

Approximation du comportement aléatoire d'un oscillateur non linéaire par chaos polynomial multi-éléments

Sylvain Dubreuil, Sébastien Baguet

▶ **To cite this version:**

Sylvain Dubreuil, Sébastien Baguet. Approximation du comportement aléatoire d'un oscillateur non linéaire par chaos polynomial multi-éléments. 22e Congrès Français de Mécanique (CFM2015), Aug 2015, Lyon, France. hal-01192968

HAL Id: hal-01192968
https://hal.science/hal-01192968

Submitted on 16 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approximation du comportement aléatoire d'un oscillateur non linéaire par chaos polynomial multi-éléments

S. DUBREUIL[a], S. BAGUET[a]

a. Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621 Villeurbanne, France, sylvain.dubreuil@insa-lyon.fr

Résumé :

Cette étude s'intéresse à la mise en œuvre d'approximations par chaos polynomial multi-éléments sur un exemple d'oscillateur non linéaire excité par un processus aléatoire au voisinage d'un point de bifurcation. Une réduction de modèle par décomposition en valeurs singulières est utilisée et l'influence de la bifurcation sur les variables réduites est discutée. Le calcul des coefficients des approximations de chaque variable réduite est effectué par régression. Deux méthodes classiques sont comparées, la construction numériques de polynômes spécifiques ou une transformation iso-probabiliste et l'utilisation de polynômes d'Hermite.

Abstract :

This study deals with the construction of stochastic process approximation by multi-element generalized polynomial chaos. More precisely we study a non linear oscillator subject to a random input in the neighborhood of a bifurcation point. A reduction of model by singular value decomposition is first applied and the influence of the bifurcation on the reduced variables is exposed. Then, the computation of polynomial approximations coefficients for each reduced variables is achieved by a regression approach. Two classical methods for the construction of the polynomial basis are also compared.

Mots clefs : oscillateur de Duffing, décomposition en valeurs singulières, chaos polynomial multi-éléments, régression

1 Introduction

Nous nous intéressons à l'oscillateur non linéaire de Duffing. L'équation du mouvement de cet oscillateur est donnée par l'équation différentielle Eq. (1).

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -2\mu\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \omega_0^2(u + \alpha u^3) + f(t) \tag{1}$$

Dans la suite, les paramètres de l'oscillateur sont considérés déterministes et égaux à : $\omega_0 = 1.0$, $\mu = 0.05$, $\alpha = 0.25$. Nous étudions la réponse de cet oscillateur sur l'intervalle $[0, t_f]$ avec $t_f = 400s$.

L'excitation utilisée est harmonique balayée (balayage linéaire) sur l'intervalle $[0, t_1]$ puis harmonique de pulsation Ω_f sur $]t_1, t_f]$, soit

$$f(t) = \begin{cases} A\cos(\Omega(t)) \text{ si } t \in [0, t_1] \\ A\cos(\Omega_f + \phi) \text{ si } t \in]t_1, tf] \end{cases}$$

avec $\Omega(t) = -0.002t + \Omega_0$, t_1 est choisi de sorte que $\Omega_f = 1.31 rad.s^{-1}$ et ϕ est choisi afin d'assurer la continuité en $t1$. Dans ce qui va suivre nous nous intéressons aux variations de l'amplitude A et au phénomène de saut qu'elles engendrent. Afin de l'illuster, la figure 1 i) présente les réponses fréquentielles de l'oscillateur pour deux valeurs de A, tandis que la figure 1 ii) donne les réponses temporelles associées (les conditions initiales sont choisies de sorte que la solution obtenue à Ω_0 soit celle de plus faible amplitude). Nous supposons à présent que l'amplitude de l'excitation est un processus aléatoire

