



HAL
open science

Some factors of numbers of the form $b^n + / - 1$ found using ECM with new classes of curves

François Morain

► **To cite this version:**

François Morain. Some factors of numbers of the form $b^n + / - 1$ found using ECM with new classes of curves. 2022. hal-03437714v2

HAL Id: hal-03437714

<https://inria.hal.science/hal-03437714v2>

Preprint submitted on 31 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SOME FACTORS OF NUMBERS OF THE FORM $b^n \pm 1$ FOUND USING ECM WITH NEW CLASSES OF CURVES

F. MORAIN

ABSTRACT. In this note, we list factors of numbers of the form $b^n \pm 1$ found using GMP-ECM and new classes of elliptic curves.

The elliptic curve method of factorization (ECM) [3] is one of the powerful algorithms able to find moderate size factors of large integers. The following tables list some unknown factors of composite numbers $b^n \pm 1$ for values of $13 \leq b \leq 10^4$, full tables of which are managed by Jonathan Crombie (continuing the work of Brent, Montgomery and te Riele, see <http://myfactors.mooo.com/>). This is an extension of the Cunningham project [1] for $2 \leq b \leq 12$. All the factors were found using GMP-ECM [6] (with the algorithms described in [5]).

More details on the computations and curves used are given in [4].

Format of the tables: pretty straightforward. Remember that $b, n+$ (resp. $b, n-$) designates $b^n + 1$ (resp. $b^n - 1$). The last column contains a time stamp. For instance, 210919 should be decoded as 21/09/19. Numbers are sorted by increasing date of discovery. More factorizations will be added as time goes by.

The last tables give factors found with the standard GMP-ECM using the traditional Suyama curves (labeled with $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) and the family Suyama-11 found by A. Kruppa [2].

REFERENCES

- [1] J. Brillhart, D. H. Lehmer, J. L. Selfridge, B. Tuckerman, and S. S. Wagstaff, Jr. *Factorizations of $b^n \pm 1$, $b = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$ up to high powers*. Number 22 in Contemporary Mathematics. AMS, 2 edition, 1988.
- [2] Alexander Kruppa. *Améliorations de la multiplication et de la factorisation d'entier*. PhD thesis, Univ. Nancy 1, 2010. Thèse de doctorat dirigée par Zimmermann, Paul.
- [3] H. W. Lenstra, Jr. Factoring integers with elliptic curves. *Ann. of Math. (2)*, 126:649–673, 1987.
- [4] François Morain. Modular curves over number fields and ECM. working paper or preprint, March 2022.
- [5] P. Zimmermann and B. Dodson. 20 years of ECM. In Florian Hess, Sebastian Pauli, and Michael Pohst, editors, *Algorithmic Number Theory – ANTS-VII*, volume 4076 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 525–542. Springer-Verlag, 2006.
- [6] P. Zimmermann et al. GMP-ECM (elliptic curve method for integer factorization). <https://gforge.inria.fr/projects/ecm/>, 2010.

LIX - LABORATOIRE D'INFORMATIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, CNRS, INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS
and GRACE - INRIA SACLAY-ÎLE-DE-FRANCE
Email address: morain@lix.polytechnique.fr

Date: March 31, 2022– update 1.

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	$\mathcal{T}, \mathcal{P}(Z)$	when
74, 140 + (145dd) $\langle 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 2341 \cdot 5827 \cdot 1946183 \cdot 2736637 \cdot 3982073 \cdot 9183641 \cdot 71640433219 \rangle$	54246844404658638528674908309645373687448082321 (47dd)	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 + 7$	220202
93, 143 + (113dd) $\langle 2 \rangle \times \langle 2^3 \cdot 16381 \cdot 344171 \cdot 424169 \cdot 786629 \cdot 1944853 \cdot 8991293 \cdot 290928949 \rangle$	153122642255322360024123283032581744979354437 (45dd)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 - 13$	220203

