



HAL
open science

Some factors of numbers of the form $b^n + / - 1$ found using ECM with new classes of curves

François Morain

► **To cite this version:**

François Morain. Some factors of numbers of the form $b^n + / - 1$ found using ECM with new classes of curves. 2022. hal-03437714v2

HAL Id: hal-03437714

<https://inria.hal.science/hal-03437714v2>

Preprint submitted on 31 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SOME FACTORS OF NUMBERS OF THE FORM $b^n \pm 1$ FOUND USING ECM WITH NEW CLASSES OF CURVES

F. MORAIN

ABSTRACT. In this note, we list factors of numbers of the form $b^n \pm 1$ found using GMP-ECM and new classes of elliptic curves.

The elliptic curve method of factorization (ECM) [3] is one of the powerful algorithms able to find moderate size factors of large integers. The following tables list some unknown factors of composite numbers $b^n \pm 1$ for values of $13 \leq b \leq 10^4$, full tables of which are managed by Jonathan Crombie (continuing the work of Brent, Montgomery and te Riele, see <http://myfactors.mooo.com/>). This is an extension of the Cunningham project [1] for $2 \leq b \leq 12$. All the factors were found using GMP-ECM [6] (with the algorithms described in [5]).

More details on the computations and curves used are given in [4].

Format of the tables: pretty straightforward. Remember that $b, n+$ (resp. $b, n-$) designates $b^n + 1$ (resp. $b^n - 1$). The last column contains a time stamp. For instance, 210919 should be decoded as 21/09/19. Numbers are sorted by increasing date of discovery. More factorizations will be added as time goes by.

The last tables give factors found with the standard GMP-ECM using the traditional Suyama curves (labeled with $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) and the family Suyama-11 found by A. Kruppa [2].

REFERENCES

- [1] J. Brillhart, D. H. Lehmer, J. L. Selfridge, B. Tuckerman, and S. S. Wagstaff, Jr. *Factorizations of $b^n \pm 1$, $b = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$ up to high powers*. Number 22 in Contemporary Mathematics. AMS, 2 edition, 1988.
- [2] Alexander Kruppa. *Améliorations de la multiplication et de la factorisation d'entier*. PhD thesis, Univ. Nancy 1, 2010. Thèse de doctorat dirigée par Zimmermann, Paul.
- [3] H. W. Lenstra, Jr. Factoring integers with elliptic curves. *Ann. of Math. (2)*, 126:649–673, 1987.
- [4] François Morain. Modular curves over number fields and ECM. working paper or preprint, March 2022.
- [5] P. Zimmermann and B. Dodson. 20 years of ECM. In Florian Hess, Sebastian Pauli, and Michael Pohst, editors, *Algorithmic Number Theory – ANTS-VII*, volume 4076 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 525–542. Springer-Verlag, 2006.
- [6] P. Zimmermann et al. GMP-ECM (elliptic curve method for integer factorization). <https://gforge.inria.fr/projects/ecm/>, 2010.

LIX - LABORATOIRE D'INFORMATIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, CNRS, INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS
and GRACE - INRIA SACLAY-ÎLE-DE-FRANCE
Email address: morain@lix.polytechnique.fr