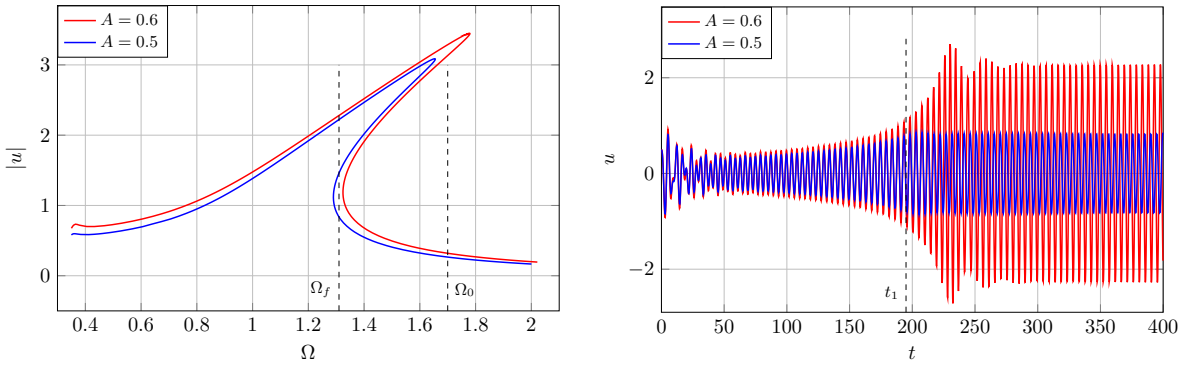


FIGURE 1 – Réponse de l'oscillateur de Duffing pour deux amplitudes d'excitation, i) réponses fréquentielles, ii) réponses temporelles

gaussien de moyenne $\bar{A}(t) = 0.5$, de fonction d'autocorrelation exponentielle carré, d'écart type σ_A et de longueur de corrélation l_A. De façon classique ce processus est approximé par sa décomposition de Karhunen-Loève tronquée à n termes :

$$A(t, \xi) \approx \bar{A}(t) + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) \xi_i \tag{2}$$

Avec λ_i et $\psi_i(t)$ les valeurs et vecteurs propres de la fonction d'autocorrélation. Dans le cas d'un processus gaussien $\xi = (\xi_i,\ i = 1, \cdots, n)$ est un vecteur aléatoire gaussien centré réduit de composantes indépendantes.

Nous cherchons donc une approximation de la réponse $u(t, \xi)$ de l'oscillateur de Duffing soumis à l'excitation aléatoire qui vient d'être présentée. La discrétisation temporelle pouvant être très fine dans ce genre de problème nous commençons par une décomposition en valeurs singulières (SVD) afin de réduire le nombre de variables aléatoires à approcher. Cette approche a été proposée à plusieurs reprises dans le cadre d'approximation de processus aléatoires, par exemple dans [1].

2 Décomposition en valeurs singulières

Nous supposons que l'intégration temporelle de l'équation Eq : (1) conduit à une discrétisation de l'intervalle $[t, t_f]$ de taille N. Notons $\boldsymbol{u}^{(r)}$ le vecteur de taille N obtenu par intégration numérique

de l'équation (1) pour une réalisation r de l'excitation, $r \in [1, R]$, $\boldsymbol{u}_0 = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} \boldsymbol{u}^{(r)}$ la moyenne empirique et $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(r)} = \boldsymbol{u}^{(r)} - \boldsymbol{u}_0$. Les réalisations centrées $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(r)}$ sont alors assemblées dans la matrice $\tilde{\boldsymbol{U}} = (\tilde{\boldsymbol{u}}^{(1)}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{u}}^{(R)}) \in \mathbb{M}^{N\times R}$. La décomposition en valeurs singulières de la matrice $\tilde{\boldsymbol{U}}$ conduit à $\tilde{\boldsymbol{U}} = \sum_{i=1}^{R} \sigma_i \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{z}_i$ où σ_i sont les R valeurs singulières classées par ordre croissant, $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^N$ sont les vecteurs singuliers à gauche et $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^R$ les vecteurs singuliers à droite correspondants. Cette décomposition est tronquée à un nombre R_1 de modes, conduisant aux approximations,

$$\boldsymbol{u}(\xi) \approx \hat{\boldsymbol{u}}_{R_1}(\xi) = \boldsymbol{u}_0 + \sum_{i=1}^{R_1} \sigma_i \boldsymbol{v}_i z_i(\xi)$$

L'approximation est donc composée de deux étapes :

1. Choisir un nombre de vecteurs singuliers $\boldsymbol{v}_i$ suffisants pour représenter la réponse
2. Construire une approximation de chaque variable aléatoire scalaire $z_i(\xi)$.