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	\mathcal{T}	when
77, 143 - (176dd) $\langle 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 181 \cdot 271 \cdot 1373 \cdot 1260713 \cdot 5524403 \cdot 9530429 \cdot 15608017 \cdot 18453683327 \rangle$	137201052117407925881545888920089773400305732245589 (51dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220120
77, 139 + (194dd) $\langle 2 \rangle \times \langle 2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 1787 \cdot 1590643 \cdot 13909117 \cdot 29656051 \cdot 39410677 \cdot 272067307 \rangle$	29819053207472296379159807374330473560010495877 (47dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220121
92, 137 + (231dd) $\langle 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 103 \cdot 1889 \cdot 4073 \cdot 203617 \cdot 293507 \cdot 531667 \cdot 19257083 \cdot 526125653951 \rangle$	6199291385330615425337006319139287283518435008717 (49dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220122
70, 149 - (223dd) $\langle 2 \rangle \times \langle 2^2 \cdot 3^6 \cdot 11 \cdot 89 \cdot 227 \cdot 443 \cdot 33749 \cdot 219353 \cdot 8522959 \cdot 35764961 \cdot 19080765961 \rangle$	24721694635072630263761573923973931287719915271 (47dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220123
82, 134 + (234dd) $\langle 2^4 \cdot 3^2 \cdot 29 \cdot 16001 \cdot 48187 \cdot 107699 \cdot 7847317 \cdot 8143147 \cdot 15948781 \cdot 6532844293 \rangle$	2308832612697750858892228636505628255991181169289 (49dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220123
71, 139 + (248dd) $\langle 2^2 \cdot 3 \rangle \times \langle 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 619 \cdot 761 \cdot 39719 \cdot 639959 \cdot 1003411 \cdot 12898657 \cdot 75813901489 \rangle$	33836890734036629261924516665840404273381301 (44dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220124