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	$\mathcal{T}, \mathcal{P}(Z)$	when
91, 143 + (229dd)	39097487455641709584561227838397 (32dd) $(2 \cdot 3) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 79 \cdot 13331 \cdot 17401 \cdot 1749887 \cdot 21179897449)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	210919
76, 143 - (226dd)	1081673573275568956913253438874031 (34dd) $(2) \times (2^2 \cdot 3^2 \cdot 47 \cdot 157 \cdot 349 \cdot 1123 \cdot 297019 \cdot 1104343 \cdot 15836996297)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	210919
89, 136 + (226dd)	203670153440347727407773377 (27dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 1039 \cdot 6691 \cdot 14011 \cdot 3605783 \cdot 3717299)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	210919
91, 136 + (238dd)	9909969840558744190100319969953 (31dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 661 \cdot 4793 \cdot 554627 \cdot 12295519 \cdot 267299587)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	210920
91, 136 + (238dd)	88917809909800972925556006648298103113249 (41dd) $(2) \times (2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 2683 \cdot 126473 \cdot 266587 \cdot 1652881 \cdot 4049293 \cdot 7234599079)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	210920
85, 143 - (228dd)	6314059662689865591498003869 (28dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2971 \cdot 159157 \cdot 12900367 \cdot 19747601)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	210920
83, 136 + (224dd)	122131139150783253754177955960717201 (36dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3061 \cdot 4091 \cdot 41969 \cdot 153889 \cdot 1069463 \cdot 23533167479)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	210920
77, 148 + (246dd)	6133384128714567850895531329681 (31dd) $(2) \times (2 \cdot 13 \cdot 83^2 \cdot 739 \cdot 155747 \cdot 7900859 \cdot 18827913607)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	210920
85, 136 + (244dd)	4812510031276568181537132034273006315681 (40dd) $(2) \times (2^4 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 83 \cdot 193 \cdot 1049 \cdot 4483 \cdot 33601 \cdot 398357 \cdot 5133307 \cdot 101236763)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	210921
90, 136 + (243dd)	95029336145694838957824482284328662990992760116961 (50dd) $(2) \times (2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 23^2 \cdot 557 \cdot 93169 \cdot 191507 \cdot 211093 \cdot 3555857 \cdot 19430611 \cdot 19286145689)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 + 2$	211001
89, 136 + (226dd)	1507236940222560786386041061745902423210609 (43dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 89 \cdot 641 \cdot 2503 \cdot 4099 \cdot 65167 \cdot 8986403 \cdot 11806357 \cdot 6207460211)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 + 2$	211002
86, 143 + (226dd)	121802385644813164533936967364856084136235563 (45dd) $(3 \cdot 5 \cdot 101 \cdot 331 \cdot 383 \cdot 1373 \cdot 2417 \cdot 114659 \cdot 10160377 \cdot 21286981 \cdot 7706144731)$	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211002
91, 143 - (229dd)	72384483510845642297891730646993695081321681523 (47dd) $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 163 \cdot 1627 \cdot 2141 \cdot 2617 \cdot 28697 \cdot 114913 \cdot 10599097 \cdot 10805321 \cdot 4299485389)$	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211003
93, 136 + (224dd)	144361306010767021849232771856031876990280881 (45dd) $(2^2) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 691 \cdot 3121 \cdot 6571 \cdot 94343 \cdot 221707 \cdot 237767 \cdot 9395963 \cdot 11159119)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 + 2$	211004
58, 148 + (245dd)	112506882306629149019180463529 (30dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 132749 \cdot 474119 \cdot 13768663 \cdot 1352376043)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211014
57, 148 + (243dd)	169148129899316676754479151313 (30dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 67 \cdot 13425623 \cdot 23712397 \cdot 16118231531)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211014
57, 148 + (243dd)	421009383140130353639417265637529 (33dd) $(2^2) \times (2^5 \cdot 31 \cdot 71^2 \cdot 397 \cdot 568049 \cdot 3578951 \cdot 26077824329)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211014
59, 148 + (246dd)	26642397493750326276664956281 (29dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 139 \cdot 631 \cdot 17351 \cdot 5071639 \cdot 26150642897)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211014
63, 148 + (239dd)	24427916239531892701088033849 (29dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 359 \cdot 7757 \cdot 92233 \cdot 359377 \cdot 8270115787)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211014
63, 148 + (239dd)	126775587192783617996871593158271705801 (39dd) $(2^3) \times (2^3 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 1193 \cdot 66797 \cdot 411799 \cdot 505213 \cdot 11881027 \cdot 33860083)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211015
62, 148 + (231dd)	174489389275935490478092942757189489 (36dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 1699 \cdot 20921 \cdot 23971 \cdot 100799 \cdot 2135723 \cdot 79272883927)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211015
75, 148 + (239dd)	287256660129937632149933799072015793 (36dd) $(2^2) \times (2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 29 \cdot 14281 \cdot 3271661 \cdot 4630721 \cdot 620702087)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211015
72, 143 + (219dd)	257046566603437226512911589147 (30dd) $(2 \cdot 3) \times (2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 1471 \cdot 1999 \cdot 40892587 \cdot 3366205867)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211016
95, 143 + (223dd)	1083464823584081602004225920974229961236997 (43dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 163 \cdot 179 \cdot 251 \cdot 5591 \cdot 14011 \cdot 217337 \cdot 256639 \cdot 778027 \cdot 3626683)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211016
63, 148 + (239dd)	2708217308807273429767899154174901407393 (40dd) $(2) \times (2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 677927 \cdot 3787247 \cdot 8691433 \cdot 9805921 \cdot 32569686239)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211017
59, 148 + (246dd)	6153600891183451358288633718234351691755490502156977 (52dd) $(2^2) \times (2^4 \cdot 3^4 \cdot 31 \cdot 383 \cdot 659 \cdot 12413 \cdot 44087 \cdot 176261 \cdot 269231 \cdot 4538333 \cdot 5268647 \cdot 244317397)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211019
80, 148 + (249dd)	528008828433104496135816963159066412667528154401 (48dd) $(2^2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 1951 \cdot 3121 \cdot 9923 \cdot 23911 \cdot 196919 \cdot 1851271 \cdot 31834379 \cdot 164019009337)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211019
68, 148 + (226dd)	6293335603138665673753869409668883438923628000153 (49dd) $(2^3 \cdot 3) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 683^2 \cdot 1277 \cdot 214309 \cdot 509783 \cdot 3968491 \cdot 28613441 \cdot 95052329)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211023
58, 148 + (245dd)	195506542210979176522718797760192511806277913 (45dd) $(2) \times (2 \cdot 79 \cdot 367 \cdot 1487 \cdot 20357 \cdot 55639 \cdot 268883 \cdot 377711 \cdot 1576543 \cdot 6251371211)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211026
59, 148 + (246dd)	32549598165881659323145053260648245905788521 (44dd) $(2) \times (2 \cdot 17 \cdot 461 \cdot 1013 \cdot 6709 \cdot 13241 \cdot 21839 \cdot 1434023 \cdot 1765697 \cdot 208661692721)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211027
95, 145 - (222dd)	200665557019668388820419786457045587248891341 (45dd) $(2) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 3923 \cdot 31277 \cdot 160621 \cdot 477209 \cdot 4281349 \cdot 18694493 \cdot 1057848859)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 29$	211030
88, 143 + (215dd)	6358121600282021249167413373357836215012153 (43dd) $(2) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 137 \cdot 499 \cdot 569 \cdot 1429 \cdot 4703 \cdot 22447 \cdot 319733 \cdot 1806031 \cdot 78181865953)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211103
74, 145 + (210dd)	3242269523406605838609691912552260883503075877086401 (52dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 839 \cdot 1427 \cdot 32647 \cdot 658663 \cdot 792277 \cdot 1532647 \cdot 8783009 \cdot 48689154383)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211103
80, 136 + (208dd)	14282340552001320145244125431697889 (35dd) $(2) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 4243 \cdot 1238693 \cdot 1258783 \cdot 5029561 \cdot 11922826373)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	211104
82, 145 + (211dd)	8674789605346661424832133115073007844671 (40dd) $(2) \times (2^5 \cdot 7^2 \cdot 31 \cdot 173 \cdot 503 \cdot 2143 \cdot 3083 \cdot 5270231 \cdot 38727967 \cdot 760426193)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211104

