieuse questions sur le partage des ressources à l'échelle planétaire. Les énergies renouvelables apportent leur complications pour la limites des changements d'affectation des sols : Il existe par exemple un compromis entre l'utilisation des sols pour l'agriculture ou pour en faire des champs photovoltaïques. L'hydrogène n'est pas une solution au changement

climatique comme le souligne ce récent article [Howarth and Jacobson, 2021]. Troisièmement, seule une solution technique à été nécessaire pour régler le problème des trous dans la couche d'ozone. Pour les problèmes actuels, la société civile a probablement de grands changements à opérer. Un grand nombre d'habitudes ont besoin d'être changés dans tous les secteurs : l'économie, la production d'énergie ou de nourriture de nourriture, la finance , les transports, etc... Chaque secteur est concernés par au moins une des limites.

Dans ce contexte, il semble risqué d'attendre des solutions techniques qui résoudront tout les problèmes sans compromis entres différents critères et groupe sociaux ... L'équipe STEEP fait alors partie des équipes qui se propose de proposer et d'étudier de façon multicritère (performance socio-économique, environnementales, vulnérabilités ...) des modes de productions et de consommation alternatifs pour tenter de rester à l'intérieur des limites planétaires.

Le compromis du choix d'échelle dans la démarche de l'équipe STEEP

L'équipe STEEP travaille donc sur la problématique des limites planétaires [Rockström et al., 2009]. Cette question a un caractère urgent et vital pour nos sociétés actuelles. Ce problème a été mis en évidence il y a déjà 50 ans par le rapport Meadows commandé par le Club de Rome et publié en 1972 [Meadows et al., 1972]. Depuis, les sociétés ne se sont toujours pas emparé des enjeux et n'ont pas encore changé de trajectoire (scénario *business as usual*) malgré les mises en garde toujours plus pressantes de la communauté scientifique internationale. Pour qu'une communauté vivant sur un territoire donné accepte de modifier sa trajectoire dans une direction plus soutenable et résiliente, l'équipe émet les postulats suivants :

- Il est possible de reconfigurer les organisations socio-techniques d'un territoire selon les contraintes locales et celles imposées par des changements globaux afin de rendre les modes de production et de consommation soutenables ;
- Les changements doivent être décidés localement à l'échelle du territoire ;
- Ces changements doivent faire l'objet d'un processus participatif entre tous les acteurs de ces territoires.

Dans ce contexte, afin d'éclairer au mieux les choix des communautés d'acteurs sur un territoire donné, l'axe de recherche AST (alternatives socio-techniques) de l'équipe développe des outils mathématiques et informatiques permettant de concevoir des alternatives socio-techniques paramétrables en fonction de ces choix. Cela permet de simuler des évolutions selon divers scénarios et de se rendre compte des conséquences dans une perspective systémique.
Pour proposer de changer de trajectoire l'axe AST de l'équipe STEEP propose une étude en 4 étapes :

1. Développer de outils adéquat et robuste pour décrire l'économie avec des flux physique (et non des flux monétaire).
2. Utiliser ces outils et les compléter pour construire des alternatives.
3. Évaluer ces alternatives vis-à-vis des limites planétaires et de la soutenabilité des sociétés.
4. Proposer des transitions vers ces alternatives en prenant en compte les verrous systémiques.

Le stage et la thèse se placent au niveau de la seconde étape.
Dans ce contexte de reconfiguration des organisations socio-techniques du territoire,

la relocalisation de certaines activités productives est une composante importante, par exemple en termes de résilience. Le choix de la bonne échelle de relocalisation n'est pas une question triviale. Il est en effet très facile de constater que toutes les activités qui se déroulent en un lieu donné ont des chaînes d'approvisionnement et des impacts dont les échelles sont radicalement différentes.

Le phénomène de relocalisation en tant que « retour dans leur pays d'origine d'unités productives, d'assemblage ou de montage antérieurement délocalisées » est assez récent en France comme en témoigne la thèse de [Mouhoub, 1991]. Elle est alors étudiée uniquement d'un point de vue économique et déclenchée essentiellement pour des raisons de coût, de qualité du produit final ou de rationalisation de la production.
Dans les années 2000, la question de la localisation des activités de production est régulièrement posée en France comme en attestent les nombreux rapports remis aux ministres successifs en charge de ces questions [DGCIS, 2013]. Et l'importance de cette question dans le débat public ne fait que prendre de l'importance.

En premier lieu, les enjeux écologiques prennent une importance croissante. La relocalisation peut avoir des impacts significatifs sur les distances de transport, la biodiversité et notre capacité à recycler ou réutiliser ce qui a été produit. Produire local pourrait représenter une réduction de notre impact environnemental mais nous avons besoin d'étude au cas par cas ([Schmitt et al., 2017]).
Ensuite, les récentes crises économiques ou sanitaires ont montré que notre système globalisé pouvait être fragile. La relocalisation devient alors un enjeu de sécurité. C'est ce qu'a souligné le chef de l'État pendant son discours du 31 mars 2020 suite à la pandémie de COVID-19 : « Cette crise nous enseigne que, sur certains produits, le caractère stratégique impose d'avoir une souveraineté européenne, de produire plus sur le sol national, afin de réduire notre dépendance et nous équiper dans la durée. »

La sécurité alimentaire vient tout de suite à l'esprit car un blocage quelconque des échanges longue distance pourrait rapidement impacter l'accès à la nourriture. La crise actuelle permet déjà de constater les bouleversement sur la filière de l'agro-alimentaire créant une crise importante (voir [ONU, 2021], [Godart, 2020], [FAO, 2021]).
Les domaine du numérique ([Materiel.net, 2021]), du bâtiment ([Dont, 2021], [Albouy, 2021], [Lacas, 2021]) ou du transport ([Samama, 2021]) sont également impactés. Ce dernier article se conclut d'ailleurs par cette phrase : "Les fournisseurs seront-ils tentés de se rapprocher des clients en créant des usines en Europe ?".
Les études autour de la relocalisation se doivent donc d'être multi-critères pour prendre en compte toutes les composantes du problème.

Les échelles choisies actuellement sont probablement trop grandes au vu des pressions écologiques (voir par exemple [Rockström et al., 2009], [Tapia et al., 2021]) et de soutenabilité mais des échelles trop petites ont à l'inverse des impacts lourds sur la productivité comme le montre cet article [López-Ridaura et al., 2005a]. Comment trancher ce dilemme et trouver des échelles acceptables ?

Arthur Keller présente le dilemme du choix de la taille lorsque qu'il introduit la résilience ([manuel de résilience, 2020]) : « La résilience, elle s'organise au niveau local. Lorsque je dit local, ce n'est pas du micro-local [...] Quand on organise une résilience à trop petite échelle, même si on y parvient, on ne l'est que temporairement. » Il introduit une notion de taille critique qui permet d'absorber les changements. Pour lui, « un département en France, c'est déjà trop grand ». Il propose une échelle qui se situe entre

la commune et la communauté de communes.
Ce choix semble réfléchi mais arbitraire. Il est nécessaire de réfléchir d'avantage sur la question, chercher à quantifier et construire un modèle, un outil qui aiderait à trancher les compromis liés à cette problématique.

On retrouve aussi cette question de choix d'échelle dans le domaine de la prise de décision. Le dilemme est présenté ainsi dans [Keucheyan, 2019] : "Murray Bookchin [Bookchin, 2003] soutient que la transition écologique ne se fera que si la vie sociale est relocalisée à l'échelle des régions ou des villes [...]. Ulrich Beck [Beck, 2006] affirme au contraire que la crise environnementale est le meilleur argument en faveur de la construction européenne. Les mouvements de populations -les "migrations climatique"- qu'induiront les catastrophes naturelles à l'avenir supposent de réorganiser les sociétés au niveau continental". Les avis semblent variés et on ne voit pas l'ombre d'un consensus ni dans la littérature scientifique, ni dans les discours politiques. Cependant cette question n'est pas celle qui nous intéresse. Nous nous intéressons ici à l'organisation des industries productives. Les questions de choix d'échelles pour la prise de décision et pour le secteur des services ne seront pas traitées.

Le cadre à ce stage est donc de **proposer des avancées méthodologiques pour adapter le modèle de [López-Ridaura et al., 2005a] aux analyses de filières de STEEP et mettre en lumière les compromis à trancher sur la relocalisation des différents maillons : que gagne-t-on, que perd-on et sur quels critères selon l'échelle de relocalisation ?**

L'analyse de flux de matière

Depuis la création de l'équipe un certain nombre d'outils intéressants ont été développés pour faire avancer la première étape qui est de décrire l'économie actuelle via les flux physique. Celui qui me sera utile est l'analyse de flux de matière.

La définition de l'analyse de flux de matière est : "Material flow analysis (MFA) is a systematic assessment of the flows and stocks of materials within a system defined in space and time" (Brunner and Rechberger, 2003) L'analyse de flux de matière est une évaluation systématique des flux et des stocks de matières au sein d'un système définit dans l'espace et le temps.

L'analyse de flux de matière cherche à décrire les flux de matière entre les différents secteurs d'activités et ceci à différents niveaux de détail. La première échelles est le nombre de matière différentes considérées (par exemple, considère-t-on les métaux comme une seule catégorie ou tous séparément ou à un niveau de précision qui se situe entre les 2 ?), La seconde échelle est le nombre de secteurs considérés et la troisième échelle est le niveau de précision géographique (au niveau de la France, de ses régions, des ses départements, etc...). Une fois les données récoltées elles peuvent être représentées sous la forme d'un diagramme de Sankey comme on en voit un exemple figure 2 qui permet de se rendre compte visuellement des flux. En voici un exemple. On y voit différents produits (cercles) et différents secteurs (carrés) et le flux de matières.

Seulement lorsque l'on récupère les données, elles peuvent incohérentes ou incomplètes. Pour résoudre ce problème, nous opérons une réconciliation des données par un algorithme des moindres carrés ([Courtonne et al., 2015]). Il y aussi des incertitudes sur les données récoltées qui sont propagées par sur les résultats par un algorithme basé sur des chaînes de Markov.

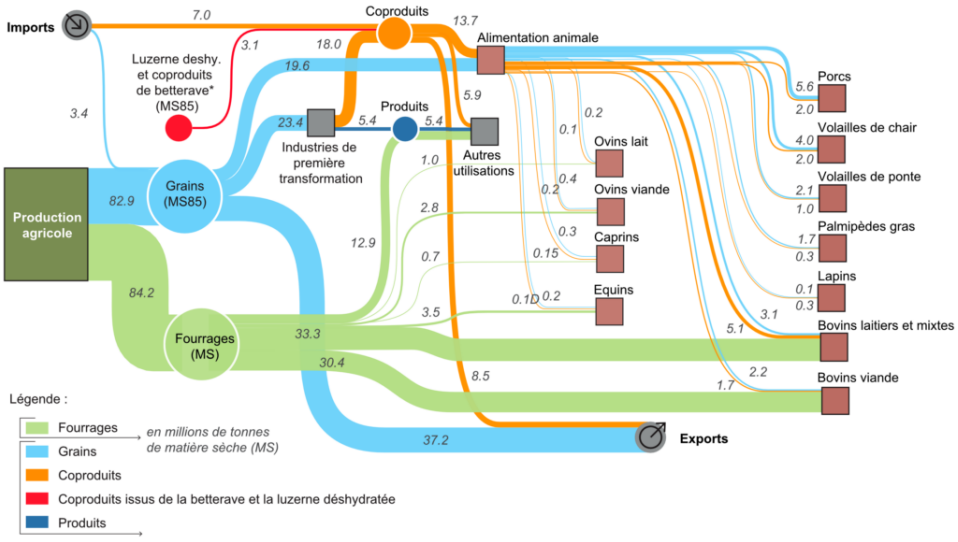


FIGURE 2 – Un exemple de diagramme Sankey tiré de [CORDIER et al., 2020]

Ensuite, il est possible de s'aider des données récoltées sur des échelles plus grandes pour obtenir une meilleure précision à des échelles géographiques plus petites. C'est le but des algorithmes de descente d'échelles présentés ici [Courtonne et al., 2016].

Pour la modélisation mathématique des échanges, nous utilisons des tables d'emplois/ressources. Les produits et les secteurs considérés sont listés. Il y a alors 2 tables : Celle qui décrit les flux depuis les produits vers les secteurs et celle qui décrit les flux depuis les secteurs vers les produits. *A priori*, tout les flux sont possibles : Un secteur peut utiliser tout les produits et créer tout les produits. Cependant, on s'efforce par une étude des secteurs à limiter les flux au possibilité cohérentes (par exemple, une meunerie n'utilisera pas de farine et ne produira pas de grains de blé).

Ces outils commencent à être robustes, l'équipe a alors entrepris de décrire la filière du bois et la filière végétale dans le projet flux-biomasse (www.flux-biomasse.fr [1]) et des travaux en cours étendent leurs applications à de nombreux secteurs de l'économie.

Ces outils sont efficaces pour décrire une économie existante mais ne sont pas encore adaptés pour imaginer des alternatives de société. La première lacune de cette modélisation est la compréhension de ce qu'un territoire peut produire comme matière première. Dans ce modèle seule une donnée peut nous informer sur ce qu'une terre peut offrir. Il s'agirait d'enrichir le modèle pour prendre en compte les limites physiques. Le second manque est que l'on ne comprend pas la compétition que se font les différents secteurs sur un produit. La troisième lacune est de comprendre le travail nécessaire dans les secteurs pour transformer les produits. Le temps de travail est une notion manquante pour l'instant. La dernière lacune qui nous concerne est de comprendre ce qu'il se passe si on limite des flux et principalement si on limite les flux d'importation. Plus généralement, il s'agit d'un modèle qui décrit les flux actuels, pas d'un modèle « comportemental » qui explique pourquoi les flux sont ainsi.
C'est pour ces raisons que la question des échelles de relocalisation est pertinente à ce

1. https ://www.flux-biomasse.fr/

moment des débats. En effet le choix de l'échelle demande de comprendre ce que le territoire peut offrir autant en ressource qu'en main d'œuvre, l'influence de la limitation des flux d'import/export et la compétition que cela engendre.
Pour essayer de compléter le modèle, je me suis intéressé de près à l'approche MESMIS et au modèle proposé dans l'article [López-Ridaura et al., 2005a] qui modélise la production agricole.

1 L'approche MESMIS

Dans cette partie, on s'intéresse à l'approche MESMIS qui guidera mon approche du problème.
Je la présente succinctement dans la première sous-partie. Ensuite je présente l'historique des utilisations de cette méthode puis la description détaillée des différentes étapes. Je définis dans la quatrième sous-partie le cadre dans lequel je compte appliquer cette méthode. Tout ceci nous pousse à essayer de comprendre ce qu'est la soutenabilité, on se penchera sur cette question dans la dernière sous-partie.

1.1 Qu'est-ce que la méthode MESMIS ?

C'est une méthode qui permet l'élaboration de scénarios puis leur évaluation multi-critères et multi-échelles. On se focalise sur un secteur on en propose plusieurs alternatives et on les évalue selon certains indicateurs.
Le système et les scénarios sont construits en 7 étapes : une première d'initialisation puis 6 autres qui forment une boucle qui permet de recréer des scénarios en fonction des résultats de celles d'avant. Voici ces 7 étapes :

1. Initialisation du contexte bio-physique et socio-économique et définition des acteurs principaux. Définitions des échelles d'actions des acteurs.
2. Définition des indicateurs considérés.
3. Définition des objectifs, des critères et des indicateurs d'évaluation.
4. Quantification des indicateurs. Définition et quantification des activités d'utilisation des sols.
5. Articulation des différentes échelles.
6. Analyse des scénario et des compromis.
7. Recommandation d'alternatives socio-technique et d'axes de recherches.

Les 3 premières étapes fixent les objectifs de la recherche (Qu'est-ce que l'ont regarde ?), les 2 suivantes relèvent du comportement du système (Comment le système s'articule ?), la sixième étape est l'optimisation sous contraintes qui donne tous les résultats ou l'évaluation des impacts en fonction des scénarios établis. La septième étape sert de conclusion autant que d'ouverture de la recherche.
La définition de ces étapes a légèrement évolué au cours du temps. On remarque principalement que les étapes 2 et 3 ont évoluées entre 2002 et 2005. Je choisis de définir les étapes 1, 4, 5, 6 et 7 comme dans [López-Ridaura et al., 2005a] et 2 et 3 comme dans [López-Ridaura et al., 2002].
Les étapes vont être résumées un peu plus précisément dans la prochaine partie mais pour avoir plus de détail sur la méthodologie, on se ramènera évidement aux deux articles sus-nommés.

L'évaluation de la soutenabilité se fait par l'évaluation de 7 caractéristiques qui sont proposées dans [López-Ridaura et al., 2002, López-Ridaura et al., 2005b] et dont il faut trouver au cas par cas des indicateurs. Ces caractéristiques sont :

- La productivité.
- La stabilité.
- La résilience.
- La fiabilité.
- L'adaptabilité.
- L'équité.
- L'auto-suffisance.

1.2 Historique des utilisations de MESMIS

Le projet MESMIS est un effort interdisciplinaire et multi-institutionnel dirigé par GIRA (the Interdisciplinary Group for Appropriate Rural Technology), une ONG locale basée dans l'ouest du Mexique. Le projet a vu le jour en 1994 avec les objectifs suivants : a) développer un cadre d'évaluation pour évaluer la durabilité des systèmes alternatifs de gestion des ressources naturelles ; b) appliquer ce cadre à différentes études de cas ; c) former les personnes et les institutions intéressées par le sujet ; et d) produire et diffuser du matériel pour faciliter l'application du cadre. ([López-Ridaura et al., 2000]).
Cet outil a quelques restrictions :

— L'évaluation n'est valable que pour un système de gestion dans un lieu géographique, une échelle spatiale (ex. parcelle, unité de production, communauté etc.) et une période de temps déterminée.
— Il s'agit d'un processus participatif nécessitant une équipe d'évaluation interdisciplinaire. L'équipe d'évaluation comprend généralement des personnes extérieures et des participants locaux.
— La soutenabilité ne se mesure pas en soi, mais se fait par la comparaison de deux ou plusieurs systèmes. La comparaison est effectuée soit de manière transversale (par exemple, en comparant un système alternatif et un système de référence au même moment), ou longitudinalement (par exemple en analysant l'évolution d'un système dans le temps).

En plus de 25 ans, l'outil a évolué et été appliqué dans plus de 60 cas d'études ([Astier et al., 2012]). On présente en annexe (A à E) plusieurs cas d'études et on essaye de comprendre ce que la méthodologie peut ou ne peut pas saisir comme information pour l'instant. On compile de nombreuses études faites sur le secteur agricole en Amérique latine ([López-Ridaura et al., 2002, López-Ridaura et al., 2005a, López-Ridaura et al., 2000] , une étude sur la production de biogaz au Mexique ([Valdez-Vazquez et al., 2017]), une étude sur le riz en Camargue ([Delmotte et al., 2016]).
Les différences principales entre les différentes études se positionnent à différentes étapes :

— Les activités observées.
— La modélisation (utilisation des terres ou échanges entre différents secteurs).
— Les indicateurs pris en compte et leurs échelles.
— Les scénarios observés (quels sont les objectifs de chacun des acteurs, quels sont les contraintes imposées et à quelle échelle).
— Les résultats.

Voici un résumé des 5 annexes.

1.2.1 Récapitulatif des possibles

Les activités observées

Les activités observées peuvent être diverses, la seule limite est de réussir à la modéliser en laissant des choix pour l'optimisation. On remarque que l'agriculture (AFOLU) est particulièrement propice à ce type d'étude, mais l'énergie ou le domaine agroalimentaire dans son ensemble sont aussi des possibilités.

La modélisation

Il y a 2 types de modélisation utilisés dans les études que je résume en quelque mots ici :

— Une première où l'on crée de boites noires (secteur, entité, acteur, ferme ...) qui font des échanges de flux en tout genre (matière, travail, argent, ...). C'est ce type de modèle qui est utilisé dans le rapport Meadows [Meadows et al., 1972].
— Une deuxième où l'on modélise les terres, on attribue des caractéristiques à chaque parcelle et on laisse aux acteurs le choix de l'utilisation des terres. Une utilisation couplée à une caractéristique donne des résultats sur les indicateurs choisi. C'est le modèle classique en agronomie, et celui sur lequel la troisième partie s'attarde. On peut trouver une première utilisation de ce type de modèle en 1826 [von Thunen JH, 1826].

La deuxième méthode à été utilisé pour faire de l'évaluation multi-échelles mais on peut tout à fait en faire avec la première modélisation. L'étude en Camargue ([Delmotte et al., 2016]) utilise par exemple des boites imbriquées.

Les indicateurs

Les indicateurs utilisés sont très variés, on en retrouve un résumé dans l'annexe E.

Les scénarios

Les scénarios servent à comparer des alternatives. Il n'y a pas vraiment de limites à part les indicateurs calculables.

1.3 Description détaillée de la méthode MESMIS

Dans cette partie, on décrit une à une les 7 étapes de la méthode MESMIS puis on essaye de fixer rapidement comment on pourrait appliquer cette étape dans notre cas.

1.3.1 Initialisation du contexte bio-physique et socio-économique et définition des acteurs principaux.

Définition de l'étape

Ici, on cherche à analyser le contexte dans lequel l'étude prend pied. On définit alors les acteurs principaux et les caractéristiques des terres/sols/espaces/terrains. On retrouve dans [López-Ridaura et al., 2002] une liste qui rassemble les facteurs à initialiser.

— Les composants du système (acteurs : producteur et organisations).
— Les entrées et les sorties du système.
— Les activités productives de chaque système.
— Les caractéristiques socio-économiques principales des producteurs, des organisations et des sols.
— Définition de l'échelles d'actions des acteurs. (ex : un fermier aura un objectif et son échelle d'actions sera sa ferme. Un conseil régional aura un autre objectif et il pourra agir au niveau de la région pour l'accomplir.)

Comment on le met application dans notre cas

Les secteurs que l'on voudrait étudier sont les différents secteurs traité précédemment dans l'équipe par AFM, c'est à dire tout les secteur agricole et de bois. On devra alors définir les acteurs du systèmes actuels.
Il serait intéressant de pouvoir modéliser un variable d'acteurs, par exemple de pouvoir

augmenter ou diminuer le nombre d'agriculteurs.
Il est aussi intéressant de réussir à modéliser un grands nombre de cultures différentes (par exemple tout celles décrite par le projet flux-biomasse).

1.3.2 Définitions indicateurs de tout types

Définition de l'étape

Ici on cherche à définir un ensemble plus ou moins exhaustifs d'indicateurs qui serviront à l'étude.
Pour cette étape, il est intéressant de reprendre la liste des caractéristiques de la soutenabilité et d'en étudier les points critiques, les critère de diagnostics pour enfin en obtenir des indicateurs ([López-Ridaura et al., 2002]).

Comment on le met application dans notre cas

On va observer les indicateurs proposés par Lopez-Ridaura dans [López-Ridaura et al., 2002] et [López-Ridaura et al., 2005a]. Leur méthodologie est assez exhaustive.
Une méthodologie et des pistes de réflexion pour établir les indicateurs que nous étudiront sont détaillées dans les parties 1.4 et 1.5.

1.3.3 Définition des objectifs, des critères et des indicateurs d'évaluation

Définition de l'étape

Ici on va répartir les indicateurs en 3 catégories ce qui définira les résultats de la recherche. On cherche à comprendre les objectifs de chaque acteur, à définir les contraintes que l'on va pouvoir fixer à l'étape 6 et les impacts/indicateurs d'évaluation que l'on va regarder (quantité d'engrais utilisée ou coûts économiques par exemple).
On répartit donc les indicateurs de l'étape 2 en trois catégories : les objectifs à maximiser, les critères qui créeront les contraintes des différents scénarios et les indicateurs d'évaluation qui servent à être analysé par les chercheurs mais n'influencent pas le résultat.

Comment on le met application dans notre cas

Les contraintes ont pour but d'essayer de choisir des échelles. Par exemple on peut forcer une région à être autonome en une denrée.
On peut aussi forcer le résultat à respecter les contraintes fixées par les scénarios de Négawatt ou Solagro (www.negawatt.org/scenario-negaWatt-2017 ou [Solagro, 2014]).
Le respect des limites fixées dans [Rockström et al., 2009] peut-être une piste pour créer des indicateurs qui seront des critères.
La multiplication d'indicateurs d'évaluation sur l'impact écologique peut être une alternative au lieu d'en faire des critères.

1.3.4 Définition et quantification des activités d'utilisation des sols

Définition de l'étape

Il faut ici comprendre quels sont les conséquences de l'affectation de tels types de sols à telles types d'activité pour les indicateurs choisis (objectifs, critères et évaluations). Cette étude nous donne des tableaux qui quantifient le résultat sur les indicateurs de toutes les associations possibles, c'est ce qui sera appelé plus tard les tables de coefficients.

Comment on le met application dans notre cas

Dans notre approche, cette étape correspond à remplir les tables de coefficients qui donnent la valeur des indicateurs de manière proportionnelle au surfaces exploitées. Cette définition est détaillée dans la partie 2.1.
Pour donner un exemple, on cherche à quantifier à l'hectare la consommation d'eau des différentes cultures et des différentes techniques.

1.3.5 Quantification des indicateurs. Articulation des différentes échelles

Définition de l'étape

Il faut ici comprendre comment agréger les résultats à toutes les échelles. En faisant ceci on obtient des équations entre les quantités à différentes échelles et ces équations sont une part intégrante de l'optimisation de l'étape 6.

Comment on le met application dans notre cas

La méthodologie que l'on appliquera pour cette étape est détaillée dans la partie 2.1.

1.3.6 Analyse des scénario et des compromis

Définition de l'étape

On fixe alors des contraintes (soutenabilité à telles ou telles échelles par exemple) et on optimise les objectifs en respectant les équations et les tableaux. Et on peut répéter avec différents choix de contraintes (et donc cela crée différents scénarios).
On doit obtenir des résultats que l'on peut comparer et analyser.

1.3.7 Recommandation d'alternatives socio-technique et d'axes de recherches

Ici on vient donc conclure. C'est à dire qu'on peut éclairer les compromis et certaines des conséquences des alternatives possibles. C'est à cette étape que l'on peut se poser de nouvelles questions.

1.4 Des questions de recherche

Maintenant qu'on a décrit une approche de travail, nous allons proposer des problématiques sur lesquelles nous allons l'appliquer.
Peut-être que le modèle proposé ne permettra pas de répondre à toute ces questions,

l'idée est d'apporter des avancées méthodologiques les plus larges possible en gardant un modèle utilisable et lisible.

1.4.1 Liste des études faites avec cette méthode

En annexe, on peut retrouver un détail de certaines études qui ont été menées. En résumé, voici les questions qui se sont posées :

- Quelles sont les pertes économique en réduisant l'échelle ? ([López-Ridaura et al., 2005a], A)
- Quels sont les différences en terme de résilience d'un système traditionnel ou commercial ? (par exemple [López-Ridaura et al., 2002] , B)
- Comment construire un bon indice de résilience ? (appliqué ici à la production de bioénergie [Valdez-Vazquez et al., 2017], C)
- Quelles sont les contraintes si l'on force le passage à l'agriculture biologique ? (Par exemple [Delmotte et al., 2016],D)

1.4.2 Questions et objectifs de mon travail

Le modèle mis en place aura pour objectif de réussir à éclairer plusieurs problématique :

- La taille (et/ou la centralisation) est-elle l'inverse de la résilience ?
- Comment la réduction d'échelle joue sur la compétition entre 2 secteurs (par exemple la compétition nourriture animale/nourriture humaine ou la compétition énergie/nourriture) ?
- Comment partager et redistribuer sur les différentes échelles les impacts écologiques ?
- Est-il plus pertinent vis-à-vis des indicateurs de rendre le problème individuel (quotas, taxe carbone) ou d'imposer les contraintes sur des échelles un peu plus grandes (Objectif territoire par territoire, taxe kilométrique, etc...) ?
- Étude du compromis taille/spécialisation des sols ?
- Raccourcir le circuit permet-il d'augmenter le réemploi, le recyclage et l'utilisation des déchets comme ressources ? (écologie industrielle, permaculture) Cela permet-il de réduire les pertes en réduisant le temps entre la production et la consommation ?
- Quelle est la population agricole nécessaire pour respecter les limites écologiques que l'on se fixe et assurer l'auto-suffisance alimentaire à une certaine échelle ?

Pour répondre à ces questions, l'étude sera basée sur un grand nombre d'indicateurs. Pour ceci, nous proposons de travailler avec les indicateurs proposés dans les différentes études qui utilisent l'approche MESMIS. À ceux-ci, nous pouvons rajouter les indicateurs qui servent à définir les limites planétaires [Rockström et al., 2009] et ceux utilisés par Négawatt ou Solagro dans leur scénarios (www.negawatt.org/scenario-negaWatt-2017 ou [Solagro, 2014]).
Les études sur l'auto-suffisance alimentaire se concentrent souvent sur l'auto-suffisance en tel ou tel aliment. Je trouve pertinent d'essayer d'établir une auto-suffisance en apport nutritif, cela apporte de nouveaux indicateurs. Il est aussi pertinent de prendre en compte la saisonnalité de la production agricole.
Le temps de travail est un notion fondamentale dans ces questions car c'est une limite pratique des sociétés, un territoire ne pourra pas offrir plus de temps de travail que sa population peut en fournir.

On pourra construire un indice de résilience en agrégeant ces indicateurs et sa construction n'est pas triviale (voir 1.5).
Pour élargir notre recherche on pourra se pencher sur les indicateurs proposé par l'association Les Greniers d'Abondances.

1.4.3 Les indicateurs proposés par Les Greniers d'abondance

Les Greniers d'Abondance est une association travaillant et communiquant autour de la résilience alimentaire.
Pour compléter les indicateurs à prendre en compte, on peut observer les indicateurs proposés dans [LGA, 2020], ils sont divisés en 11 "voies de résiliences". Je trouve intéressant d'observer des sources qui n'ont pas cherché à faire de modélisation car leurs listes des indicateurs est plus exhaustive. On peut en retrouver la liste complète en annexe F.
Certains indicateurs sont peut-être difficiles à mettre en place dans notre étude (par exemple, comment incorporer la distance moyenne des habitant au commerce alimentaire ou l'existence d'une plate-forme mutualisée ?) ou n'ont peut-être pas de réelle influence sur notre sujet (par exemple lorsqu'ils traite le sujet de la restauration collective).
On cherchera petit à petit à rajouter le maximum des indicateurs cités dans ce dossier ou dans d'autres études, pour avoir un vision la plus globale du problème et la plus robuste possible. Seulement, si certains sont faciles à modéliser, certains vont complexifier l'étude. C'est à ce moment que mes compétences de mathématicien peuvent être utiles pour pouvoir comprendre, manipuler et combiner des objets mathématiques différents (vecteurs, graphes, fonctions linéaires ou non, problème d'optimisation).

1.4.4 Problème technique

Pour répondre aux problèmes posés plus haut et considérer tout les indicateurs proposés, plusieurs difficultés techniques se posent si on utilise simplement les modèles à notre disposition.

Nous devons réussir à modéliser les limites et les possibilité d'un territoire, tant en matière première qu'en temps de travail. Il faut aussi pouvoir modéliser les interactions entre les secteurs et entre les territoires. L'influence du transport, du stockage et les niveaux de circularité de l'économie sont mal compris par l'analyse de flux de matière telle qu'elle est opérée par l'équipe pour l'instant. Tout ces points apportent des complications techniques qui forceront à coupler plusieurs modèles.
La perturbation des cycles (azote, phosphore, carbone) apportent aussi des questions intéressantes. Pour répondre à ces questions, il sera peut-être pertinent de rajouter des modèles de ces cycles mais cette question ne sera pas traitée ici.
On pourrait garder un grand nombre d'indicateurs et les observer mais si on se place dans le cadre de l'optimisation sous contrainte, il n'y aura qu'un objectif à maximiser. Celui-ci pourra être dans certaine étude un indice de soutenabilité agrégeant différents indicateurs, observons ce que cela peut être.