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	family	when
69, 139 + (166dd)	$79326889026747678777319906826600442482951$ (41dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 14699 \cdot 37591 \cdot 1196869 \cdot 2181937 \cdot 8831281 \cdot 129686565067)$	S_{11}	220114
52, 149 + (168dd)	$69893670127458726482916735317225009349257$ (41dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 59 \cdot 103 \cdot 293 \cdot 1699 \cdot 1747 \cdot 4933 \cdot 909031 \cdot 1620469 \cdot 56874054581)$	S_{11}	220114
79, 139 + (171dd)	$596931162601751923425190492553980981393$ (39dd) $(2^3) \times (2^3 \cdot 7^2 \cdot 269^2 \cdot 1721 \cdot 19543 \cdot 246683 \cdot 440239 \cdot 720184550543)$	S_{11}	220114
96, 142 + (192dd)	$21914325961787568728861398613285221$ (35dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 229 \cdot 12343 \cdot 8053337 \cdot 15452729 \cdot 15780243509)$	S_{11}	220114
72, 149 - (187dd)	$315326499129576793697964957827057$ (33dd) $(2^2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 307 \cdot 1117 \cdot 9733 \cdot 85829 \cdot 980957 \cdot 30469129)$	S_{11}	220114
72, 149 - (155dd)	$357142978908396162737234145844921$ (33dd) $(2) \times (2 \cdot 31 \cdot 7867 \cdot 136777 \cdot 2048327 \cdot 7010291 \cdot 186407281)$	S_{11}	220114
93, 137 - (197dd)	$223183212056174382934792667$ (27dd) $(2^5 \cdot 13 \cdot 1621 \cdot 49033 \cdot 1982447 \cdot 3404827603)$	S_{11}	220114
86, 134 + (186dd)	$49658691102011202484249214533$ (29dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 151 \cdot 587 \cdot 2591 \cdot 39509 \cdot 896442761)$	S_{11}	220114
86, 145 + (164dd)	$191954653450671186092815000481$ (30dd) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 179 \cdot 5573 \cdot 389461 \cdot 530177 \cdot 12943127117)$	S_{11}	220114
82, 146 + (198dd)	$120132845434010252906182780753$ (30dd) $(2^2 \cdot 887 \cdot 10067 \cdot 26813 \cdot 1767407 \cdot 70973480791)$	S_{11}	220114
89, 131 + (207dd)	$35636694942516749949880764536158589$ (35dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 17029 \cdot 629467 \cdot 1321079 \cdot 77463138941)$	S_{11}	220115
74, 139 + (205dd)	$59091747801762858535122297401611962258962823803$ (47dd) $(2^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 141991 \cdot 2297863 \cdot 4360033 \cdot 12672377 \cdot 25491761 \cdot 232945920323)$	S_{11}	220115
89, 131 + (173dd)	$15673997760117375613229343840498013333349$ (41dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 61 \cdot 739 \cdot 52609 \cdot 1395077 \cdot 1542589 \cdot 12281407 \cdot 7814459579)$	S_{11}	220115
84, 134 + (224dd)	$42401931560000268689457878037331393$ (35dd) $(2^4 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 521 \cdot 1367 \cdot 108139 \cdot 230833 \cdot 5931799 \cdot 440877457)$	S_{11}	220116
69, 139 - (191dd)	$17987049449879167615904106068499621810958643$ (44dd) $(2) \times (2^3 \cdot 11^2 \cdot 199 \cdot 2287 \cdot 36433 \cdot 596081 \cdot 7710853 \cdot 21111049 \cdot 5774613001)$	S_{11}	220116
85, 134 + (213dd)	$64480050612882732136749348406628183869$ (38dd) $(2 \cdot 3) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 251 \cdot 21269 \cdot 3369409 \cdot 11717963 \cdot 13937953 \cdot 203224457)$	S_{11}	220116
58, 149 + (222dd)	$414001338870756676319995466729941$ (33dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 12527 \cdot 3846841 \cdot 20845273 \cdot 175228816369)$	S_{11}	220116
68, 149 + (212dd)	$86480478473510065337924664955072005883$ (38dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3 \cdot 13859 \cdot 3597569 \cdot 5447051 \cdot 24276271 \cdot 68317569857)$	S_{11}	220116
74, 149 + (217dd)	$41130573283150199415742844749$ (29dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 71 \cdot 45061 \cdot 271753 \cdot 2102207 \cdot 1875316253)$	S_{11}	220116
82, 149 - (218dd)	$1847780467261495734449284245985360331$ (37dd) $(2^7 \cdot 3 \cdot 2539 \cdot 25349 \cdot 93889 \cdot 673349 \cdot 12534209 \cdot 94350401)$	S_{11}	220116
82, 139 - (230dd)	$698364368829592727236975661223389491$ (37dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3^2 \cdot 1723 \cdot 3703109 \cdot 6993839 \cdot 23121011 \cdot 11751285181)$	S_{11}	220116
75, 142 + (216dd)	$6589446638092599241138023917$ (28dd) $(2^6 \cdot 29 \cdot 9377 \cdot 34513 \cdot 198479 \cdot 55272585847)$	S_{11}	220116
69, 139 - (224dd)	$313626806309044386261774730369151$ (33dd) $(2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 311 \cdot 2129 \cdot 11369 \cdot 548441 \cdot 757481 \cdot 5289503)$	S_{11}	220116
97, 149 + (215dd)	$33182756619242790311549689795255613$ (35dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 139 \cdot 181 \cdot 197 \cdot 311 \cdot 20593 \cdot 1063441 \cdot 135401299063)$	S_{11}	220116
74, 137 + (227dd)	$2048174726214184971516279798069913$ (34dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3 \cdot 941 \cdot 43961 \cdot 557759 \cdot 8667961 \cdot 53339022479)$	S_{11}	220116
99, 146 + (231dd)	$109656245683327340782944722989$ (30dd) $(2^2 \cdot 5 \cdot 4019 \cdot 44623 \cdot 113489 \cdot 224359 \cdot 1200685709)$	S_{11}	220116
84, 139 - (227dd)	$12416248099437566248707849347947447$ (35dd) $(2^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 48259 \cdot 678421 \cdot 1344509 \cdot 162931793303)$	S_{11}	220116
84, 139 - (193dd)	$127557569748786523440396285491916792547$ (39dd) $(2^3 \cdot 3^3 \cdot 73 \cdot 197 \cdot 283 \cdot 10301 \cdot 21613 \cdot 6510073 \cdot 7646179 \cdot 13093393)$	S_{11}	220116
88, 137 + (231dd)	$17986962943353259149414934888573541222161$ (41dd) $(2 \cdot 3) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 37 \cdot 389 \cdot 401 \cdot 57223 \cdot 3302939 \cdot 8434963 \cdot 1350628841)$	S_{11}	220116
53, 149 + (216dd)	$49824306994528881877410440109535859298766931$ (44dd) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 2671 \cdot 18869 \cdot 40499 \cdot 4033853 \cdot 5213777 \cdot 11264959 \cdot 1430999767)$	S_{11}	220116
77, 139 - (217dd)	$2913947035781063821596011687931095464368209$ (43dd) $(2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1823 \cdot 4231 \cdot 24359 \cdot 159431 \cdot 2112191 \cdot 44658907 \cdot 1841579321)$	S_{11}	220116
84, 142 + (219dd)	$271893653179988144731484255881181816283712096681$ (48dd) $(2) \times (2 \cdot 7 \cdot 137 \cdot 607 \cdot 3853 \cdot 1069273 \cdot 2749679 \cdot 7486327 \cdot 8924701 \cdot 154276474453)$	S_{11}	220116
87, 139 + (225dd)	$205388471386709230099710142427317022684953$ (42dd) $(2^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 887 \cdot 1487 \cdot 10529 \cdot 1328477 \cdot 1854709 \cdot 3696557 \cdot 12508703)$	S_{11}	220116
83, 149 + (214dd)	$723577182616554422038709801648887$ (33dd) $(2) \times (2^2 \cdot 31 \cdot 4759 \cdot 340931 \cdot 464747 \cdot 16010627 \cdot 241671841)$	S_{11}	220116
71, 149 + (231dd)	$1327578397518109970479951051$ (28dd) $(2) \times (2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 43 \cdot 223 \cdot 12931007 \cdot 218503516873)$	S_{11}	220116