Dans cette étude, nous nous focalisons sur la deuxième étape et en particulier sur l'influence de la non linéarité sur les variables $z_i(\xi)$. Afin d'illustrer l'allure des fonctions $z_i(\xi)$, nous allons dans un premier temps limiter la dimension aléatoire du problème à $n = 1$ *i.e.* la décomposition Eq : (2) est tronquée au premier terme (bien entendu cette troncature ne suffit pas à une bonne représentation du processus aléatoire modélisant l'amplitude mais est suffisante pour illustrer les difficultés engendrées par la non linéarité). Ce problème modèle comporte donc une unique variable aléatoire ξ, de loi normale standard. Nous illustrons à présent l'allure des 5 premières fonctions $z_i(\xi)$ obtenues par un tirage de Monte Carlo de taille $R = 30$. La figure 2 présente ces fonctions calculées en 500 points répartis linéairement sur l'intervalle $[-3, 3]$ (ces résultats serviront de référence).

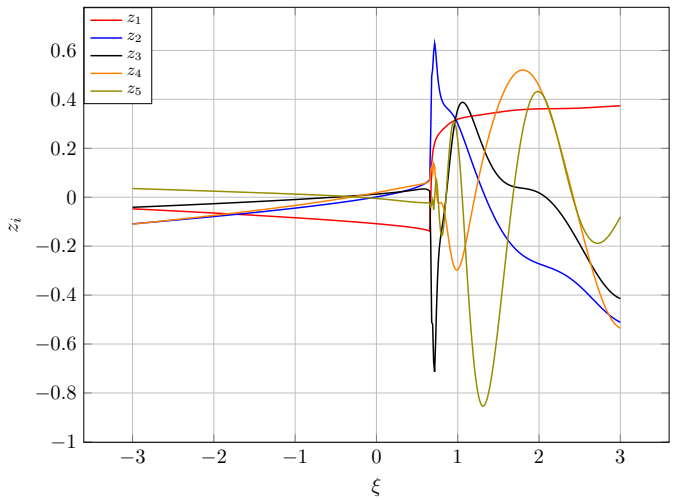


FIGURE 2 – Allure des 5 premières variables aléatoires z_i obtenues avec $R = 30$

La figure 2 montre que le phénomène de saut visible dans le domaine temporel se traduit par une discontinuité (au voisinage de $\xi = 0.65$) dans la base réduite obtenue par SVD. Avant la discontinuité, le comportement des z_i semble faiblement non linéaire (l'effet d'échelle sur la figure (2) pourrait laisser penser que le comportement est linéaire mais ce n'est pas le cas), après la discontinuité, le comportement est clairement non linéaire. On remarquera également que plus la variable est associée à un numéro de mode élevé plus la non linéarité de son comportement est importante.

L'enjeu est à présent d'approximer ces variables aléatoires. Il semble évident qu'une approximation

polynomiale sur le domaine de variation complet de ξ n'est pas pertinente. Nous utilisons donc une approche permettant le découpage du domaine.

3 Approximation par chaos polynomial multi-éléments

3.1 Méthodologie

Nous présentons la méthode ME-gPC (Multi-Elements generalized Polynomial Chaos) proposée dans [2] dans le cas du problème précédent (dimension aléatoire égale à 1), la généralisation aux dimensions supérieures étant immédiate.