1.5 Qu'est-ce que la soutenabilité ?

1.5.1 Les différents indicateurs

Dans tous les articles traitant de la modélisation de la soutenabilité que nous avons étudié, la soutenabilité est un agrégat d'indicateurs [López-Ridaura et al., 2005b]. Après plusieurs années d'utilisation de la méthode MESMIS, les indicateurs sont séparés de 2 manières différentes :
Soit en 3 catégories qui indiquent le champ d'application de l'indicateur. Ces trois catégories sont économique, environnemental et social.
Soit en 7 catégories qui traduisent l'effet sur la soutenabilité qu'a l'indicateur. Ces 7 catégories sont :

- la productivité ;
- la stabilité ;
- la résilience ;
- la fiabilité ;
- l'adaptabilité ;
- l'équité ;
- l'auto-suffisance.

La **productivité** traduit la quantité produite, l'**équité** traduit la distribution des richesses et l'**auto-suffisance** la capacité à produire pour satisfaire ses propres besoins. Les 4 autres indicateurs ont besoin d'être décrit un peu plus pour être compris.

Nous décrivons ici plus en détails les 4 autres indicateurs.
La **Stabilité** traduit le niveau de consommation des ressources par rapport à leur reconstruction. Si un système consomme une ressource à la vitesse à la quelle elle se régénère, on dit que le système est stable.
Prenons quelques exemples : notre consommation de pétrole à l'échelle mondiale n'est pas stable. En 2020, nous dépensions 91 millions de barils par jour (Mb/j) (Source : IEA) alors que les 2 050 à 2 390 milliards de barils qui forment les réserves estimées se sont formés en 230 millions d'années, ce qui fait un total de :
$\frac{2390000}{23010^6 * 365} = 2,8510^{-5} Mb/j << 91$.
Ce calcul est approximatif et basé sur les estimations des ressources mais suffit à montrer l'instabilité de l'exploitation actuelle du pétrole.
La limite planétaire proposée sur la perturbation du cycle de l'azote elle est considérée comme stable. On propose de n'utiliser que 25% de l'azote régénérée par le cycle terrestre laissant les 75% restant au reste de la biosphère. Cette limite n'est cependant pas respectée actuellement.

La **résilience**, la **fiabilité** et l'**adaptabilité** correspondent à la réponse du système face à différents types de perturbation. La fiabilité correspond à la variation de la fonction objectif en fonction des petites oscillations de la variable de commande. La résilience correspond à la réponse de la fonction objectif face à une chute brutale de la variable de commande suivit d'un retour au niveau habituel. L'adaptabilité correspond à la réponse de la fonction objectif face à un changement brutal du niveau habituel de la variable de commande et à la capacité du système a retrouver un état stable. Ces 3 catégories sont résumées dans la figure 3.

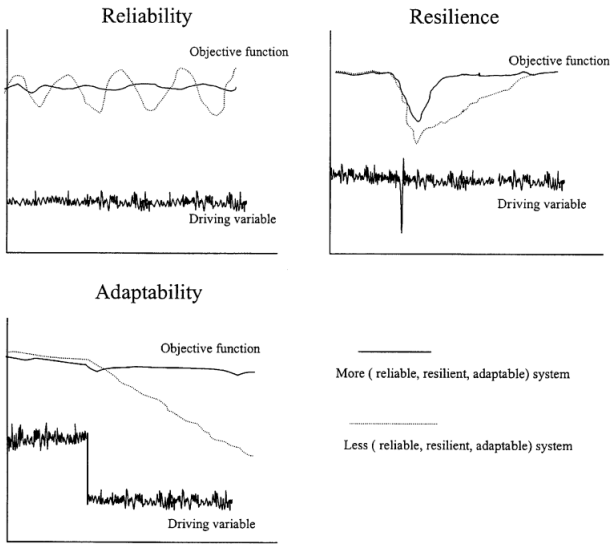


FIGURE 3 – Exemples de fonctions objectif respectivement plus fiable, adaptable ou résiliente (en trait plein) ou moins fiable, adaptable ou résiliente (en trait pointillé) [López-Ridaura et al., 2005b]

1.5.2 Un exemple d'indicateurs de soutenabilité

Pour avoir un indicateur de la soutenabilité, on doit agréger les indicateurs ensemble. On peut prendre comme exemple de cette étude [Valdez-Vazquez et al., 2017] qui observe la soutenabilité de la production de bioénergie. Pour cela, elle sépare les indices dans les 3 domaines : économique, social et environnemental.
Pour x un domaine de soutenabilité fixé, on normalise les indicateurs ($I_{N,i}$) entre 0.0 et 1.0 et on leur associe un poids ($V_{P,i}$) entre 1 et 5. Puis on calcul l'indice ainsi :

$$SI_x = \sum_{i=1}^{n} 5 I_{N,i} \frac{V_{P,i}}{\sum_{j=1}^{n} V_{P,j}} \tag{1}$$

On a donc un indice entre 0 et 5 pour chaque domaine et on peut les moyenner pour avoir un indice global.

1.5.3 Réflexion sur la façon de faire une moyenne

Après avoir listé les indicateurs de soutenabilité, la question est comment faire une moyennage cohérent des indices ?

Dans l'exemple, l'étude utilise des indicateurs entre 0 et 5. Je préfère avoir un ratio entre 0 et 1, il suffit de ne pas multiplier par 5 dans l'équation (107) et de définir le poids entre 0 et 1.
Il existe plusieurs types de moyenne, examinons de plus près ce que chacune signifie :

La moyenne arithmétique : C'est celle utilisée dans l'article [Valdez-Vazquez et al., 2017], elle suppose que une très bonne soutenabilité d'un des domaines peut contrebalancer

en partie une mauvaise soutenabilité des autres domaines.
On l'utilise souvent pour des valeurs qui ont une même unité dite absolue.

La moyenne géométrique : Elle suppose que les domaines sont intimement liés, l'effondrement d'un domaine entraîne alors la soutenabilité globale avec lui.
On l'utilise souvent pour des pourcentages (ce qui est le cas ici).

La moyenne harmonique : Elle suppose qu'une valeur très petite seule peut entraîner la soutenabilité globale avec elle. Une bonne soutenabilité sera alors nécessairement une bonne soutenabilité dans tout les domaines.
On se sert de cette moyenne notamment pour les grandeurs quotients, lorsque l'unité totale est le quotient de 2 unités différentes. Elle permet alors d'avoir un calcul cohérent L'exemple typique est celui des vitesses.

La moyenne quadratique : Dans notre cas (valeur entre 0 et 1), le résultat final sera plus sensible aux variations d'un indicateur proche de 1 qu'au variations d'un indicateur proche de 0. Le résultats final sera d'ailleurs dépendant de tous les indicateurs (*i.e.* la moyenne reste robuste même si un indicateur tend vers 0).
On l'utilise généralement pour calculer des écart-types.

Propriété 1.1. *Il existe une égalité entre les moyennes, qui -dans notre cas- traduit l'optimisme que l'on a vis à vis de la robustesse de la soutenabilité globale par rapport à l'effondrement d'un indicateur ou d'un domaine.*
Soit $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$Min(x) \leq Harm(x) \leq Geo(x) \leq Arithm(x) \leq Quad(x) \leq Max(x) \tag{2}$$

avec égalité si et seulement si le vecteur x est un multiple du vecteur $\mathbb{1}$.

Remarque. *On peut mélanger les moyennes pour rendre certains indicateurs critiques et pas d'autres. On peut aussi faire un types de moyennes pour avoir l'indicateur de soutenabilité d'un domaine puis moyenner les domaines d'une autres manières.*

Une moyenne avec au moins une partie de géométrique ou harmonique n'est pas absurde car il se pourrait que certains domaines soient fondamentaux pour la résilience globale. Parmi les défenseurs de cette thèse on retrouve Arthur Keller qui dit dans la vidéo [manuel de résilience, 2020] "Il y a des fondamentaux qui existent [...] dont on peut dire que si ça ne coche pas toutes les cases, ça ne sera jamais résilient". On peut par exemple imaginer qu'un territoire entier n'est pas résilient si tous ses sous-territoire ne le sont pas.
On peut penser que la résilience est quelque-chose de plus robuste. C'est par exemple une des premières critiques qui ont été faites à la suite du rapport Meadows [Meadows et al., 1972] par les économistes classiques qui avancent la thèse que toutes les ressources sont remplaçables.

1.5.4 Conclusion sur l'indice de soutenabilité

Toutes les remarques de cette partie s'attardent sur une sélection des études qui traitent de la soutenabilité, la vision n'est donc pas exhaustive. On peut tout de même en conclure sur une méthode nous permettra de créer un indice de soutenabilité. Tout d'abord, ils faudra choisir des indicateurs qui permettent de prendre en compte tout les domaine de la soutenabilité. Ensuite il faudra les agréger par une moyenne. Le choix

de la moyenne traduit une vision plus ou moins biaisée de la soutenabilité et même si le choix d'une moyenne ou d'une autre se justifie, il faudra garder en tête que cela vient d'un choix personnel. Si une autre moyenne que la moyenne arithmétique est utilisée, l'indice est alors forcément non-linéaire, cela peut engendrer des difficultés mathématiques.
Une fois que cette indicateur est construit, on pourra choisir arbitrairement une échelle et contraindre la soutenabilité dans le modèle. Ceci permettra de simuler une organisation de l'économie considérée comme soutenable dans notre modèle.
Il est probable que certaines échelles ne puissent fondamentalement pas être résilientes. Les indicateurs proposés peuvent peut-être suffire à montrer qu'on ne peut pas être résilient à une échelle trop petite (diversité des cultures ou capacité à accueillir des personnes en plus par exemple) mais pour contredire la résilience des échelles trop grandes, il sera nécessaire de prendre en compte de nouveaux mécanismes (le transport par exemple) ou d'observer l'évolution de la soutenabilité à une très petite échelle lorsque l'on force cette soutenabilité à une échelle ou une autre.

2 Le modèle d'affectation des sols

Uniquement pour un problème de production de matières premières (et particulièrement pour le secteur agricole), on s'intéresse à un modèle mathématique et informatique qui permet d'automatiser les étape 5 et 6 de la méthode MESMIS. La quantification des indicateurs, leur articulation à plusieurs échelles, la construction de scénario et l'analyse de compromis vont être compilés dans un modèle d'optimisation sous contraintes présenté dans [López-Ridaura et al., 2005a].
Dans une première sous-partie, je commence par présenter le modèle. Ensuite je montre des propriétés sur la modélisation générale qui nous pousse à comprendre quels scénarios sont pertinents à proposer au modèle. Dans la troisième sous-partie, j'étudie la forme de la solution de l'optimisation et présente 2 résultats : un premier qui présente une solution dans le cas où il n'y a qu'un critère et un second sous la forme d'une solution dans le cas où il y a plusieurs critères. Ces analyses permettent d'analyser des points forts et les lacunes de ce modèle vis à vis de notre problématique qui sont présentés dans la quatrième sous-partie. Enfin, je propose un programme et des illustrations du modèle.

2.1 Le modèle général

On reprend le problème de [López-Ridaura et al., 2005a] et on cherche à le modéliser mathématiquement et à l'exprimer sous les standards de la programmation linéaire : Avec une fonction objectif à maximiser et des contraintes.

2.1.1 Définitions des variables

Définition : (Indicateurs, types de sols et choix)

Il y a p indicateurs différents (numérotés avec k) et q types de sols différents (numérotés avec i).
Pour chaque emplacement, on affecte le sol à une activité. Il y a m choix différents (numérotés avec j).

Définition : (Indicateur CDFAS)

On dit qu'un indicateur k est calculable directement en fonction de l'affectation des sols (CDFAS), on peut la calculer directement pour un type de sols donné i, un choix fait j et une surface L.

Remarque. *Ces indicateurs CDFAS se doivent d'être proportionnels à la surface.*

Définition : (Table des coefficients)

Soit k un indicateurs CDFAS, on appelle table des coefficients de k la matrice $M^k \in \mathscr{M}_{l,m}$ telle que $(M^k)_{i,j}$ soit le coefficient du choix j sur un sol de type q pour la caractéristique k.

*Exemple :*Si on a 3 types de sols $P1, P2$ et $P3$ et 4 choix possibles $C1.T1$, $C1.T2$, $C2.T1$ et $C2T2$ qui correspondent à 2 cultures différentes ($C1$ et $C2$) avec 2 techniques ($T1$ et $T2$), on peut regarder l'érosion des sols obtenir la table des coefficients 4

	C1.T1	C1.T2	C2.T1	C2.T2
P1	1	2	2	4
P2	1.5	3	3	6
P3	2	4	4	8

FIGURE 4 – Exemple de table de coefficients tiré de [López-Ridaura et al., 2005a]

Remarque. *Les données de ces tables s'obtiennent grâce à l'analyse de la quatrième étape de MESMIS.*

Définition : (Fermes et surfaces)

Il y a N_1 cases (aussi appelées fermes dans la modélisation) différentes (numérotées avec l) qui sont de surfaces L_l.

Définition : (Vecteurs de cartographie des sols d'une case et global)

Soit $N_0 = N_1.q \in \mathbb{N}$.
La surface L_l est divisée en surfaces qui correspondent à chacun des types de sol. On a dont le vecteur de cartographie des sols de la case l qui est $(L_{i,l})_{1\leq i\leq q} \in \mathbb{R}^q$
où $L_{l,i}$ est la surface de sols de types i dans la ferme l.
On définit en suivant le vecteur global de cartographie des sols $L \in \mathbb{R}^{N_0}$ tel que
$L_{(l-1).q+i} = L_{i,l}$.

Propriété 2.1. *On a logiquement :*

$$\forall l \in [\![1, N_1]\!],\ \sum_i L_{i,l} = L_l \tag{3}$$

Définition : (Matrice des choix d'une case)

Pour chaque case l, on définit la matrice des choix de la case l la matrice $X_l \in \mathscr{M}_{q,m}$ telle que $(X_l)_{i,j}$ soit égale à la part de la surface de sol de type i affectée à l'activité j.

Définition : (Matrice globale des choix)

On définit la matrice globale des choix la matrice $X_l \in \mathscr{M}_{N_0,m}$ telle que
$X_{(l-1).q+i,j} = (X_l)_{i,j}$.
C'est la liste en colonne des matrices de choix de chaque ferme.
On note plus simplement $(X_l)_{i,j} = X_{i,j,l}$ et on appelle souvent cette matrice simplement matrice des choix.

Définition : (Matrice des surfaces affectées)

La matrice des surfaces affectées est définie comme

$$S = X \otimes \dot{L} \in \mathscr{M}_{N_0,m} \tag{4}$$

où $S_{(l-1)*q+i,j}$ est la surface de sols de la case l de type i associée au choix j, $\dot{L}$ la matrice appartenant à $\mathscr{M}_{N_0,m}$ où chaque colonne est égale à L et $\otimes$ est la multiplication terme à termes.

Définition : (Matrice d'indicateur à l'échelle 0)

Soit k un indicateur CDFAS, on note $A^{k,0} \in \mathscr{M}_{q,N_1}$ la matrice de l'indicateur k à l'échelle 0 telle que $A^{k,0}_{(l-1)*q+i}$ soit la valeur de k pour la case l et le type de sol i. On note plus simplement $A^{k,0}_{i,l} = A^{k,0}_{(l-1)*q+i}$

Propriété 2.2. *Soit un indicateur k CDFAS,*

$$\forall (i,l),\ (M^k S^T)_{i,(l-1)*q+i} = A^{k,0}_{i,l} \in \mathbb{R}^{N_0} \tag{5}$$

Remarque. *Comme on connaît S, on peut exprimer ces résultats en fonction de X ainsi :*

$$M^k S^T = M^k (X \otimes \dot{L})^T \tag{6}$$

On remarque alors que :

$$A^{k,0}_{i,l} = L_{l,i} \sum_j M^k_{i,j} X_{i,j,l} \tag{7}$$

Définition : (Objectifs, critères et évaluations)

Parmi les p indicateurs il y en a de 3 types :
- Les objectifs qui feront parti de la maximisation,
  on note : $\mathscr{O} = \{k | k \text{ est un objectif}\}$.
- Les critères qui feront parti des contraintes,
  on note : $\mathscr{C}ri = \{k | k \text{ est un critère }\}$.
- Les indicateurs d'évaluation qui ne feront pas partis ni de la maximisation, ni des contraintes,
  on note : $\mathscr{E} = \{k | k \text{ est un indicateur d'évaluation}\}$.

Remarque. *Dans plusieurs modélisations proposées, il y a des indicateurs qui ne sont pas calculés directement avec l'affectation des sols mais en articulant des indicateurs entre eux.*
Si on suppose cette articulation connue et linéaire, alors on peut se ramener à exprimer la tables de coefficients en fonction des tables de coefficients des indicateurs articulés entre eux.
Sinon on note $A^{k,n}(X)$ la fonction qui prend en entrée l'affectation des sols et qui en ressort le critère k à l'échelle n.

2.1.2 Articulation des échelles et des indicateurs

Il peut y avoir plusieurs échelles pour les indicateurs. Nous définissons et articulons les échelles et leurs indicateurs dans cette partie

Définition des échelles

Définition : (Échelles et territoire)

Il y a K échelles différentes numérotées par n de 1 à K, on ajoute à ceci l'échelle 0 pour laquelle on a déjà défini les indicateurs.
Soit une échelle $n > 0$, il y a N_n territoires de cette échelle notés E^n_l $\forall 1 \in [\![1, N_n]\!]$.

Définition : (Inclusion entre 2 territoires)

Soit un échelle $n > 1$, soit $l1 \in [\![1, N_n]\!]$, le territoire E^n_{l1} est l'union des territoires : E^{n-1}_l, $\forall l \in \omega^n_{l1}$.
Où ω^n_{l1} est un ensemble inclus dans $[\![1, N_n - 1]\!]$.
Si $l \in \omega^n_{l1}$, on dit que E^{n-1}_l appartient à E^n_{l1} que l'on note $E^{n-1}_l \in E^n_{l1}$.
Si $E^{n-1}_{l2} \in E^n_{l1}$ et $E^{n-2}_{l3} \in E^{n-1}_{l2}$, on dit que $E^{n-2}_{l3} \in E^n_{l1}$.

Propriété 2.3. *Soit un échelle $n > 1$, les $(\omega^n_l)_{l \in [\![1, N_n]\!]}$ forment une partition de $[\![1, N_{n-1}]\!]$. Dans le cas de l'échelle 1, on a $\omega^1_l = \{(l-1)N_1 + i | \forall i \in [\![1, q]\!]\}$*

Remarque. *Dans la pratique,on fait en sorte que les ω_l soient constitués d'entiers consécutifs.*

Définition : (Vecteur d'indicateur à l'échelle n.)

Soit k un critère qui existe à l'échelle n, on note $A^{k,n} \in \mathbb{R}^{N_n}$ le vecteur de l'indicateur à l'échelle n.
*Exemple :*On a déjà défini $A^{k,0}$ pour les indicateur CDFAS et pour la plus grande échelle $A^{k,K} \in \mathbb{R}$.

Pour avoir une vue d'ensemble aux différentes échelles, il peut être intéressant d'avoir une matrice des choix et un vecteur de cartographie des sols pour chaque échelle.
Définition : (Vecteur de cartographie des sols à différentes échelles)

On définit par récurrences la cartographie des sols à toutes les échelles. On a déjà la cartographie des sols à l'échelle 1 ($L^1 = L \in \mathbb{R}^{N_1 . q}$).
Soit $n > 1$ une échelle, on définit $L^n \in \mathbb{R}^{N_n . q}$ tel que :

$$\forall l1 \in [\![1, N_n]\!],\ \forall i \in [\![1, q]\!],\ L^n_{(l1-1).q+i} = \sum_{l \in \omega^n_{l1}} L^{n-1}_{(l-1).q+i}$$

On note $L^n_{(l1-1).q+i} = L^n_{i,l1}$ qui représente la surface de sols de type i dans E^n_l.

Définition : (Matrices des choix à l'échelle n)

On définit par récurrence la matrice des choix à toutes les échelles. On a déjà la matrice des choix à l'échelle 1 ($X^1 = X \in \mathscr{M}_{N_1 . q, m}$).
Soit $n > 1$ une échelle, on définit $X^n \in \mathscr{M}_{N_n . q, m}$ telle que :

$$\forall l1 \in [\![1, N_n]\!],\ \forall i \in [\![1, q]\!],\ \forall j \in [\![1, m]\!],\ X^n_{(l1-1).q+i,j} = \frac{\sum_{l \in \omega^n_{l1}} X^{n-1}_{(l-1).q+i,j} L^{n-1}_{i,l}}{L^n_{i,l1}}$$

On note $X^n_{(l1-1).q+i,j} = X^n_{i,j,l1}$ la part de la surface de $E^n_l 1$ qui a un sol de type i sur laquelle on a fait le choix j.

Articulations des indicateurs

On cherche ici à montrer comment certaines articulations peuvent être mise en équation et principalement pour articuler un indicateur à des échelles différentes.

Propriété 2.4. *On retrouve les indicateurs CDFAS à toutes les échelles ainsi :*

$$A_l^{k,n} = \sum_i \left(L_{l,i}^n \sum_j M_{i,j}^k X_{i,j,l}^n \right) \tag{8}$$

Propriété 2.5. ***Faire un total***
Soit un indicateur k est un total sur le territoire (production ou utilisation de quelque chose par exemple), on peut calculer sa valeur à une échelle $n_1 > 1$ en fonction de A^{k,n_2} où $0 \leq n_2 < n_1$:

$$(A^{k,n_1})_{l1} = \sum_{l \in \omega_{l1}^{n_1}} (A^{k,n_2})_l \tag{9}$$

On note cette opération $A^{k,n_1} = TOT_{n_1,n_2}(A_{k,n_2})$. Comme les échelles sont écrites sur le vecteurs de l'indicateur on écrit souvent par abus de notation $TOT_{n_1,n_2} = TOT$ avec les échelles induites.

Remarque. *Pour le indicateurs CDFAS, on a toujours $A^{k,n} = TOT(A^{k,1})$*

Propriété 2.6. ***Faire une moyenne ou un rapport***
Et si $k1$ moyenne d'un indicateur $k2$ par rapport à une caractéristique du territoire carac (Surface ou population par exemple), on peut alors faire le calcul suivant :

$$A_l^{k1,n} = \frac{A_l^{k1,n}}{carac(E_l^n)} \tag{10}$$

De même, si $k1$ est le rapport de l'indicateur $k2$ sur l'indicateur $k3$,on calcul :

$$A_l^{k1,n} = \frac{A_l^{k1,n}}{A_l^{k3,n}} \tag{11}$$

On note cette division terme à terme ainsi : $A^{k1,n} = \frac{A^{k1,n}}{A^{k3,n}}$

Propriété 2.7. ***Faire passer un ratio ou une moyenne d'une échelle à une autre***
Soit $n > 1$ une échelle,
Soit l'indicateur $k1$ qui est un ratio entre un total inconnu et un indicateur ou une caractéristique $k2$, si on connaît $A^{k1,n-1}$,$A^{k2,n-1}$ et $A^{k2,n}$:

$$A_{l1}^{k1,n} = \begin{cases} \frac{\sum_{l \in \omega_{l1}^n} A_l^{k1,n-1} A_l^{k2,n-1}}{A^{k2,n}} & Si\ A^{k2,n} \neq 0 \\ 0 & Sinon \end{cases} \tag{12}$$

On note cette opération $A^{k1,n} = MOY_n(A^{k1,n-1}, A^{k2,n-1}, A^{k2,n})$. Comme les échelles sont écrites sur les indicateurs on simplifie l'écriture par abus de notation et on écrit : $A^{k1,n} = MOY(A^{k1,n-1}, A^{k2})$

Remarque. *La matrice des choix au différentes échelles s'obtient en effectuant :*

$$X^{n1} = MOY(X^1, L) \tag{13}$$

2.1.3 Visualisation des variables

X, L et M : les 3 piliers

Dans la section précédentes nous avons vu un grand nombre de définitions , nous allons essayer d'apporter une compréhension graphique de toutes ces variables.

La variable fondamentale à visualiser, sur laquelle toute les autres variable reposent, est la matrice des choix à l'échelle 1 représenté dans la figure 5 :

FIGURE 5 – Représentation de X : la matrice des choix.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \begin{array}{cccc} choix1 & choix2 & \dots & choixm \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} ferme1 \\ \\ \\ \\ ferme2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ fermeN_1 \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} sol1 \\ sol2 \\ \vdots \\ solq \\ sol1 \\ sol2 \\ \vdots \\ solq \\ \vdots \\ \vdots \\ sol1 \\ sol2 \\ \vdots \\ solq \end{array}
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array}
\begin{pmatrix}
X_{1,1,1} & X_{1,2,1} & \dots & X_{1,m,1} \\
X_{2,1,1} & X_{2,2,1} & \dots & X_{2,m,1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{q,1,1} & X_{q,2,1} & \dots & X_{q,m,1} \\
X_{1,1,2} & X_{1,2,2} & \dots & X_{1,m,2} \\
X_{2,1,2} & X_{2,2,2} & \dots & X_{2,m,2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{q,1,2} & X_{q,2,2} & \dots & X_{q,m,2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{1,1,N_1} & X_{1,2,N_1} & \dots & X_{1,m,N_1} \\
X_{2,1,N_1} & X_{2,2,N_1} & \dots & X_{2,m,N_1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{q,1,N_1} & X_{q,2,N_1} & \dots & X_{q,m,N_1}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Remarque. *Ici $X_{i,j,l}$ est un nombre sans unité compris entre* 0 *et* 1.
S a la même structure sauf qu'elle est remplie par des surfaces.

Pour obtenir S on utilise le vecteur L qui a la structure représentée dans la figure 6.

La troisième forme de matrice qui forme un pilier pour les autres variables est la forme des tables de coefficients, représentée dans la figure 7 :

Remarque. *Les dimensions de S et M^k sont donc bien cohérentes pour effectuer le calcul de $A^{k,0}$.*

FIGURE 6 – Représentation de L : la cartographie du sol.

$$\begin{array}{lll} ferme1 & sol1 & \rightarrow \\ & sol2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & solq & \rightarrow \\ ferme2 & sol1 & \rightarrow \\ & sol2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & solq & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ fermeN_1 & sol1 & \rightarrow \\ & sol2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & solq & \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} L_{1,1} \\ L_{2,1} \\ \vdots \\ L_{q,1} \\ L_{1,2} \\ L_{2,2} \\ \vdots \\ L_{q,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{1,N_1} \\ L_{2,N_1} \\ \vdots \\ L_{q,N_1} \end{pmatrix}$$

FIGURE 7 – Représentation de M^k : Une table de coefficients.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccc} choix1 & choix2 & \dots & choixm \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} sol1 \rightarrow \\ sol2 \rightarrow \\ \vdots \\ solq \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} M^k_{1,1} & M^k_{1,2} & \dots & M^k_{1,m} \\ M^k_{2,1} & M^k_{2,2} & \dots & M^k_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M^k_{q,1} & M^k_{q,2} & \dots & M^k_{q,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les indicateurs à différentes échelles

Les indicateurs à différentes échelles sont des vecteurs dont chaque valeur vaut l'indicateur pour un territoire donné. Plus l'échelle est grande, plus la dimension du vecteur est petite. On représente les indicateurs dans les figures 8 et 9

FIGURE 8 – Représentation de A^k : un indicateur à l'échelle 0 et 1.

$$
\begin{array}{lll}
ferme1 & sol1 & \rightarrow \\
 & sol2 & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
 & solq & \rightarrow \\
ferme2 & sol1 & \rightarrow \\
 & sol2 & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
 & solq & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
fermeN_1 & sol1 & \rightarrow \\
 & sol2 & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
 & solq & \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
A^{k,0}_{1,1} \\
A^{k,0}_{2,1} \\
\vdots \\
A^{k,0}_{q,1} \\
A^{k,0}_{1,2} \\
A^{k,0}_{2,2} \\
\vdots \\
A^{k,0}_{q,2} \\
\vdots \\
\vdots \\
A^{k,0}_{1,N_1} \\
A^{k,0}_{2,N_1} \\
\vdots \\
A^{k,0}_{q,N_1}
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
A^{k,1}_{1} \\
A^{k,1}_{2} \\
\vdots \\
A^{k,1}_{N_1}
\end{pmatrix}
\begin{array}{ll}
\leftarrow & ferme1 \\
\leftarrow & ferme2 \\
 & \vdots \\
\leftarrow & fermeN_1
\end{array}
$$

FIGURE 9 – Représentation de A^k : un indicateur à l'échelle $n-1$ et n.

$$
\begin{array}{lll}
E^n_1 & E^{n-1}_1 & \rightarrow \\
 & E^{n-1}_2 & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
E^n_2 & E^{n-1}_{i_1} & \rightarrow \\
 & E^{n-1}_{i_1+1} & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
E^{n1}_{N_n} & E^{n-1}_{i_n} & \rightarrow \\
 & E^{n-1}_{i_n+1} & \rightarrow \\
 & \vdots & \\
 & E^{n-1}_{N_{n-1}} & \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
A^{k,n-1}_{1} \\
A^{k,n-1}_{2} \\
\vdots \\
A^{k,n-1}_{i_1} \\
A^{k,n-1}_{i_1+1} \\
\vdots \\
\vdots \\
A^{k,n-1}_{i_n} \\
A^{k,n-1}_{i_n+1} \\
\vdots \\
A^{k,n-1}_{N_{n-1}}
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
A^{k,n}_{1} \\
A^{k,n}_{2} \\
\vdots \\
A^{k,n}_{N_1}
\end{pmatrix}
\begin{array}{ll}
\leftarrow & E^n_1 \\
\leftarrow & E^n_2 \\
 & \vdots \\
\leftarrow & E^n_{N_n}
\end{array}
$$

Les choix à différentes échelles

Les matrices de choix à différentes échelles fonctionnent de la même manière sauf que l'on garde l'information du type de sol pour chaque échelle. On représente la structure dans la figure 10

FIGURE 10 – Représentation de X^n : la matrice des choix à l'échelle n.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \begin{array}{cccc} choix1 & choix2 & \dots & choixm \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{ccc} E_1^n & sol1 & \rightarrow \\ & sol2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & solq & \rightarrow \\ E_2^n & sol1 & \rightarrow \\ & sol2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & solq & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ E_{N_n}^n & sol1 & \rightarrow \\ & sol2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ & solq & \rightarrow \end{array}
& \begin{pmatrix}
X_{1,1,1}^n & X_{1,2,1}^n & \dots & X_{1,m,1}^n \\
X_{2,1,1}^n & X_{2,2,1}^n & \dots & X_{2,m,1}^n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{q,1,1}^n & X_{q,2,1}^n & \dots & X_{q,m,1}^n \\
X_{1,1,2}^n & X_{1,2,2}^n & \dots & X_{1,m,2}^n \\
X_{2,1,2}^n & X_{2,2,2}^n & \dots & X_{2,m,2}^n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{q,1,2}^n & X_{q,2,2}^n & \dots & X_{q,m,2}^n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{1,1,N_n}^n & X_{1,2,N_n}^n & \dots & X_{1,m,N_n}^n \\
X_{2,1,N_n}^n & X_{2,2,N_n}^n & \dots & X_{2,m,N_n}^n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
X_{q,1,N_n}^n & X_{q,2,N_n}^n & \dots & X_{q,m,N_n}^n
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

2.1.4 Formulation du problème

On sait maintenant exprimer tous nos indicateurs comme des fonctions linéaires des affectations des sols. On peut maintenant formuler les problèmes. C'est une maximisation sous contraintes où on agit sur les $X_{i,j}$.