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	$\mathcal{T}, \mathcal{P}(Z)$	when
69, 145 + (206dd)	286508193459105224545095761 (27dd) $(2^2) \times (2^5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 71^2 \cdot 44273 \cdot 197273 \cdot 250442333)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211104
82, 145 + (171dd)	684748065015589423265391174612848221496545022161 (48dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 47 \cdot 67 \cdot 84551 \cdot 885977 \cdot 1071803 \cdot 2396239 \cdot 16453693 \cdot 495873503)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211105
97, 143 + (205dd)	5029284168421691009474960293330997501 (37dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 1381 \cdot 34519 \cdot 36847 \cdot 44651 \cdot 49523 \cdot 93019668149)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211105
908, 67 - (190dd)	314924992520095186813704379189470025083148513889 (48dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 47 \cdot 127 \cdot 157 \cdot 503 \cdot 54277 \cdot 683759 \cdot 11269243 \cdot 16866691 \cdot 9474758309)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $Z^3 + Z^2 - 22Z + 5$	211105
832, 67 - (191dd)	5152060195650213711128948395000809254091832789 (46dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 103 \cdot 311 \cdot 1123 \cdot 9277 \cdot 585283 \cdot 1013029 \cdot 2068117 \cdot 2756731 \cdot 47573761)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $Z^3 + Z^2 - 22Z + 5$	211105
85, 143 + (211dd)	1256721029775715696257972132260210008844808941 (46dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 14731 \cdot 124213 \cdot 314719 \cdot 741991 \cdot 990137 \cdot 19902737 \cdot 12437373079)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211106
80, 136 + (173dd)	1779586756730767305188268537007290668449 (40dd) $(2) \times (2 \cdot 5^2 \cdot 29 \cdot 89 \cdot 14387 \cdot 11752711 \cdot 12929507 \cdot 32430857 \cdot 97248401)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	211106
78, 145 + (207dd)	810726926248106462415561622241332161181 (39dd) $(2^2) \times (2^5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 257 \cdot 269 \cdot 607 \cdot 15401 \cdot 26227 \cdot 24356611 \cdot 47685751)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211106
77, 145 + (204dd)	5351129477105280700750350283769394807311831 (43dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3^3 \cdot 211 \cdot 269 \cdot 853 \cdot 12203 \cdot 75797 \cdot 3532457 \cdot 4405043 \cdot 17775927973)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211106
77, 145 + (161dd)	15284105262481307713678612469222143741121 (41dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 233 \cdot 211187 \cdot 644687 \cdot 8579891 \cdot 32402311 \cdot 8495326627)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211107
61, 148 + (206dd)	5392083635732772033735788905270233582687837357169 (49dd) $(2^4) \times (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 23^2 \cdot 317 \cdot 359 \cdot 18133 \cdot 6378881 \cdot 12983833 \cdot 35228899 \cdot 1234899581)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211107
78, 143 - (203dd)	58906988500210848827148393647 (29dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 83 \cdot 241 \cdot 8053 \cdot 13999 \cdot 179471 \cdot 72199163)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211109
69, 145 + (180dd)	51642735295054165114200696495014578655491621 (44dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 167 \cdot 1901 \cdot 13903 \cdot 100313 \cdot 279007 \cdot 286721 \cdot 39254783 \cdot 40198121)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211109
71, 145 + (200dd)	3081838728839138646824667134834215417088225761 (46dd) $(2 \cdot 3 \cdot 5) \times (2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 8831 \cdot 27691 \cdot 5737181 \cdot 9128929 \cdot 42885001 \cdot 16109575787)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211110
74, 145 - (198dd)	115699409434579757150069122314705902015821 (42dd) $(2^2 \cdot 5) \times (2^3 \cdot 5 \cdot 347 \cdot 367 \cdot 2927 \cdot 18059 \cdot 1288657 \cdot 3614153 \cdot 512557762621)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211110
74, 145 - (116dd)	672757891558157197623408574883629411681 (39dd) $(2) \times (2 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 256603 \cdot 280541 \cdot 4038467 \cdot 11303779 \cdot 44158784113)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211110
74, 145 - (157dd)	82680336163400607564958279513497353433701 (41dd) $(2) \times (2 \cdot 3^3 \cdot 31 \cdot 179 \cdot 1831 \cdot 95701 \cdot 121403 \cdot 153521 \cdot 11527619 \cdot 3664562303)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211110
737, 67 + (184dd)	870917417466838788698821597667901172952093040299 (48dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 907 \cdot 5413 \cdot 8807 \cdot 22973 \cdot 553103 \cdot 4764239 \cdot 6769901 \cdot 10778026289)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $Z^3 + Z^2 - 22Z + 5$	211111
682, 67 + (185dd)	3960431214365287888129140722498272391957628371 (46dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 5441 \cdot 11353 \cdot 19319 \cdot 59581 \cdot 319399 \cdot 13319101 \cdot 104393045839)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $Z^3 + Z^2 - 22Z + 5$	211112
68, 145 + (201dd)	759522532722573631464900168860811795924541 (42dd) $(2^2) \times (2^6 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 83 \cdot 173 \cdot 852833 \cdot 952507 \cdot 1032509 \cdot 5399377 \cdot 153620927)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211112
79, 136 + (212dd)	1676257114889837463366010414743038265629041 (43dd) $(2 \cdot 5) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 43^2 \cdot 97 \cdot 317 \cdot 419 \cdot 1493 \cdot 4051 \cdot 152617 \cdot 1069429 \cdot 79202570021)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 + 2$	211113
79, 143 + (201dd)	617165874719529966578857601636808679159 (39dd) $(2 \cdot 3) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 12959 \cdot 3388459 \cdot 23405677 \cdot 29667019 \cdot 56225142067)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211113
564, 67 - (182dd)	1200634750265355597309123978159925198537240793 (46dd) $(2) \times (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 293 \cdot 225089 \cdot 459509 \cdot 1811561 \cdot 4338643 \cdot 8046043 \cdot 1740216437)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $Z^3 + Z^2 - 22Z + 5$	211114
69, 143 + (195dd)	46032704990894163010799652245639 (32dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 797 \cdot 21673 \cdot 990589 \cdot 13396063 \cdot 18190699)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211114
97, 145 + (195dd)	20475011708627365490421549472180159901 (38dd) $(2^2) \times (2^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 2731 \cdot 4831 \cdot 10691 \cdot 15767 \cdot 896047 \cdot 1516330381)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211115
75, 145 - (195dd)	145820922799205411577526521075547603991 (39dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 71317 \cdot 671257 \cdot 1601317 \cdot 12411877 \cdot 2128583419)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211115
76, 136 + (193dd)	230638965208492675830062875068689 (33dd) $(2^2) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 3037 \cdot 3134347 \cdot 28164953 \cdot 32061123557)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	211115
87, 145 + (194dd)	59493967220771242233729202831 (29dd) $(2) \times (2^4 \cdot 239 \cdot 3967 \cdot 22481 \cdot 691697 \cdot 126104717161)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211115
98, 145 - (161dd)	106565478545504059784085620836190321 (36dd) $(2^3) \times (2^3 \cdot 53 \cdot 521 \cdot 827 \cdot 34679 \cdot 43661 \cdot 6122341 \cdot 7865742119)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211116
97, 145 + (158dd)	20325839679108068942542957640818669021 (38dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 43 \cdot 101 \cdot 1217 \cdot 95723 \cdot 271981 \cdot 41395811 \cdot 111508210703)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211116
89, 145 - (192dd)	243056674739683873052967962822255497291 (39dd) $(2) \times (2^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 18229 \cdot 232753 \cdot 6409253 \cdot 14979817 \cdot 260783119673)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211116
76, 136 + (131dd)	438641314708689994945803094414364017 (36dd) $(2 \cdot 3) \times (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 211 \cdot 9437 \cdot 7419649 \cdot 12814147 \cdot 20245431293)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	211116
76, 136 + (161dd)	156680649601795675183141661297 (30dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 191 \cdot 1481 \cdot 36871 \cdot 6726761 \cdot 845925461)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	211116
98, 145 - (192dd)	4538131062026968680387147363911 (31dd) $(2) \times (2^7 \cdot 29167 \cdot 2240369 \cdot 6780707 \cdot 40008362269)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211116
88, 143 - (205dd)	176631419599003306284596237977817343802484627 (45dd) $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 1789 \cdot 57191 \cdot 59093 \cdot 212437 \cdot 2217011 \cdot 3417079 \cdot 1276560101)$	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211116