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	family	when
54, 149 + (228dd)	1525947144376237945730724897659097491 (37dd) $(2^6 \cdot 3 \cdot 71 \cdot 33797 \cdot 74383 \cdot 1415221 \cdot 39335017 \cdot 799879313)$	S_{11}	220116
54, 149 + (192dd)	24982548838086157051576308905145911958421778531 (47dd) $(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 277 \cdot 60013 \cdot 179327 \cdot 943357 \cdot 4542001 \cdot 13200221 \cdot 137194814203)$	S_{11}	220116
92, 131 - (231dd)	5294940733976016020635573563645720161 (37dd) $(2^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 137 \cdot 919 \cdot 12281 \cdot 21491 \cdot 77369 \cdot 76596830881)$	S_{11}	220116
67, 149 - (230dd)	913701696563975714033091493225254422205593287 (45dd) $(2) \times (2^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 521 \cdot 887 \cdot 38977 \cdot 79393 \cdot 79399 \cdot 5144093 \cdot 16035866953)$	S_{11}	220116
79, 137 + (228dd)	15508588395754819860032265940360352233975681 (44dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 3307 \cdot 22817 \cdot 24329 \cdot 37097 \cdot 3687401 \cdot 20724251 \cdot 1633775719)$	S_{11}	220116
87, 139 + (184dd)	374627063928330432738264682702011658979991767 (46dd) $(2^5 \cdot 3^2 \cdot 79 \cdot 271 \cdot 25541 \cdot 320317 \cdot 414101 \cdot 873343 \cdot 2684753 \cdot 76488639113)$	S_{11}	220116
92, 137 - (229dd)	68741933196114943137300875603 (29dd) $(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 37 \cdot 157 \cdot 677 \cdot 23677 \cdot 131321 \cdot 4684784249)$	S_{11}	220116
80, 137 - (239dd)	764876847089550595623709963544321 (33dd) $(2) \times (2^{12} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 109 \cdot 251 \cdot 277 \cdot 457 \cdot 173023 \cdot 26575512637)$	S_{11}	220117
76, 139 - (239dd)	2509783409036652433415112517561 (31dd) $(2^3 \cdot 23 \cdot 353653 \cdot 595207 \cdot 925051 \cdot 70049875451)$	S_{11}	220117
68, 142 + (197dd)	31652779243310772656750398477 (29dd) $(2) \times (2^5 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 151 \cdot 1215463 \cdot 4887709 \cdot 2980136213)$	S_{11}	220117
80, 139 + (213dd)	628775525747747428878554121326080661368988704367 (48dd) $(2^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 347 \cdot 839 \cdot 8161 \cdot 113623 \cdot 1912553 \cdot 4209991 \cdot 16022309 \cdot 102120329)$	S_{11}	220117
87, 149 + (238dd)	334811947595854120996770967 (27dd) $(2^8 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 653 \cdot 14540863 \cdot 6653747141)$	S_{11}	220117
68, 142 + (231dd)	13823119660712662008022831172622217 (35dd) $(2^5 \cdot 5 \cdot 727 \cdot 26141 \cdot 42841 \cdot 846067 \cdot 2793179 \cdot 44902069)$	S_{11}	220117
73, 142 + (239dd)	10098261615225106587019034717 (29dd) $(2^4 \cdot 89 \cdot 263 \cdot 383 \cdot 125959 \cdot 5080237 \cdot 110019313)$	S_{11}	220117
73, 142 + (211dd)	4654023202427629694071882457961055105609 (40dd) $(2^2) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 1279 \cdot 8971 \cdot 78179 \cdot 14512357 \cdot 29777023 \cdot 2294774683)$	S_{11}	220117
87, 134 + (242dd)	98174636130339458381137281532902315113 (38dd) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 241 \cdot 1171 \cdot 10477 \cdot 288293 \cdot 15861457 \cdot 295749737377)$	S_{11}	220117
52, 149 - (238dd)	9504145515920220202657769053720536529 (37dd) $(2^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 166843 \cdot 647719 \cdot 3440077 \cdot 4746431 \cdot 28797707)$	S_{11}	220117