Soit, X est une variable aléatoire du second ordre, à valeur réelle, de densité $p_X(x)$ définie sur un domaine $B = [b_{inf}, b_{sup}]$. L'idée est alors d'introduire la décomposition D de B tel que :

$$D = \begin{cases} B_k = [b_{inf}^k, b_{sup}^k] \\ B = \cup_{k=1}^K B_k \\ B_{k_1} \cap B_{k_2} = \emptyset \text{ si } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

Les variables aléatoires indicatrices I_{B_k} correspondant à chaque sous domaine B_k sont alors définies :

$$I_{B_k} = \begin{cases} 1 \text{ si } X \in B_k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $Pr(I_{B_k} = 1) = \int_{B_k} p_X(x)\mathrm{d}x$. De nouvelles variables aléatoires X_k sont alors introduites, ayant pour densités de probabilité conditionnelles,

$$\hat{p}_{X_k}(x_k | I_{B_k} = 1) = \frac{p_X(x_k)}{Pr(I_{B_k} = 1)}$$

sur chaque sous domaine B_k.

Une approximation polynomiale locale des réponses z_i est alors construite sur chaque sous domaine (éléments) B_k. Pour cela il est nécessaire de construire les familles de polynômes orthogonaux à chaque densité conditionnelle $\hat{p}_{X_k}(x_k | I_{B_k} = 1)$. Différentes méthodes numériques permettent la construction de ces polynômes. En suivant le travaux de [2], nous utilisons la procédure détaillée dans [4] (procédure de Stieltjes) et implémentée dans [5]. On note $H_i^k(\xi_k)$ les familles de polynômes ainsi obtenues. Les approximations sont donc, sur chaque élément B_k :

$$z_i(\xi_k) \approx \sum_{i=0}^{P_k} a_{i,k} H_i^k(\xi_k) \tag{3}$$

avec $a_{i,k}$ les coefficients à déterminer et P_k le nombre de polynômes utilisés pour le sous domaine B_k. Le calcul des coefficients $a_{i,k}$ est effectué par quadrature dans [2]. Afin de réutiliser l'échantillon ayant servi à la SVD, nous calculons ces coefficients par régression [6]. Le calcul des coefficients du chaos polynomial par régression a fait l'objet de nombreuses études, dans la suite nous comparons les résultats obtenus par la méthode des moindres carrées ordinaire (MCO) et par la méthode LARS-LASSO ([7]) proposée dans [8] et implémentée dans [9]. (Notons également que l'approche par régression per-

met d'envisager des approches adaptatives différentes de celle proposée dans [3] en s'appuyant sur les résultats de régression par morceaux.)

Nous proposons également une alternative dans la mise en oeuvre de la méthode précédente. Celle-ci consiste à effectuer des transformations iso-probabilistes entre les lois conditionnelles sur chaque sous élément et la loi normale standard. En notant F_{X_k} la fonction de répartition conditionnelle de X_k et Φ la fonction de répartition de la loi normale standard, un échantillon x_k distribuée selon la loi de X_k est alors transformé en un échantillon u_k de loi normale standard par,

$$u_k = \Phi^{-1}(F_{X_k}(x_k|I_{B_k} = 1))$$

Cette étape remplace la construction de polynômes orthogonaux à chaque loi conditionnelle, les polynômes d'Hermite (orthogonaux par rapport à la loi normale standard) étant ensuite utilisés sur chaque sous ensemble B_k. Cette alternative peut être intéressante lorsque l'ordre des polynômes permettant une approximation correcte est élevé. En effet, la construction de polynômes orthogonaux devient numériquement de plus en plus coûteuse avec l'ordre des polynômes à construire (dans [2], il est conseillé de ne pas dépasser l'ordre 5).