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	$\mathcal{T}, \mathcal{P}(Z)$	when
93, 143 + (185dd)	1107143747609638086483933799 (28dd) $(2 \cdot 3) \times (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 71 \cdot 193 \cdot 2569607 \cdot 661675745569)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211117
54, 148 + (142dd)	47745297013416763673913373201 (29dd) $(2^3) \times (2^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 1021 \cdot 3527 \cdot 372523 \cdot 11487176849)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211117
76, 136 + (96dd)	748413049020504684792641386896154057664353 (42dd) $(2^2) \times (2^2 \cdot 5^2 \cdot 151 \cdot 44789 \cdot 283837 \cdot 289889 \cdot 9813829 \cdot 11900699 \cdot 28788653)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 - 2$	211117
89, 145 - (154dd)	26769740020770035249479374829552781 (36dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 61 \cdot 137 \cdot 313 \cdot 1433 \cdot 195869 \cdot 2151203 \cdot 39234884243)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211117
71, 143 + (185dd)	6147619877984764806596458300991243997791 (40dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 1627 \cdot 6481 \cdot 5016863 \cdot 5558669 \cdot 31165907 \cdot 13975049939)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211117
87, 143 - (186dd)	869739041700065774535952087462183871 (36dd) $(2) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 73^2 \cdot 2557 \cdot 46261 \cdot 206081 \cdot 1921849 \cdot 145154011963)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211117
54, 148 + (181dd)	1873736382664056942125771790331768514929 (40dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 510619 \cdot 1175107 \cdot 19322837 \cdot 25780987 \cdot 195890645359)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211117
54, 148 + (113dd)	79647427812727331528378671705173747075361 (41dd) $(2^2) \times (2^4 \cdot 3^2 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 179 \cdot 2857 \cdot 6761 \cdot 6365773 \cdot 7789627 \cdot 46353546331)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211119
84, 145 - (177dd)	1280935678670178982674695168311861 (34dd) $(2^2 \cdot 3) \times (2^6 \cdot 3^3 \cdot 17 \cdot 179 \cdot 2389 \cdot 201769 \cdot 1102979 \cdot 38182340899)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211119
87, 143 - (150dd)	136899949256066917953836347405696564733147 (42dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29^2 \cdot 211 \cdot 38891 \cdot 142867 \cdot 883763 \cdot 19283413 \cdot 7379977013)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211119
85, 145 - (136dd)	186647494681298441991785036724963841 (36dd) $(2^3) \times (2^3 \cdot 13 \cdot 293 \cdot 571 \cdot 10939 \cdot 2447527 \cdot 22052477 \cdot 2271080971)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211120
85, 145 - (174dd)	201832808531929277425202546329975236601 (39dd) $(2) \times (2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 421 \cdot 7187 \cdot 44171 \cdot 311453 \cdot 26625967 \cdot 60676597283)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211120
80, 143 - (184dd)	6712531994782750141515031166298684148691 (40dd) $(2) \times (2^7 \cdot 3^3 \cdot 113^2 \cdot 659 \cdot 5641 \cdot 10604969 \cdot 26495507 \cdot 72811939633)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211121
67, 145 + (185dd)	7248137329293656381576244670183065997056221 (43dd) $(2^2 \cdot 5) \times (2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 1531 \cdot 5867 \cdot 14731 \cdot 40819 \cdot 5329151 \cdot 10308269 \cdot 169642351)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211202
80, 143 - (145dd)	795054288520025014495743423224943946219831 (42dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 31 \cdot 20743 \cdot 81533 \cdot 188701 \cdot 3968897 \cdot 8522791 \cdot 197980759619)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211203
66, 145 + (171dd)	8412817727511578850575210670325289161 (37dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6131 \cdot 4273873 \cdot 8884949 \cdot 17883043 \cdot 3006927227)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211204
99, 145 + (162dd)	4062412002827262841252226180328415331 (37dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 173 \cdot 367 \cdot 29221 \cdot 937033 \cdot 5866457 \cdot 9220664083)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211204
90, 145 + (170dd)	2009042889795473718562376631715120443361 (40dd) $(2) \times (2 \cdot 13 \cdot 139^2 \cdot 937 \cdot 5393 \cdot 9467 \cdot 295777 \cdot 1447913 \cdot 97603863479)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211204
69, 143 - (163dd)	2075379844525804919871899022208031 (34dd) $(2) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 53 \cdot 1033 \cdot 205619 \cdot 390877 \cdot 7049473 \cdot 1858484281)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211205
90, 133 - (159dd)	175414526455755979897660780920920689 (36dd) $(2^2) \times (2^2 \cdot 13 \cdot 139 \cdot 487 \cdot 12391 \cdot 16945133 \cdot 22387667 \cdot 2650319803)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 7$	211205
67, 143 + (156dd)	6944349476449829353847278082066102027988051029 (46dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 1607 \cdot 13147 \cdot 78713 \cdot 125497 \cdot 284173 \cdot 5469889 \cdot 9671791 \cdot 184441967)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	211207
96, 145 - (142dd)	859157706616161686886846187181029171 (36dd) $(2) \times (2^2 \cdot 3^2 \cdot 12619 \cdot 708839 \cdot 19993777 \cdot 27569123 \cdot 2420193299)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211208
97, 145 - (211dd)	17794182375018474055246335530679440628632195141 (47dd) $(2) \times (2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 107 \cdot 3769 \cdot 4127 \cdot 84713 \cdot 105389 \cdot 1981159 \cdot 10157729 \cdot 46636041451)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211213
61, 148 + (157dd)	38086824690111916319348286749664525448870608289 (47dd) $(2^2) \times (2^4 \cdot 3^2 \cdot 997 \cdot 2917 \cdot 79823 \cdot 202907 \cdot 2167183 \cdot 4802927 \cdot 7505633 \cdot 17968289)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 37$	211215
85, 143 + (165dd)	595429189435570985758361988110442572149227287 (45dd) $(2) \times (2^4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 431 \cdot 683 \cdot 7883 \cdot 17921 \cdot 137369 \cdot 177979 \cdot 232081 \cdot 39134182489)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 13$	211215
90, 145 + (131dd)	564048033596387231766876553229115117359161 (42dd) $(2^3) \times (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 199 \cdot 241781 \cdot 2572373 \cdot 4237813 \cdot 10764197 \cdot 17344468319)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 5$	211220
88, 145 + (199dd)	3305395902472416582389095389547828872322740179581 (49dd) $(2^2) \times (2^4 \cdot 13^2 \cdot 29 \cdot 613 \cdot 1433 \cdot 7127 \cdot 25423 \cdot 148921 \cdot 2692159 \cdot 24762499 \cdot 6669103631)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 29$	220103
69, 145 - (196dd)	43973740306053298612759811200943577004074844768891 (50dd) $(2) \times (2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 1381 \cdot 834469 \cdot 1456837 \cdot 3504673 \cdot 29722321 \cdot 37912759 \cdot 6377193661)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 29$	220103
96, 143 - (192dd)	1838435702793007470702888346700618324463818611 (46dd) $(2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 179 \cdot 811 \cdot 12541 \cdot 124919 \cdot 1160519 \cdot 6762571 \cdot 30906133 \cdot 128183399)$	$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	220104
71, 143 - (173dd)	197679349184370896695764017247401612048842003 (45dd) $(2 \cdot 3) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 101^2 \cdot 293 \cdot 1831 \cdot 1489937 \cdot 2513249 \cdot 17506441 \cdot 11213111743)$	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 + 11$	220107
80, 140 + (145dd)	6919402781603403339139011273606732443068241 (43dd) $(2) \times (2^2 \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 353 \cdot 631 \cdot 1789 \cdot 42841 \cdot 594917 \cdot 4403857 \cdot 94579351)$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $Z^2 + 7$	220109
517, 67 - (180dd)	43673375920790464063197381024563082702565341226931 (50dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3^5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31^2 \cdot 47 \cdot 40151 \cdot 500389 \cdot 717341 \cdot 761489 \cdot 1183837 \cdot 51181421299)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $Z^3 + Z^2 - 22Z + 5$	220112
69, 145 + (136dd)	2312935912505799788408225250017130492549337428188531 (52dd) $(2) \times (2^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 66499 \cdot 236681 \cdot 351023 \cdot 1047667 \cdot 3274151 \cdot 18302677 \cdot 135555908207)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 29$	220115
93, 143 + (157dd)	169596120610870220111027662114795982337359989 (45dd) $(2) \times (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 20507 \cdot 38543 \cdot 538397 \cdot 676979 \cdot 6587479 \cdot 7787239 \cdot 81970891)$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $Z^2 - 13$	220118
97, 143 + (168dd)	845758389579765061876120422286830800293217720347603 (51dd) $(2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 47 \cdot 2281 \cdot 3323 \cdot 9643 \cdot 20507 \cdot 199523 \cdot 617473 \cdot 697373 \cdot 8843827 \cdot 58519211)$	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 - 13$	220131