Contraintes de surfaces des parcelles

En premier lieu, $X_{i,j}$ et une surface incluse dans la parcelle i donc :

$$\forall (i,j),\ \ 0 \leq X_{i,j} \leq 1 \tag{14}$$

Ensuite le total des surfaces affectées d'une parcelle et égale à la surface de la parcelle.

$$\forall i \in [\![1, N_0]\!],\ \sum_j X_{i,j} = 1 \tag{15}$$

Objectif

La fonction objectif peut être la maximisation ou la minimisation d'un critère ou d'une somme pondérée par les poids ω_k. Dans le cas de la maximisation on a :

$$Max \sum_{k \in \mathcal{O}} \omega_k A^k \tag{16}$$

Contraintes du scénario

On peut ensuite ajouter des contraintes qui viennent des scénarios que l'on veut explorer. On divise les critères entre ceux qui sont majorés ($\mathscr{C}ri^+$) et ceux qui sont minorés ($\mathscr{C}ri^-$). Soit B_k la borne du critère k, les contraintes s'expriment ainsi :

$$\forall k \in \mathscr{C}ri^+,\ \forall i,\ \ A^k \leq B_k, \tag{17}$$

$$\forall k \in \mathscr{C}ri^-,\ \forall i,\ \ A^k \geq B_k, \tag{18}$$

Définition : (Contraintes sur $k1$)

On note la contrainte sur $k1$ par la borne $B1$ ainsi :

$$A^{k1} \sim B1 \tag{19}$$

Notation des résultats en fonction des choix

Implicitement depuis la définition des indicateurs, on sait qu'il dépendent des choix. On note alors $A^{k,n}(X)$ la valeur de l'indicateur si l'on fait les choix sont ceux décrits par X.
Lorsque le contexte n'introduit qu'un choix possible on continue à utiliser la notation allégée $A^{k,n}$.

2.1.5 Expression avec des produits scalaire

Quand tous les indicateurs sont linéaires, nous pouvons les exprimer comme produit scalaire. Pour faire ainsi, on choisit de reformuler la matrice X en un vecteur de $\mathbb{R}^{N^1 qm}$ en lisant la matrice lignes par lignes. Ainsi en notant $\tilde{X}$, le vecteur des choix on a alors :

$$\tilde{X}_{qm(l-1)+q(j-1)+i} = X_{i,j,l} \tag{20}$$

On peut faire de même avec les matrices liées aux indicateurs et exprimer le calcul avec un produit scalaire entre les 2 vecteurs.
La notation avec les produits scalaire étant explicite on notera toujours le vecteur des choix X par abus de notation.

2.2 Propriétés de la modélisation générale

Cette première proposition vient montrer que si on respecte une condition à une certaines échelles, on la respecte aussi à l'échelle supérieure.

Propriété 2.8. *Soit $n > 1$ une échelle.*
Soit deux scénarios avec le même objectif dans leur optimisation : Le premier scénarios a une contrainte $A^{k1,n-1} \sim B1$ à l'échelle $n-1$, le deuxième scénarios a la contrainte $A^{k1,n-1} \sim B1$ à l'échelle $n-1$ et la contrainte $A^{k2,n} \sim B2$ à l'échelle n. Si

$$\left[\forall i \in [\![1, n_1]\!],\ A^{k1,n-1}(X) \sim B1\right] \Rightarrow A^{k2,n}(X) \sim B2 \tag{21}$$

alors les deux scénarios auront les mêmes résultats.

Démonstration. Trivial □

Définition : (Contrainte plus faible qu'une autre)

On dit qu'une contrainte $C1$ est plus faible qu'une contrainte $C2$, la réalisation de $C2$ implique la réalisation $C1$.
On dit aussi que $C2$ est plus forte que $C1$.

Remarque. *Une condition à l'échelle n peut être plus faible que la même condition à l'échelle $n-1$.*
Par exemple, si les différentes sous-régions sont auto-suffisantes en nourriture alors la région l'est aussi. C'est pourtant ce qui est fait dans [López-Ridaura et al., 2005a].

Dans notre modélisation, la valeur de la production d'une case n'est nullement influencée par la production des autres cases. On a donc l'intuition de ce théorème.

Théorème 1. *Soit $n, n1$ deux échelles telles que $n > n1 > 1$.*
Soit $X1$ la matrice de choix obtenue par la maximisation de l'objectif $k1$ à l'échelle n et une contrainte sur le critère $k2$ à l'échelle $n1$ que l'on écrit : $A^{k2,n1} \sim B2$.
Soit $X2$ la matrice de choix obtenue par la maximisation indépendante des objectifs $k1$ à l'échelle $n1$ (i.e. Pour tout i, on choisit $X2|E^n1_i$ pour maximiser $A_i^{k1,n1}$) et la même contrainte $A^{k2,n1} \sim B2$.
On suppose que dans les 2 cas la solution de la maximisation existe et est unique.

Si l'objectif $A^{k1,n}$ à l'échelle n est calculable en fonction de $A^{k1,n1}$ et que chacune de ses composantes est strictement croissante en fonction de $A^{k1,n1}$,
alors $X1 = X2$.

Remarque. *Cela veut dire que si on fixe une contrainte auto-suffisance sur la sous-région, alors les différentes sous-région agissent ensuite indépendamment. Sauf si on ajoute une contrainte qui n'est pas plus faible à l'échelle de la région, cela forcera les sous-régions à "communiquer" à nouveau pour s'aligner sur cette nouvelle contrainte.*

Démonstration. Supposons sous les hypothèses du théorème que $X1 \neq X2$.
Sans perte de généralité, supposons que cette différences se répercute dans l'affectation des sols du territoire E_1^{n1} , c'est à dire $X1|E_1^{n-1} \neq X2|E_1^{n-1}$. Posons alors $X3$ tels que

$$X3|E_1^{n-1} = X2|E_1^{n-1}$$
$$X3|(E^n/E_1^{n-1}) = X1|(E^n/E_1^{n-1})$$

. Il y a alors 3 cas :

- $A_1^{k1,n1}(X1) = A_1^{k1,n1}(X2)$: On contredit alors l'unicité de $X1$ car $X3$ respecte la condition $A^{k2,n1}(X3) \sim B2$ et $A_{k1}(X3) = A_{k1}(X1)$.
- $A_1^{k1,n1}(X1) > A_1^{k1,n1}(X2)$: On contredit la maximalité de $X2|E^n1_i$ avec $X1|E^n1_i$.
- $A_1^{k1,n1}(X1) < A_1^{k1,n1}(X2)$: On contredit la maximalité de $X1$ car $X3$ respecte la condition $A^{k2,n1}(X3) \sim B2$ et $A^{k1,n}(X3) > A^{k1,n}(X1)$ par stricte croissance.

□

Remarque. *Les hypothèses sur la calculabilité et la croissance de $A^{k1,n}$ sont essentielles mais raisonnables, elles sont par exemple respectées par la valeur de la production ou la marge.*
Il est possible d'alléger l'hypothèse (et donc alourdir la preuve) mais nous n'iront pas dans cette direction.

Corollaire 1.1. *Lorsqu'il n'y a pas de contraintes, chaque parcelle agit indépendamment et il en va de même de chaque entité (ferme, commune, département, sous-région, etc...)*

Résumons ce que l'on sait sur ce modèle : deux territoires s'ils n'ont pas de contraintes en commun vont agir indépendamment. Par contre, imposer 2 contraintes dont une plus faible que l'autre rend la contrainte la plus faible inutile. C'est-à-dire que l'on ne peut pas mettre une contrainte *had oc* à une grande échelle pour forcer les territoires à agir ensemble.
On peut aussi statuer qu'il est inutile d'imposer un maximisation indépendante à petite échelle, si la maximisation du même critère à une échelle globale est équivalente.

2.2.1 Vers une unicité des solutions

Dans les hypothèses du théorème 1, on retrouve l'unicité de la solution de la maximisation, on a pourtant facilement des contre-exemples à l'unicité.

*Exemple :*Soit un modèle à 2 échelles : la commune (C) formée de 2 fermes ($F1$ et $F2$). Le modèle a un seul type de sol et deux choix : grain crop ($C1$) et cash crop ($C2$). On a 2 indicateurs (grain et cash) qui ont les tables de coefficients suivantes : $M^{grain} = (1,0)$ et $M^{cash} = (0,1)$.
Le vecteur de cartographie des sols est $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On cherche à maximiser *cash* à l'échelle de la commune sous la contrainte $A^{crop,C} \geq 1$.
Les matrices de $X1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont toutes les deux optimales.
L'ensemble des solutions optimales est d'ailleurs décrit par :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix} \middle| x \in [0,1] \right\}$$

On remarque que la quantité qui est optimisée est en fait la surface associée au choix $C2$ au niveau de la commune sous la contrainte que la surface allouée au choix $C1$ soit d'au moins 1 unité de surface.

Remarque. *Cet exemple peut paraître simpliste mais il n'est pas très éloigné de la modélisation de [López-Ridaura et al., 2005a]. De plus, on peut facilement imaginer un cas réel où cette modélisation s'applique. Imaginons une petite commune avec une terre plutôt homogène qui peut d'un côté faire des cultures de vigne pour le vin, rentable mais pas nourricière ou d'un autre côté, utiliser sa terre pour nourrir sa population. On est alors dans le cas de notre exemple.*

On peut rapidement se convaincre qu'il existe un résultat analogue pour plus d'échelles, un plus grand nombre de fermes et une plus grande diversité de types de sols. On propose alors la définition et le théorème suivants.

Définition : (les indicateurs CTFAS)

On dit qu'un indicateurs k est calculable territorialement en fonction de l'affectation des sols (CTFAS) à l'échelle n, si il existe un entier strictement positif n_1 tels que :

$$f \in \mathscr{F}(R_1^n, R),\ \forall i \in [\![1, N_n]\!],\ A_i^{k,n} = f((C_i^{\alpha,n})_{\alpha \in [\![1,n_1]\!]}) \tag{22}$$

où pour tout α, $C_i^{\alpha,n}$ soit un indicateur CFDAS ou une caractéristique du territoire E_i^n.

Remarque. *Les indicateurs CDFAS font partie de cette catégories ainsi que les rapports ou les moyennes comme définis dans la partie 2.1.2. Les sommes, produits ou différences d'indicateurs CDFAS sont CTFAS aussi.*

Théorème 2. *Soit le scénario suivant :*
On maximise l'indicateur $k1$ à l'échelle K et on a comme contrainte $A^{k2,n} \sim B2$ à une échelle $n \leq 1$. Soit une solution $X1$. Si les indicateurs $k1$ et $k2$ sont CTFAS respectivement à l'échelle K et n,
alors toutes les matrices de choix X telles $X1^n = MOY(X^1, L)$ (i.e. qui ont la même matrices des choix à l'échelle n) sont aussi solutions.

Démonstration. Si on prouve que les indicateurs CDFAS à l'échelle n et à l'échelle K sont calculables en fonction de X^n, on aura fini la preuve.
En effet, dans ce cas il existe une fonction $f2$ qui ne prend en entrée que des indicateurs CDFAS et qui en ressort $k2$ et les indicateurs en questions sont des fonctions de X^n donc A^{k2} est une fonction de X^n. De même pour A^{k1} qui est une fonction des indicateurs CDFAS à l'échelle K qui sont fonctions (par la fonction TOT) des indicateurs CDFAS à l'échelle n qui sont fonctions de X^n.

Montrons que les indicateurs CDFAS à l'échelle n sont fonction de X^n. Soit k un indicateurs CDFAS, soit $l1 \in [\![1, N_n]\!]$ alors :

$$A^{k,n}_{l1} = \sum_{l,\ E^0_l \in E^n_{l1}} \sum_i L_{l,i} \sum_j M^k_{ij} X_{i,j,l} \tag{23}$$

$$= \sum_j \sum_i M^k_{ij} \sum_{l,\ E^0_l \in E^n_{l1}} L_{l,i} X_{i,j,l} \tag{24}$$

$$= \sum_j \sum_i M^k_{ij} L^n_{l1,i} X^n_{i,j,l1} \tag{25}$$

$$= \sum_i L^n_{l1,i} \sum_j M^k_{ij} X^n_{i,j,l1} \tag{26}$$

On a donc bien le résultat attendu et de plus on a une expression des indicateurs CDFAS à l'échelle n analogue à celle à l'échelle 1. □

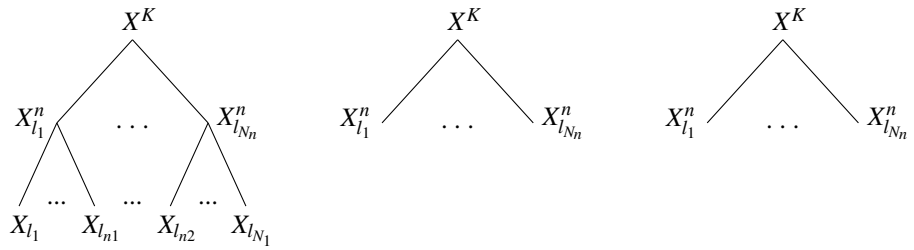
Remarque. *Si il y a plusieurs contraintes sur des indicateurs CTFAS, on peut de même réduire le problème à l'affectation des sols à l'échelle de la contraintes qui a la plus petite échelle.*

Définition : (Classe de solutions)

Dans ces cas ci, on considère les solutions par classe. Toutes les solution ayant le même X^n sont dites égales et on en choisit un représentant arbitraire.
Dans les faits, on quotiente l'espace des possibles par la relation d'équivalence :
$X1 \sim X2 \Leftrightarrow X1^n = X2^n$.

Remarque. *Ces équivalences dans les solutions induisent une équivalence dans les problèmes qu'il est intéressant d'étudier pour ne pas poser 2 fois le même scénario. On peut le comprendre schématiquement ainsi :*

FIGURE 11 – Les 3 scénarios sont équivalents si $k1$ et $k2$ sont des indicateurs CTFAS



Critères $k2$ à l'échelle n. Objectif $k1$ à l'échelle K. | Critères $k2$ à l'échelle n . Objectif $k1$ à l'échelle K. | Critères $k2$ à l'échelle n. Objectifs $k1$ à l'échelle n.

2.3 Une modélisation linéaire : comment se comportent les affectations des sols ?

2.3.1 Formulation du problème et définitions.

On va exprimer le problème sous forme d'une optimisation sous contraintes. L'idée est de réussir à numéroter linéairement les contraintes d'inégalités bien qu'elles soient appliquées à des échelles différentes. On numérote alors toutes les inégalité avec $\alpha \in [\![1, N_{cri}]\!]$ et comme les inégalités dépendent d'un k, d'un l et d'un n, on les note respectivement k^α, l^α et n^α. Le problème est donc le suivant :

Prob_gain : Le problème exprimé comme une optimisation sous contraintes

$$Max\left(\sum_l \sum_i \sum_j M^O_{i,j} Y_{i,j,l}\right) \tag{27}$$

$$B_{k^\alpha,n^\alpha} POP\_E^{n^\alpha}_{l^\alpha} CONSO^{k^\alpha} \leq \sum_{l \in l^\alpha} \sum_i \sum_j M^{k^\alpha}_{i,j} Y_{i,j,l} \qquad \forall \alpha \in [\![1, N_{cri}]\!] \tag{28}$$

$$L_{i,l} = \sum_j Y_{i,j,l} \qquad \forall i, l \tag{29}$$

$$Y_{i,j,k} = X_{i,j,l} L_{i,l} \geq 0 \tag{30}$$

La fonction à maximiser est : $A^O(Y) = \sum_l \sum_i \sum_j M^O_{i,j} Y_{i,j,l}$.
On veut que pour tout i et j, $M^O_{i,j} > 0$. On peut faire cette hypothèse car l'ajout d'une constante à la fonction à maximiser ne change pas le problème on peut donc faire ainsi :

$$A'^O = \sum_{i,j,l} M^O_{i,j} X_{i,j,l} L_{i,j} + C \sum_{i,l} L_{i,l} \tag{31}$$

$$= \sum_{i,j,l} M^O_{i,j} X_{i,j,l} L_{i,j} + C \sum_{i,j,l} X_{i,j,l} L_{i,l} \tag{32}$$

$$= \sum_{i,j,l} \left(M^O_{i,j} + C\right) X_{i,j,l} L_{i,j} \tag{33}$$

et choisir C telle que tous les $M^O_{i,j}$ soient strictement positifs (*i.e.* $C > -\underset{i,j}{Min}\left(M^O_{i,j}\right)$).

On définit ici des notions qui nous seront utiles dans les calculs plus bas.

Définition : (Rendement optimal)

Soit un type de sol i, soit un indicateur O qui symbolise l'objectif, on appelle rendement

optimal du type de sol i

$$R_i^O = \underset{j}{Max}\left(M_{i,j}^O\right) \tag{34}$$

Et on note j_i^O, le choix optimal sur le sol i.

Définition : (Perte relative d'un choix sur un autre)

Soit un type de sol i, soit un indicateur O qui symbolise l'objectif, on appelle perte relative du choix j sur le choix j^0 pour le type de sol i :

$$P_{i,(j^0,j)}^O = M_{i,j^0}^O - M_{i,j}^O \tag{35}$$

Définition : (Gain pour un indicateur c d'un choix j sur le choix j^0)

Soit un indicateur c, on appelle gain du choix j sur le choix j^0 pour le type de sol i :

$$G_{i,(j^0,j)}^c = M_{i,j}^c - M_{i,j^O}^c \tag{36}$$

Le gain va s'opposer à la perte vis à vis de l'objectif et le gain vis à vis de la contrainte. On peut d'ailleurs réexprimer le problème en notant :

$$C_{l^\alpha}^\alpha = B_{k^\alpha,n^\alpha} POP\_E_{l^\alpha}^{n^\alpha} CONSO^{k^\alpha} - \sum_{l\in l^\alpha}\sum_i L_{i,l} M_{i,j_i^O}^c \tag{37}$$

Prob_perte : Le problème exprimé avec un perte à minimiser

$$Min\left(\sum_l\sum_i\sum_{j\neq j^O} P_{i,(j_i^O,j)}^O Y_{i,j,l}\right) \tag{38}$$

$$C_{l^\alpha}^\alpha \leq \sum_{l\in l^\alpha}\sum_i\sum_{j\neq j_i^O} G_{i,(j_i^O,j)}^{k^\alpha} Y_{i,j,l} = G_{l^\alpha}^\alpha(Y) \qquad \forall\alpha\in[\![1,N_{cri}]\!] \tag{39}$$

$$L_{i,l} = \sum_j Y_{i,j,l} \qquad \forall i,l \tag{40}$$

$$Y_{i,j,k} = X_{i,j,l} L_{i,l} \geq 0 \tag{41}$$

Définition : (La fonction perte)

On définit la fonction à minimiser dans cette formulation la perte que l'on note à l'échelle n pour le territoire E_l^n ainsi :

$$P_l^{O,n} = \sum_{l'\in\omega_l^n}\sum_i\sum_{j\neq j^O} P_{i,(j_i^O,j)}^O Y_{i,j,l} \tag{42}$$

Définition : (Puissance d'un choix sur un autre)

Soit un indicateur O qui symbolise l'objectif et un indicateur c qui symbolise le critère. On appelle puissance du compromis j sur le choix j^0 pour le type de sol i :

$$\Pi_{i,(j^0,j)}^{O,c} = \begin{cases} \frac{G_{i,(j^0,j)}^c}{P_{i,(j^0,j)}^O} & SiP_{i,(j^0,j)}^O \neq 0 \\ sgn(G_{i,(j^0,j)}^c)\infty & Sinon \end{cases} \tag{43}$$

Remarque. *On note plus simplement lorsqu'on compare un choix j au choix optimal pour l'objectif $P_{i,(j_i^O,j)}^O = P_{i,j}^O$, $\Pi_{i,(j_i^O,j)}^{O,c} = \Pi_{i,j}^{O,c}$ et $G_{i,(j_i^O,j)}^c = G_{i,j}^c$.*

Remarque. *On peut rassembler les résultats dans des matrices notées G_i^c , P_i^0 et $\Pi_i^{O,c}$.*

2.3.2 Scénario avec aucun critère

On suppose dans un premier temps que la table des seuils est nulle, c'est à dire qu'il n'y a pas de critère on cherche seulement à maximiser l'objectif.

La matrice des choix et l'objectif sont alors faciles à exprimer. Pour chaque type de sol, il faut affecter le choix le plus rentable pour l'objectif (*i.e.* j_i^O). On a alors :

$$\forall i, j, l, \quad X_{i,j,l} = \delta^j_{j_i^O} \tag{44}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_{i,j,l} & = \delta^j_{j_i^O} L_{i,l} \\ A_l^{O,n} & = \sum_i L_{i,l} R_i^O \end{cases} \tag{45}$$

On appelle ce $A_l^{O,n}$ optimal $C1_l$.

Remarque. *Pour la dernière formulation, on a ici la fonction à minimiser qui est nulle et :* $\forall l, i,\ \forall j \neq j_i^O,\ Y_{i,j,l} = 0$.

2.3.3 Scénarios avec un seul critère à une seule échelle

Pour toute cette partie on étudie un scénario avec un seul indicateur c contraint. Le problème est donc le suivant :

Prob_1 : Le problème avec une seule contrainte

$$Min\left(\sum_i \sum_j P^O_{i,(j_i^O,j)} y_{i,j} = P_l^{O,n}(Y)\right) \tag{46}$$

$$C \leq \sum_i \sum_j G^c_{i,(j_i^O,j)} y_{i,j} = G_l^{c,n}(Y) \tag{47}$$

$$L_i = \sum_j Y_{i,j} \qquad \forall i \tag{48}$$

$$0 \leq Y_{i,j} \qquad \forall i,\ \forall j \tag{49}$$

Cette sous-partie ne détaille pas tous les résultats et n'énonce aucune preuve. C'est un résumé de l'annexe H qui explique seulement les notions importantes et les résultats principaux.

Supposons que 2 choix ne peuvent pas avoir à la fois une perte sur l'objectif et un gain sur la contrainte identiques. Le premier résultats encore la sparcité d'une solution

Propriété 2.9. *Les stratégies avec q ou $q+1$ composantes non-nulles sont faiblement dominantes.*

Il y a dans au moins une composantes non-nulles par types de sols et il y a un sol sur lequel il peut y avoir 2 composantes non-nulles. Pour choisir quel est ce sol on établit les définitions suivantes.

Définition : (Premier meilleur compromis)

On appelle $j^c_{i^0}$ le premier meilleur compromis pour le sol i, le choix qui respecte les conditions suivantes :

$$\Omega = \underset{j \neq j^O_{i^0}}{Argmax}\left\{\Pi_{i^0, j^O_{i^0}, j} | G_j > G_{j^O_{i^0}}\right\} \tag{50}$$

$$j^c_{i^0} = \underset{j \in \Omega}{Argmax}\left\{G^c_j\right\} \tag{51}$$

Définition : (Premier meilleur sol pour compromis)

On appelle i^c le premier meilleur sol pour compromis, le sol qui respecte la condition suivante :

$$\Omega = \underset{i}{Argmax}\left\{\Pi_{i,j_i^O,j_i^c}\right\} \tag{52}$$

$$j_{i^0}^c = \underset{i\in\Omega}{Argmax}\left\{G_{i,j_i^c}^c\right\} \tag{53}$$

Définition : (Premier meilleur compromis global)

On appelle j^c le premier meilleur compromis global, le choix tel que $j^c = j_{i^c}^c$.

Remarque. *Dans les fait on peut s'affranchir de la notion de Premier meilleur compromis pour le sol i en définisant i^c et j^c comme le couple qui respecte cette condition :*

$$\Omega = \underset{(i,j),\ j\neq j_i^O}{Argmax}\left\{\Pi_{i,j_i^O,j}|G_j > G_{j_i^O}\right\} \tag{54}$$

$$(i^c, j^c) = \underset{(i,j)\in\Omega}{Argmax}\left\{G_{i,j}^c\right\} \tag{55}$$

Propriété 2.10. *Si $C \leq G_{i^c,j^c}^c L_{i^c,l} + \sum_{i\neq i^c} G_{i,j_i^O}^c L_{i,l}$,*
alors la stratégie qui n'a des $y_{i,j}$ non-nuls uniquement pour les doublets (i, j_i^O) et (i^c, j^c) est faiblement dominante et dans cette stratégie, P est affine en C de pente $\frac{1}{\Pi_{i^c,j_{i^c}^O,j^c}^{O,c}}$.

Propriété 2.11. *Soit y une solution optimale du problème avec $C \geq G_{i^c,j^c} L_{i^c}$.*
Alors les doublets (i, j) tels que $G_(i, j) \leq G_{i^c,j^c}$, $i = i^c$ et $j \neq j^c$ sont associés à des $y_{i,j}$ nuls.

On peut donc en appliquant la proposition (2.11) simplifier le problème jusqu'à ce que le problème respecte les hypothèses de la proposition (2.10) et alors on applique cette proposition et on obtient le résultat optimal. On peut alors décrire la forme des solutions et de l'objectif.

Théorème 3. *Soit le problème Prob_1(C), le problème Prob_1 avec la constante C de l'inéquation (111) comme paramètre du problème.*
On fait l'hypothèse que pour toute paire de doublets :
$(G_{i_1,j_1}, P_{i_1,j_1}) = (G_{i_2,j_2}, P_{i_2,j_2}) \Rightarrow (i_1, j_1) = (i_2, j_2)$,
et pour toute paire de triplets :
$\Pi_{i_1,j_1,j_2} = \Pi i_2, j_3, j_4 \notin \{0, \pm\infty\} \Rightarrow (i_1, j_1, j_2) = (i_2, j_3, j_4)$.
Lorsqu'il existe une unique solution au problème, elle est notée $\tilde{y}(C)$ et associée à la fonction objectif $\tilde{P}(C)$, alors :

- *Il existe une constante positive $C_{lim} = \sum_i L_i * \underset{j}{Max}(G_{i,j})$ telle que :*
  $\forall C \in [0, C_{lim}],\ \exists!\tilde{y}(C)$ *solution de Prob_1(C).*
- *La fonction $\tilde{P}$ est affine par morceaux, continue, croissante et concave en C sur l'intervalle $[0, C_{lim}]$.*
- *La fonction $\tilde{y}$ est affine par morceaux et continue en C sur l'intervalle $[0, C_{lim}]$.*
- *Les "points de brisures" de $\tilde{y}$ et $\tilde{P}$ sont identiques et notés $(C_k)_{k\in[\![0,nb]\!]}$ avec $0 = C_0 < C_1 < \ldots < C_{nb-1} < C_{nb} = C_{lim}$.*
- *Si C est un "point de brisure" alors $\tilde{y}(C)$ a q composantes non-nulles. Sinon et si $C < C_{lim}$ alors $\tilde{y}(C)$ a $q+1$ composantes non-nulles.*

2.3.4 Scénario avec plusieurs critères à une seule échelle

On élargit un peu le problème pour le rapprocher du problème original. Il y a maintenant plusieurs critères mais on suppose qu'ils sont tous fixés à la même échelle, on a donc le problème suivant :

Prob_p : Le problème avec plusieurs critères et une échelle.

$$Min\left(\sum_i \sum_{j\neq j^O} P^O_{i,(j_i^O,j)} Y_{i,j}\right) \tag{56}$$

$$C^\alpha \leq \sum_i \sum_{j\neq j_i^O} G^{k^\alpha}_{i,(j_i^O,j)} Y_{i,j} = G^\alpha_{I^\alpha}(Y) \qquad \forall \alpha \in [\![1, N_{cri}]\!] \tag{57}$$

$$L_i = \sum_j Y_{i,j} \qquad \forall i \tag{58}$$

$$0 < Y_{i,j} \qquad \forall (i,j) \tag{59}$$

On a obtenu pour une seule échelle un sparsité de la solution optimale : il y a entre q et $q+1$ composantes non-nulles dans la solution du *prob*_1. Nous allons énoncer une généralisation pour le problème *prob_p*. Pour cela il nous faut introduire la matrice suivante.

Définition : (Matrice des contraintes)

La matrice des contraintes est la matrices à coefficients positifs suivante

$$C = \begin{pmatrix} C_L \\ C_G \end{pmatrix}$$

Avec $C_L \in \mathscr{M}_{q,mq}$ telle que :

$$(C_L)_{i,j} = \begin{cases} 1 & Si\, j \in [\![(i-1)m, im]\!] \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

Et $C_G \in \mathscr{M}_{N_{cri},mq}$ telle que $(C_G)_{\alpha,(i-1)m+j} = G^{k^\alpha}_{i,(j_i^O,j)}$.

Propriété 2.12. *C est une matrice à coefficients positif.*
Aucun choix n'est le choix optimal pour l'objectif pour tous les sols si et seulement si C est irréductible et dans ce cas C est aussi primitive.

Remarque. *Pour cette partie, on peut écrire $Y \in \mathbb{R}^{mq}$ et exprimer le problème avec des produits matrices vecteurs. Soit le vecteur $P \in \mathbb{R}^{qm}$ tel que $(P)_{(i-1)q+j} = P^O_{i,(j_i^O,j)}$*

On minimise l'objectif $Obj(Y) = \langle P, Y\rangle$, sous les contraintes :

$$B = (C^\alpha)_{\alpha\in[\![1,N_{cri}]\!]} \leq C_G Y \tag{60}$$

$$L = C_L Y \tag{61}$$

$$0 \leq Y \tag{62}$$

On peut alors exprimer cette proposition sur la sparsité de la solution.

Propriété 2.13. *S'il existe une solution à prob_p,*
alors les stratégies avec entre q et $q+N_{cri}$ composantes non-nulles sont faiblement dominantes.

Démonstration. Voir I. □

2.3.5 Scénario avec plusieurs critères tous saturés à plusieurs échelles

On reprend le problème comme il est exprimé en fin de partie 2.3.1.
De manière analogue à la partie précédente, nous allons étudier la sparsité d'une solution optimale. Si l'on suit les intuitions données par les partie précédentes, il y aura au moins un choix non-nul par types de sol et par case ce qui donne une minimum qN^1 composantes non-nulles. En ajoutant N_{cri} critères on obtient un maximum de $qN^1 + N_{cri}$ composantes non-nulles. Confirmons ces intuitions.
De manière analogue à la partie (2.3.4), introduisons la matrice suivante.
Définition : (Matrice des contraintes)

La matrice des contraintes est la matrices à coefficient positive suivante :

$$C = \begin{pmatrix} C_L \\ C_G \end{pmatrix}$$

Avec $C_L \in \mathscr{M}_{N^1 q, N^1 mq}$ telle que :

$$(C_L)_{i,j} = \begin{cases} 1 & Si\, j \in [\![(i-1)m, im]\!] \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

Et $C_G \in \mathscr{M}_{N_{cri}, N^1 mq}$ telle que $(C_G)_{\alpha,(l-1)N^1 m+(i-1)m+j} = G^{k^\alpha}_{i,(j_i^O,j)} \delta_{l \in 1^\alpha}$.

Soit $B = (C^\alpha)_{\alpha \in [\![1, N_{cri}]\!]}$ et $P \in \mathbb{R}^{N^1 qm}$ tel que $(P)_{(l-1)qN^1+(i-1)q+j} = P^O_{i,(j_i^O,j)}$

Propriété 2.14. *C est une matrice à coefficients positifs.*
Aucun choix n'est le choix optimal pour l'objectif pour tout les sols si et seulement si C est irréductible et dans ce cas C est aussi primitive.

On reformule alors le problème *prob_perte* ainsi :

Prob_perte : Le problème exprimé avec des produits matricielles.

On minimise l'objectif $Obj(Y) = \langle P, Y \rangle$, sous les contraintes :

$$B \leq C_G Y \tag{63}$$
$$L = C_L Y \tag{64}$$
$$0 \leq Y \tag{65}$$

On peut alors exprimer cette proposition sur la sparsité de la solution qui découle d'une généralisation de ce résultat à une famille de problème plus large, on a tout d'abord besoin de la définition suivante :

Définition : (Ensemble de colonnes sélectionnant des lignes de M)

Soit un matrice $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On dit qu'un sous-ensemble $\mathscr{C} \subset [\![1, n]\!]$ sélectionne un sous-ensemble $\mathscr{L}$ des lignes de M si l'ensemble $\mathscr{L}$ respecte les conditions suivantes :
$\forall i \in \mathscr{L}, \forall j \notin \mathscr{C},\ M_{i,j} = 0$
$\forall i \notin \mathscr{L}, \forall j \in \mathscr{C},\ M_{i,j} = 0$

Remarque. *Si un sous-ensemble $\mathscr{C} \subset [\![1, n]\!]$ sélectionne un sous-ensemble $\mathscr{L}$ des lignes de M, alors en renumérotant les lignes de M, on obtient un matrice diagonale*

par block comme ceci :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathscr{C} & \mathscr{C}^c \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathscr{L} \\ \mathscr{L}^c \end{array} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème 4. *On considère le problème suivant :*

Prob_G
Minimisation l'objectif $Obj(Y) = \langle P, Y \rangle$ *, sous les contraintes :*

$$B_I \leq C_I Y \tag{66}$$
$$B_E = C_E Y \tag{67}$$
$$0 \leq Y \tag{68}$$

avec $Y \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n_+$, $(B_I, B_E) \in \left(\mathbb{R}^{m_I}_+, \mathbb{R}^{m_E}_+\right)$ *et* $(C_I, C_E) \in (\mathscr{M}_{m_I,n}(\mathbb{R}+), \mathscr{M}_{m_E,n}(\mathbb{R}+))$.