3.2 Premiers résultats

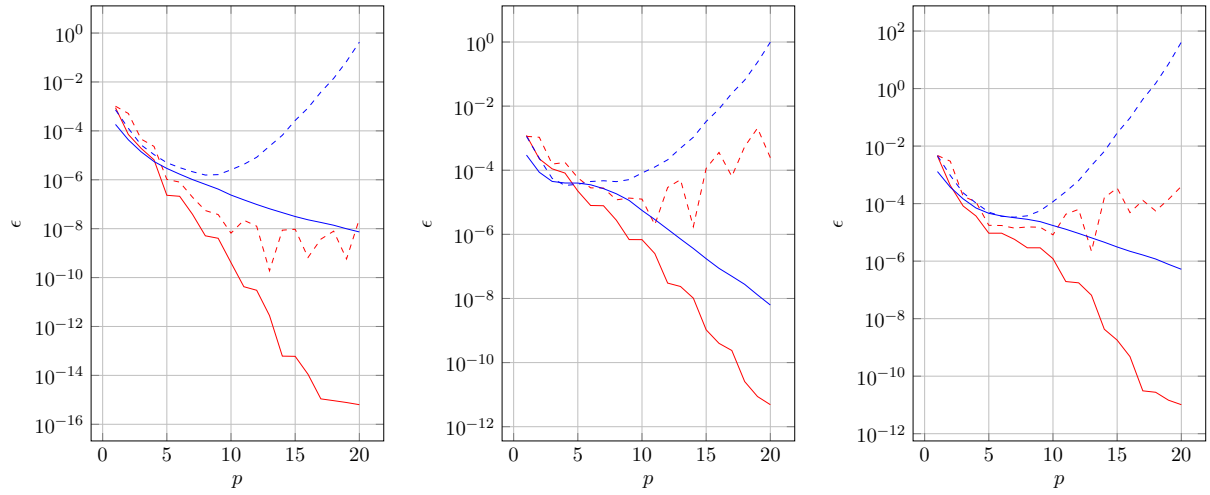
Une des difficultés concerne à présent le partitionnement du domaine. Dans notre cadre, il semble que la discontinuité soit directement liée au phénomène de saut. Dans un premier temps le domaine de définition de ξ va donc être découpé en 2 sous domaines $B_1 = [-\infty, \xi^\star[$ $B_2 = [\xi^\star, \infty]$. Afin de déterminer le point $\xi^\star$ nous utilisons l'échantillon $\boldsymbol{u}(\xi)^{(r)}$ $r = 1, \cdots, R$ utilisé pour le calcul de la SVD et nous définissons, $\xi^\star = \underset{r=1,\cdots,R}{\max}(\xi^{(r)},\ \boldsymbol{u}(\xi^{(r)}) < s)$ avec s un seuil caractérisant le saut, ici nous choisissons $s = 2$. Au vu du paramétrage de cet exemple, la détermination du point $\xi^\star$ est peu sensible à la taille de l'échantillon et nous trouvons $\xi^\star \approx 0.65$ dès $R = 30$.

Nous discutons dans un premier temps les résultats obtenus en caculant les coefficients des approximations polynomiales par MCO sur un plan d'expérience (PEX) de taille $R = 200$ (obtenu par Monte Carlo), 134 points appartiennent à $]-\infty, \xi^\star[$ et 66 à $[\xi^\star, \infty[$.

Les figures 3 et 4 présentent l'evolution des erreurs quadratiques calculées sur le PEX et sur le plan test (les 500 résultats servant de référence) en fonction de l'ordre p, de l'approximation polynomiale. Les résultats sur le PEX sont tracés en traits pleins, ceux sur le plan test en traits pointillés. Les résultats obtenus par la construction de polynômes orthogonaux aux lois conditionnelles sont tracés en bleu, ceux obtenus par transformation iso-probabiliste en rouge. La figure 3 donne les résultats concernant les approximations des variables z_1, z_3 et z_5 sur $]-\infty, \xi^\star[$, la figure 4, ceux concernant les mêmes variables, sur $[\xi^\star, \infty[$. Précisons enfin, que sur tous les exemples présentés, nous nous sommes assurés de la convergence de la méthode de construction de polynômes orthogonaux.