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	$\mathcal{T}, \mathcal{P}(Z)$	when
74, 140 + (145dd) $\langle 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 2341 \cdot 5827 \cdot 1946183 \cdot 2736637 \cdot 3982073 \cdot 9183641 \cdot 71640433219 \rangle$	54246844404658638528674908309645373687448082321 (47dd)	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $Z^2 + 7$	220202
93, 143 + (113dd) $\langle 2 \rangle \times \langle 2^3 \cdot 16381 \cdot 344171 \cdot 424169 \cdot 786629 \cdot 1944853 \cdot 8991293 \cdot 290928949 \rangle$	153122642255322360024123283032581744979354437 (45dd)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $Z^2 - 13$	220203

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	\mathcal{T}	when
77, 143 - (176dd) $\langle 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 181 \cdot 271 \cdot 1373 \cdot 1260713 \cdot 5524403 \cdot 9530429 \cdot 15608017 \cdot 18453683327 \rangle$	137201052117407925881545888920089773400305732245589 (51dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220120
77, 139 + (194dd) $\langle 2 \rangle \times \langle 2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 1787 \cdot 1590643 \cdot 13909117 \cdot 29656051 \cdot 39410677 \cdot 272067307 \rangle$	29819053207472296379159807374330473560010495877 (47dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220121
92, 137 + (231dd) $\langle 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 103 \cdot 1889 \cdot 4073 \cdot 203617 \cdot 293507 \cdot 531667 \cdot 19257083 \cdot 526125653951 \rangle$	6199291385330615425337006319139287283518435008717 (49dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220122
70, 149 - (223dd) $\langle 2 \rangle \times \langle 2^2 \cdot 3^6 \cdot 11 \cdot 89 \cdot 227 \cdot 443 \cdot 33749 \cdot 219353 \cdot 8522959 \cdot 35764961 \cdot 19080765961 \rangle$	24721694635072630263761573923973931287719915271 (47dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220123
82, 134 + (234dd) $\langle 2^4 \cdot 3^2 \cdot 29 \cdot 16001 \cdot 48187 \cdot 107699 \cdot 7847317 \cdot 8143147 \cdot 15948781 \cdot 6532844293 \rangle$	2308832612697750858892228636505628255991181169289 (49dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220123
71, 139 + (248dd) $\langle 2^2 \cdot 3 \rangle \times \langle 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 619 \cdot 761 \cdot 39719 \cdot 639959 \cdot 1003411 \cdot 12898657 \cdot 75813901489 \rangle$	33836890734036629261924516665840404273381301 (44dd)	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	220124