63, 142 + (243dd)	499347379550181541744752317269 (30dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 197 \cdot 277 \cdot 25127 \cdot 71941 \cdot 7945849 \cdot 53090659)$	S_{11}	220117
91, 139 + (244dd)	114919481974342146839273660211399609467983744846534603 (54dd) $(2) \times (2^4 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 173 \cdot 919 \cdot 73369 \cdot 94781 \cdot 630919 \cdot 1291117 \cdot 1337363 \cdot 7448509 \cdot 163456253)$	S_{11}	220117
65, 142 + (232dd)	16543228921610947547423319808009757592543469 (44dd) $(3) \times (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 23357 \cdot 83689 \cdot 205097 \cdot 254773 \cdot 35704729 \cdot 260883587927)$	S_{11}	220117
76, 139 + (244dd)	516149857905663948423972078277609881449 (39dd) $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 457 \cdot 701 \cdot 1109 \cdot 1609 \cdot 77269 \cdot 2087909 \cdot 3787097 \cdot 5864489)$	S_{11}	220117
83, 134 + (136dd)	5353720031116679424387066050214337 (34dd) $(2^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 251 \cdot 337 \cdot 79397 \cdot 1012507 \cdot 3820319 \cdot 203643131)$	S_{11}	220117
83, 134 + (239dd)	91002962967364396509632176333 (29dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 75353 \cdot 84533 \cdot 1707707 \cdot 7661127787)$	S_{11}	220117
68, 142 + (169dd)	19468423591945940785265108842305714323526289 (44dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 449 \cdot 21383 \cdot 78839 \cdot 359027 \cdot 3411649 \cdot 17114429 \cdot 1123564987)$	S_{11}	220117
90, 139 + (241dd)	2150378303491644833157192790279927 (34dd) $(2^3 \cdot 199 \cdot 1269013 \cdot 9441227 \cdot 9795209 \cdot 11509688987)$	S_{11}	220117
83, 134 + (170dd)	2324888459241523990334435780743469 (34dd) $(2) \times (2^3 \cdot 5 \cdot 1709 \cdot 7933 \cdot 1504991 \cdot 8027849 \cdot 177418751927)$	S_{11}	220117
83, 139 + (233dd)	36625164225110586401367754245157 (32dd) $(2^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 1231 \cdot 3041 \cdot 146749 \cdot 20461193 \cdot 4403188577)$	S_{11}	220117
86, 139 - (244dd)	5573224213511683912426525754466119318810153 (43dd) $(2^5 \cdot 571 \cdot 5443 \cdot 29429 \cdot 864307 \cdot 10488781 \cdot 13454213 \cdot 15611881367)$	S_{11}	220117
95, 142 + (243dd)	10085922450540433565244186723577 (32dd) $(2) \times (2^7 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 271 \cdot 32693 \cdot 488321 \cdot 507404517889)$	S_{11}	220117
62, 146 + (236dd)	71683364969105361862733339919966149 (35dd) $(2) \times (2 \cdot 5^2 \cdot 2683 \cdot 15493 \cdot 80537 \cdot 320317 \cdot 18080459 \cdot 36972371)$	S_{11}	220117
80, 139 + (241dd)	8183498546729728789676899241 (28dd) $(2^3 \cdot 103 \cdot 337 \cdot 3191 \cdot 14629 \cdot 41117 \cdot 60091 \cdot 255511)$	S_{11}	220117
68, 142 + (126dd)	3011632726083334175010295234518818178029 (40dd) $(2) \times (2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 73 \cdot 107 \cdot 971 \cdot 383869 \cdot 1384741 \cdot 21810781 \cdot 13193154319)$	S_{11}	220117
83, 134 + (210dd)	7937310628273890338230982131430409871673 (40dd) $(2^4 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 647 \cdot 40471 \cdot 224897 \cdot 8848453 \cdot 18041563 \cdot 418470571)$	S_{11}	220117
91, 131 + (248dd)	2329966057028384009201034265975365952286201 (43dd) $(2^3) \times (2^6 \cdot 821 \cdot 1499 \cdot 3581 \cdot 92671 \cdot 649511 \cdot 41957147 \cdot 408878441767)$	S_{11}	220118
63, 142 + (214dd)	15949743522706797612257367166134770473 (38dd) $(2) \times (2 \cdot 102071 \cdot 619741 \cdot 7887511 \cdot 36246611 \cdot 220482299371)$	S_{11}	220118