Si il existe une solution alors il existe une solution optimale Y telle que :
Pour tout $\mathscr{E} \subset [\![1,n]\!]$ *sélectionnant des lignes de* C_E *alors* $\#Y|_{\mathscr{E}} \in [\![0, m_{E,\mathscr{E}} + m_{I,\mathscr{E}}]\!]$.
Où $m_{E,\mathscr{E}} = Card\left(\{i \in [\![1,m_E]\!] \,|\, \forall j \notin \mathscr{E},\ (C_E)i,j = 0\}\right)$.
Et $m_{I,\mathscr{E}} = Card\left(\{i \in [\![1,m_I]\!] \,|\, \exists j \in \mathscr{E},\ (C_I)i,j > 0\}\right)$

Démonstration. Voir I. □

Propriété 2.15. *Si il existe une solution à prob_perte,*
alors les stratégies avec entre N^1q *et* $N^1q + N_{cri}$ *composantes non-nulles sont faiblement dominantes.*

Démonstration. Soit Y, une solution optimale.
Le respect de l'équation (64) montre qu'il y a au moins N^1q composantes non-nulles.
Le fait de trouver une solution ayant moins de $N^1q + N_{cri}$ composantes non-nulles est une conséquence directe du théorème (4). □

On peut obtenir un résultat plus fin en utilisant la totalité du théorème 4.
Définition : (Groupement de ferme)

Un groupement de ferme est un sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$.
On dit qu'un critère α concerne un groupement de ferme G si $G \cap l^\alpha \neq \emptyset$. On note n_G le nombre de critère qui le concerne.

Propriété 2.16. *Si il existe une solution à prob_perte,*
alors il existe une solution optimale avec au moins un choix non-nul par type de sol et par ferme.
Pour tout regroupement de ferme G, G à un nombre de choix non-nuls inférieurs ou égal à $q * Card(G) + n_G$.

Démonstration. Application directe du théorème 4 □

On ajoute comme hypothèse que les inégalités fixées par les critères sont des égalités pour la solution optimale.

Remarque. *Nous détaillerons plus loin dans quel cas on peut être sûr que cette hypothèse est vraie.*

On cherche à exprimer la perte en fonction de B.
Si $B = 0$, on connaît le Y optimal : C'est le vecteur avec $Y_{i,j,l} = L_{i,l}\delta j = J_i^O$.
Soit B tel qu'il existe une solution. Soit e_α un vecteur de $\mathbb{R}^{N_{cri}}$ ayant seulement la α-ième composante non-nulle et cette composante est égale à 1. On étudie en fonction de λ le problème suivant :

Prob_perte(λ, α_0).

On minimise l'objectif $Obj(Y) = \langle P, Y \rangle$, sous les contraintes :

$$B + \lambda e_{\alpha_0} \leq C_G Y \tag{69}$$
$$L = C_L Y \tag{70}$$
$$0 \leq Y \tag{71}$$

Soit $\alpha_0 \in [\![1, N_{cri}]\!]$, quitte a renuméroter les critères on peut sans perte de généralité supposer que $\alpha_0 = N_{cri}$.
Soit $\tilde{Y}$ une solution de Prob_perte$(0, \alpha_0)$ qui respecte les conclusions du théorème 4. On va chercher une solution à Prob_perte(λ, α_0) en écart avec $\tilde{Y}$, on note ΔY cette écart. Le problème s'exprime alors :

Prob_delta(λ, α_0).

On minimise l'objectif $Obj(\Delta Y) = \langle P, \Delta Y \rangle$, sous les contraintes :

$$\lambda e_{(\alpha_0} \leq C_G|_{\alpha_0, [\![1, qN^1]\!])} \Delta Y \tag{72}$$
$$0 = C_L \Delta Y \tag{73}$$
$$-\tilde{Y} \leq \Delta Y \tag{74}$$

Propriété 2.17. *Soit α_0 et λ tel qu'il existe une solution à Prob_delta(λ, α_0) avec la condition (189) saturée.Pour tout A sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$ à $N_A = card(FC) + 1$ éléments, on note $\Delta Y_A(\lambda)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{qN^1}$ tel que $\Delta Y_A(\lambda)|_{A^C} = 0$ et*

$$\Delta Y_A(\lambda)|_A = \begin{pmatrix} (D_{FC}^{-1})_{1,N_A} \\ (D_{FC}^{-1})_{2,N_A} \\ \vdots \\ (D_{FC}^{-1})_{N_A,N_A} \end{pmatrix} \lambda \tag{75}$$

avec $D_{FC} = \begin{pmatrix} C_L|_{(FC,A)} \\ C_G|_{(\alpha_0,A)} \end{pmatrix}$.
$\Delta Y_A(\lambda)$ est solution optimale de Prob_delta(λ, α_0). si et seulement si
Soit A_1 sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$ à N_A éléments.Si pour tout A sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$ à N_A éléments tel que $\Delta Y_A(\lambda) \geq \tilde{Y}$, $P'(\Delta Y_{A_1}(\lambda)) \leq P'(\Delta Y_A(\lambda))$ et $\Delta Y_{A_1}(\lambda) \geq -\tilde{Y}$.

Démonstration. Voir I □

On peut ajouter la proposition suivante qui nous permettra de trouver les solutions en fonction des solutions proches.

Propriété 2.18. *Pour tout $B \in \mathbb{R}^{N_{Cri}}$ tel que Prob_perte(0,0) ait une solution $\tilde{Y}$, pour tout $\alpha_0 \in [\![1, N_{Cri}]\!]$, il y a 2 cas :*

— $\forall \lambda > 0$, *Prob_perte*(λ, α_0) *n'est pas de solution avec la première contrainte saturée.*
ou
— $\exists \lambda_1 > 0$, $\exists A \subset [\![1, qN^1]\!]$, $Card(A) = N_A, \forall \lambda \in [0, \lambda_1]$, $\tilde{Y} + \Delta Y_A(\lambda)$ *soit solution optimale.*

Démonstration. Voir I □

Ainsi on peut choisir un A qui a la pente minimale pour la perte, est garder ce sous-ensemble pour tout $\lambda \leq 0$ tel que que la condition de positivité de sature pas. Puis sur le point de saturation on cherche le nouveau A optimal. En faisant ainsi on peut ajouter par itération tous les critères et trouver la solution optimale pour la famille de critères voulue. Tout ceci est possible lorsque les contraintes liées au critères sont saturées.
Il reste à savoir quelles familles de critères assurent que les contraintes liées au critères soient saturées.

2.3.6 De la saturation des contraintes liées au critères.

On va étudier un problème *Prob_perte* avec toutes les contraintes liées aux critères saturés pour une certaines solution $\tilde{Y}$ et ajouter un critère α_0, on va observer la saturation en fonction de la valeur de C^{α_0}.
Soit α_0 un critère, On considère le problème suivant en fonction de λ :

Prob_perte_ajout(α_0, λ).

On minimise l'objectif $Obj(Y) = \langle P, Y \rangle$, sous les contraintes :

$$B \leq C_G Y \tag{76}$$
$$L = C_L Y \tag{77}$$
$$0 \leq Y \tag{78}$$
$$\lambda \leq \langle C_G^{\alpha_0}, Y \rangle \tag{79}$$

avec le problème Prob_perte_ajout$(\alpha_0, 0)$ qui accepte une solution $\tilde{Y}$ telle que toutes les conditions (76) soient saturées.

La proposition principale est la suivante :

Propriété 2.19. *Il existe $\lambda_1 \in]-\infty, +\infty]$ tel que :*
— $\forall \lambda < \lambda_1$, *il existe une solution à Prob_perte_ajout(α_0, λ) telle que la contrainte (79) ne soit pas saturée.*
— $\forall \lambda \geq \lambda_1$, *toute les solutions de Prob_perte_ajout(α_0, λ) sont telles que la contrainte (79) soit saturée.*

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, Supposons que Prob_perte_ajout(α_0, λ_0) accepte $\tilde{Y}_0$ comme solution avec la contrainte (79) non-saturée alors $\tilde{Y}_0$ est solution de Prob_perte_ajout(α_0, λ) pour tout $\lambda < \lambda_0$.
Supposons l'inverse, alors il existe $\lambda_2 < \lambda_0$ tel qu'il existe $\tilde{Y}_2$ solution de Prob_perte_ajout(α_0, λ_2) telle que $Obj(\tilde{Y}_2) < Obj(\tilde{Y}_0)$.
On a $\lambda_0 > \langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_2 \rangle$, car sinon $\tilde{Y}_2$ satisfait les contraintes de Prob_perte_ajout(α_0, λ_0) et donc $\tilde{Y}_0$ n'est pas optimal.
Soient $x = \frac{\lambda_0 - \langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_2 \rangle}{\langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_0 \rangle - \langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_2 \rangle}$ et $\tilde{Y}_3 = x\tilde{Y}_0 + (1-x)\tilde{Y}_2$.
Alors $Obj(\tilde{Y}_3) = xObj(\tilde{Y}_0) + (1-x)Obj(\tilde{Y}_2) < Obj(\tilde{Y}_0)$, par linéarité les 3 premières

contraintes de Prob_perte_ajout(α_0, λ_0) sont respectées par $\tilde{Y}_3$ et $\langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_3 \rangle = \lambda_0$.
Ainsi $\tilde{Y}_3$ remet en cause l'optimalité de $\tilde{Y}_0$, ce qui est absurde.
Ainsi s'il existe une solution qui ne sature pas la contrainte (79) pour un certain λ_0, alors il en existe une pour tous les $\lambda \leq \lambda_0$.
Soit $\lambda_1 = Sup\left\{\lambda | Prob\_perte\_ajout(\alpha_0, \lambda)\ accepte\ \tilde{Y}\ solution\ ne\ saturant\ pas\right\}$ alors toute les solutions de $Prob\_perte\_ajout(\alpha_0, \lambda_1)$ sont telle que la contrainte (79) sature.
En effet, supposons le contraire alors il existe $\tilde{Y}_1$ solution de $Prob\_perte\_ajout(\alpha_0, \lambda_1)$ telle que $\langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_1 \rangle > \lambda_1$.
Soit $\lambda_2 = \frac{\lambda_1 + \langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y}_1 \rangle}{2} > \lambda_1$, alors $\tilde{Y}_1$ est solution de $Prob\_perte\_ajout(\alpha_0, \lambda_2)$ et ne sature pas la contrainte (79) ce qui contredit la définition de λ_1 .
On a bien montré le résultat attendu. □

Remarque. *Soit $\tilde{Y}$ une solution de Prob_perte_ajout($\alpha_0, 0$) telle que toutes les contraintes liées au critères soient saturées.*
On remarque que $\lambda_1 \geq \langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y} \rangle$ car $\tilde{Y}$ est une solution optimale pour tout $\lambda \leq \langle C_G^{\alpha_0}, \tilde{Y} \rangle$.
Ainsi pour un λ assez petit, on peut considérer que le problème Porb_perte et Prob_perte_ajout(α_0, λ) sont équivalents.

On peut montrer par des exemples simples qu'il n'y a pas de théorème général sur la saturation des contraintes liées au critères. Cette saturation va dépendre de la forme des tables d'indicateurs et ce point n'a pas encore été traité. Voyons des exemples qui proposent plusieurs cas de figure.
Exemple : Prenons le problème avec une seule case, un seul type de sol pour un surface de 10. On minimise un objectif qui a pour table d'indicateur : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Les critères sont α_1 avec pour table d'indicateur : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et α_2 avec pour table d'indicateur : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
On fixe comme contraintes :

$$G^{\alpha_1}(Y) \geq 3 \tag{80}$$
$$G^{\alpha_1}(Y) \geq 4 + x \tag{81}$$

La solution est alors :

$$\forall x \in [0, 36], \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 9 - \frac{x}{4} & 0 & 1 + \frac{x}{4} \end{pmatrix} \tag{82}$$
$$\forall x \in [-\infty, 0], \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{83}$$

Ainsi pour x inférieur à 0, la solution optimale ne sature pas la contrainte (81) puis pour x supérieur à 0, la solution optimal sature (81) mais ne sature plus (80). Il n'y a pas de phase de transition où les 2 contraintes sont saturées.
Exemple : Prenons ensuite le problème avec une seule case, un seul type de sol pour une surface de 10.On minimise un objectif qui a pour table d'indicateur : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Les critères sont α_1 avec pour table d'indicateur : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et α_2 avec pour table d'indicateur : $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
On fixe comme contraintes :

$$G^{\alpha_1}(Y) \geq 3 \tag{84}$$
$$G^{\alpha_1}(Y) \geq 3 + x \tag{85}$$

Si on reprennais la stratégie optimale de l'exemple précédents on aurait comme solution :

$$\forall x \in [0, 27], \tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} 9 - \frac{x}{3} & 0 & 1 + \frac{x}{3} \end{pmatrix} \tag{86}$$
$$\forall x \in [-\infty, 0], \tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

est donc un objectif de : $Obj(\tilde{Y}_1) = 2(1+\frac{x}{3})$ pour tout x positif.
La solution optimale est plutôt :

$$\forall x \in [-\infty, 0],\ \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$\forall x \in [0, 9],\ \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} 9-\frac{2x}{9} & \frac{x}{3} & 1-\frac{x}{9} \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$\forall x \in [9, 37],\ \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} 9-\frac{x+3}{4} & \frac{x+3}{4} & 0 \end{pmatrix} \tag{90}$$

Cette fois l'objectif est alors :

$$\forall x \in [0, 9],\ Obj(\tilde{Y}_2) = 2 + \frac{x}{9}$$

$$\forall x \in [9, 37],\ Obj(\tilde{Y}_2) = \frac{x+3}{4}$$

Ainsi pour x inférieur à 0, la solution optimale ne sature pas la contrainte (85) puis pour x entre 0 et 9, les 2 contraintes sont saturées et enfin pour x supérieur à 9, la solution optimal sature (85) mais ne sature plus (84). Il y a une phase de transition où les 2 contraintes sont saturées.

Remarque. *Lorsque les 2 critères ne sont pas en accords, c'est à dire qu'un même choix est optimal pour les 2, on voit apparaître cette période de transition où l'on pourrait appliquer les propositions de la partie 2.3.5. Lorsque les critères sont en accords, on peut alors "effacer" un des critère car sastisfaire un critère entraîne de satisfaire l'autre.*
Mais ce ne sont que des intuitions sur un cas simple (1 case, 1 type de sol, 2 critères) qui risquent d'être complexes et longues à généraliser.

2.3.7 Conclusion et algorithmes

Dans cette partie, on a pu avancer sur la compréhension *a priori* du modèle, avant de faire tourner un algorithme on peut savoir plusieurs choses sur l'évolution des objectifs et sur l'affectation des sols.
Lorsqu'il y a un seul critère, on peut avoir une solution analytique. Lorsqu'il y a plusieurs critères, on le peut uniquement dans certains cas particuliers. Nous n'avons pas su fournir un algorithme spécifique qui résolve le problème car la question de la saturation est difficile à trancher. J'ai tenté d'appliquer à nouveau les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sans succès. J'ai tenté des raisonnements en utilisant des barycentres comme dans le début de la sous-partie 2.3.6 qui n'ont pas été concluant non plus.
Une question reste en réflexion : Ce modèle permet-il de modéliser fidèlement les ressources localisées (eau, minerais) ? Les 2 résultats principaux sont :
L'introduction de la notion de compromis entre 2 indicateurs qui régit l'ordre dans lequel les sols vont changer d'affectation lorsqu'on augmente les critères. Cette notion est un rapport s'il y a un seul critère et une colonne de l'inverse d'une matrice s'il y a plusieurs critères.
La sparcité des solutions est bornées. Il y a au moins un choix non-nul par sol et par case, donc au moins qN^1 choix non nuls. Et le nombre de choix non-nuls est majoré par $qN^1 + N_{cri}$ où N_{cri} est le nombre de critère.
On a apporté un résultat général sur les problèmes d'optimisation linéaires positifs.

2.4 Points forts et lacunes de la modélisation

Ce modèle est un modèle classique d'agronomie (utilisé depuis 1826 [von Thunen JH, 1826]) mais la vision que l'on aimerait avoir est plus systémique, c'est pourquoi nous pou-

vons séparer les indicateurs qui rentre dans ce cadre et ceux qui n'y rentre pas. Cette modélisation peut être appliquée pour augmenter notre compréhension de plusieurs problèmes :

- On peut observer à quel point la spécialisation des sols va diminuer lorsque l'on réduit l'échelle et surtout dans quel ordre les sols sont affectés.
- La méthodologie permet de mettre en place des scénario en évaluant l'auto-suffisance alimentaire en apport.
- On peut comprendre les différences entre quotas individuels et contraintes territoriale.
- On peut se demander ce que l'on gagne ou perd en forçant l'auto-suffisance en graine à différentes échelles.
- La préservation des sols n'a été pris en compte que vis à vis de l'érosion des sols dans les précédentes études. Il serait intéressant de modéliser l'expansion des terres cultivés et des terres laissées en jachères, ce sont des indicateurs linéaires en fonction des choix, ils ne pausent donc pas de problème avec cette méthode.

Un grand nombre de facteurs listés n'a pas pu être modélisés, reprenons-les par groupe.

L'influence du transport : On n'a pas pu modéliser le transport des marchandise dans le modèle. Pour ça il faut connaître/modéliser les flux entre les territoires. La modélisation AFM de l'équipe peut alors être utile.

Transformation, stockage, etc... : Nous n'avons pas modélisé les opérations de transformation, de stockage, de réparation, de productions des outils présent sur les territoires. On pourrait soit fixer des taux d'auto-suffisance en ces secteurs à chacune des échelles et observer le nombre d'unités que cela créerait ou soit utiliser les outils de l'équipe pour modéliser ces secteurs.

La population agricole : L'influence des scénarios sur la population agricole n'a pas été évaluée. le modèle doit être enrichi pour pouvoir la prendre en compte, de même pour la taille des exploitation et les conséquences qui en suivent (linéaire de haies, investissement initial,...). Pour faire ceci, on pourrait considérer plus en détail les temps de travail nécessaires.

L'équité : C'est un domaine qui n'a pas été pris en compte. Il dépend fortement du système réel (égalité homme/femme, accès au banques). Il en est de même de plusieurs indicateurs qui dépendent des expérience faites (implications des différents acteurs, ...)

La résilience : La résilience n'a été que peu abordée (uniquement par l'agrodiversité ou d'autre indicateurs "simple"). Il serait intéressant de voir la résistance à certains évènement extrêmes (gelée tardive ou sécheresse par exemple) en créant un indicateur de production dans ces cas-ci et d'évaluer l'interdépendance des acteurs.

La viande : Les productions sont toutes des productions végétales. Pour observer la production de viandes, Il faudrait modéliser les échanges entres les deux secteurs (fourrage et fumier) ce qui permettrai d'observer la compétition entre alimentation animale et humaine. Ici encore la modélisation AFM serait utile, en particulier le travail effectuer par Olivier Mauviel pendant son stage.

La compétition : Plus généralement si deux secteurs sont en compétitions sur autre-chose que les sols ce modèle ne le prend pas en compte.

Intrants : Peut-être que les intrants peuvent être étudier à travers l'AFM. Pour l'instant ils sont linéaires à l'hectare en fonction du choix.

Mais surtout les résultats mathématiques qui ont été prouvés dans la partie 2.3 révèlent des faiblesses du modèle. En effet, le résultat sur la sparsité des solutions montre que ce modèle tend à proposer des alternatives en utilisant le moins de solutions possibles. Cela revient à mettre tout nos espoirs dans le moins de technologie et de bio-diversité possible. Ainsi si une espèce disparaît ou devient plus compliquée à exploiter ou qu'une technologie devient inutilisable pour une raison ou une autre, alors le système s'adapte mal. On peut aussi regretter que le modèle propose une solution ayant un nombre d'espèces cultivées faibles et ceci autant pour la sécurité alimentaire que pour la préservation de la biodiversité.
On peut régler ce problème en ajoutant un indicateur de biodiversité ou de diversité des choix non nuls et lui imposer une borne inférieur. On quitte alors le champ des indicateurs linéaire. En faisant ainsi, on force artificiellement le modèle à se plier à nos envies. Peut-être qu'en se penchant sur la littérature autour de la préservation de la biodiversité [Justeau-Allaire, 2020], on trouvera une manière plus adéquate d'approcher le problème.

2.5 Exemples

Un modèle est proposé en suivant la méthode MESMIS en annexe. Nous nous intéresserons ici à un modèle générique qui illustrera les résultats mathématiques prouvés plus haut.

2.5.1 Présentation du programme python

Pour obtenir des représentations graphiques, je propose un programme python permettant de créer et résoudre le problème.
On trouve 2 programmes python :

— *modele_LUA* qui construit l'ensemble des fonctions nécessaires.
— $scenario_LUA$ à compléter en fonction du scénario voulu.

J'utilise le module *cvxpy* pour résoudre le problème d'optimisation et j'utilise les variables sous leur forme telle quelle est illustrée dans la partie 2.1.3.
On peut retrouver les 2 programmes en annexe J.
Les résultats pour des critères fixés sont présentés sous la forme du graphique 12. On

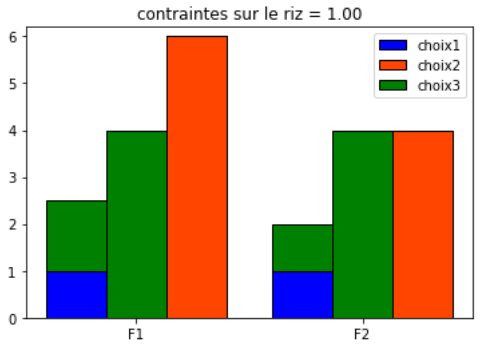


FIGURE 12 – le résultat de l'optimisation pour des critères fixés

représente à gauche la ferme 1 puis la ferme 2 et ainsi de suite. On a pour chaque ferme

de gauche à droite les différents types de sol avec les surfaces disponibles. Enfin, la couleur par laquelle la surface de chaque sol est remplie correspond au choix fait dessus.
On peut choisir un critère en particulier et faire varier sa valeur pour tracer la valeur de l'objectif et l'affectation des sols de chaque ferme en fonction de la valeur du critère. On retrouve des exemples dans les graphiques 16 et 14.

2.5.2 Des contraintes à une échelle supérieure à 0

Les résultats ferme par ferme avec 2 fermes si on applique une contraintes sur l'ensemble des 2 fermes sont présentés figure 14. On y voit apparaître des courbes non affines mais si on regarde les affectations de chaque types de sol sommées pour les 2 fermes, on revoit apparaître les solution comme on s'y attendait. Ceci est illustré dans la figure 15.

2.5.3 Comportement à 1 contraintes

Reprenons le même exemple. La tables d'indicateur de l'objectif est :

$$M^{Obj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 1 & 3 \\ 0,2 & 2 & 0,5 \end{pmatrix} \tag{91}$$

Donc avec un valeur de critère nulle, le choix 2 est optimal sur le sol 0 et 1 et le choix 1 est optimal sur le sol 2. C'est ce qu'on observe dans la figure 13.

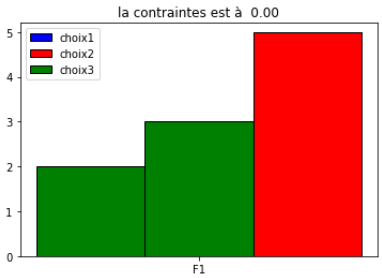


FIGURE 13 – L'affectation des sols avec un critère nul

la table d'indicateur du critère *Riz* est :

$$M^{Riz} = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \tag{92}$$

On peut donc calculer les puissances de tout les compromis :

	Choix 0	Choix 1	Choix 2
Sol 0	0.5	0.75	0
Sol 1	0.07	0.5	0
Sol 2	0.28	0	0.33

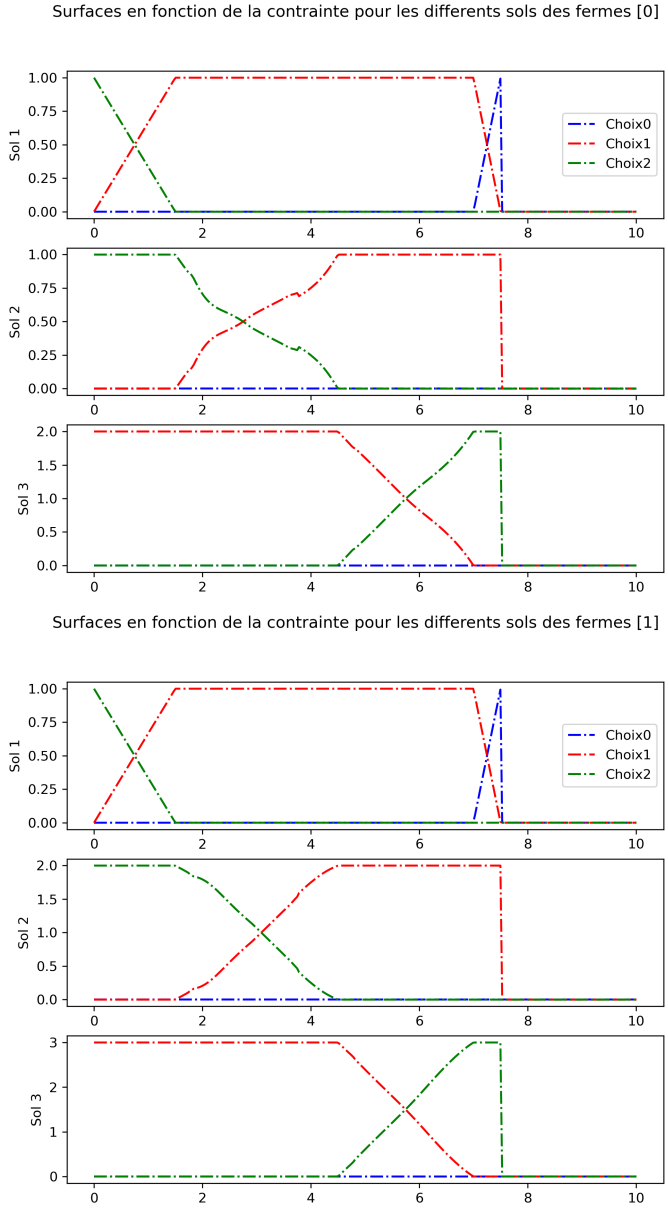


FIGURE 14 – Pour chaque ferme on A 3 graphique qui corresponde au 3 type de sol et chaque courbe représentent la surface de chaque types de sols allouée à un choix.

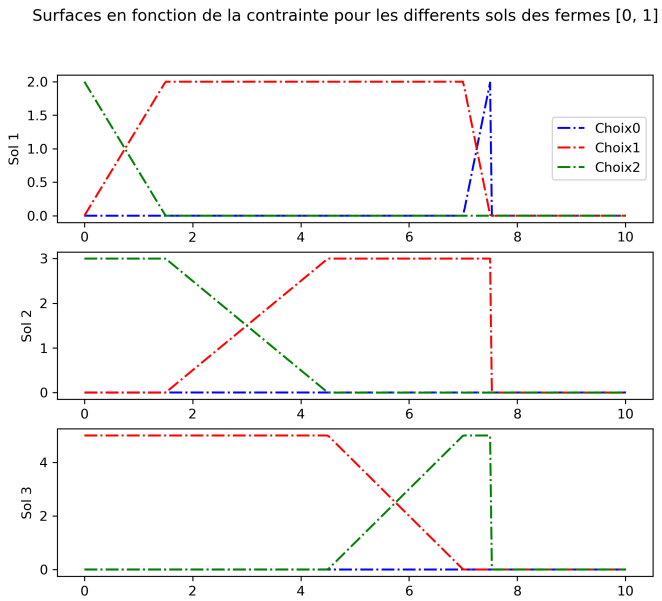


FIGURE 15 – Les affectation des sols en regroupant les surface des 2 fermes

Le compromis avec la meilleurs puissance est le choix 1 sur le sol 0 : C'est le premier meilleur compromis. C'est donc le premier choix qui augmente quand on augmente la valeur du critère. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 15. Une fois que le sol 0 est entièrement recouvert du choix 1, on peut itérer les calculs et c'est bien le choix 1 sur le sol 1 qui devient le premier meilleur compromis puis le choix 2 sur le sol 2 et enfin le choix 0 sur le sol 0. Pour une valeur du critère plus grande, on ne peut plus trouver de solution.
On observe bien une évolution de l'objectif en affine par morceaux sur la figure 16.

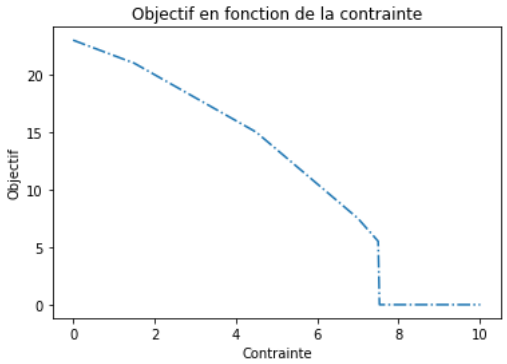


FIGURE 16 – L'objectif en fonction de la valeur du critère

3 Un modèle liant l'AFM, MESMIS et MusiaSEM

Dans cette partie, je propose de coupler 3 méthodes pour obtenir un modèle systémique qui comprend une grande partie de la problématique du choix d'échelle.
Je présente dans la première sous-partie la troisième approche (MusiaSEM) qui n'a pas encore été présentée. Ensuite je propose le modèle du territoire de manière qualitative. Une description mathématique de chaque objet est faite dans la troisième sous-partie. La quatrième sous-partie montre comment créer le scénario et la cinquième sous-partie fait un résumé du modèle sous forme d'équation. La sixième sous-partie nous sert à faire un bilan sur ce modèle vis à vis des objectifs que l'on a fixés dans la première partie.

L'objectif de ce modèle est de combler les trous de l'AFM et du modèle d'affectation des sols afin de décrire l'économie en comprenant ce qu'un territoire peut offrir et par où et comment évolue la matière dans l'économie.

Pour faire ainsi, on choisit une échelle minimum de détail, par exemple la commune. Le théorème 2, nous pousse à penser que cette échelle pertinente est celle à la quelle on va appliquer un critère sans qu'il y a de critère appliqué à un sous-territoire. Chaque territoire de cette échelle à besoin d'être décrit de 2 manières : de l'intérieur, en comprenant le fonctionnement économique du territoire, et de l'extérieur, en comprenant ces échanges avec les autres territoires.

La modélisation des échanges entre territoires n'a pas encore été trouvée mais les graphes seront sûrement un outils nécessaire.
La modélisation intérieur vient utiliser 3 outils. Tout d'abord les travaux présentés dans [López-Ridaura et al., 2005a] permettent en donnant la topologie d'un sol de connaître la production de matière première. Ensuite l'analyse de flux de matière [Courtonne et al., 2015, Courtonne et al., 2016] permet de suivre la matière à travers ses différentes étape de transformation. Enfin l'approche MusiamSEM ([Giampietro and Ramos-Martin, 2009]) permettrait de comprendre les dynamiques sociales liées au problème (temps de travail, population disponible).

3.1 L'approche MusiaSEM

L'approche MusiaSEM (MUlti-Scale Integrated Analysis of Societal and Ecosystem Metabolism, Analyse multi-échelle intégrée du métabolisme societal et des ecosystemique [Giampietro and Ramos-Martin, 2009]) est un modèle du temps et de l'énergie de travail que fournit une société.