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	family	when
69, 139 + (166dd)	$79326889026747678777319906826600442482951$ (41dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 14699 \cdot 37591 \cdot 1196869 \cdot 2181937 \cdot 8831281 \cdot 129686565067)$	S_{11}	220114
52, 149 + (168dd)	$69893670127458726482916735317225009349257$ (41dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 59 \cdot 103 \cdot 293 \cdot 1699 \cdot 1747 \cdot 4933 \cdot 909031 \cdot 1620469 \cdot 56874054581)$	S_{11}	220114
79, 139 + (171dd)	$596931162601751923425190492553980981393$ (39dd) $(2^3) \times (2^3 \cdot 7^2 \cdot 269^2 \cdot 1721 \cdot 19543 \cdot 246683 \cdot 440239 \cdot 720184550543)$	S_{11}	220114
96, 142 + (192dd)	$21914325961787568728861398613285221$ (35dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 229 \cdot 12343 \cdot 8053337 \cdot 15452729 \cdot 15780243509)$	S_{11}	220114
72, 149 - (187dd)	$315326499129576793697964957827057$ (33dd) $(2^2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 307 \cdot 1117 \cdot 9733 \cdot 85829 \cdot 980957 \cdot 30469129)$	S_{11}	220114
72, 149 - (155dd)	$357142978908396162737234145844921$ (33dd) $(2) \times (2 \cdot 31 \cdot 7867 \cdot 136777 \cdot 2048327 \cdot 7010291 \cdot 186407281)$	S_{11}	220114
93, 137 - (197dd)	$223183212056174382934792667$ (27dd) $(2^5 \cdot 13 \cdot 1621 \cdot 49033 \cdot 1982447 \cdot 3404827603)$	S_{11}	220114
86, 134 + (186dd)	$49658691102011202484249214533$ (29dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 151 \cdot 587 \cdot 2591 \cdot 39509 \cdot 896442761)$	S_{11}	220114
86, 145 + (164dd)	$191954653450671186092815000481$ (30dd) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 179 \cdot 5573 \cdot 389461 \cdot 530177 \cdot 12943127117)$	S_{11}	220114
82, 146 + (198dd)	$120132845434010252906182780753$ (30dd) $(2^2 \cdot 887 \cdot 10067 \cdot 26813 \cdot 1767407 \cdot 70973480791)$	S_{11}	220114
89, 131 + (207dd)	$35636694942516749949880764536158589$ (35dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 17029 \cdot 629467 \cdot 1321079 \cdot 77463138941)$	S_{11}	220115
74, 139 + (205dd)	$59091747801762858535122297401611962258962823803$ (47dd) $(2^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 141991 \cdot 2297863 \cdot 4360033 \cdot 12672377 \cdot 25491761 \cdot 232945920323)$	S_{11}	220115
89, 131 + (173dd)	$15673997760117375613229343840498013333349$ (41dd) $(2^2) \times (2^3 \cdot 61 \cdot 739 \cdot 52609 \cdot 1395077 \cdot 1542589 \cdot 12281407 \cdot 7814459579)$	S_{11}	220115
84, 134 + (224dd)	$42401931560000268689457878037331393$ (35dd) $(2^4 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 521 \cdot 1367 \cdot 108139 \cdot 230833 \cdot 5931799 \cdot 440877457)$	S_{11}	220116
69, 139 - (191dd)	$17987049449879167615904106068499621810958643$ (44dd) $(2) \times (2^3 \cdot 11^2 \cdot 199 \cdot 2287 \cdot 36433 \cdot 596081 \cdot 7710853 \cdot 21111049 \cdot 5774613001)$	S_{11}	220116
85, 134 + (213dd)	$64480050612882732136749348406628183869$ (38dd) $(2 \cdot 3) \times (2 \cdot 3^2 \cdot 251 \cdot 21269 \cdot 3369409 \cdot 11717963 \cdot 13937953 \cdot 203224457)$	S_{11}	220116
58, 149 + (222dd)	$414001338870756676319995466729941$ (33dd) $(2) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 12527 \cdot 3846841 \cdot 20845273 \cdot 175228816369)$	S_{11}	220116
68, 149 + (212dd)	$86480478473510065337924664955072005883$ (38dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3 \cdot 13859 \cdot 3597569 \cdot 5447051 \cdot 24276271 \cdot 68317569857)$	S_{11}	220116
74, 149 + (217dd)	$41130573283150199415742844749$ (29dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 71 \cdot 45061 \cdot 271753 \cdot 2102207 \cdot 1875316253)$	S_{11}	220116
82, 149 - (218dd)	$1847780467261495734449284245985360331$ (37dd) $(2^7 \cdot 3 \cdot 2539 \cdot 25349 \cdot 93889 \cdot 673349 \cdot 12534209 \cdot 94350401)$	S_{11}	220116
82, 139 - (230dd)	$698364368829592727236975661223389491$ (37dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3^2 \cdot 1723 \cdot 3703109 \cdot 6993839 \cdot 23121011 \cdot 11751285181)$	S_{11}	220116
75, 142 + (216dd)	$6589446638092599241138023917$ (28dd) $(2^6 \cdot 29 \cdot 9377 \cdot 34513 \cdot 198479 \cdot 55272585847)$	S_{11}	220116
69, 139 - (224dd)	$313626806309044386261774730369151$ (33dd) $(2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 311 \cdot 2129 \cdot 11369 \cdot 548441 \cdot 757481 \cdot 5289503)$	S_{11}	220116
97, 149 + (215dd)	$33182756619242790311549689795255613$ (35dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 139 \cdot 181 \cdot 197 \cdot 311 \cdot 20593 \cdot 1063441 \cdot 135401299063)$	S_{11}	220116
74, 137 + (227dd)	$2048174726214184971516279798069913$ (34dd) $(2) \times (2^5 \cdot 3 \cdot 941 \cdot 43961 \cdot 557759 \cdot 8667961 \cdot 53339022479)$	S_{11}	220116
99, 146 + (231dd)	$109656245683327340782944722989$ (30dd) $(2^2 \cdot 5 \cdot 4019 \cdot 44623 \cdot 113489 \cdot 224359 \cdot 1200685709)$	S_{11}	220116
84, 139 - (227dd)	$12416248099437566248707849347947447$ (35dd) $(2^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 48259 \cdot 678421 \cdot 1344509 \cdot 162931793303)$	S_{11}	220116
84, 139 - (193dd)	$127557569748786523440396285491916792547$ (39dd) $(2^3 \cdot 3^3 \cdot 73 \cdot 197 \cdot 283 \cdot 10301 \cdot 21613 \cdot 6510073 \cdot 7646179 \cdot 13093393)$	S_{11}	220116
88, 137 + (231dd)	$17986962943353259149414934888573541222161$ (41dd) $(2 \cdot 3) \times (2^3 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 37 \cdot 389 \cdot 401 \cdot 57223 \cdot 3302939 \cdot 8434963 \cdot 1350628841)$	S_{11}	220116
53, 149 + (216dd)	$49824306994528881877410440109535859298766931$ (44dd) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 2671 \cdot 18869 \cdot 40499 \cdot 4033853 \cdot 5213777 \cdot 11264959 \cdot 1430999767)$	S_{11}	220116
77, 139 - (217dd)	$2913947035781063821596011687931095464368209$ (43dd) $(2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1823 \cdot 4231 \cdot 24359 \cdot 159431 \cdot 2112191 \cdot 44658907 \cdot 1841579321)$	S_{11}	220116
84, 142 + (219dd)	$271893653179988144731484255881181816283712096681$ (48dd) $(2) \times (2 \cdot 7 \cdot 137 \cdot 607 \cdot 3853 \cdot 1069273 \cdot 2749679 \cdot 7486327 \cdot 8924701 \cdot 154276474453)$	S_{11}	220116
87, 139 + (225dd)	$205388471386709230099710142427317022684953$ (42dd) $(2^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 887 \cdot 1487 \cdot 10529 \cdot 1328477 \cdot 1854709 \cdot 3696557 \cdot 12508703)$	S_{11}	220116
83, 149 + (214dd)	$723577182616554422038709801648887$ (33dd) $(2) \times (2^2 \cdot 31 \cdot 4759 \cdot 340931 \cdot 464747 \cdot 16010627 \cdot 241671841)$	S_{11}	220116
71, 149 + (231dd)	$1327578397518109970479951051$ (28dd) $(2) \times (2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 43 \cdot 223 \cdot 12931007 \cdot 218503516873)$	S_{11}	220116