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	family	when
$87, 134 + (204dd)$ $\langle 2^2 \rangle \times \langle 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 41 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 191 \cdot 631 \cdot 10331 \cdot 39229 \cdot 43445371 \cdot 2840248781 \rangle$	$34202454020527149377831516484061980645737$ (41dd)	S_{11}	220118
$91, 139 - (250dd)$ $\langle 2 \rangle \times \langle 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 787 \cdot 4441 \cdot 296503 \cdot 19074481 \cdot 732819343 \rangle$	$4519483920649446786007684574183$ (31dd)	S_{11}	220118
$96, 134 + (247dd)$ $\langle 2^8 \cdot 11 \cdot 1103 \cdot 115783 \cdot 15469073 \cdot 292032293071 \rangle$	$1624606283502856081380875678929$ (31dd)	S_{11}	220118
$94, 134 + (248dd)$ $\langle 2 \rangle \times \langle 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3041 \cdot 1024159 \cdot 2604559 \cdot 27283591 \cdot 106206343807 \rangle$	$1974464276958891396660765763865448049$ (37dd)	S_{11}	220118
$94, 137 - (247dd)$ $\langle 2^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 7069 \cdot 3328993 \cdot 14536441 \cdot 45097501 \cdot 13687163153 \rangle$	$9870926313672469907167292077290083550749$ (40dd)	S_{11}	220118
$55, 149 + (250dd)$ $\langle 2^4 \cdot 11 \cdot 3511 \cdot 7687 \cdot 1961929 \cdot 8642863 \cdot 111427099859 \rangle$	$8974951723535129435403638112332221$ (34dd)	S_{11}	220118
$94, 131 + (250dd)$ $\langle 2 \cdot 3 \rangle \times \langle 2 \cdot 3 \cdot 2591 \cdot 760231 \cdot 5339311 \cdot 3269068247 \rangle$	$1237726513000116999529829161$ (28dd)	S_{11}	220118
$88, 134 + (245dd)$ $\langle 2^2 \rangle \times \langle 2^3 \cdot 4049 \cdot 77267 \cdot 6534467 \cdot 25763370461 \rangle$	$1685406455599302200184201109$ (28dd)	S_{11}	220118