À l'échelle d'un individu ($n-3$), le partage du temps entre ces 3 catégories est commandé par son âge et son sexe. On distingue les enfants, les actifs et les retraités et en fonction de la catégorie de l'individu, on lui attribut une répartition de son temps
Les activités d'un individu sont divisées en 3 groupes : Le travail rémunéré (PW), les taches ménagères, éducation et loisir (HH) et les soins personnels (PO) qui comprend le sommeil, les repas, etc... On note HA_{PW} le temps de travail rémunéré et de même pour les autres types d'activités
À l'échelle du foyer ($n-2$), on associe des profils type de foyer (par exemple, un couple d'actifs avec ou sans enfant, un couple de retraités sans enfants,etc...). On peut alors sommer les temps d'activités des différents membre du foyer pour obtenir une

valeur à cette échelle, cette valeur peut être adapter en fonction de la forme du foyer, par exemple les adultes d'une famille nombreuse auront plus de temps à investir dans la catégories HH. En connaissant la répartition des différents types de foyer dans la population, on obtient les différentes heures d'activité disponible pour tout la population. Cette somme permet aussi de connaître les besoins de la société.
Les besoins sont catégorisé en 3 groupes : le secteur productifs (PS), l'agriculture (AG) et les service et gouvernement (SG). Ces 3 secteurs obtiennent 2 caractéristiques, l'énergie et le temps de travail rémunéré nécessaires pour satisfaire les besoins.
À l'échelle du secteur économique ($n-1$), on peut résumer les échanges de temps et d'énergie dans la figure 17 tirée de [Giampietro and Ramos-Martin, 2009]. On y voit alors les temps de travail nécessaire et ceux que la population peut offrir au secteur du travail rémunéré.

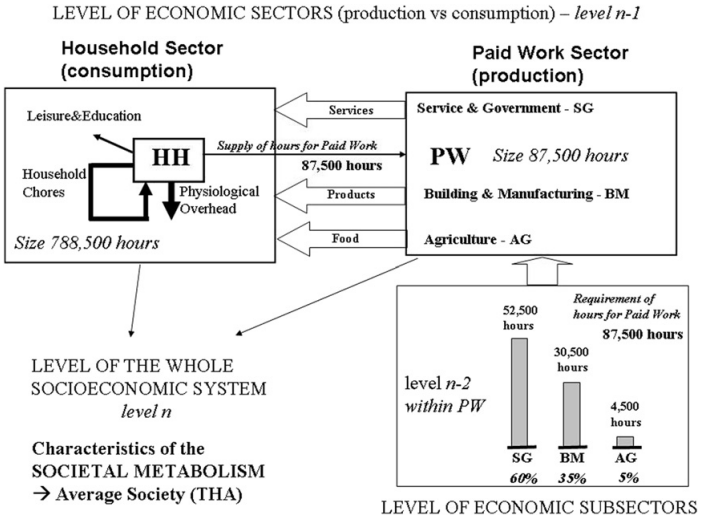


FIGURE 17 – Représentation en boites noires du métabolisme de la consommation

À l'échelle de la société (n), on peut agréger toutes les données récoltées pour obtenir ce qui intéresse l'étude. On peut par exemple connaître l'énergie dépensée pour chaque heure de vie d'un humain.

Les étude MusiaSEM sépare les éléments en 2 catégories : la catégories de flux où L'élément rentre dans un secteur et est consommé (ex : du blé qui rentre dans une meunerie). la catégories des fonds où les éléments sont conservés pendant le processus (ex : la population, les terres). Nous garderons cette distinction dans nos études.
Pour voir un application sur la question du choix d'échelle, l'article [Scheidel et al., 2013] permet d'approfondir la question.

3.2 Le modèle d'un territoire

Un territoire à l'échelle minimale (que l'on nomme échelle n) correspond au case du modèle d'affectation des sols. Cette case à plusieurs caractéristiques :

Informations	Caractéristiques	Influences
Population	Nombre, Age ,Sexe Type de foyer	Temps de travail disponible. Quantité de consommation nécessaire.
Sols	Surfaces, Types	Production de matière premières.

Ces caractéristiques sont des éléments de fonds (dans les fait un sol peut changer de type par son exploitation mais nous négligeons cet effet dans un premier temps).
Pour calculer les besoins et le temps de travail disponibles nous utilisons la méthode proposé par MusiaSEM. Pour calculer les matières première produites par le sols nous utilisons le modèle d'affectation des sols (modèle LUA pour Land-Use Activities).

Ensuite pour décrire l'économie d'un territoire, on propose d'utiliser l'Analyse de flux de matière. C'est à dire de lister les secteurs et les produits utilisés et de décrire les flux entre les 2.

3.2.1 Description générique du flux de matière d'un territoire

On commence l'étude par une description schématique d'un territoire avec plusieurs "boite noire" qu'il faudra réussir à décrire. Entre ces boites, on étudie les flux de matière (représentés pas des flèches). On à tout d'abord un modèle sur l'affectation des sols (Moèle LUA) qui produit des matière première. Ensuite des unité de transformation récolte ces matière première et en fait des produit consommable/manufacturés. Ces produits sont distribués pour la consommation ou à une autre unité de transformation. La consommation produits des déchets et des biens de seconde main. Les déchets peuvent être recyclé en matière première ou bien transformé, les déchets peuevtn aussi devenir des pertes.
À chaque étape, les biens/matières peuvent être importés, exportés, créer des déchets ou des pertes. (*Pour un soucis de lisibilité, nous n'avons représenté que certaines des flèches vers l'import, l'export, les déchets et les pertes.*)

On rajoutera peut-être une modélisation autour du stockage.

Chaque cercle représente les produits qui sont des éléments de flux. Il y a 6 types de produits symbolisés par des cercles sur le schéma 18. On y distingue les matières premières, les biens transformés, les biens de seconds mains qui ont déjà été utilisés, les déchets qui ont été récupérés, les déchets triés qui ont été triés, les pertes qui sont les déchets qui ne sont pas récupéré ou récupérable.
Le fonctionnement des produit est identique quelque soit leur catégorie, c'est à dire qu'il y en a la même masse en entrée et en sorti de chaque cercle (sauf les pertes qui n'ont pas de sortie). Chaque produit peut-être importé ou exporté.

Les rectangles représentent les secteurs, il y en a plusieurs types.
Les rectangles vertes représente les secteurs d'activité qui ont été décrit par l'AFM de l'équipe. On connaît les rapport entre les produit d'entrée et de sortie grâce au travaux précédents de l'équipe.
Le rectangle noir représente la consommation, son flux d'entrée est fixé par l'étude de la population (par l'approche MusiaSEM).
Le rectangle orange représente l'utilisation des sols, on utilise le modèle d'affectation des sol présenté précédemment pendant le rapport pour connaitre ses entrées et sortie.
Les rectangle rouges représente l'import et l'export, ils sont dirigés par les échanges entre les territoires qui n'a pas encore été décrit.

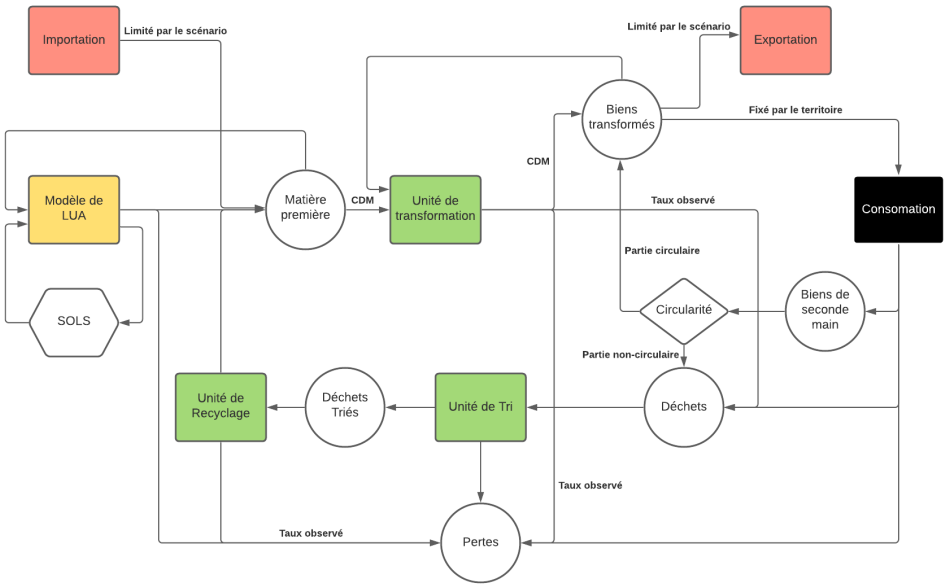


FIGURE 18 – Description schématique du fonctionnement d'un territoire.

Le losange aide à modéliser la circularité du système. Elle est caractérisée par la proportion de chaque bien de seconde main qui retournera dans l'économie. On note pour chaque produit P le rapport de circularité $RC_P \in [0,1]$.

3.3 Description mathématique

On a $PROD$ une liste de produit et $SECT$ une liste de secteur. Pour un produit P et un secteur S, on note : S_P le flux du secteur vers le produit et P_S le flux du produit vers le secteur.
On retrouve alors les tables emplois/ressources de l'AFM ainsi :

$$(P_S)_{P \in PROD, S \in SECT}$$
$$(S_P)_{S \in SECT, P \in PROD}$$

3.3.1 Fonctionnement des cases Produits

Les matières premières sont régis par la loi de conservation de la masse, la masse totale d'un produit P s'écrit T^P et respecte l'équation suivante :

$$\forall P,\ T^P = \sum_S S_P = \sum_S P_S \tag{93}$$

3.3.2 Fonctionnement des cases Secteurs

On note T^S le totale de la masse qui passe dans un secteur S. Lorsque le secteurs respectent la conservation de la masse, il respecte cette équation :

$$\forall S,\ T^S = \sum_P S_P = \sum_P P_S \tag{94}$$

Seulement cette fois si les ratios sont fixés (ou encadrés) avec des conditions. Si les ratio sont fixés, on écrit :

$$\frac{P_S}{T^S} = R^{in}_{S,P} \tag{95}$$

$$\frac{S_P}{T^S} = R^{out}_{S,P} \tag{96}$$

Si les ratio sont encadrés, on écrit :

$$R^{in,-}_{S,P} \leq \frac{P_S}{T^S} \leq R^{in,+}_{S,P} \tag{97}$$

$$R^{out,-}_{S,P} \leq \frac{S_P}{T^S} \leq R^{out,+}_{S,P} \tag{98}$$

On remarque que l'on peut réécrire ces contraintes sous forme linéaire, par exemple :

$$\left[\frac{P_S}{T^S} = R^{in}_{S,P}\right] \Leftrightarrow \left[0 = R^{in}_{S,P} \sum_{P' \neq P} P'_S + (R^{in}_{S,P} - 1)P_S\right] \tag{99}$$

3.3.3 Fonction de la case circularité

En entrée de la circularité on retrouve les biens de seconde main, chaque bien de second main SM est associé à un bien transformé P et un déchet D on retrouve alors cette équation :

$$SM_{circularite} RC_{SM} = Circularite_P \tag{100}$$

$$SM_{circularite}(1 - RC_{SM}) = Circularite_D \tag{101}$$

Remarque. *En fin de compte, la circularité de chaque produit de seconde main fonctionne comme un secteur.*

3.3.4 Le cas de l'affectation des sols

Le seul secteur qui ne respecte pas la conservation de la masse et l'affectation des sols (Modèle LUA). En effet, les flux entrant et sortant sont dirigés par les choix fait sur les sols. On reprend alors le modèle d'affectation des sols.

$$0 \leq Y \tag{102}$$

$$LUA_P = [\![M^{out}_P, Y]\!] \tag{103}$$

$$P_{LUA} = [\![M^{in}_P, Y]\!] \tag{104}$$

$$L = C_L Y \tag{105}$$

où L est le vecteur de cartographie des sols, $C_L \in \mathscr{M}_{q,qm}$ la matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de taille $(1,m)$ remplis de 1. Les vecteurs M^{out}_P et M^{in}_P sont issus des tables d'indicateurs avec pour indicateur la production et la consommation de ressources.

3.4 Création de scénarios

La création de scénarios se fait via une optimisation (sur un flux ou sur un indicateur qui provient de certains secteurs) sous des contraintes. Les contraintes sont celles énoncées plus haut appelées contraintes matière, On a des contraintes de disponibilité et d'autres inhérentes au scénario appelées critère du scénario.
Il faut choisir quelles sont les variables décision et quels sont les critères.

Les flux d'entrée et de sortie d'un secteur sont des fonctions du poids total du secteur (T^S). Les variables décisions sont donc les les masses totales de chaque secteur sauf pour quelques secteurs
La consommation : Les flux entrant et sortant de la consommation sont fixé par le territoire (nombre d'habitants).
L'importation et l'exportation : Les flux d'importation et d'exportation sont des variables de décisions. Une fois les territoires connectés le secteur "importation du produit 1 du territoire 1 vers le territoire 2" fonctionne comme un secteur habituel.
Le nombre d'unités : Le nombre d'unités de transformation (ou d'un autre secteur) peut être une valeur discrète qui est une valeur de décisions. Cette variable de décisions est reliée au poids total du secteur par une contraintes de matière. On note ce nombre d'unité U^S pour le secteur S.
Les bornes de production et de consommation : Si on se place dans le cadre où les ratios sont encadrés alors les flux entrant et sortant sont aussi des variables de décisions.

Les *contraintes de matière* sont les contraintes sur le flux entrant et sortant des cases Produits et Secteurs, on y ajoute la notion d'unité :
Présence des unités : Une usine accepte une production maximale, si on dépasse ce seuil il faudra une seconde usine. On eut écrire la contraintes ainsi :

$$T^S \leq N^S.U_S \tag{106}$$

En notant U_S, la valeur limite que peut accepter un unité.

Les *contraintes de disponibilité* sont des contraintes sur la présence des terres disponibles et de la main-d'oeuvre.
L'utilisation des sols : Le territoire a une surface donnée de chaque type de sol. C'est la topographie des sols. Les secteurs utilisent une certaines surfaces de chacun de ces sols. On peut alors fixer que la surface utilisée de chaque type de sol est inférieure à la surface disponible.
Le temps de travail : On peut en suivant l'approche MusiaSEM quantifier le nombre d'heure de travail que peut fournir la population. On peut donner en indicateur un temps de travail pour produire tel produit dans tel secteur. On peut alors fixer le temps de travail nécessaire inférieur au temps de travail disponible.

Les *critères du scénario* peuvent être divers (utilisation d'eau, données économique, émission de CO2, auto-suffisance) mais nous nous concentrons sur les questions de choix d'échelle et donc d'import/export et de temps de travail.

3.5 Résumé du modèle

Il y a 2 types de briques : Les produits dont les flux entrant et sortants respectent le conservation de la masse de l'équation (93) et les secteurs dont les flux entrant et

sortant donc piloté par la masse totale du secteur T^S par les équations (95) et (96).
On applique une optimisation sous contraintes où les variables de décisions sont les masses totales (où on ajoute les flux entrant et sortant si il y a un encadrement par la masse totale) et le nombre des unité (si nombre il y a). On ajoute une contrainte matière qui lie le nombre d'untié et la masse totale des secteurs (106), les contraintes de disponibilité des sols et de la main-d'œuvre et des contraintes inhérente au scénario.
La fonction objectif est à choisir avec soin.

Voici les equation (sauf l'objectif) qui forme le modèle :

Le problème comme optimisation sous contraintes

$$
\begin{aligned}
& Max(Obj(T,N,Y)) & \\
& 0 \leq T^S & \forall S \\
& N^S \in \mathbb{N} & \forall S \\
& Y^S \in \mathbb{R}_+^q & \forall S \\
& \quad Contraintes\ matiere & \\
& T^S \leq N^S.U_S & \forall S \in \{Usine\} \\
& 0 = C_{S,P}^{in} \sum_{P' \neq P} P'_S + (C_{S,P}^{in} - 1)P_S & \forall P, S \neq LUA \\
& 0 = C_{S,P}^{out} \sum_{P' \neq P} P'_S + (C_{S,P}^{out} - 1)P_S & \forall P, S \neq LUA \\
& T^P = \sum_S S_P = \sum_S P_S & \forall P \\
& \quad Contraintes\ de\ population & \\
& POP.HA \geq \sum_S T^S.WH_S & \\
& POP.CONSO_{POP} = (P_{Consommation})_{P \in \{produits\}} & \\
& \quad Modele\ LUA & \\
& LUA_P = [\![M_P^{out}, Y]\!] & \\
& P_{LUA} = [\![M_P^{in}, Y]\!] & \\
& L = C_L Y &
\end{aligned}
$$

3.6 Comment trouver les caractéristique des secteurs

Le bon fonctionnement des secteurs requirt de connaitre un grand nombre de constantes. Nous cherchons a savoir comment les trouver.

3.6.1 Le modèle LUA

Les caractéristiques des sols et leur rendement pour produire tel produit avec tel méthode vient des connaissance en agronomie. On peut tirer des méthode comme celles présentées dans ces articles [van Ittersum et al., 2013, van Diepen et al., 1989].

3.6.2 Unité de transformation, tri, recyclage

Pour regler les rapport qui régissent ces secteurs, nous utiliserons les travaux préalable de l'équipe qui a décrire les flux de matière dans l'économie actuelle. On a donc les rapport entre la masse du flux d'un type de produit et la masse du flux total qui transite par les secteur.

3.6.3 Consommation

Le modèle fixe alors les flux entrants et sortants de cette la consommation par l'étude MusiaSEM et en prenant en compte les besoins d'un humain et la taille de la population.

3.6.4 Circularité

Pour les rapport de circularité, on peut se référer au niveau actuel. On pourra aussi estimer des rapport en fonction de la taille à laquelle on n'organise la société. C'est une question à creuser qui n'a pas encore été approfondie.

3.7 Scénarios envisagés sur la filière agricole

J'aimerai à terme un scénario qui soit dans les limites planétaire, qui satisfasse la consommation de la population en apport toute les saison.
Ainsi la contrainte sur la consommation serait sur des indicateurs qui serait les différents apports essentiels (minéraux, vitamines, protéine, sucre, ...) et sur les 4 saisons. Les sources de nourriture apporteraient des apports à leur saison, en ajoutant que les produit conservable (donc transformé) peuvent être consommé en mode printemps, été, automne ou hiver.

Les contraintes sur les limites planétaires sont retranscrite au niveau le plus large possible. Globalement, on prend les limites proposé par [Rockström et al., 2009]et on en fait des contraintes.
Le cycle de d'azote, du Phospore et l'utilisation de l'eau sont des limites par an, on peut les retranscrire directement.
La contraintes sur le sol est de ne pas artificialiser plus que maintenant.
Pour la biodiversité, on peut relâcher la contrainte dans l'objectif ou fabriquer un indicateur par l'agrégation de l'utilisation de pesticide, herbicide, etc... et le nombre d'espèces cultivées.
Pour l'acidification des océans, il faut comprendre l'impact des activités sur ce point et ce que peut "absorber l'océan" chaque année.
L'émission de CO_2 peut être divisé par 4 par apport aux émissions de l'an 2000 pour fixer une limite.

Une fois ces contraintes fixées ont pourra minimiser le temps de travail et observer la population agricole minimale dont on a besoin pour rester dans les limites planétaires sans déclencher de manque de nourriture.

Tout ceci permet d'obtenir un cadre soutenables vis-à-vis des limites planétaire et de la production de denrée essentiels, les différents scénarios à comparer se différencient par l'échelles à laquelle on force l'organisation.
Prenons l'exemple de la filière blé, un premier type de scénario peut être de rendre tout

les territoire indépendants sur toute la filière en interdisant les imports et ceci en choisissant l'échelle à laquelle on fixe cette contraintes (commune, département, région, etc...) . Un second type de scénario peut être de fixer l'autonomie en farine mais pas en blé grain. Pour tout ces scénarios, on peut fixer un taux d'autonomie entre 0 et 1.
Une fois ces scénarios créés, on aura des résultats avec différentes organisations, on pourra les comparer pour comprendre les avantages et les inconvénients et éclairer les dilemme du choix d'échelle de relocalisation.

3.8 Remarques sur le modèle proposé

On peut voir le modèle avec des point de vue différents. Une première analyse est de remarqué que l'on fait juste une étude MusiaSEM en détaillant le secteur du travail rémunéré. La deuxième analyse est que l'on fait juste une analyse de flux de matière en utilisant des méthodes spéciale pour calculer la production de matière première et le temps de travail disponible.

Pour la production de matière première, si on se concentre sur l'agriculture une matière première importante est l'eau. Je ne suis pas sur que le modèle d'affectation des sols soit pertinent pour cette ressources. La question sera à étudier de plus prêt dans la suite de la thèse.

Faisons le bilan des problématiques que l'on avait fixés dans la partie 1.4 pour savoir auxquelles ce modèle répond.
Ce moèle permet d'étudier :

- Le compromis taille/résilience et taille/spécialisation des sols et des territoires.
- La compétition sur un produit entre les secteur.
- Les quota individuels et territoriaux et de comparer les résultats.
- L'influence du choix d'échelle sur la circularité, si on évalue bien le taux circularité.
- La taille de la population agricole en fonction des contraintes fixées.
- Des indices diverses comme les apports des nourritures produits, leur saisonalité, un indice de résilience même si il n'est pas linéaire

Le modèle à encore des lacunes. L'influence du stockage, du transport n'a pas été pris en compte. Les interaction entre territoire n'ont pas encore été évalué. Les cycles de l'eau, du carbone, de l'azote et du phosphore ne sont pas compris, on ne voit pas directement l'impact qu'une organisation peut avoir dessus.
Des indicateurs proposés sont aussi dur à modéliser dans ce cadre. Je pense par exemple à la présence de haies dans les champs, un indicateurs lié à la biodiversité qui est lié aux techniques utilisées dans les secteurs agricoles et aux tailles des exploitations.

Cela laisse des avancées méthodologiques à faire mais cette approche est déjà applicable pour des cas pratiques, principalement au secteur agricole.

Conclusion

Durant ce stage, j'ai pu aborder plusieurs sujets intéressants : des sujets directement liés aux impacts de nos sociétés sur l'environnement, des sujets de modélisation de nos sociétés et de leurs impacts et des sujets mathématiques dans le domaine de l'optimisation sous contraintes. Cela est très riche mais aussi complexe. Ayant une formation essentiellement mathématique, j'étais novice sur certain de ces sujets et j'ai du passer beaucoup de temps à étudier la littérature scientifique. Un autre difficultés en sortant de mon domaine de formation à été d'organiser mes idées.

J'ai commencé les premiers mois de mon stage par un investissement profond de la littérature scientifique autour du sujet, j'ai parfois dévié et passé du temps à lire des publications qui ne me serviront peut-être jamais mais cela m'a permis d'avoir le début d'une vision d'ensemble du problème et de l'approche MESMIS.
J'ai ensuite développé la partie mathématique de ce rapport. Les 3 résultats principaux portent sur les formes de problème pertinentes, la solution exacte pour un scénario à un critère et la sparcité d'une solution pour un scénario à plusieurs critères. Comme souvent en mathématique les preuves les plus simples ne sont pas celles qui ont été le plus rapide à trouver. La preuve sur la sparsité des solutions n'utilise que des arguments simples d'algèbre linéaire mais il m'a fallut beaucoup de temps pour trouver bon angle d'attaque.
Une fois que tout ce travail a été fait, j'ai pu trouver un modèle qui permet d'unir l'approche de l'équipe à l'approche MESMIS. La solution technique pour y parvenir m'est venue rapidement.

Un stage, c'est aussi l'occasion de prendre place dans une équipe de recherche. Il était intéressant d'être dans une équipe transdisciplinaire unie par un projet commun (en tout cas, plus unie que dans mes expériences précédentes). J'ai été encadré par plusieurs membres de l'équipe (Guillaume Mandil, Mathieu Mangeot, Jean-Yves Courtonne, Peter Sturm, Vincent Jost) que je voyais lors de réunion hebdomadaire. Cela m'a permis d'avoir plusieurs avis, des expertises sur des domaines différents et d'avoir toujours quelqu'un à qui parler. Tout ces éléments m'encouragent à continuer dans l'équipe pendant une thèse.

Les perspectives pour la thèse sont nombreuses. Un premier projet est de décrire un territoire avec la méthodologie proposée en partie 3. Ensuite, nous souhaitons proposer une méthodologie pour connecter les territoires entre eux dans le but de comprendre les interactions entre les territoires et donc pouvoir évaluer des indicateurs d'interdépendance, de résilience et d'adaptabilité. La collaboration avec Christine Solnon (co-directrice de ma thèse et spécialisée en programmation par contraintes) permettra d'avoir une expertise sur l'usage de graphes dans ce cas-ci. En appliquant cette méthodologie, il sera intéressant d'apporter des éclairages sur les questions soulignées dans la partie 1.4. L'ajout de certaines dynamiques importantes (comme les pressions sur la biodiversité ou sur la ressource en eau) est aussi envisagé et pour ceci des expertises de l'équipe STEEP pourront être utile.

Références

[Albouy, 2021] Albouy, A. (2021). Vers une pénurie de matériaux ? quatre questions sur la menace qui pèse sur le bâtiment français. url : https ://www.ladepeche.fr/2021/05/03/vers-une-penurie-de-materiaux-quatre-questions-sur-la-menace-qui-pese-sur-le-batiment-francais-9523562.php.

[Anderson et al., 1989] Anderson, J. G., Brune, W. H., and Proffitt, M. H. (1989). Ozone destruction by chlorine radicals within the antarctic vortex : The spatial and temporal evolution of clo-o3 anticorrelation based on in situ er-2 data. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*.

[Astier et al., 2012] Astier, M., García-Barrios, L., Galván-Miyoshi, Y., González-Esquivel, C. E., and Masera, O. R. (2012). Assessing the sustainability of small farmer natural resource management systems. a critical analysis of the mesmis program (1995-2010). *Ecology and Society, Vol. 17, No. 3*.

[Bachev, 2006] Bachev, H. (2006). Framework for assessing sustainabilty of farms. *Institute of Agricultural Economics, Sofia, Bulgaria*.

[Beck, 2006] Beck, U. (2006). *Qu'est-ce que le cosmopolisme ?* Aubier, Paris.

[Bookchin, 2003] Bookchin, M. (2003). *Pour un municipalisme libertaire*. Atelier de création libertaire, Lyon.

[Cauwenbergh et al., 2007] Cauwenbergh, N. V., Biala, K., Bielders, C., Brouckaert, V., Franchois, L., Cidad, V. G., Hermy, M., Mathijs, E., Muys, B., Reijnders, J., Sauvenier, X., Valckx, J., Vanclooster, M., der Veken, B. V., Wauters, E., and Peeters, A. (2007). Safe—a hierarchical framework for assessing the sustainabilityof agricultural systems. *Agriculture, Ecosystems and Environment 120 229–242*.

[CORDIER et al., 2020] CORDIER, C., SAILLEY, M., COURTONNE, J., DUFLOT, B., CADUDAL, F., PERROT, C., BRION, A., LECADRE, P., PEYRONNET, C., and BAUMONT, R. (2020). Analyse des flux de matières premières en alimentation animale en france. *GIS Avenir Elevages*.

[Courtonne et al., 2015] Courtonne, J.-Y., Alapetite, J., Longaretti, P.-Y., Dupré, D., and Prados, E. (2015). Downscaling material flow analysis : The case of the cereal supply chain in france. *Ecological Economics 118 67–80*.

[Courtonne et al., 2016] Courtonne, J.-Y., Longaretti, P.-Y., Alapetite, J., and Dupré, D. (2016). Environmental pressures embodied in the french cereals supply chain. *Journal of Industrial Ecology*.

[Delmotte et al., 2016] Delmotte, S., Barbier, J.-M., Mouret, J.-C., Page, C. L., Wery, J., Chauvelon, P., Sandoz, A., and Ridaura, S. L. (2016). Participatory integrated assessment of scenarios for organic farming at different scales in camargue, france. *Agricultural Systems 143 147–158*.

[DGCIS, 2013] DGCIS (2013). Relocalisations d'activités industrielles en france, rapport de synthèse. Technical report, DATAR, PIPAME. [https ://www.economie.gouv.fr/files/synthese-relocalisations-juin2013.pdf].

[Dont, 2021] Dont, B. (2021). Au bord de la pénurie, le cuivre est un nouvel or. url : https ://korii.slate.fr/biz/economie-cours-cuivre-doubler-2025-nouvel-or-matieres-premieres-covid-19-inflation.

[FAO, 2021] FAO (2021). Bulletin de la fao sur l'offre et la demande de céréales. url : http ://www.fao.org/worldfoodsituation/csdb/fr/.

[Farman et al., 1985] Farman, J. C., Gardiner, B. G., and Shanklin, J. D. (1985). Large losses of total ozone in antarctica reveal seasonal clox/nox interaction. *Nature*.

[Giampietro and Ramos-Martin, 2009] Giampietro, M. and Ramos-Martin, K. M. J. (2009). Multi-scale integrated analysis of societal and ecosystem metabolism (musiasem) : Theoretical concepts and basic rationale. *Energy 34 313–322*.

[Godart, 2020] Godart, N. (2020). Coronoavirus : Une crise alimentaire couve sous la crise sanitaire. url : https ://www.bfmtv.com/economie.

[Goutail et al., 2021] Goutail, F., Pazmino, A., Pommereau, J.-P., Lefevre, F., Godin-Beekmann, S., Hauchecorne, A., Lecouffe, A., Clerbaux, C., Boynard, A., Hadji-Lazaro, J., Chipperfield, M., Feng, W., VanRoozendael, M., Jepsen, N., Hansen, G., Kivi, R., Bognar, K., Strong, K., Walker, K., and Colwell, S. (2021). Evaluation of interannual variability of arctic and antarctic ozone loss since 1989. *EGU General Assembly 2021, online*.

[Howarth and Jacobson, 2021] Howarth, R. W. and Jacobson, M. Z. (2021). How green is blue hydrogen ? *Energie science and engineering*.

[Justeau-Allaire, 2020] Justeau-Allaire, D. (2020). *Planification systématique de la conservation basée sur les contraintes, une approche générique et expressive.* PhD thesis, Université de Montpellier.

[Keucheyan, 2019] Keucheyan, R. (2019). *Les besoins artificiels*. Zones.

[Lacas, 2021] Lacas, F. (2021). Pénurie : l'etat va faire passer des messages de "bienveillance" en commande publique. url : https ://www.batiactu.com/edito/penurie-etat-va-faire-passer-messages-bienveillance-61798.php.

[LGA, 2020] LGA (2020). *Vers la résilience alimentaire. Faire face aux menaces globales à l'échelle des territoires*. Les Greniers d'Abondance.

[López-Ridaura et al., 2000] López-Ridaura, S., Masera, O., and Astier, M. (2000). Evaluating the sustainability of integrated peasantry systems the mesmis framework. *Ecol. Indicat. 35, 1–14*.

[López-Ridaura et al., 2002] López-Ridaura, S., Masera, O., and Astier, M. (2002). Evaluating the sustainability of complex socio-environmental systems. the mesmis framework. *Ecological Indicators 2 135–148*.

[López-Ridaura et al., 2005a] López-Ridaura, S., van Keulen, H., van Ittersum, M. K., and Leffelaar, P. A. (2005a). Multi-scale sustainability evaluation of natural resource management systems : Quantifying indicators for different scales of analysis and their trade-offs using linear programming. *International Journal of Sustainable Development and World Ecology, 12 :2*.

[López-Ridaura et al., 2005b] López-Ridaura, S., van Keulen, H., van Ittersum, M. K., and Leffelaar, P. A. (2005b). Multiscale methodological framework to derive criteria and indicators for sustainability evaluation of peasant natural resource management systems. *Environment, Development and Sustainability 7 :51–69*.

[manuel de résilience, 2020] manuel de résilience, P. (2020). Episode 9 - la résilience selon arthur keller. YouTube. URL = https ://youtu.be/J6Fzz0gm74c.

[Materiel.net, 2021] Materiel.net (2021). Composants, cartes graphiques... d'où vient la pénurie high-tech ? url : https ://blog.materiel.net/composants-cartes-graphiques-dou-vient-la-penurie-high-tech/.

[Meadows et al., 1972] Meadows, D., Meadows, D., J., J. R., and Behrens, W. (), . (1972). *The Limits to Growth*. Universe Books. ISBN 978-0-4510-9835-1.