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	family	when
54, 149 + (228dd)	1525947144376237945730724897659097491 (37dd) $(2^6 \cdot 3 \cdot 71 \cdot 33797 \cdot 74383 \cdot 1415221 \cdot 39335017 \cdot 799879313)$	S_{11}	220116
54, 149 + (192dd)	24982548838086157051576308905145911958421778531 (47dd) $(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 277 \cdot 60013 \cdot 179327 \cdot 943357 \cdot 4542001 \cdot 13200221 \cdot 137194814203)$	S_{11}	220116
92, 131 - (231dd)	5294940733976016020635573563645720161 (37dd) $(2^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 137 \cdot 919 \cdot 12281 \cdot 21491 \cdot 77369 \cdot 76596830881)$	S_{11}	220116
67, 149 - (230dd)	913701696563975714033091493225254422205593287 (45dd) $(2) \times (2^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 521 \cdot 887 \cdot 38977 \cdot 79393 \cdot 79399 \cdot 5144093 \cdot 16035866953)$	S_{11}	220116
79, 137 + (228dd)	15508588395754819860032265940360352233975681 (44dd) $(2) \times (2^4 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 3307 \cdot 22817 \cdot 24329 \cdot 37097 \cdot 3687401 \cdot 20724251 \cdot 1633775719)$	S_{11}	220116
87, 139 + (184dd)	374627063928330432738264682702011658979991767 (46dd) $(2^5 \cdot 3^2 \cdot 79 \cdot 271 \cdot 25541 \cdot 320317 \cdot 414101 \cdot 873343 \cdot 2684753 \cdot 76488639113)$	S_{11}	220116
92, 137 - (229dd)	68741933196114943137300875603 (29dd) $(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 37 \cdot 157 \cdot 677 \cdot 23677 \cdot 131321 \cdot 4684784249)$	S_{11}	220116
80, 137 - (239dd)	764876847089550595623709963544321 (33dd) $(2) \times (2^{12} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 109 \cdot 251 \cdot 277 \cdot 457 \cdot 173023 \cdot 26575512637)$	S_{11}	220117
76, 139 - (239dd)	2509783409036652433415112517561 (31dd) $(2^3 \cdot 23 \cdot 353653 \cdot 595207 \cdot 925051 \cdot 70049875451)$	S_{11}	220117
68, 142 + (197dd)	31652779243310772656750398477 (29dd) $(2) \times (2^5 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 151 \cdot 1215463 \cdot 4887709 \cdot 2980136213)$	S_{11}	220117
80, 139 + (213dd)	628775525747747428878554121326080661368988704367 (48dd) $(2^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 347 \cdot 839 \cdot 8161 \cdot 113623 \cdot 1912553 \cdot 4209991 \cdot 16022309 \cdot 102120329)$	S_{11}	220117
87, 149 + (238dd)	334811947595854120996770967 (27dd) $(2^8 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 653 \cdot 14540863 \cdot 6653747141)$	S_{11}	220117
68, 142 + (231dd)	13823119660712662008022831172622217 (35dd) $(2^5 \cdot 5 \cdot 727 \cdot 26141 \cdot 42841 \cdot 846067 \cdot 2793179 \cdot 44902069)$	S_{11}	220117
73, 142 + (239dd)	10098261615225106587019034717 (29dd) $(2^4 \cdot 89 \cdot 263 \cdot 383 \cdot 125959 \cdot 5080237 \cdot 110019313)$	S_{11}	220117
73, 142 + (211dd)	4654023020427629694071882457961055105609 (40dd) $(2^2) \times (2^2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 1279 \cdot 8971 \cdot 78179 \cdot 14512357 \cdot 29777023 \cdot 2294774683)$	S_{11}	220117
87, 134 + (242dd)	98174636130339458381137281532902315113 (38dd) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 241 \cdot 1171 \cdot 10477 \cdot 288293 \cdot 15861457 \cdot 295749737377)$	S_{11}	220117
52, 149 - (238dd)	9504145515920220202657769053720536529 (37dd) $(2^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 166843 \cdot 647719 \cdot 3440077 \cdot 4746431 \cdot 28797707)$	S_{11}	220117
63, 142 + (243dd)	499347379550181541744752317269 (30dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 197 \cdot 277 \cdot 25127 \cdot 71941 \cdot 7945849 \cdot 53090659)$	S_{11}	220117
91, 139 + (244dd)	114919481974342146839273660211399609467983744846534603 (54dd) $(2) \times (2^4 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 173 \cdot 919 \cdot 73369 \cdot 94781 \cdot 630919 \cdot 1291117 \cdot 1337363 \cdot 7448509 \cdot 163456253)$	S_{11}	220117
65, 142 + (232dd)	16543228921610947547423319808009757592543469 (44dd) $(3) \times (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 23357 \cdot 83689 \cdot 205097 \cdot 254773 \cdot 35704729 \cdot 260883587927)$	S_{11}	220117
76, 139 + (244dd)	516149857905663948423972078277609881449 (39dd) $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 457 \cdot 701 \cdot 1109 \cdot 1609 \cdot 77269 \cdot 2087909 \cdot 3787097 \cdot 5864489)$	S_{11}	220117
83, 134 + (136dd)	5353720031116679424387066050214337 (34dd) $(2^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 251 \cdot 337 \cdot 79397 \cdot 1012507 \cdot 3820319 \cdot 203643131)$	S_{11}	220117
83, 134 + (239dd)	91002962967364396509632176333 (29dd) $(2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 75353 \cdot 84533 \cdot 1707707 \cdot 7661127787)$	S_{11}	220117
68, 142 + (169dd)	19468423591945940785265108842305714323526289 (44dd) $(2) \times (2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 449 \cdot 21383 \cdot 78839 \cdot 359027 \cdot 3411649 \cdot 17114429 \cdot 1123564987)$	S_{11}	220117
90, 139 + (241dd)	2150378303491644833157192790279927 (34dd) $(2^3 \cdot 199 \cdot 1269013 \cdot 9441227 \cdot 9795209 \cdot 11509688987)$	S_{11}	220117
83, 134 + (170dd)	2324888459241523990334435780743469 (34dd) $(2) \times (2^3 \cdot 5 \cdot 1709 \cdot 7933 \cdot 1504991 \cdot 8027849 \cdot 177418751927)$	S_{11}	220117
83, 139 + (233dd)	36625164225110586401367754245157 (32dd) $(2^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 1231 \cdot 3041 \cdot 146749 \cdot 20461193 \cdot 4403188577)$	S_{11}	220117
86, 139 - (244dd)	5573224213511683912426525754466119318810153 (43dd) $(2^5 \cdot 571 \cdot 5443 \cdot 29429 \cdot 864307 \cdot 10488781 \cdot 13454213 \cdot 15611881367)$	S_{11}	220117
95, 142 + (243dd)	10085922450540433565244186723577 (32dd) $(2) \times (2^7 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 271 \cdot 32693 \cdot 488321 \cdot 507404517889)$	S_{11}	220117
62, 146 + (236dd)	71683364969105361862733339919966149 (35dd) $(2) \times (2 \cdot 5^2 \cdot 2683 \cdot 15493 \cdot 80537 \cdot 320317 \cdot 18080459 \cdot 36972371)$	S_{11}	220117
80, 139 + (241dd)	8183498546729728789676899241 (28dd) $(2^3 \cdot 103 \cdot 337 \cdot 3191 \cdot 14629 \cdot 41117 \cdot 60091 \cdot 255511)$	S_{11}	220117
68, 142 + (126dd)	3011632726083334175010295234518818178029 (40dd) $(2) \times (2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 73 \cdot 107 \cdot 971 \cdot 383869 \cdot 1384741 \cdot 21810781 \cdot 13193154319)$	S_{11}	220117
83, 134 + (210dd)	7937310628273890338230982131430409871673 (40dd) $(2^4 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 647 \cdot 40471 \cdot 224897 \cdot 8848453 \cdot 18041563 \cdot 418470571)$	S_{11}	220117
91, 131 + (248dd)	2329966057028384009201034265975365952286201 (43dd) $(2^3) \times (2^6 \cdot 821 \cdot 1499 \cdot 3581 \cdot 92671 \cdot 649511 \cdot 41957147 \cdot 408878441767)$	S_{11}	220118
63, 142 + (214dd)	15949743522706797612257367166134770473 (38dd) $(2) \times (2 \cdot 102071 \cdot 619741 \cdot 7887511 \cdot 36246611 \cdot 220482299371)$	S_{11}	220118