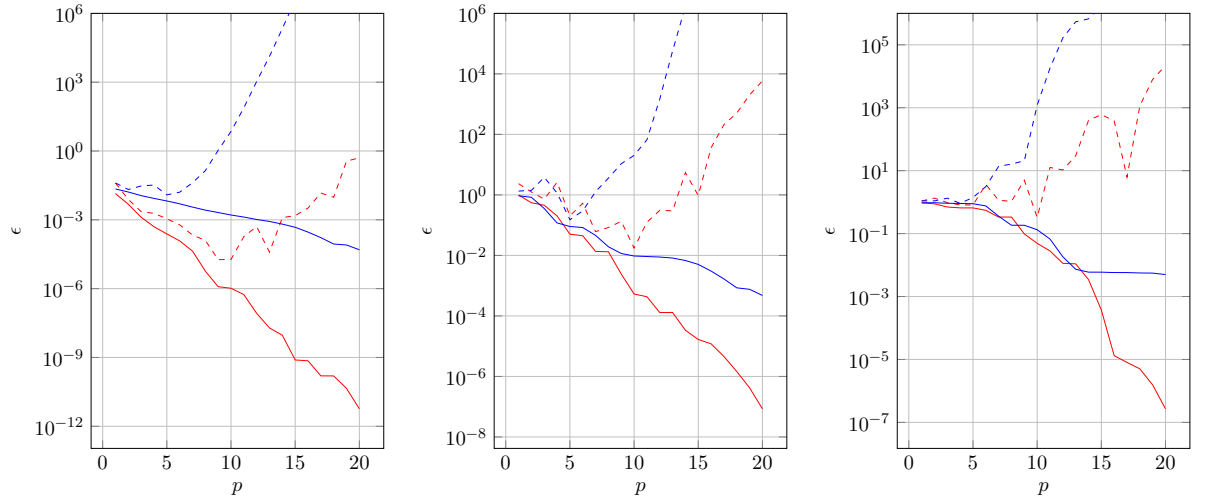
Ces résultats appellent plusieurs remarques :

- Lorsque le degré de l'approximation polynomial est faible (entre 1 et 5) les deux approches donnent des résultats sensiblement équivalents avec un léger avantage pour l'approche par construction de polynômes orthogonaux.
- Pour $p > 5$, on note que l'approche par transformation iso-probabiliste est clairement plus performante.



i) ii) iii)

FIGURE 3 – Erreur quadratique dans l'approximation des variables i) z_1, ii) z_3 et iii) z_5 sur $]-\infty, \xi^\star[$. En rouge les résultats obtenus par calcul des polynomes orthogonaux, en bleu ceux obtenus par transformation iso-probabiliste. Résultats sur le PEX en traits pleins, résultats sur le plan test en pointillés.



i) ii) iii)

FIGURE 4 – Erreur quadratique dans l'approximation des variables i) z_1, ii) z_3 et iii) z_5 sur $[\xi^\star, \infty[$. En rouge les résultats obtenus par calcul des polynomes orthogonaux, en bleu ceux obtenus par transformation iso-probabiliste. Résultats sur le PEX en traits pleins, résultats sur le plan test en pointillés.