[Molina and Rowland, 1974] Molina, M. J. and Rowland, F. (1974). Stratosphérique sink for whlorofluomethanes : chlorine atomc-atalysed destruction of ozone. *Nature*.

[Mouhoub, 1991] Mouhoub, E. (1991). *Changement technique et division internationale du travail : recomposition internationale des processus productifs et stratégies de relocalisation industrielle*. thèse de nouveau doctorat, sciences économiques, Université Paris 1. 387 p.

[NASA,] NASA. Nasa ozone watch. https ://ozonewatch.gsfc.nasa.gov/SH.html.

[ONU, 2021] ONU (2021). Covid-19 : le nombre de gens confrontés à une crise alimentaire doublera en l'absence de mesures rapides. url : https ://-news.un.org/fr/story/2020/04/1067092.

[Poux and Pointereau, 2014] Poux, X. and Pointereau, P. (2014). L'agriculture à "haute valeur naturelle" en france métropolitaine. un indicateur pour le suivi de la biodiversité et l'évaluation de la politique dedéveloppement rural. rapport d'étude au ministère de l'agriculture de l'agroalimentaire et dela forêt. Technical report, AScA, SOLAGRO.

[Rockström et al., 2009] Rockström, J., Steffen, W., Noone, K., Persson, A., III, F. S. C., Lambin, E., Lenton, T. M., Scheffer, M., Folke, C., Schellnhuber, H., Nykvist, B., Wit, C. A. D., Hughes, T., van der Leeuw, S., Rodhe, H., Sörlin, S., Snyder, P. K., Costanza, R., Svedin, U., Falkenmark, M., Karlberg, L., Corell, R. W., Fabry, V. J., Hansen, J., Walker, B., Liverman, D., Richardson, K., Crutzen, P., and Foley, J. (2009). Planetary boundaries : Exploring the safe operating space for humanity. *Ecology and Society 14(2) : 32.*

[Samama, 2021] Samama, P. (2021). Pourquoi la pénuries de vélo va se prolonger jusqu'en 2022 ? url : https ://www.bfmtv.com/economie/pourquoi-la-penurie-de-velos-va-se-prolonger-jusqu-en-2022.html.

[Scheidel et al., 2013] Scheidel, A., Giampietro, M., and Ramos-Martin, J. (2013). Self-sufficiency or surplus : Conflicting local and national rural development goals in cambodia. *Land Use Policy 34 342– 352*.

[Schmitt et al., 2017] Schmitt, E., Galli, F., Menozzi, D., Maye, D., Touzard, J. M., Marescotti, A., and Brunori, G. (2017). Comparing the sustainability of local and global food products in europe. *Journal of Cleaner Production*, 165 :346–359.

[Solagro, 2014] Solagro (2014). *Un scénario soutenable pour l'agriculture et l'utilisation des terres en France à l'horizon 2050*. Solagro.

[Speelman et al., 2007] Speelman, E. N., López-Ridaura, S., Colomer, N. A., Astier, M., and Masera, O. R. (2007). Ten years of sustainability evaluation using the mesmis framework : Lessons learned from its application in 28 latin american case studies. *International Journal of Sustainable Development and World Ecology, 14 :4, 345-361*.

[STOLARSKI and CICERON, 1974] STOLARSKI, R. S. and CICERON, R. J. (1974). Stratospheric chlorine : a possible sink for ozone. *Space Plysics Research Laboratory*.

[Tapia et al., 2021] Tapia, C., Bianchi, M., Pallaske, G., and Bassi, A. M. (2021). Towards a territorial definition of a circular economy : exploring the role of territorial factors in closed-loop systems. *European Planning Studies*.

[UNEP,] UNEP. Le protocole de monreal : Le triophe d'un traite.

[Valdez-Vazquez et al., 2017] Valdez-Vazquez, I., del Rosario Sánchez Gastelum, C., and Escalante, A. E. (2017). Proposal for a sustainability evaluation framework for bioenergy production systems using the mesmis methodology. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 68 360–369*.

[van Diepen et al., 1989] van Diepen, C., J. Wolf2, H. v. K., and Rappoldt, C. (1989). Wofost : a simulation model of crop production. *Soil Use and Management. Volume 5. Number 1*.

[van Ittersum et al., 2013] van Ittersum, M. K., Cassman, K. G., Grassini, P., Wolf, J., Tittonell, P., and Hochman, Z. (2013). Yield gap analysis with local to global relevance—a review. *Field Crops Research 143 4–17*.

[von Thunen JH, 1826] von Thunen JH (1826). Der isolierte staat in beziehung auf landwirtschaft und. *National okonomie. Puthes, Hamburg*.

[wikipedia,] wikipedia. Protocole de montréal. https ://fr.wikipedia.org/wiki/ProtocoledeMontr

A Pertes en fonction de l'échelle [López-Ridaura et al., 2005a]

A.1 Les activités observées

L'étude observe 2 types de culture (Nourricière et de rente) et 2 types de techniques (Plus ou moins intensive en intrant).

A.2 La modélisation

La modélisation répartie les terres selon 2 critères : la fertilité des sols et l'altitude (qui sert d'indicateur pour la quantité de pluie et la température).
Elle sépare aussi l'espace en échelles imbriquées les unes dans les autres : Région, sous-région, commune et ferme.

A.3 Les indicateurs

Les indicateurs se concentre sur la composante économique d'un coté et la résilience locale de l'autre, les premier seront les objectifs et les deuxième les contraintes :

Attributs	Points critique / Critères de diagnostic	Indicateurs
Productivité	Rendement et profit Retour sur investissement/travail	Revenu des fermes, production agricole. Retour économique du travail ($/hr et Kg/hr)
Stabilité	Dégradation et/ou conservation des ressources	Érosions des sol. Pourcentage de matière organique. Azote fixé. Nutriments exploités.
Résilience	Agrodiversité Vulnérabilité des production	Nombre d'espèces cultivées/élevées. Incidences des pesticides, maladies.
Fiabilité	Instabilité des coûts et revenus Risque liés au années extrêmes	Variation du revenu en fonction de la pluie. Variation du rendement en fonction de la pluie. Production agricole avec les prix minimum. Auto-suffisance alimentaire les années extrêmes (sécheresse). Revenu minimum les années extrêmes (gel, sécheresse). Risque de perte des récoltes.
Auto-suffisance	Niveau de dépendances au entrées extérieures Auto-suffisances alimentaire	Dépendances au entrées extérieures Niveau d'auto-suffisances alimentaire.

A.4 Les scénarios

Il y a 7 scénarios qui choisissent des tailles de auto-sufisance alimentaire (FSF) différentes :

- Maximisation de la Production agricole de la région (Max VA_R).
- Minimisation de l'érosion des sols de la région (Min ER_R).
- Max VA_R avec FSF pour la région.
- Max VA_R avec FSF pour les sous-régions.
- Max VA_R avec FSF pour les fermes.
- Max VA_R avec FSF pour les fermes et un borne sur l'érosion des sols.
- Min ER_R avec une borne inf sur la prodution agricole de la région.

A.5 Les résultats

On remarque qu'une diminution de l'échelle d'auto-suffisance entraîne un perte de production.

Il est aussi tracé la production agricole de la région en fonction du niveau de contrainte (érosion des sols ou FSF) et ces facteurs sont limitant pour la production régionale.

B Évaluation de la soutenabilité d'un projet [López-Ridaura et al., 2002]

B.1 Les activités observées

On observe Le fonctionnement des unité de production des Casa Blancas au Mexique.
2 gestions différentes : traditionnelle et commerciale
. La première utilise un plus grands nombre de semences locales (3 mais et 2 courges), s'étend moins (5 bœufs), fait de la rotations des cultures, utilise la traction animale et du compost.Sa production de mais est pour elle même et seul la production de viandes est pour le marché.
La deuxième se limite a un mais local et un mais optimal, s'étend (9 bœufs), ne fait pas de rotations des cultures, utilise la traction mixée (animale et tracteurs) et utilise des intrant minéraux. Elle vend tout et garde un peut de mais pour sa consommation.

B.2 La modélisation

La modélisation se fait par l'interaction entre différente "unités" qui sont la famille, le sous-système forestier, le sous-système animal et le sous-système agricole et les marché locaux ou régionaux.

B.3 Les indicateurs

Attributs	Points critique / Critères de diagnostic	Indicateurs
Productivité	Rendement et profit Retour sur investissement/travail	Rendement ($/ha et Kg/ha), qualités des produits, ratio coût/bénéfices et bénéfices. Retour économique du travail ($/hr et Kg/hr)
Stabilité, Résilience et Fiabilité	Dégradation et/ou conservation des ressources Agrodiversité Vulnérabilité des production Instabilité des coûts et revenus	Bilans nutritif (Kg/ha), compaction des sols, pourcentage de matière organique. Tendance du rendement. Nombre d'espèces cultivées/élevées, revenu par espèce. Incidences des pesticides, maladies et mauvaise herbes. Variations des prix des entrées et des sorties.
Adaptabilité	Capacité à changer ou s'adapter	Adoption de nouvelles alternatives, capacité de création d'activité, Proportion de terres associées à une nouvelles technologie.
Équité	Revenu des fermiers Égale distribution des coûts et des bénéfices	Coût de l'investissement initial Partage des bénéfices selon les différents groupes d'acteurs.
Auto-suffisance	Organisation et participation Niveau de dépendances au entrées extérieures	Participation dans l'évaluation et la création des alternatives Coût des entrées extérieure/coûts des entrées totales, usage de ressources extérieures.

B.4 Les scénarios et résultas

On compare les 2 types de gestions et cette fois surtout par un revue littéraire et des quantifications socio-économique ou financière. On observe alors des différences selon les types de gestions.

C Indice de soutenabilité pour la production de bio-énergie [Valdez-Vazquez et al., 2017]

C.1 Les activités observées

Ce papier mets en place la méthodologie pour comparer la soutenabilité de 2 modes de production de bio-énergie différentes mais il ne dépasse pas l'étape 4-5 on n'a donc pas de scénario ni de résultats. Le résultats principal est la création d'un indices de soutenabilité.

C.2 La modélisation

La modélisation se fait par l'interaction entre 3 sous-système : LA création de bio-masse, la transformation en bio-énergie et le système social (qui apporte le travail et prends de l'argent en contrepartie).

C.3 Les indicateurs

Domaine	Critères de diagnostic	Indicateurs
Économique	Productivité	Rendement
	Profitabilité	Ratio coût/Bénéfices
	Qualité de production	Conformité aux normes
	Innovation technologique	Innovation technologique
	Dépendances des subventions	auto-financement
	Dépendances de entrées extérieures	Entrées extérieures (%)
	Sources de revenus	diversification des sources de revenus
Écologique	Dégradation des sols	Érosion des sols
	Agropollution	Utilisation des produits agrochimiques
	Compétition	Diversification des utilisation des terres
	Utilisation de l'agroécologie	Part de l'agroacologie.
	Élimination des déchets	Gestions de déchets
	Émission de GHG	Émission de GHG
	Accessibilité et réutilisation de l'eau	Besoin et réutilisation de l'eau
	Utilisation des OGM	Utilisation des OGM
	Vulnérabilité au effets externes	Résistance au maladie, mauvaises herbes et autres facteurs de stress
	Dépendance au ressources fossiles	Part des énergies renouvelables
Social	Compétition alimentaire	Utilisation des culture classique
	Désertion du domaine agricole	Temps d'activité des fermiers
	Capacité	Formations
	Services de bases	Services de santé
	Services de bases	accès au autres services
	Investissement familial	Participation de la famille

	Égalité des chances	Distribution des origines des employés
	Travail des enfants	Part de travail des enfants
	Droit sur les terres	Part des abus sur les droit de propriété des fermiers
	Droit sur les terres	Accessibilité au droit de propriété
	Organisation et participation	Participation de la population dans les choix

C.4 L'indice de soutenabilité

L'objectif de l'étude est de créer un indice de soutenabilité. Pour cela on sépare 3 indices de soutenabilité différents : économique, social et environnemental.
Pour x un domaine de soutenabilité fixé, on normalise les indicateurs ($I_{N,i}$) entre 0.0 et 1.0 et on leur associe un poids ($V_{P,i}$) entre 1 et 5. Puis on calcul l'indice ainsi :

$$SI_x = \sum_{i=1}^{n} 5 I_{N,i} \frac{V_{P,i}}{\sum_{j=1}^{n} V_{P,j}} \tag{107}$$

On a donc un indice entre 0 et 5 pour chaque domaine et on peut les moyenner pour avoir un indice global.

D Étude sur le riz en Camargue [Delmotte et al., 2016]

D.1 Les activités observées

L'étude étudie 10 cultures (Riz, blé dur, luzerne, colza, tournesol, sorgho, maïs, lentilles, soja, pâturages) suivant 2 types de techniques (conventionnel ou biologique) et 2 niveaux d'intensité (intégré ou intensif).

D.2 La modélisation

La modélisation est basé sur le fonctionnement des fermes, elles ont des caractéristiques (taille, nature du sols, culture l'année précédentes pour chaque parcelle) et pour chaque choix possible (culture, technique et niveaux d'intensité) on en sort les indicateurs étudiés au niveau de la ferme. Ensuite les résultats sont agrégés au niveau de la région.

D.3 Les indicateurs

Les indicateurs sont résumés dans ce tableau et ils sont calculés au niveau de la ferme et/ou de la région.

Domaine	Indicateur	Unité
Socio-économique	Surface de chaque culture (bio et conventionnel)	ha
	Coûts de production	$
	Production de chaque culture bio	Kg
	Production de nourriture	Kg
	Rendement moyen par culture	Kg/ha
	Marge brute	$
	Marge moyenne par culture	$/ha
	Ratio subvention/marge	-
	Production agricole totale	$
	Ratio coût/bénéfices	-
	temps de travail nécéssaire	Heures/ha/15j
	Temps de travail total	Heures/année
	Emplois générées (équivalent en travail à temps plein)	-
Environnemental	Indices de Fréquence de traitement (IFT)	-
	Proportion de surface irriguée	%
	Eaux utilisées pour l'irrigation	m^3
	Surface sous label Bio	ha ou %
	Consommation de pétrole	m^3/année

D.4 Les scénarios

Les différents scénarios proposés sont des contraintes sur la part de culture biologique, ils ont fait varier cette contrainte de 10 à 100% et tracé les courbes des différents indicateurs.

D.5 Les résultats

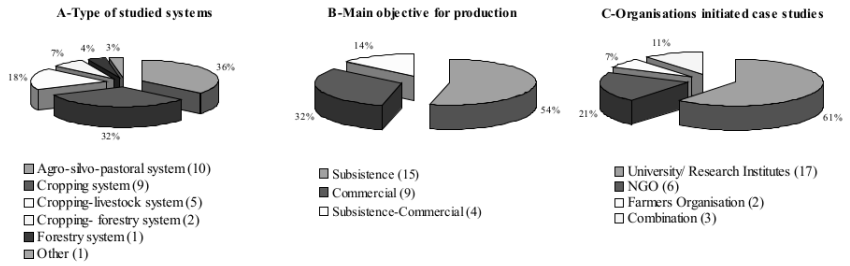
Les résultats montrent une variance d'un grand nombre d'indicateurs en fonction de la part de bio mais lorsque le bio dépasse les 50% de terres utilisées la culture de riz se mets à chuter car faire pousser du riz en bio nécessite une rotation des cultures.

E Retour sur 28 cas d'étude MESMIS [Speelman et al., 2007]

E.1 Les activités observées

Les activités observées sont souvent autour de l'agriculture de céréale ou la gestion des forets en Amérique du sud. Elles sont résumé dans cette image tirée de l'article.

FIGURE 19 – Image tirée de [Speelman et al., 2007] : Principales caractéristiques des cas d'étude montrées en pourcentage.



E.2 La modélisation

La modélisation se fait la plus part du temps par des échanges de flux entre des secteurs.

E.3 Les indicateurs

Voici une listes des indicateurs utilisés le plus souvent :

Attributs	Indicateurs
Productivité	Rendement Revenu Rapport Coût/Bénéfices
Stabilité, Résilience et Fiabilité	Bilans nutritif (Kg/ha) pourcentage de matière organique Agrodiversité : Nombre d'espèces cultivées/élevées, gestion de la conservation de la biodiversité. Utilisation des intrants chimiques : Engrais et pesticides Érosion des sols
Adaptabilité	Capacité à changer ou s'adapter, Adoption deS nouvelles alternatives. Connaissances des innovations,accès à l'éducation, diffusion du savoir.
Équité	Participation des femmes, Ratio femmes/homme dans la participation Égale distribution des coûts et des bénéfices
Auto-suffisance	Niveau de participation dans l'évaluation et la création des alternatives, Structure. Niveau de dépendances au entrées extérieures : Coût des entrées extérieure/coûts des entrées totales, usage de ressources extérieures. Niveau de l'autofinancement et accès au crédit

E.4 Les scénarios et résultats

Les scénarios comparaient la méthode actuel/conventionnel à des moyen alternatifs de produire et on souvent poussé vers la production alternative.

F Les Greniers d'Abondances

Voici la liste complète des indicateurs proposées par l'association des grenier d'abondance.

Voie de résilience	Critère	Indicateur chiffré
Augmenter la population agricole	• Évolution de la population agricole • Âge moyen des agriculteurs sur le territoire. • Évolution du nombre d'exploitations agricoles	Nb d'agriculteurs Âge moyen des agriculteurs Nb d'exploitations agricoles
Préserver les terres agricoles	• Surface artificialisée par an et par hab. • Surface artificialisée par ménages et emplois accueilli • Taux de surfaces commerciales par hab. • Évolution du nombre de logements et de locaux commerciaux vacants en centralités.	Surface artificialisée /année /hab Nb Emplois/surface Surface/hab Surface inoccupée en ville.
Favoriser l'autonomie technique et énergétique des fermes	• Nombre d'entreprises et d'artisans spécialisés dans l'agroéquipement sur le territoire. • Niveau d'autonomie énergétique des fermes. • Possibilité (moyens humains et techniques) pour les agriculteurs du territoire de construire, réparer ou modifier leurs outils.	Nb d'acteurs Consommation de pétrole(m^3), Investissement en matériel ($),production de biocarburants (m^3) % des outils réparable dans la territoire
Diversifier les variétés cultivées et développer l'autonomie en semences	• Diversité génétique au sein des grandes cultures. • Nombre de semenciers professionnels sur le territoire. • Nombre de variétés nouvellement créées et de variétés anciennes à nouveau cultivées sur le territoire. • Nombre de filières de valorisation de produits issus de variétés locales.	Nb d'espèce cultivées/élevées Nb d'acteurs Nb de nouvelles et anciennes variétés •
Adopter une gestion de la ressource en eau	• Volume d'eau prélevé à des fins agricoles. • SAU irriguée par type de cultures.	Eaux utilisée pour l'irrigation (m^3) Surface irrigué (ha)
Évoluer vers l'agriculture nourricière	• Adéquation entre besoins des habitants et production locale. • Surface de jardins familiaux par habitant	Ratio consommation/production (Kg/Kg) Surface/hab

	• État des lieux quantifié de l'origine des achats (département, départements limitrophes, France, Union Européenne) en restauration collective publique.	Ratio coûts des entrées extérieures/-coûts des entrées.
Généraliser l'agroécologie	• Part de la surface agricole labellisée agriculture biologique ou en conversion. • Indicateur de Haute Valeur Naturelle. • Linéaire de haies et sa caractérisation (simple ou double, entretien). • Utilisation des engrais et pesticides.	Surface sous label bio (ha ou %) Surface HVN / SAU, Surface de Végétation Semi-Naturelle, Indicateur d'impact de HVN Longueur de haies suivant les différents types. Volumes utilisés (m^3)
Développer des outils locaux de stockage et de transformation	• Nombre d'unité de transformation sur le territoire. • Volumes transformés par type de produit. • Capacités de stockage pour des produits alimentaires de base.	Nb d'unités Volume ou % de la transformation faites dans le territoire. Volume ou % du stockage fait dans le territoire.
Simplifier et raccourcir la logistique et l'achat alimentaire	• Nombre de commerces alimentaires de proximité pour 1000 habitants. • Distance moyenne des habitants à un commerce alimentaire. • Existence d'une plate-forme mutualisée de distribution des produits locaux. • Proportion de produits issus du département dans la restauration collective.	Nb de commerces/hab Distance moyenne. • Ratio Volume des entrées extérieures/Volume des entrées
Manger et produire plus végétal	• Ratio protéines végétales / protéines animales en restauration collective ou fréquence des repas végétariens. • Indicateurs nationaux de consommation. • Quantité de déchets produits par les commerces alimentaires, la restauration collective et la restauration commerciale.	Ratio protéine végétale/animale pour la consommation • •
Recycler massivement les nutriments	• Taux de compostage des biodéchets. • Taux de valorisation agricole des nutriments (azote, phosphore, potassium) contenus dans les excrétas de la population. • Volumes d'urines et de matières fécales collectés	Taux de compostage Taux de valorisation Volumes collectés

(Pour plus d'informations sur les zones HVN voir [Poux and Pointereau, 2014].)

G Un exemple de modélisation

Modéliser des contraintes d'échelles différentes sur plusieurs cultures

On va construire un modèle (en suivant la méthodologie MESMIS) qui permet de prendre en compte plusieurs cultures qui ont des affinités avec certains sols/environnements mais sur lesquels ont va imposer des contraintes d'échelles différentes.

G.1 Initialisation du contexte bio-physique et socio-économique et définition des acteurs principaux.

Les échelles

On choisit de travailler avec 5 échelles différentes
- La région (R)
- La sous-régions (SR)
- Le département (Dept)
- La commune (M)
- La ferme (F)

On divise la région en 2 sous-région ($SR1$ et $SR2$).
On appelle les départements : $Dept1$, $Dept2$, $Dept3$, $Dept4$ et $Dept5$.
Et ainsi de suite jusqu'au ferme que l'on nomme sous la forme $M1\_F1$.

G.1.1 Les activités possibles

Il y a N_c cultures différentes que l'ont nomme $(Cj)_{1\leq j\leq N_c}$. Il pourrait y a aussi 2 type de techniques : une avec un faible investissement financier noté $T1$ et une avec un grand investissement financier noté $T2$.
Il y a donc $m = 2N_c$ possibilités sur chaque terres qui sont $(Ci.Tk)_{1\leq j\leq N_c,\ k\in\{1,2\}}$.

Les différentes cultures représente les différents types de produits finis. La différence d'investissement représente la quantité d'engrais, pesticide, de graines sélectionnées ou de mains d'œuvres utilisées.

G.1.2 Les types de sols

Les différents types de sols vont faire que les territoires vont chercher à se spécialiser si on ne cherche qu'un objectif productiviste.
Il n'y a que N_c cultures différentes et pour chaque culture il serait pertinent qu'elles aient chacune un sol de prédilection donc au moins N_c sols différents. Si on veut plutôt que chaque classement de rentabilité existe, il faut $N_c!$ sols différents.
Il y a 2 techniques d'exploitations si on veut apporter de la nuances dans la transitions entre agriculture de rente et agriculture nourricière et la dépendance au intrants extérieurs on peut doubler le nombre de sols et apporter un dégradé dans l'efficacité des techniques à fort investissement.

G.1.3 Caractéristiques du système

Chaque ferme à une surface données : L_i.
Chaque ferme et chaque commune à un nombre d'habitant : POP_F et POP_M. pour avoir la population des échelles plus grandes, il suffit de faire des totals.

La consommation du produit de chaque culture par habitant est : $GRAIN\_CONS^j$ ou GC^j.
On a donc la consommation totale de l'échelle E de la culture j en faisant : $POP\_E.GC^j$.

On fixe le prix de chaque production avec $PRIX = (PRIX^j)_{1 \leq j \leq N_c}$.

G.2 Définitions des indicateurs de tout types.

On note les indicateurs avec leur nom et leur table de coefficients ainsi M_{NOM}.

Pour chaque activité possibles, les indicateurs calculables directement en fonction de l'affectation des sols -et donc qui ont un tableau de coefficient- sont :

Nom	Indicateur	Unité
PROD	la production	$(Mg.ha^{-1}.ans^{-1})^{N_c}$
GRAIN_PROD.	La production nourricière	$(Mg.ha^{-1}.ans^{-1})^{N_c}$
COUTS	Les coûts de production	$K\$.ha^{-1}.ans^{-1}$
EXT_COUTS	les coûts en apport extérieur	$K\$.ha^{-1}.ans^{-1}$
LABOUR	Quantité de travail nécessaire	$journeehomme.ha^{-1}.ans^{-1}$
EROSION	Érosion des sols	$Mg.ha^{-1}.ans^{-1}$
NITRATE	Quantité d'engrais épandu	$Mg.ha^{-1}.ans^{-1}$
PESTICIDES	Quantité de pesticide épandu	$Mg.ha^{-1}.ans^{-1}$
PROD_VAR	Variation de la production	$(Mg.ha^{-1}.ans^{-1})^{N_c}$
EAU	Eau utilisée pour l'irrigation	$m^3.ha^{-1}.ans^{-1}$

Remarque. *Les unités indiquées sont celles des tables de coefficients.*

Définition : (Vecteur de production)

On note la production dans un vecteur ainsi $PROD = (PROD^j)_{1 \leq j \leq N_c} \in \mathbb{R}_+^{N_c}$.
Chaque composante est calculée avec un M^{PROD^j}.
De même pour $GRAIN\_PROD$ et $PROD\_VAR$.

Remarque. *Le vecteur PROD stocke la valeur de la production totale de chaque produit alors que le vecteur GRAIN_PROD stocke la valeur de la production consommable par l'humain de chaque produit.*

Indicateur	Échelles
Valeur de la production	F,M,Dept,SR,R
Variation de la production	F,M,Dept,SR,R
Auto-suffisance alimentaire	F,M,Dept,SR,R
Quantité d'eau utilisée	F,M,Dept,SR,R
Agrodiversité	F,M,Dept,SR,R
La marge	F,R
Le ratio Bénéfices-Coûts	F
Le retour sur travail	F
L'indépendance en apport extérieur	F
La quantité de pesticide épandu	M,Dept,SR,R
La quantité d'azote épandu	M,Dept,SR,R
L'érosion des sols	M,Dept,SR,R
Nombre de temps plein équivalent	M,Dept,SR,R

G.3 Définition des objectifs, des critères (contraintes) et des indicateurs d'évaluation.

Les **objectifs** seront la valeur de la production et la marge des fermes.
Les **critères** seront l'autosuffisance alimentaire en les différentes productions que l'ont fixera au-dessus d'un seuil ($\mathscr{C}ri^{-}$) pour les différentes échelles.
Les indicateurs d'**évaluation** seront les autres indicateurs.

G.4 Définition et quantification des activités d'utilisation des sols.

On définit ici les tables de coefficients qui doivent avoir une réalité sur le terrain. On peut faire tout de même une remarque pour les indicateur sur la production du produit j, la table sera de cette forme.

FIGURE 20 – Représentation de M^{PROD^j}.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} C1T1 & C1T2 & \dots & CJT1 & CJT2 & C(J+1)T1 & \dots & CN_cT2 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} sol1 \rightarrow \\ sol2 \rightarrow \\ \vdots \\ solq \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \star & \star & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \star & \star & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \star & \star & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

G.5 Quantification des indicateurs. Articulation des différentes échelles.

La valeur de la production notée VA est calculée en fonction du prix de chaque production :

$$VA_i = (PROD_i^T.PRIX) \tag{108}$$

Les indicateurs CDFAS sont les suivants :

Nom	Indicateur	Calcul	Unité
VA	La valeur de la production	$\sum_{i \in E} VA_i$	$K\$$
COUT	Les coûts de production	$\sum_{i \in E} COUT_i$	$K\$$
EAU	La quantité d'eau utilisée	$\sum_{i \in E} EAU_i$	m^3
BIO	La quantité de pesticides épandu	$\sum_{i \in E} PESTICIDES_i$	$Mg.ans^{-1}$
ER	l'érosion des sols	$\sum_{i \in E} EROSION_i$	$Mg.ans^{-1}$
FTW	Nombre de temps plein équivalent	$\frac{1}{218} \sum_{i \in F} LABOUR_i$	-
NL	La quantité d'azote épandu	$\sum_{i \in E} NITRATE_i$	$Mg.ans^{-1}$

Les indicateurs CTFAS qui ne sont pas des rapports sont les suivants :

Nom	Indicateur	Calcul	Unité
AD	Agrodiversité	$\sum_j \mathbb{1}(\sum_{i \in E} X_{i,j} > 0)$	nb d'espèce cultivées
GM	La marge	$VA - COUT$	$k\$.ans^{-1}$

Les indicateurs qui sont des rapports sont les suivants :

Nom	Indicateur	Calcul	Unité
YV	Variation de la production	$\frac{PROD\_VAR^j}{PROD^j}$	%
FSF^j	Auto-suffisance alimentaire en j	$\frac{GRAIN\_PROD^j}{POP_F * GC^j}$	-
BC	Ratio Bénéfices-Coûts	$\frac{VA_i}{COUT_i}$	-
RTL	Le retour sur le travail	$\frac{VA}{LABOUR}$	$K\$.journeehomme^{-1}$
IEI	Indépendance des apports extérieurs	$\frac{EXT\_COUT}{COUT}$	-

G.6 Analyse des scénario et des compromis.

On veut analyser l'influence du critère d'auto-suffisance alimentaire en fonction de l'échelle et si on en impose des différentes en fonctions des produits.
Il est aussi intéressant de comparer si la maximisation de la valeur de la production et la marge donne les même résultats. On a donc types de scénario : ceux où on maximise la valeur de la production à l'échelle de la région VA_R, ceux où on maxime la somme de toute les marges de la régions.
Pour les contraintes, on propose les scénarios suivants :

	Critères	
Sc1	-	On maximise juste la production ou la marge.
ScE1	$FSF\_R > 1$	On cherche a avoir une auto-suffisance en tout les produits à l'échelle de la région.
ScE2	$FSF\_SR > 1$	On cherche a avoir une auto-suffisance en tout les produits à l'échelle de la sous-région.
ScE3	$FSF\_Dept > 1$	On cherche a avoir une auto-suffisance en tout les produits à l'échelle du département.
ScE4	$FSF\_M > 1$	On cherche a avoir une auto-suffisance en tout les produits à l'échelle de la commune.
ScE5	$FSF\_F > 1$	On cherche a avoir une auto-suffisance en tout les produits à l'échelle de la ferme.

ScP1	$FSF^{j1}\_Dept > 1$ $FSF\_SR > 1$	On fixe l'auto-suffisance d'un produit à l'échelle du département et l'auto-suffisance globale à l'échelle de la sous-région. On peut imaginer que c produit est fondamental (blé en France). Forcer l'autosuffisance au niveau de la sous-région, permet d'observer des topologies différentes en parallèles.
ScP2	$FSF^{j1}\_M > 1$ $FSF^{j2}\_Dept > 1$ $FSF\_SR > 1$	On fixe l'auto-suffisance d'un produit à l'échelle de la commune, et d'un autre au niveau du département et l'auto-suffisance globale à l'échelle de la sous-région. L'objectif est d'observer l'influence de contraintes à des échelles différentes.
ScP3	$FSF^{j1}\_F > 1$ $FSF^{j2}\_M > 1$ $FSF^{j3}\_Dept > 1$ $FSF\_SR > 1$	On fixe l'auto-suffisance d'un produit à l'échelle de la commune, et d'un autre au niveau du département et l'auto-suffisance globale à l'échelle de la sous-région. L'objectif est d'affiner l'influence de contraintes à des échelles différentes.

G.7 Recommandation d'alternatives socio-technique et d'axes de recherches.

Cette partie ne peut pas être faites sans faire tourner le modèle.

G.8 Remarques sur ce modèle

G.8.1 Le méta-scénario étudié

Soit un indicateur CDFAS O qui symbolisera l'objectif à maximiser.
On peut proposer un méta-scénario si on ne contraint que la suffisance alimentaire. La suffisance alimentaire en chacun des produits peut être contraint au dessus d'un seuil compris entre 0 et 1 à chaque échelle. Le méta-scénario dépend donc de ses seuils. On Propose donc le méta-scénario : **MSc(MB)** où MB est la table des seuils écrit comme dans la figure 21, c'est à dire que $MB_{n,j}$ est la contraintes sur l'auto-suffisance en le produit j à l'échelle n.