N factor of (dd)	$p \mid N(dd)$	family	when
$87, 134 + (204dd)$ $\langle 2^2 \rangle \times \langle 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 41 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 191 \cdot 631 \cdot 10331 \cdot 39229 \cdot 43445371 \cdot 2840248781 \rangle$	$34202454020527149377831516484061980645737$ (41dd)	S_{11}	220118
$91, 139 - (250dd)$ $\langle 2 \rangle \times \langle 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 787 \cdot 4441 \cdot 296503 \cdot 19074481 \cdot 732819343 \rangle$	$4519483920649446786007684574183$ (31dd)	S_{11}	220118
$96, 134 + (247dd)$ $\langle 2^8 \cdot 11 \cdot 1103 \cdot 115783 \cdot 15469073 \cdot 292032293071 \rangle$	$1624606283502856081380875678929$ (31dd)	S_{11}	220118
$94, 134 + (248dd)$ $\langle 2 \rangle \times \langle 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3041 \cdot 1024159 \cdot 2604559 \cdot 27283591 \cdot 106206343807 \rangle$	$1974464276958891396660765763865448049$ (37dd)	S_{11}	220118
$94, 137 - (247dd)$ $\langle 2^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 7069 \cdot 3328993 \cdot 14536441 \cdot 45097501 \cdot 13687163153 \rangle$	$9870926313672469907167292077290083550749$ (40dd)	S_{11}	220118
$55, 149 + (250dd)$ $\langle 2^4 \cdot 11 \cdot 3511 \cdot 7687 \cdot 1961929 \cdot 8642863 \cdot 111427099859 \rangle$	$8974951723535129435403638112332221$ (34dd)	S_{11}	220118
$94, 131 + (250dd)$ $\langle 2 \cdot 3 \rangle \times \langle 2 \cdot 3 \cdot 2591 \cdot 760231 \cdot 5339311 \cdot 3269068247 \rangle$	$1237726513000116999529829161$ (28dd)	S_{11}	220118
$88, 134 + (245dd)$ $\langle 2^2 \rangle \times \langle 2^3 \cdot 4049 \cdot 77267 \cdot 6534467 \cdot 25763370461 \rangle$	$1685406455599302200184201109$ (28dd)	S_{11}	220118