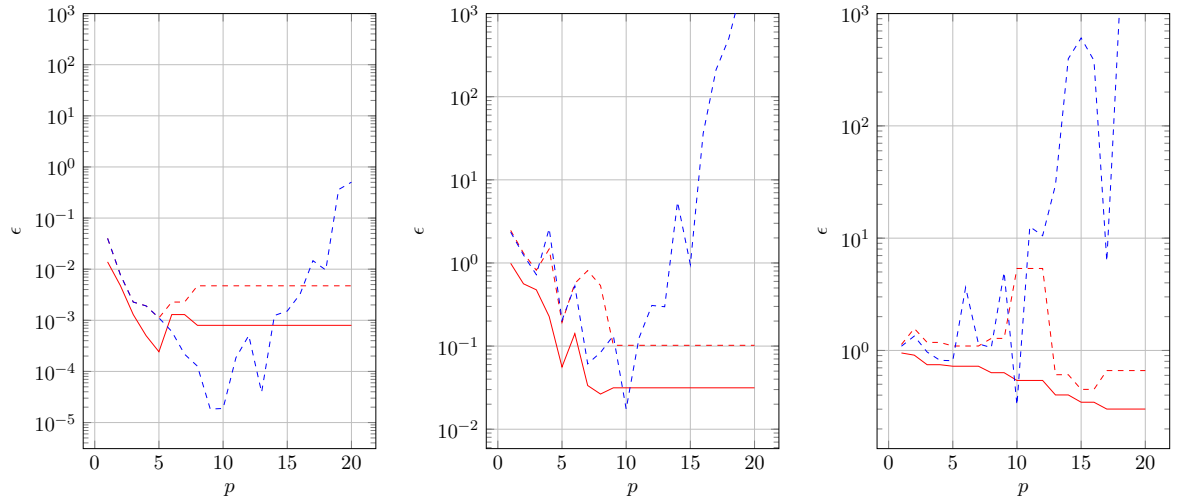


FIGURE 5 – Erreur quadratique dans l'approximation des variables i) z_1, ii) z_3 et iii) z_5 sur $[\xi^\star, \infty[$ par l'approche transformation iso-probabiliste. En bleu les résultats obtenus par MCO en rouge ceux obtenus par LARS-LASSO. Résultats sur le PEX en traits pleins, résultats sur le plan test en pointillés.

– Les coefficients étant calculés par MCO, la comparaison entre les résultats du PEX et ceux du plan test illustre le phénomène classique de *surapprentissage*. Toutefois, il est intéressant de voir que, sur tous les exemples présentés, celui-ci intervient pour un degré plus faible par la méthode de construction de polynômes orthogonaux. (Notons également que cette remarque justifie l'utilisation de la méthode LARS-LASSO dans la suite).
– Les niveaux d'erreur quadratique atteints, sur le plan test, sur l'intervalle $]-\infty, \xi^\star[$ sont satisfaisants. En revanche, les approximations sur $[\xi^\star, \infty[$ sont nettement moins précises (en particulier pour z_3 et z_5). Ceci montre qu'augmenter le degré de l'approximation ne suffit pas à atteindre des résultats corrects et qu'un découpage de cet intervalle devrait être envisagé.

Comme dit précédemment, le problème du *surapprentissage* peut être limité par la pénalisation du problème aux moindres carrées. La méthode LASSO propose une pénalisation par la norme $l1$ des coefficients. Si l'on appelle Φ la matrice des régresseurs (dans notre cas chaque colonne correspond à l'évaluation d'un polynôme sur le PEX) et $\mathbf{z}_i$ le vecteur qui contient les réponses z_i aux points du PEX, la méthode LASSO consiste à résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{w \in \mathbb{R}^{p+1}} ||\mathbf{z}_i - \Phi w||_2^2 + \lambda ||w||_1$$

pour différentes valeurs du paramètre α. Cette méthode permet donc d'obtenir différentes approximations utilisant plus ou moins de régresseurs selon la valeur du paramètre λ. Dans [8] un critère appelé *Leave One Out corrigé* est proposé pour le choix de la meilleure approximation dans le cadre d'approximation par chaos polynomial. Nous appliquons à présent cette méthode aux exemples précédents en nous focalisant sur l'approche par transformation iso-probabiliste sur l'intervalle $[\xi^\star, \infty[$. La figure 5 présente l'évolution de l'erreur quadratique en fonction de l'ordre de l'approximation polynomiale. Dans le cas de la méthode LARS-LASSO, l'ordre p correspond au plus haut degré parmi les régresseurs candidats. Nous donnons ces résultats sur le PEX (trait plein rouge) pour la méthode LARS-LASSO, ainsi que sur le plan test pour les deux méthodes.