FIGURE 21 – Représentation de MB : Une table des seuils.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Produit1 & Produit2 & \dots & ProduitN_c \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} Echelle1 \rightarrow \\ Echelle2 \rightarrow \\ \vdots \\ EchelleK \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,N_c} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,N_c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{K,1} & B_{K,2} & \dots & B_{K,N_c} \end{pmatrix} \end{array}$$

On suppose pour rester dans le cadre linéaire que tout les critères sont CDFAS.

G.8.2 Comparaison avec les scénarios proposés

On a vu avec le théorème 2 que les scénario **ScEN** sont en fait plutôt équivalents. On pourrait en fait dans ces scénarios n'avoir que 2 échelles, celle de l'objectif (la région) et celle du critère (qui dépend du scénario). La contraintes étant de plus en plus fortes avec N, on va observer une pertes dans l'objectif lorsqu'on augmente N, ce qui est redondant avec l'article [López-Ridaura et al., 2005a]. L'intérêt de garder toutes les échelle et de regarder l'évolution des autres indicateurs (par exemple l'agrodiversité).

Les scénario **ScPN** sont en fait des cas particulier du méta-scénario **MSc(MB)**. On peut étudier directement ce méta-scénario
Un première chose à remarquer est l'équivalence de certains scénario .

Propriété G.1. *Soit $n1$ et $n2$ deux échelles telles que $n2 > n1$, Soit j une culture. Supposons que*

$$\forall l2 \in [\![1, N_{n2}]\!],\ POP\_E_l^{n2} = \sum_{l \in \omega_{l2}^{n2}} POP\_E_l^{n1} \tag{109}$$

alors touts les scénarios tels que $B_j^{n2} \leq B_j^{n1}$ sont équivalents.

Démonstration. C'est un corollaire du théorème 2.8 car la contraintes sur A_j^{n2} est alors plus faible que celle sur A_j^{n1}. □

Remarque. *L'hypothèse 109 est généralement respectée sauf dans le cas où la population de la commune n'est pas la somme de la population des fermes.*

H Scénarios avec un seul critère à une seule échelle

Pour toute cette partie on étudie un scénario avec un seul indicateur c contraint. Le problème est donc le suivant :

Prob_1 : Le problème avec une seule contrainte

$$Min\left(\sum_i \sum_j P^O_{i,(j_i^O,j)} y_{i,j} = P_l^{O,n}(Y)\right) \tag{110}$$

$$C \leq \sum_i \sum_j G^c_{i,(j_i^O,j)} y_{i,j} = G_l^{c,n}(Y) \tag{111}$$

$$L_i = \sum_j Y_{i,j} \qquad \forall i \tag{112}$$

$$0 \leq Y_{i,j} \qquad \forall i,\ \forall j \tag{113}$$

Supposons que 2 choix ne peuvent pas avoir à la fois une perte sur l'objectif et un gain sur la contrainte identiques. Nous procédons par étapes :

⋆ **Supposons que pour tous les types de sols sauf un que l'on nomme i_0, l'affectation des sols soit bloquée.** Les seules variables sont alors $y_j = y_{i,j}$ et on remarque que

$$y_{j_i^O} = L_l - \sum_{j \neq j_i^O} y_j \tag{114}$$

On a donc

$$P_l^{O,n} = \sum_{i \neq i_0} P_{i,l}^{O,n} + \sum_{j \neq j_{i_0}^O} y_j \, P_{i_0,j}^O \tag{115}$$

$$= C2_l + \sum_{j \neq j_{i_0}^O} y_j \, P_{i_0,j}^O \tag{116}$$

$$G_l^{c,n} = \sum_{i \neq i_0} A_{i,l}^{c,n} + \sum_{j \neq j_{i_0}^O} y_j \, G_{i_0,j}^c \tag{117}$$

$$= C3_l + \sum_{j \neq j_{i_0}^O} y_j \, G_{i_0,j}^c \tag{118}$$

On note pour cette partie : $P_{i_0,j}^O = P_j$ et $G_{i_0,j}^c = G_j$. Et on note la perte et la contrainte qui nous intéressent de manière simplifiée : $P = P_l^{O,n} - C2_l$ et $C = C_{l^1}^1 - C3_l$.

Propriété H.1. *Les stratégies avec moins de 2 composantes non-nulles sont faiblement dominantes.*

Démonstration. Soit y une solution optimale, elle respecte alors les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) car le problème est linéaire donc les contraintes sont qualifiées.
Les conditions KKT s'écrivent :

$$\forall j \in [\![1,m]\!], \; P_j = \mu + \lambda_0 G_j + \lambda_j \tag{119}$$

$$\forall j \in [\![0,m]\!], \; 0 \leq \lambda_j \tag{120}$$

$$\forall j \in [\![1,m]\!], \; 0 = \; y_j \lambda_j \tag{121}$$

$$0 = \lambda_0 \left(\sum_j G_j y_j - C \right) \tag{122}$$

Supposons que la solution aient n y_j non-nuls avec $n > 2$ et supposons sans perte de généralité que $y_1, y_2, y_3 > 0$. On a alors :

$$\forall j \in [\![1,3]\!], \; P_j = \mu + \lambda_0 G_j \tag{123}$$

On distingue alors 2 cas :

$\lambda_0 = 0$: Alors $P_1 = P_2 = P_3$ et donc on peut supposer sans perte de généralité que $G_1 > G_2 > G_3$. On peut alors proposer une solution y' qui domine faiblement y. On pose :

$$y'_1 = y_1 + y_2 + y_3 \tag{124}$$

$$y'_2 = 0 = y'_3 \forall j > 3, \; y'_j \qquad = y_j \tag{125}$$

On a réduit le nombre de composantes non-nulles, tout en gardant la même perte et en augmentant le gain. y' domine faiblement y.

$\lambda_0 \neq 0$: Alors on a $[G_1 = G_2] \Leftrightarrow [P_1 = P_2]$.
Or on a fait l'hypothèse que les deux égalités ne pouvaient pas être vérifiées en même temps. On suppose sans perte de généralité que : $G_1 > G_2 > G_3$ et donc que $P_1 > P_2 > P_3$. On propose alors une solution y' qui domine faiblement y en modifiant uniquement les 3 premières composantes et en fixant $y_2 = 0$.

On note P (Respectivement P') la perte sur l'objectif engendrée par les 3 premières composantes de y (Resp. y'). On note G les gains sur la contraintes engendrés par les 3 premières composantes de y. On note $L' = y_1 + y_2 + y_3$. On trouve alors y'_1 et y'_3 grâce au équations suivantes :

$$L' = y'_1 + y'_3 \tag{126}$$
$$G = G_1 y'_1 + P_3(L' - y'_1) \tag{127}$$

On a donc en utilisant plusieurs fois (123) :

$$P - P' = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 - P_1 \frac{G - G_3 L'}{G_1 - G_3} - P_3 \left(L' - \frac{G - G_3 L'}{G_1 - G_3} \right) \tag{128}$$
$$= (\mu + \lambda_0 G_1) y_1 + (\mu + \lambda_0 G_2) y_2 + (\mu + \lambda_0 G_3) y_3 + \lambda_0 \left(G - G_3 L' \right) - P_3 L' \tag{129}$$
$$= \mu L' + \lambda_0 G - \lambda_0 G + \lambda_0 G_3 L' - P_3 L' \tag{130}$$
$$= 0 \tag{131}$$

On a donc une perte et un gain égaux pour y et y',on a bien une solution faiblement dominante avec une nombre de composantes non-nulles strictement plus faibles que n.

Ce raisonnement étant vrai pour tout $n > 2$, on a bien le résultat attendu. □

Durant cette preuve on a montré un résultat sur la forme des solutions optimales.

Propriété H.2. *Soit y solution optimale à 2 composantes non-nulles. On suppose sans perte de généralité que ces 2 composantes sont y_1 et y_2. Il y a alors 2 cas possibles :*

- $P_1 = P_2$
- *La condition (39) est saturée. Et alors $G_1 \neq G_2$ et $P_1 < P_2 \Leftrightarrow G_1 < G_2$.*

Démonstration. C'est la distinction entre $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_0 > 0$ dans la preuve de la proposition (H.1). □

Propriété H.3. *Soit y solution optimale à 2 composantes non-nulles. On suppose sans perte de généralité que ces 2 composantes soient y_1 et y_2 et que $P_1 \leq P_2$. Il y a alors 2 cas possibles :*

- *$P_1 = P_2$ et y est faiblement dominée par une solution avec une seule composante non-nulles.*
- $\Pi_{1,2} = \max_{j \neq 1} \left\{ \Pi_{1,j} | G_j > G_1 \right\}$.

Démonstration. Dans le premier cas, si $G_1 \leq G_2$ alors la solution y' avec $y'_1 = y_1 + y_2 = L$ et $y_j = 0$, $\forall j > 1$ domine faiblement y car elle ont la même perte et que le gain de y' et supérieur à celui de y.

Dans le second cas, on utilise la saturation de la contrainte (39) et on a donc :

$$L = y_1 + y_2 \tag{132}$$
$$C = G_1 y_1 + G_2 y_2 \tag{133}$$

Or $G_1 \neq G_2$ par les conditions KKT, donc :

$$y_1 = \frac{C - L G_1}{G_1 - G_2} \tag{134}$$
$$y_2 = \frac{C - L G_2}{G_2 - G_1} \tag{135}$$

On peut donc calculer la perte P :

$$P = P_1 \frac{C - LG_1}{G_1 - G_2} + P_2 \frac{C - LG_2}{G_2 - G_1} \tag{136}$$

$$= \frac{P_1 - P_2}{G_1 - G_2} C - L \frac{P_1 G_2 - P_2 G_1}{G_1 - G_2} \tag{137}$$

$$= \frac{C}{\Pi_{1,2}} - L \frac{P_1 (G_2 - G1) + P_1 G_1 - P_2 G_1}{G_1 - G_2} \tag{138}$$

$$= \frac{C - LG_1}{\Pi_{1,2}} + LP_1 \tag{139}$$

Supposons qu'il existe j tel que $G_j > G_1$ et $\Pi_{1,2} > \Pi_{1,j}$, on peut alors proposer y' tel que :

$$y'_1 = \frac{C - LG_1}{G_1 - G_j} \tag{140}$$

$$y'_j = \frac{C - LG_j}{G_j - G_1} \tag{141}$$

$$y'_i = 0 \qquad \forall i \notin \{1, j\} \tag{142}$$

Cette solution est admissible car elle respecte les conditions (132) et (133) et par les même calculs sa perte est :

$$P' = \frac{C - LG_1}{\Pi_{1,j}} + LP_1 < P \tag{143}$$

Ce qui contredit la optimalité de y. C'est absurde donc $\Pi_{1,2} = \max_{j \neq 1} \left\{ \Pi_{1,j} | G_j > G_1 \right\}$.

□

Définition : (Premier meilleur compromis)

On appelle j^c_{i0} le premier meilleur compromis pour le sol i, le choix qui respecte les conditions suivantes :

$$\Omega = \underset{j \neq j^O_{i0}}{Argmax} \left\{ \Pi_{i^0, j^O_{i^0}, j} | G_j > G_{j^O_{i^0}} \right\} \tag{144}$$

$$j^c_{i^0} = \underset{j \in \Omega}{Argmax} \left\{ G^c_j \right\} \tag{145}$$

Propriété H.4. *Si $C \leq G^c_{j^c_i} L_{i^0,l}$ alors la stratégie qui n'a des y_j non-nuls uniquement pour j^O_i et j^c_i est faiblement dominante et dans cette stratégie, P est affine en C de pente $\frac{1}{\Pi^{O,c}_{i,j^O_i,j^c_i}}$.*

Démonstration. Dans ce cas ci, on peut satisfaire le critère uniquement avec $j^O_{i^0}$ et $j^c_{i^0}$ et d'après la proposition précédente, la perte de la solution proposée est $\frac{C}{\Pi^O_{j^O,j^c}}$.
Soit y une solution optimale avec y_1 et y_2 les 2 seules composantes non-nulles.

$\star$ Supposons $P_1 \neq P_2$ et calculons la perte :

$$\begin{cases} P &= y_1 P^O_{j^O,1} + y_2 P^O_{j^O,2} \\ C &= y_1 G^c_{j^O,1} + y_2 G^c_{j^O,2} \end{cases} \tag{146}$$

$$\begin{cases} P &= \frac{z_1}{\Pi^O_{j^O,1}} + \frac{z_2}{\Pi^O_{j^O,2}} \\ C &= z_1 + z_2 \end{cases} \tag{147}$$

La perte est donc minorée ainsi :

$$P \geq \frac{z_1 + z_1}{\Pi^O_{j^O,j^c}} = \frac{C}{\Pi^O_{j^O,j^c}} \tag{148}$$

$\star$ Supposons $P_1 = P_2$, la solution est donc faiblement dominée par y' tel que $y'_1 = \frac{C}{G_1}$ et $y'_j = 0, \forall j > 1$. La perte associée est minorée ainsi :

$$P = \frac{P_1 C}{G_1} \geq \frac{C}{\Pi^O_{j^O,j^c}} \tag{149}$$

Dans les deux cas, la perte est bien minorée par la perte de la solution proposée. □

Lorsque C est suffisamment petit, on sait résoudre le problème et si C est plus grand, on peut se ramener au cas précédent grâce à cette propriété.

Propriété H.5. *Soit y une solution optimale du problème avec $C \geq G_{j^c_{i_0}} L_{i_0}$.*
Alors les choix $j \neq j^c_{i^0}$ tels que $G_j \leq G_{j^c_{i_0}}$ sont associés à des y_j nuls.

Démonstration. Supposons qu'il existe j_1 tel que $y_{j_1} > 0$ et $G_{j_1} \leq G_{j^c_{i_0}}$ alors il entraîne un gain égal à $\tilde{G} = y_{j_1} G_{j_1}$ et une perte égale à $\frac{\tilde{G}}{\Pi_{j^O,j_1}}$. On peut alors proposer une solution alternative y' :

$$y'_j = \begin{cases} y_j + \frac{\tilde{G}}{G_{j^c_{i_0}}} & Si\ j = j^c_{i^0} \\ y_{j^0} + y_{j_1} - y'_{j^c_{i^0}} & Si\ j = j^0 \\ 0 & Si\ j = j_1 \\ y_j & Sinon \end{cases} \tag{150}$$

Cette solution est réalisable car $G_{j_1} \leq G_{j^c_{i_0}}$ et a un gain égal au gain de y.

La perte associée à cette solution est $P' = P - \tilde{G}\left(\frac{1}{\Pi_{j^O,j_1}} - \frac{1}{\Pi_{j^O,j^c_{i^0}}}\right) < P$. L'inégalité est vraie par définition de j^c. □

Remarque. *On peut donc si $C \geq G_{j^c_{i_0}} L_{i_0}$, supprimer les choix $j \neq j^c_{i^0}$ tels que $G_j \leq G_{j^c_{i_0}}$ et reconsidérer le problème avec les proposition précédentes. En effet, dans ce problème (qui est est équivalent au premier d'après la proposition précédente), on a le choix optimal pour le sol i_0 qui est $j^c_{i_0}$.*

$\star$ **On regarde maintenant le problème dans sa globalité.** On peut appliquer les conditions KKT comme pour la proposition (H.1) est conclure :

Propriété H.6. *Les stratégies avec q ou $q+1$ composantes non-nulles sont faiblement dominantes.*

Démonstration. Par la condition (113), on sait qu'au moins q composantes sont non nulles et par la proposition (H.1), on sait qu'il n'y a pas plus de 2 composantes non-nulles par sols.

Soit y un solution optimale, on peut appliquer les conditions KKT et elles s'écrivent ainsi :

$$\forall i,j \in [\![1,m]\!] \times [\![1,q]\!],\ P_{i,j} = \mu_i + \lambda_0 G_{i,j} + \lambda_{i,j} \tag{151}$$
$$\forall i,j \in [\![1,m]\!] \times [\![1,q]\!],\ 0 \leq \lambda_{i,j} \tag{152}$$
$$0 \leq \lambda_0 \tag{153}$$
$$\forall i,j \in [\![1,m]\!] \times [\![1,q]\!],\ 0 = y_{i,j}\lambda_{i,j} \tag{154}$$
$$0 = \lambda_0 \left(\sum_j \sum_i G_{i,j} y_{i,j} - C \right) \tag{155}$$

Supposons que 2 sols (sans perte de généralité i=1 et i=2) aient 2 composantes non-nulles chacun (que nous notons respectivement j_1, j_2, j_2, j_4). On note $P_{1,j_1} = P_1$, $P_{1,j_2} = P_2$, $P_{2,j_3} = P_3$ et $P_{2,j_4} = P_4$ et de même pour le gain et les $y_{i,j}$, ce qui donne :

$$P_1 = \mu_1 + \lambda_0 G_1 \tag{156}$$
$$P_2 = \mu_1 + \lambda_0 G_2 \tag{157}$$
$$P_3 = \mu_2 + \lambda_0 G_3 \tag{158}$$
$$P_4 = \mu_2 + \lambda_0 G_4 \tag{159}$$

On distingue alors 2 cas :

$\lambda_0 = 0$: On sait alors que $P_1 = P_2$ et $P_3 = P_4$, on peut alors dominer par une solution y' qui a moins de composantes non-nulles comme fait dans les cas précédents.

$\lambda_0 > 0$: on suppose sans perte de généralité que $G_1 < G_2$ et $G_3 < G_4$ et donc de même pour les pertes. et on suppose sans perte de généralité que $\Pi_{1,2} < \Pi_{3,4}$. On propose alors une solution y' qui domine faiblement y avec une composante nulle supplémentaire :

— Si $L_2 \leq \frac{(G_2-G_1)y_1+G_3(y_3-L_2)+G_4y_4}{G_4-G_3}$ alors on propose :

$$y'_{i,j} = \begin{cases} 0 & Si(i,j) = 1, j_1 \\ L_1 = y_1 + y_2 & Si(i,j) = 1, j_2 \\ \frac{(G_2-G_1)y_1+G_3(y_3-L_2)+G_4y_4}{G_4-G_3} & Si(i,j) = 2, j_4 \\ L_2 - y'_{2,j_4} & Si(i,j) = 2, j_3 \\ y_{i,j} & Sinon \end{cases} \tag{160}$$

— Sinon on propose :

$$y'_{i,j} = \begin{cases} \frac{(G_3-G_4)y_3+G_1(y_1-L_1)+G_2y_2}{G_2-G_1} & Si(i,j) = 1, j_2 \\ L_1 - y'_{1,j_2} & Si(i,j) = 1, j_1 \\ 0 & Si(i,j) = 2, j_3 \\ L_2 = y_3 + y_4 & Si(i,j) = 2, j_4 \\ y_{i,j} & Sinon \end{cases} \tag{161}$$

Cette solution est faisable et a le même gain et une perte plus petite ou égale. On a alors bien la domination annoncée.

□

Définition : (Premier meilleur sol pour compromis)

On appelle i^c le premier meilleur sol pour compromis, le sol qui respecte la condition suivante :

$$\Omega = \underset{i}{Argmax} \left\{ \Pi_{i,j_i^O,j_i^c} \right\} \tag{162}$$

$$j_{i^0}^c = \underset{i \in \Omega}{Argmax} \left\{ G_{i,j_i^c}^c \right\} \tag{163}$$

Définition : (Premier meilleur compromis global)

On appelle j^c le premier meilleur compromis global, le choix tel que $j^c = j_{i^c}^c$.

Remarque. *Dans les fait on peut s'affranchir de la notion de Premier meilleur compromis pour le sol i en définisant i^c et j^c comme le couple qui respecte cette condition :*

$$\Omega = \underset{(i,j),\ j \neq j_i^O}{Argmax} \left\{ \Pi_{i,j_i^O,j} | G_j > G_{j_i^O} \right\} \tag{164}$$

$$(i^c, j^c) = \underset{(i,j) \in \Omega}{Argmax} \left\{ G_{i,j}^c \right\} \tag{165}$$

Propriété H.7. *Si $C \leq G_{i^c,j^c}^c L_{i^c,l} + \sum_{i \neq i^c} G_{i,j_i^O}^c L_{i,l}$,*
alors la stratégie qui n'a des $y_{i,j}$ non-nuls uniquement pour les doublets (i, j_i^O) et (i^c, j^c) est faiblement dominante et dans cette stratégie, P est affine en C de pente $\frac{1}{\Pi_{i^c,j_{i^c}^O,j^c}^{O,c}}$.

Démonstration. Dans ce cas ci, on peut satisfaire le critère uniquement avec (i^c, j^c) et d'après la proposition (H.3), la perte de la solution proposée est $\frac{C}{\Pi_{i^c,j_{i^c}^O,j^c}^O}$.

Soit y une solution optimale avec 1 le sol qui a 2 composantes non-nulles qui sont y_{1,j_1} et y_{1,j_2}. Pour les autres sols, on note y_{i,j_i} la composante non-nulle.
⋆ Supposons $P_{1,j_1} \neq P_{1,j_2}$ et calculons la perte :

$$\begin{cases} P &= y_{1,j_1} P_{1,j^O,j_1}^O + y_{1,j_2} P_{1,j^O,j_2}^O + \sum_{i>1} L_{i,l} P_{i,j_i^O,j_i}^O \\ C &= y_{1,j_1} G_{1,j^O,j_1}^c + y_{1,j_2} G_{1,j^O,j_2}^c + \sum_{i>1} L_{i,l} G_{i,j_i^O,j_i}^O \end{cases} \tag{166}$$

$$\begin{cases} P &= \frac{z_{1,j_1}}{\Pi_{1,j^O,j_1}^{O,c}} + \frac{z_{1,j_2}}{\Pi_{1,j^O,j_2}^{O,c}} + \sum i > 1 \frac{z_{i,j_i}}{\Pi_{i,j^O,j_i}^{O,c}} \\ C &= z_1 + z_2 + \sum_{i>1} z_{i,j_i} \end{cases} \tag{167}$$

La perte est donc minorée ainsi :

$$P \geq \frac{z_1 + z_2 + \sum_{i>1} z_{i,j_i}}{\Pi_{j^O,j^c}^O} = \frac{C}{\Pi_{j^O,j^c}^O} \tag{168}$$

$\star$ Supposons $P_{1,j_1} = P_{1,j_2}$, la solution est donc faiblement dominée par y' tel que $y'_{1,j_1} = \frac{C - \sum_{i>1} L_{i,l} G^O_{i,j_i^O,j_i}}{G_1}$, $y'_{1,j} = 0, \forall j \neq j_1$ et $y'i,j = y_{i,j}, \forall i > 1$. La perte associée est minorée ainsi :

$$P = \frac{P_{1,j_1}\left(C - \sum_{i>1} L_{i,l} G^O_{i,j_i^O,j_i}\right)}{G_{1,j_1}} + \sum_{i>1} \frac{L_{i,l} G^O_{i,j_i^O,j_i}}{\Pi^{O,c}_{i,j_i^O,j_i}} \geq \frac{C}{\Pi^O_{j^O,j^c}} \tag{169}$$

Dans les deux cas, la perte est bien minorée par la perte de la solution proposée. □

Lorsque C est suffisamment petit, on sait résoudre le problème et si C est plus grand, on peut se ramener au cas précédent grâce à cette propriété.

Propriété H.8. *Soit y une solution optimale du problème avec $C \geq G_{i^c,j^c} L_{i^c}$.*
Alors les doublets (i,j) tels que $G_(i,j) \leq G_{i^c,j^c}$, $i = i^c$ et $j \neq j^c$ sont associés à des $y_{i,j}$ nuls.

Démonstration. Supposons qu'il existe j_1 tel que $y_{i^c,j_1} > 0$ et $G_{i^c,j_1} \leq G_{i^c,j^c}$ alors il entraîne un gain égale à $\tilde{G} = y_{i^c,j_1} G_{i^c j_1}$ et une perte égale à $\frac{\tilde{G}}{\Pi_{i^c,j^O,j_1}}$. On peut alors proposer une solution alternative y' :

$$y'_{i^c,j} = \begin{cases} y_{i^c,j} + \frac{\tilde{G}}{G_{i^c,j^c}} & Si\ j = j^c \\ y_{i^c,j^0} + y_{i^c,j_1} - y'_{i^c,j^c} & Si\ j = j^0 \\ 0 & Si\ j = j_1 \\ y_j & Sinon \end{cases} \tag{170}$$

Cette solution est réalisable car $G_{i^c,j_1} \leq G_{i^c,j^c}$ et a un gain égale au gain de y.
La perte associée à cette solution est $P' = P - \tilde{G}\left(\frac{1}{\Pi_{i^c,j^O,j_1}} - \frac{1}{\Pi_{i^c,j^O,j^c}}\right) < P$. L'inégalité est vraie par définition de j^c. □

On peut donc en appliquant la proposition (H.8) simplifier le problème jusqu'à ce que le problème respecte les hypothèses de la proposition (H.7) et alors on applique cette proposition et on obtient le résultat optimal. On peut alors décrire la forme des solutions et de l'objectif.

Théorème 5. *Soit le problème Prob_1(C), le problème Prob_1 avec la constante C de l'inéquation (111) comme paramètre du problème.*
On fait l'hypothèse que pour toute paire de doublets :
$(G_{i_1,j_1}, P_{i_1,j_1}) = (G_{i_2,j_2}, P_{i_2,j_2}) \Rightarrow (i_1,j_1) = (i_2,j_2)$,
et pour toute paire de triplets :
$\Pi_{i_1,j_1,j_2} = \Pi i_2, j_3, j_4 \notin \{0, \pm\infty\} \Rightarrow (i_1,j_1,j_2) = (i_2,j_3,j_4)$.
Lorsqu'il existe une unique solution au problème, elle est notée $\tilde{y}(C)$ et associée à la fonction objectif $\tilde{P}(C)$, alors :

- *Il existe une constante positive $C_{lim} = \sum_i L_i * \underset{j}{Max}(G_{i,j})$ telle que :*
  $\forall C \in [0, C_{lim}]$, $\exists! \tilde{y}(C)$ *solution de Prob_1(C).*
- *La fonction $\tilde{P}$ est affine par morceaux, continue, croissante et concave en C sur l'intervalle $[0, C_{lim}]$.*
- *La fonction $\tilde{y}$ est affine par morceaux et continue en C sur l'intervalle $[0, C_{lim}]$.*

— *Les "points de brisures" de $\tilde{y}$ et $\tilde{P}$ sont identiques et notés $(C_k)_{k\in[\![0,nb]\!]}$ avec $0 = C_0 < C_1 < \ldots < C_{nb-1} < C_{nb} = C_{lim}$.*
— *Si C est un "point de brisure" alors $\tilde{y}(C)$ a q composantes non-nulles. Sinon et si $C < C_{lim}$ alors $\tilde{y}(C)$ a $q+1$ composantes non-nulles.*

Démonstration. Si on prouve la première affirmation, les 4 autres affirmations sont des conclusions directes des propositions (H.8) et (H.7).
Pour $C = 0$, il existe une unique solution optimale qui est :

$$y_{i,j} = \delta_{j_i^O}(j)L_i \tag{171}$$

Pour $C > C_{lim}$, il n'y a évidemment pas de solution.
Pour $0 \leq C \leq C_l im$, il y a une solution qui satisfait les contraintes qui est :

$$y_{i,j} = \delta_j \left(\underset{j'}{Argmax}(G_{i,j'}) \right) L_i \tag{172}$$

Il y a donc un solution au problème $Prob\_1(C)$.
Supposons qu'il y ait 2 solutions $\tilde{y}^1$ et $\tilde{y}^2$. D'après la proposition (H.6), elles n'ont qu'un seul sol chacune avec 2 composantes non-nulles et on note ces composantes : $\tilde{y}^1_{1,j_1}, \tilde{y}^1_{1,j_2}, \tilde{y}^2_{2,j_3}, \tilde{y}^2_{2,j_4}$ et supposons sans perte de généralité que $G1, j_1 \leq G_{1,j_2}$ et $G2, j_3 \leq G_{2,j_4}$.

$\star$ Si $\Pi_{1,j_1,j_2} \neq \Pi_{2,j_3,j_4}$, supposons sans perte de généralité que $\Pi_{1,j_1,j_2} < \Pi_{2,j_3,j_4}$. Soit $0 < \varepsilon = min\left(\tilde{y}^1_{1,j_2}, \tilde{y}^2_{2,j_3} \frac{G_{2,j_4}-G_{2,j_3}}{G_{1,j_2}-G_{1,j_1}}\right)$. Soit $\tilde{y}^3$, une solution tel que :

$$\tilde{y}^3_{i,j} = \begin{cases} \frac{\tilde{y}^1_{1,j_1}+\tilde{y}^2_{1,j_1}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} & Si(i,j) = (1,j_1) \\ \frac{\tilde{y}^1_{1,j_2}+\tilde{y}^2_{1,j_2}}{2} - \frac{\varepsilon}{2} & Si(i,j) = (1,j_2) \\ \frac{\tilde{y}^1_{2,j_3}+\tilde{y}^2_{2,j_3}}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{G_{1,j_2}-G_{1,j_1}}{G_{2,j_4}-G_{2,j_3}} & Si(i,j) = (2,j_3) \\ \frac{\tilde{y}^1_{2,j_4}+\tilde{y}^2_{2,j_4}}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{G_{1,j_2}-G_{1,j_1}}{G_{2,j_4}-G_{2,j_3}} & Si(i,j) = (2,j_3) \\ \frac{\tilde{y}^1_{i,j}+\tilde{y}^2_{i,j}}{2} & Sinon \end{cases} \tag{173}$$

Cette solution est strictement meilleure que $\tilde{y}^1$ et $\tilde{y}^2$ et a le même gain, ce qui contredit l'optimalité de $\tilde{y}^1$ et $\tilde{y}^2$.

$\star$ Si $\Pi_{1,j_1,j_2} = \Pi_{2,j_3,j_4}$ alors $(1,j_1,j_2) = (2,j_3,j_4)$. Les solutions sont donc différentes sur au moins deux sols que l'on note α et β. On choisit j_5, j_6, j_7, j_8 tels que

$$\begin{aligned} \tilde{y}^1_{\alpha,j_5} + \tilde{y}^2_{\alpha,j_5} > 0 \\ \tilde{y}^1_{\alpha,j_6} + \tilde{y}^2_{\alpha,j_6} > 0 \\ \tilde{y}^1_{\beta,j_7} + \tilde{y}^2_{\beta,j_7} > 0 \\ \tilde{y}^1_{\beta,j_8} + \tilde{y}^2_{\beta,j_8} > 0 \end{aligned}$$

Supposons sans perte de généralité que $\Pi_{\alpha,j_5,j_6} < \Pi_{\beta,j_7,j_8}$.

Soit $0 < \varepsilon = min\left(\frac{\tilde{y}^1_{\alpha,j_6}+\tilde{y}^2_{\alpha,j_6}}{2}, \frac{\tilde{y}^1_{\beta,j_7}+\tilde{y}^2_{\beta,j_7}}{2}\frac{G_{\beta,j_8}-G_{\beta,j_7}}{G_{\alpha,j_6}-G_{\alpha,j_5}}\right)$. Soit $\tilde{y}^3$, une solution telle que :

$$\tilde{y}^3_{i,j} = \begin{cases} \frac{\tilde{y}^1_{\alpha,j_5}+\tilde{y}^2_{\alpha,j_5}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} & Si(i,j) = (\alpha, j_5) \\ \frac{\tilde{y}^1_{\alpha,j_6}+\tilde{y}^2_{\alpha,j_6}}{2} & Si(i,j) = (\alpha, j_6) \\ \frac{\tilde{y}^1_{\beta,j_7}+\tilde{y}^2_{\beta,j_7}}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{G_{\alpha,j_6}-G_{\alpha,j_5}}{G_{\beta,j_8}-G_{\beta,j_7}} & Si(i,j) = (\beta, j_7) \\ \frac{\tilde{y}^1_{\beta,j_8}+\tilde{y}^2_{\beta,j_8}}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{G_{\alpha,j_6}-G_{\alpha,j_5}}{G_{\beta,j_8}-G_{\beta,j_7}} & Si(i,j) = (\beta, j_8) \\ \frac{\tilde{y}^1_{i,j}+\tilde{y}^2_{i,j}}{2} & Sinon \end{cases} \tag{174}$$

Cette solution est strictement meilleure que $\tilde{y}^1$ et $\tilde{y}^2$ et a le même gain, ce qui contredit l'optimalité de $\tilde{y}^1$ et $\tilde{y}^2$.

□

I Preuves des résultats des parties 2.3.4 et 2.3.5

Preuve de la proposition 2.13

Démonstration. Soit Y, une solution optimale.
Le respect de l'équation (58) montre qu'il y a au moins q composantes non-nulles.
Supposons que Y ait strictement plus de $q+N_{cri}$ composantes non-nulles.
On peux choisir $\mathscr{T}$ les indices de $q+N_{cri}+1$ composantes non-nulles et restreindre Y et C à $\mathscr{T}$, on note : $\tilde{Y} = Y|_{\mathscr{T}}$, $\tilde{C} = C|_{\mathscr{T}}$ et $\tilde{B} = \tilde{C}\tilde{Y}$.
Ainsi $\tilde{Y} \in (\mathbb{R}^*_+)^{q+N_{cri}+1}$ et $\tilde{C} \in \mathscr{M}_{q+N_{cri},q+N_{cri}+1}$ et donc son noyau n'est pas trivial. Soit $x \in Ker\left(\tilde{C}\right)$ non-nul.
On a donc $\forall \lambda \in \mathscr{R}$, $\tilde{C}\left(\tilde{Y}+\lambda x\right) = \tilde{B}$. C'est à dire que on peut modifier Y en suivant la direction donnée par x et continuer à respecter les conditions (57) et (58).
Comme $\tilde{Y} \in (\mathbb{R}^*_+)^{q+N_{cri}+1}$ et par positivité de $\tilde{C}$, il existe :

$$\lambda_1 = \underset{\lambda<0}{Max}\left(\tilde{Y}+\lambda x\right) \notin (\mathbb{R}^*_+)^{q+N_{cri}+1} \tag{175}$$

$$\lambda_2 = \underset{\lambda>0}{Min}\left(\tilde{Y}+\lambda x\right) \notin (\mathbb{R}^*_+)^{q+N_{cri}+1} \tag{176}$$

On note $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{qm}$, le vecteur dont les composantes sont égales à celles de x sur $\mathscr{T}$ et nulles sinon.
Par linéarité de la perte en fonction de Y, La suite $Obj(Y+\lambda_1\tilde{(x)}), Obj(Y), Obj(Y+\lambda_2\tilde{(x)})$ est monotone. Par optimalité de Y, elle est constante. On a donc 2 solutions optimales est qui ont au moins une composante non-nulle de moins.
Ce raisonnement étant vrai pour toutes les solutions ayant strictement plus de $q+N_{cri}$ composantes non-nulles, on peut trouver une solution optimale avec moins de $q+N_{cri}$ composantes non-nulles. □

Preuve du théorème 4

Démonstration. Soit Y une solution optimale.
Prenons tout d'abord $\mathscr{E} = [\![1,n]\!]$ alors $\mathscr{E}$ sélectionne les lignes $[\![1,m_E]\!]$. On note $C = \begin{pmatrix} C_I \\ C_E \end{pmatrix}$.

Supposons que Y ait strictement plus de $m_E + m_I$ composantes non-nulles.
On peux choisir $\mathscr{T}$ les indices de $m_E + m_I + 1$ composantes non-nulles et restreindre Y et C à $\mathscr{T}$, on note : $\tilde{Y} = Y|_{\mathscr{T}}$, $\tilde{C} = C|_{\mathscr{T}}$ et $\tilde{B} = \tilde{C}\tilde{Y}$.
Ainsi $\tilde{Y} \in (\mathbb{R}_+^*)^{m_E+m_I+1}$ et $\tilde{C} \in \mathscr{M}_{m_E+m_I, m_E+m_I+1}$ et donc son noyau n'est pas trivial.
Soit $x \in Ker\left(\tilde{C}\right)$ non-nul.
On a donc $\forall \lambda \in \mathscr{R}$, $\tilde{C}\left(\tilde{Y} + \lambda x\right) = \tilde{B}$. C'est à dire que on peut modifier Y en suivant la direction donnée par x et continuer à respecter les conditions (67) et (66).
Comme $\tilde{Y} \in (\mathbb{R}_+^*)^{m_E+m_I+1}$ et par positivité de $\tilde{C}$, il existe :

$$\lambda_1 = \underset{\lambda<0}{Max}\left(\tilde{Y} + \lambda x\right) \notin (\mathbb{R}_+^*)^{m_E+m_I+1} \tag{177}$$

$$\lambda_2 = \underset{\lambda>0}{Min}\left(\tilde{Y} + \lambda x\right) \notin (\mathbb{R}_+^*)^{m_E+m_I+1} \tag{178}$$

On note $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, le vecteur dont les composantes sont égales à celles de x sur $\mathscr{T}$ et nulles sinon.
Par linéarité de l'objectif, La suite $Obj(Y + \lambda_1\tilde{(x)}), Obj(Y), Obj(Y + \lambda_2\tilde{(x)})$ est monotone. Par optimalité de Y, elle est constante. On a donc 2 solutions optimales qui ont au moins une composante non-nulle de moins.
Ce raisonnement étant vrai pour toutes les solutions ayant strictement plus de $m_E + m_I$ composantes non-nulles, on peut trouver une solution optimale Y_1 avec moins de $m_E + m_I$ composantes non-nulles et qui n'a aucune composante non-nulle sur des indices qui non pas de composante non-nulle pour Y.

Dans le cas général d'un $\mathscr{E}$ sélectionnant les lignes $\mathscr{L}$.
On note $Y_{1,\mathscr{E}}$ le vecteur Y_1 restreint à $\mathscr{E}$ et $Y_{1,\mathscr{E}^C}$, le vecteur Y_1 restreint à $\mathscr{E}^C$.
En renumérotant les lignes et les colonnes on peut écrire C_E sous la forme :

$$C_E = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathscr{E} & \mathscr{E}^c \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{E,\mathscr{E}} & 0 \\ 0 & C_{E,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut aussi écrire C_I sous la forme :

$$C_I = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathscr{E} & \mathscr{E}^c \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{I,\mathscr{E}} & C_{I,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut alors reformuler les conditions de la maximisation ainsi :

$$B_L \leq C_{I,\mathscr{E}} Y_{1,\mathscr{E}} + C_{I,\mathscr{E}^C} Y_{1,\mathscr{E}^C} \tag{179}$$

$$B_E = \begin{pmatrix} C_{E,\mathscr{E}} Y_{1,\mathscr{E}} \\ C_{E,\mathscr{E}^C} Y_{1,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{E,\mathscr{E}} \\ B_{E,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix} \tag{180}$$

$$0 \leq \begin{pmatrix} Y_{1,\mathscr{E}} \\ Y_{1,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix} \tag{181}$$

Ainsi tout vecteur de la forme : $\begin{pmatrix} \tilde{Y}_{1,\mathscr{E}} \\ Y_{1,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix}$ avec $\tilde{Y}_{1,\mathscr{E}}$ solution optimale du problème :

Minimisation l'objectif $Obj(Y) = \langle P_{\mathscr{E}}, Y \rangle$, sous les contraintes :

$$B_I - C_{I,\mathscr{E}^C} Y_{1,\mathscr{E}^C} \leq C_{I,\mathscr{E}} Y \tag{182}$$

$$B_{E,\mathscr{E}} = C_{E,\mathscr{E}} Y \tag{183}$$

$$0 \leq Y \tag{184}$$

est optimal.
On peut donc appliquer la première partie de la preuve à $Y_{1,\mathscr{E}}$ pour obtenir un $Y_{2,\mathscr{E}}$ ayant un nombre de composantes non-nulles inférieure à $m_{E,\mathscr{E}} + m_{I,\mathscr{E}}$ sans avoir de composante non-nulle là où $Y_{1,\mathscr{E}}$ n'avait que des composantes nulles. $Y_2 = \begin{pmatrix} Y_{2,\mathscr{E}} \\ Y_{1,\mathscr{E}^C} \end{pmatrix}$ est donc une solution optimale du problème avec moins de $n_E + n_I$ composantes non-nulles et moins de $m_{E,\mathscr{E}} + m_{I,\mathscr{E}}$ composantes non-nulles sur $\mathscr{E}$.
Conclusion : On peut itérer à tout les sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ sélectionnant des lignes (Il y en a un nombre fini car $\mathscr{P}([\![1,n]\!])$ est fini.) et obtenir un vecteur de la forme attendue. □

Preuves des propositions 2.17 et 2.18

Analyse : Soit $\tilde{Y}$ une solution de Prob_perte$(0,\alpha_0$ qui respecte les conclusions du théorème 4. Sans perte de généralités, on suppose que pour tout α, on vérifie $n_\alpha \leq n_{\alpha+1}$. On peut donc ensuite en appliquant le théorème 2 supposer que $n_1 = 1$.
Comme pour le problème à un critère, on procède par étape :
⋆ Supposons dans un premier temps qu'il n'y a qu'un seul type de sol.
On définit le problème P^{α_0}, le problème avec seulement les α_0 premiers critères. Nous allons prendre ces problèmes dans l'ordre. C'est à dire qu'on ajoute les critère un part un.
Il y a 2 possibilités :

- Le critère est seul sur son territoire ou à ses sous-territoires alors on applique les méthodes de la sous partie précédentes.
- Il y a c autres critères qui s'appliquent au même territoire ou à ses sous-territoires. Ces contraintes sont rassemblée dans l'ensemble $\mathscr{C}ri_{\alpha_0}$.

En reprenant les Y comme il était pour le problème précédent (P^{α_0-1}) et en le notant $\tilde{Y}$, on a alors :

Les égalités vérifiées par $\tilde{Y}$.

$$C^{\alpha}_{l^\alpha} = D^{\alpha}_{l^\alpha}(\tilde{Y}) \qquad \forall \alpha \in \mathscr{C}ri_{\alpha_0} \tag{185}$$
$$C'^{\alpha_0}_{l^{\alpha_0}} = C^{\alpha_0}_{l^{\alpha_0}} - D^{\alpha_0}_{l^{\alpha_0}}(\tilde{Y}) \tag{186}$$
$$L_{i,l} = \sum_j \tilde{Y}_{i,j,l} \qquad \forall i,l \tag{187}$$
$$\tilde{Y}_{i,j,k} = X_{i,j,l} L_{i,l} \geq 0 \tag{188}$$

On va chercher une solution à Prob_perte(λ,α_0) en écart avec $\tilde{Y}$, on note ΔY cette écart.
le problème s'exprime alors :

Prob_delta(λ,α_0).

On minimise l'objectif $Obj(\Delta Y) = \langle P, \Delta Y \rangle$, sous les contraintes :

$$\lambda e_{(\alpha_0} \leq C_G|_{\alpha_0,[\![1,qN^1]\!])} \Delta Y \tag{189}$$
$$0 = C_L \Delta Y \tag{190}$$
$$-\tilde{Y} \leq \Delta Y \tag{191}$$

Lorsqu'il y a une on peut appliquer le théorème (4) et particulièrement sur le groupement FC des fermes concernées par α_0.
Ainsi il y a au plus $q+1$ composantes non-nulles et il y a au plus $Card(FC)+1$ com-

posantes non-nulles sur les sols de FC.Observons dans un premier temps les valeurs sur les fermes qui ne sont pas concernées par α_0, elles suivent le problème suivant :

On minimise l'objectif $Obj(Y) = \langle P, Y \rangle$, sous les contraintes :

$$0 = MY \tag{192}$$

$$V \leq Y \tag{193}$$

Avec $V = -\tilde{Y}|_{FC^C} \leq 0$ et $M \geq 0$.
Le vecteur nul est donc la solution optimale par optimalité de $\tilde{Y}$ pour le problème $Prob\_Perte(0, \alpha_0)$
Observons maintenant le groupement de ferme FC. On a fait l'hypothèse que dans le choix optimal les inégalités des inégalités des critères sont des égalités. On considère uniquement A un ensemble de $card(FC) + 1 = N_A$ composantes qui contient les composantes non-nulles et $\Delta Y|_A$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = D_{FC}(\Delta Y) \tag{194}$$

avec $D_{FC} = \begin{pmatrix} C_L|_{(FC,A)} \\ C_G|_{(\alpha_0,A)} \end{pmatrix}$ Et donc on a

$$\Delta Y|_A = D_{FC}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(D_{FC}^{-1}\right)_{1,N_A} \\ \left(D_{FC}^{-1}\right)_{2,N_A} \\ \vdots \\ \left(D_{FC}^{-1}\right)_{N_A,N_A} \end{pmatrix} \lambda \tag{195}$$

On peut alors calculer la perte associée :

$$P'(\Delta Y) = \lambda \sum_{\beta \in A} \left(D_{FC}^{-1}\right)_{\beta,N_A} P^O_{i^\beta,j^\beta,l^\beta} \tag{196}$$

On connaît donc la forme d'une solution optimale et de la perte en fonction de ΔY.
On en déduit la proposition suivante.

Propriété I.1. *Soit α_0 et λ tel qu'il existe une solution à $Prob\_delta(\lambda, \alpha_0)$ avec la condition (189) saturée.Pour tout A sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$ à $N_A = card(FC) + 1$ éléments, on note $\Delta Y_A(\lambda)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{qN^1}$ tel que $\Delta Y_A(\lambda)|_{A^C} = 0$ et*

$$\Delta Y_A(\lambda)|_A = \begin{pmatrix} \left(D_{FC}^{-1}\right)_{1,N_A} \\ \left(D_{FC}^{-1}\right)_{2,N_A} \\ \vdots \\ \left(D_{FC}^{-1}\right)_{N_A,N_A} \end{pmatrix} \lambda \tag{197}$$

avec $D_{FC} = \begin{pmatrix} C_L|_{(FC,A)} \\ C_G|_{(\alpha_0,A)} \end{pmatrix}$.
Soit A_1 sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$ à N_A éléments. $\Delta Y_{A_1}(\lambda)$ est solution optimale de $Prob\_delta(\lambda, \alpha_0)$. si et seulement si pour tout A sous ensemble de $[\![1, N^1]\!]$ à N_A éléments tel que $\Delta Y_A(\lambda) \geq \tilde{Y}$, $P'(\Delta Y_{A_1}(\lambda)) \leq P'(\Delta Y_A(\lambda))$
et $\Delta Y_{A_1}(\lambda) \geq -\tilde{Y}$.

Démonstration. On a supposé qu'une solution optimale existait et on a prouvé qu'elle était forcément de cette forme lors de l'analyse, on choisit seulement celui qui a la plus petit perte.
L'ensemble des sous-ensemble de $[\![1,N^1]\!]$ à N_A éléments est fini il y a donc un A_1 qui a la perte minimale. □

On peut ajouter la proposition suivante qui nous permettra de trouver les solutions en fonction des solutions proches.

Propriété I.2. *Pour tout $B \in \mathbb{R}^{N_{Cri}}$ tel que Prob_perte(0,0) ait une solution $\tilde{Y}$, pour tout $\alpha_0 \in [\![1,N_{Cri}]\!]$, il y a 2 cas :*

— $\forall \lambda > 0$, *$Prob\_perte(\lambda,\alpha_0)$ n'est pas de solution avec la première contrainte saturée.*
ou

— $\exists \lambda_1 > 0$, $\exists A \subset [\![1,qN^1]\!]$, $Card(A) = N_A, \forall \lambda \in [0,\lambda_1]$, $\tilde{Y} + \Delta Y_A(\lambda)$ *soit solution optimale.*

Démonstration. Supposons que l'on ne soit pas dans le 1er cas alors :$\exists \lambda_2 > 0$ tel que $Prob\_perte(\lambda_2,\alpha_0)$ admette une solution. D'après la proposition I.1, il existe $A_2 \subset [\![1,qN^1]\!]$ tel que $\Delta Y_{A_2}(\lambda_2)$ soit solution de $Prob\_delta(\lambda_2,\alpha_0)$ avec la première contrainte saturée. Par linéarité des contraintes :
$\forall \lambda \in [0,\lambda_2]$, $\Delta Y_{A_2}(\lambda)$ respecte les critères de $Prob\_delta(\lambda,\alpha_0)$.
Ainsi pour tout $\lambda \in [0,\lambda_2]$, $Prob\_delta(\lambda,\alpha_0)$ admet une solution.
De même, si un sous ensemble A de $[\![1,qN^1]\!]$ à N_A éléments est tel que $\Delta Y_A(\lambda)$ respecte les critères de $Prob\_delta(\lambda,\alpha_0)$ alors pour tout $0 \leq \lambda' \leq \lambda$, $\Delta Y_A(\lambda')$ respecte les critères de $Prob\_delta(\lambda',\alpha_0)$.
Comme il y a un nombre fini de sous-ensemble de $[\![1,qN^1]\!]$ à N_A éléments, il existe un $\lambda_1 > 0$ tel que le nombre de $A \subset [\![1,qN^1]\!]$, $Card(A) = N_A$ tel que $\Delta Y_A(\lambda)$ respecte les critères de $Prob\_delta(\lambda,\alpha_0)$ est constant sur $[0,\lambda_1]$.
Sur cet intervalle, la perte associée à un A est linéaire en λ, donc si $\Delta Y_A(\lambda')$ est optimal pour $Prob\_delta(\lambda',\alpha_0)$ avec $0 < \lambda' \leq \lambda_1$, alors $\Delta Y_A(\lambda)$ est optimal pour $Prob\_delta(\lambda,\alpha_0)$ pour tout $\lambda \in [0,\lambda_1]$. □

J Le programme python

Voici le premier programme qui créer toute les fonctions nécessaire.

Le programme modele_LUA.py

```
import cvxpy as cp
import numpy as np
from math import inf
from numpy.linalg import norm
from cvxpy.atoms.affine.binary_operators import multiply

import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.image as mpimg
colorNames = ['blue','red','green','yellow','fuchsia','orange','
    limegreen','darkviolet','orangered','peru','midnightblue','coral','
    seagreen','tomato','darkturquoise','gray','magenta','olive','
    royalblue','greenyellow','deeppink']
#on ne peut depasser les 20 choix differents
plt.ion()

```

```python

# In[ ]:
#creation automatique de territoire %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

def calcul_informations_territoire(cartographie_ferme,m): #creer l'objet info avec toute les meta-donnees sur le territoire.
    L=[]
    for k in cartographie_ferme:
        L=L+k
    N=len(cartographie_ferme)
    q=len(cartographie_ferme[0])
    surface_max=max(L)
    F=[[k] for k in range(N)] # La liste des fermes
    infos=(N,q,m,L,surface_max,F)
    return(F,infos)


# In[ ]:
#calcul des indicateurs %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


#passage de la table d'indicateur a la matrice pratique pour indicateur
def Mind(ind,infos): #prend en entree une table d'un indicateur, renvoie la matrice complete qui est multipliable par le vecteur d'affectation des sols
    N=infos[0]
    Mind = []
    for k in range(N):
        Mind += list(ind)
    Mind = np.array(Mind)
    return(Mind.transpose())

#calcul des indicateurs pour chaque ferme
def resultat_detaille(y,ind,infos): #prend en entree un vecteur d'affectation des sols et une table d'un indicateur, renvoie le coeffiscient en chaque case.
    return(multiply(y,Mind(ind,infos)))

#passage a l'echelle
def resultat_rassembles(y,ind,rassemblement,infos):
    global fs
    N,q,L=infos[0],infos[1],infos[3]
    fs=multiply(y,Mind(ind,infos))
    fs=sum(fs)

    M=np.zeros((len(rassemblement),N*q))
    for i in range(len(rassemblement)):
        for k in rassemblement[i]:
            for l in range(q):
                M[i,q*k+l]=L[q*k+l]
    return(M@fs)


# In[ ]:
#affichage %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

def affichage_detaille(x,prob,result,c,infos):
    N,q,m,L,surface_max=infos[0],infos[1],infos[2],infos[3],infos[4]
    print('\n la contraintes est a '+str(c))
```

```
    if prob.status!='optimal' :
        print('Le probleme n est pas solvable')
    else :
        print('le probleme est solvable')
        valeur_par_f_et_s=x.value
        label=[]
        r1 = range(N)
        barWidth = 0.8/q

        y_liste =[[np.array([valeur_par_f_et_s[i,k*q+j]*L[k*q+j] for k in range(N)]) for j in range(q)] for i in range(m)]
        for i in range (m):
            label += ['choix'+str(i)]
            for j in range(q):
                r=[x + j*barWidth for x in r1]
                y=y_liste[i][j]
                z=np.array([0 for k in range(N)])
                for k in range(i):
                    z = z + y_liste[k][j]
                if j==0:
                    plt.bar(r, y, color = colorNames[i], bottom=z, width = barWidth,edgecolor = ['black' for i in y], linewidth = 1, label='choix'+str(i+1))
                else:
                    plt.bar(r, y, color = colorNames[i], bottom=z, width = barWidth,edgecolor = ['black' for i in y], linewidth = 1)
        fermes = [ 'F'+str(k+1) for k in range(N)]
        plt.xticks([r + 0.8*(1-2./q) for r in r1], fermes)
        plt.gca().set_ylim(0,surface_max+0.2)

        plt.legend(loc='best')
        plt.title('la contraintes est a  {:.2f}' .format(c))
        plt.show()
        plt.clf()
        print("la valeur de l'objectif est a {:.3f}".format(result))


def affichage_rassembles(x,prob,result,rassemblement,c,infos):
    q,m,L=infos[1],infos[2],infos[3]
    print('\n la contraintes est a '+str(c))

    if prob.status!='optimal' :
        print('Le probleme n est pas solvable')
    else :
        print('le probleme est solvable')
        NR=len(rassemblement)
        valeur_par_f_et_s=x.value
        valeur_rassemblee = [[0 for j in range(m)] for i in range(NR*q)]
        surface_rassemblee_max=0
        for i in range(NR):
            for k in range(q):
                for j in range(m):
                    valeur_rassemblee[i*q+k][j] = sum([L[l*q+k]*valeur_par_f_et_s[j][l*q+k] for l in rassemblement[i]])
                surface_rassemblee_max=max(surface_rassemblee_max,sum([L[l*q+k] for l in rassemblement[i]]))
        label=[]
        r1 = range(NR)
        barWidth = 0.8/q

        y_liste =[[np.array([valeur_rassemblee[k*q+j][i] for k in range
```

```
(NR)]) for j in range(q)] for i in range(m)]
        for i in range (m):
            label += ['choix'+str(i)]
            for j in range(q):
                r=[x + j*barWidth for x in r1]
                y=y_liste[i][j]
                z=np.array([0 for k in range(NR)])
                for k in range(i):
                    z = z + y_liste[k][j]
                if j==0:
                    plt.bar(r, y, color = colorNames[i], bottom=z, width = barWidth,edgecolor = ['black' for i in y], linewidth = 1, label='choix'+str(i+1))
                else:
                    plt.bar(r, y, color = colorNames[i], bottom=z, width = barWidth,edgecolor = ['black' for i in y], linewidth = 1)
        fermes = [ 'F'+str(k+1) for k in range(NR)]
        plt.xticks([r + 0.8*(1-2./q) for r in r1], fermes)
        plt.gca().set_ylim(0,surface_rassemblee_max+0.2)

        plt.legend(loc='best')
        plt.title('la contraintes est a  {:.2f}' .format(c))
        plt.show()
        plt.clf()
        print("la valeur de l'objectif est a {:.3f}".format(result))

#affichage des pertes, puissance et gain

def opt(ind,sol):
    return(np.argmax(ind[sol,:]))

def perte(ind,sol):
    k = max(ind[sol,:])
    return(k-ind[sol,:])

def gain(ind,sol,k):
    return(ind[sol,:]-ind[sol,k])

def puissance(Obj,contr,sol):
    k=opt(Obj,sol)
    Perte=perte(Obj,sol)
    Gain=gain(contr,sol,k)
    Puissance=[]
    for i in range(len(Obj[sol,:])):
        if Perte[i]==0:
            if Gain[i]==0:
                Puissance+=[0]
            elif Gain[i]<0:
                Puissance+=[-inf ]
            else :
                Puissance +=[+inf]
        else :
            Puissance+=[Gain[i]/Perte[i]]
    return(Puissance)

def affichage_infos(Obj,contr,sol):
    k=opt(Obj,sol)
    Perte=perte(Obj,sol)
    Gain=gain(contr,sol,k)
    Puissance=puissance(Obj,contr,sol)
    print('            Perte    Gain      Puissance')
    for i in range(len(Obj[sol,:])):
```

```
        print("choix{}     {:03.2f}     {:03.2f}      {:03.2f}".format(i, Perte[i],Gain[i],Puissance[i]))

def affichage_infos_tout_sols(Obj,contr,infos):
    q=infos[1]
    for i in range(q):
        print('\n ############ \n Sol'+str(i+1)+'\n ############')
        affichage_infos(Obj,contr,i)

# In[ ]:
# Resolution et affichage dynamique %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

# Solve le probleme 'prob' pour un contrainte qui va de 0 a 'fin_contrainte' avec 'nb_points' points
# et affiche les affectations a chaque etapes si 'barplot=True'
def resolution_dynamique(prob,x,Parametre,fin_contrainte,nb_points, infos,regroupement,barplot=False):
    N,q,m,L,F=infos[0],infos[1],infos[2],infos[3],infos[5]
    resultats_objectif=[]
    affectation_sols=[[[] for k in range(m)] for i in range(N*q)]
    liste_contraintes=np.linspace(0,fin_contrainte+2./nb_points, nb_points)
    for c in liste_contraintes:
        Parametre.value=([c for k in range(len(regroupement))])
        result = prob.solve()
        if barplot:
            affichage_rassembles(x,prob,F,regroupement,c,infos) # affichage en barplot !!! choisir la resolution !!!
        if prob.status=='optimal':
            resultats_objectif+=[result]
            xv=x.value
            for k in range(m):
                for i in range(N*q):
                    affectation_sols[i][k]+=[xv[k][i]*L[i]]
        else:
            resultats_objectif+=[0]
            for k in range(m):
                for i in range(N*q):
                    affectation_sols[i][k]+=[0]
    return(liste_contraintes,resultats_objectif,np.array(affectation_sols))

# Affiche la valeur de l'objectif en fonction de la contrainte
def affichage_objectif_contrainte(liste_contraintes,resultats_objectif):
    plt.plot(liste_contraintes,resultats_objectif,'-.',label='objectif') #affichage
    plt.title('Objectif en fonction de la contrainte')
    plt.xlabel('Contrainte')
    plt.ylabel('Objectif')
    plt.show()
    plt.clf()

# Affiche l'affectation des sols les fermes de 'unite' en fonction de la contrainte
def affichage_sol_contrainte(liste_contraintes,affectation_sols,unite, infos):
    N,q,m=infos[0],infos[1],infos[2]
    fig,ax = plt.subplots(q,figsize=(8,max(q*2.3,5)),dpi=max(q*100,150))
    fig.suptitle('Surfaces en fonction de la contrainte pour les
```

```
        differents sols des fermes '+str(unite))
    for i in range(q):
        for k in range(m):
            ax[i].plot(liste_contraintes,sum(affectation_sols[ferme*q+i
    ][k] for ferme in unite),'-.',label='Choix'+str(k),color=colorNames
    [k])
        if i==N*q-1:
            ax[i].set_xlabel('Contraintes')
        ax[i].set_ylabel('Sol '+str(i+1))
        if i==0:
            ax[i].legend(loc='right')
    plt.show()
    plt.clf()


# In[ ]:
#creation de contraintes
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

def contrainte_fixe_unifiee(x,constraints,regroupement,ind,c,infos):
    return(constraints + [resultat_rassembles(x,ind,regroupement,infos)
     >= [c for k in range(len(regroupement))] ])

def contrainte_fixe_specialisee(x,constraints,regroupement,ind,vecteur,
    infos):
    return(constraints + [resultat_rassembles(x,ind,regroupement,infos)
     >= vecteur ])

def contrainte_parametrique(x,constraints,regroupement,ind,infos):
    Parametre= cp.Parameter(len(regroupement),nonneg=True)
    constraints = constraints + [resultat_rassembles(x,ind,regroupement
    ,infos) >= Parametre ]
    return(Parametre,constraints)
```

Voici le programme qui permet de créer un scénario.

Le programme scenario_exemple_LUA.py

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Jun  8 11:35:05 2021

@author: leon
"""
import cvxpy as cp
import numpy as np
from math import inf
from numpy.linalg import norm
from cvxpy.atoms.affine.binary_operators import multiply
import modele_LUA_infos as ml


#
    ##############################################################################
####################Donnee des territoires
    ####################################
#
    #############################################################################

```

```
#cartographie des sols ([F1S1,F1S2, F1S3,...],[F2S1,F2S2,...],[.....,FNSq])
cartographie_fermes=[[1,1,2],
                     [1,2,3]]

# grandeur des donnees
m = 3 #nb de choix
F,infos=ml.calcul_informations_territoire(cartographie_fermes,m)
N=infos[0] # nb de fermes
q=infos[1] #nb de sols
L=infos[3]
Somme_sur_sol=np.ones(m)


#rassemblement des territoires
R=[[k for k in range(N)]] #il y a une region qui contient les 6 fermes
SR=[[0,1]] #il y a 2 sous regions
F=F # La liste des fermes



#################################################################################tables d'indicateurs#####################################
#################################################################################
#la fonction objectif
Obj = np.array([[0   ,1  ,2],  #les lignes sont les sols, les colonnes sont les choix
                [0.1,1  ,3],
                [0.2,2  ,0.5]])
Mobj=ml.Mind(Obj,infos)

#autres indicateurs
Riz = np.array([[1   ,0.75  ,0],
                [0.2,1  ,0],
                [0.5,0  ,0.5]])

Grain = np.array([[1   ,2  ,0],
                  [0.1,3  ,0],
                  [0.2,5  ,0]])

#################################################################################creation du territoire#####################################
#################################################################################
#################################################################################NE PAS TOUCHER#########################################

x = cp.Variable((m,N*q)) #definition des variables de decisions
objective = cp.Maximize(cp.sum(multiply(x,Mobj)@L)) #la fonction objetif
constraints = [0 <= x, Somme_sur_sol@x ==1]  #les contraintes de surfaces
c=0 #valeur initiale de la contraintes
```

```
#
    ##############################################################################
#####################La contrainte parametrique
    ################################
#
    ##############################################################################

#les parametres de la contrainte parametrique
regroupement=R #echelle a laquelle on impose la contrainte
indicateur_contraint = Riz

Parametre,constraints=ml.contrainte_parametrique(x,constraints,
    regroupement, indicateur_contraint,infos) #les contraintes du
    scenario

#parametre d'affichage pour la contrainte parametrique
regroupement_affichage=F #echelle a laquelle on souhaite afficher les
    resultats
barplot = False #Veut-on afficher les barplot a chaque etapes ?
fin_contrainte = 10  #la liste de contrainte va de 0 a 'fin_contrainte'
nb_points = 300 #le nb de points de la liste de contraintes


#
    ##############################################################################
#####################Les autres contraintes
    ##################################
#
    ##############################################################################
#constraints=contrainte_fixe_specialisee(x,constraints, regroupement,
    ind, vecteur,infos)
#constraints = contrainte_fixe_unifiee(x,constraints, regroupement, ind
    , c,infos)


# In[ ]:
#resolution et affichage
###NE PAS TOUCHER LE DEBUT###

prob = cp.Problem(objective, constraints)
Parametre.value=([c for k in range(len(regroupement))])
result = prob.solve()

liste_contraintes,resultats_objectif,affectation_sols=ml.
    resolution_dynamique(prob,x,Parametre,fin_contrainte,nb_points,
    infos,regroupement,barplot=barplot)
ml.affichage_objectif_contrainte(liste_contraintes,resultats_objectif)
for unite in regroupement_affichage:
    ml.affichage_sol_contrainte(liste_contraintes,affectation_sols,
    unite,infos)
ml.affichage_infos_tout_sols(Obj,Riz,infos)

###AJOUTER LES AFFICHAGE VOULUS ICI###
```