Comme le montre la figure 5, l'application de la méthode de la méthode LARS-LASSO permet de

s'affranchir du problème de *surapprentissage* qui apparaît à partir de $p = 10$ par MCO et est donc pertinente dans notre cadre (résultat sur la plan test). Notons également que l'erreur quadratique sur le PEX est constante à partir de $p = 9$ pour les variables z_1 et z_3 et quasiment constante à partir de $p = 12$ pour la variable z_5. Ceci confirme, d'une part la capacité de la méthode LARS-LASSO à sélectionner les regresseurs les plus pertinents parmi une base de grande dimension et, d'autre part, qu'une approximation polynomiale sur tout le domaine $[\xi^\star, \infty[$ n'est pas performante (au vu des niveaux d'erreur atteint sur le PEX en particulier pour z_3 et z_5) et qu'un nouveau partitionnement est nécessaire.

4 Conclusions et perspectives

Le but de cette étude était de mettre en oeuvre la méthode d'approximation par chaos polynomial multi-éléments pour l'étude d'un oscillateur non linéaire. Nous avons dans un premier temps réduit le modèle par une décomposition en valeurs singulières puis construit une approximation polynomiale multi-éléments pour chaque variable aléatoire réduite. Le partitionnement du domaine aléatoire est justifié par la discontinuité provoquée par le comportement de l'oscillateur non linéaire au voisinage d'un point de bifurcation (phénomène de saut dans le domaine temporel). Deux alternatives sont étudiées pour la construction de la base polynomiale. La première consiste à construire numériquement des polynômes orthogonaux à la mesure de l'élément considéré, la seconde utilise une transformation iso-probabiliste pour se ramener au cas d'une variable aléatoire normale et à l'utilisation de polynômes d'Hermites. Dans les deux cas, les coefficients des approximations sont calculés par régression.

Les résultats présentés par les figures 3 et 4 montrent que la seconde approche semble plus performante lorsque le degré des approximations est élevé (supérieur à 5). De plus, nous nous sommes assurés de la convergence de la méthode de construction numérique de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure quelconque (même pour les ordres les plus élevés) celle-ci ne semble donc pas être responsable de la diminution des performances observées. Ce résultat doit faire l'objet d'approfondissements afin d'être, éventuellement, généralisé à d'autres exemples et d'autres méthodes de calcul des coefficients (quadrature).

Le calcul des coefficients par régression à l'aide de la méthode LASSO-LAR semble pertinent dans le cadre de l'approche multi-éléments. Sur ce point, la perspective principale de ce travail concerne la mise en place d'une méthode adaptative permettant de raffiner le partitionnement du domaine mais également d'optimiser la position des nouveaux points d'échantillonnage.

Références

[1] G. Blatman, B. Sudret. *Sparse polynomial chaos expansions of vector-valued response quantities*, 11th International Conference on Structural Safety and Reliability. ICOSSAR 2013, Taylor & Francis Group, 3245-3252, 2014

[2] X. Wan, G.E. Karniadakis. *Beyond Wiener-Askey Expansions : Handling Arbitrary PDFs*, Journal of Scientific Computing, 27, 455-464, 2006

[3] X. Wan, G.E. Karniadakis. *An adaptive multi-element generalized polynomial chaos for stochastic differential equations*, Journal of Computational Physics, 209, 2005, 617-642

[4] W. Gautschi. *Othogonal polynomials-Constructive theory and applications*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 12&13, 61-76,1985

[5] W. Gautschi. *Orthpol-a package of routines for generating orthogonal polynomials and gauss-type quadrature rules.*, ACM Transaction on Mathematical Software, 20(1), 21-62, 1994

[6] M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire .*Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression*, European Journal of Computational Mechanics, 15(1-3), 81-92, 2006

[7] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, R. Tibshirani. *Least Angle Regression*, The Annals of Statistics, 32(2), 407-499, 2004

[8] G. Blatman, B. Sudret. *Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression*, Journal of Computational Physics, 230, 2345-2367, 2010

[9] OpenTURNS, *OpenTURNS : Reference Guide*