



**HAL**  
open science

# Génération de maillage quadrangulaire d'un domaine du plan via les équations de Ginzburg-Landau

Victor Blanchi, Etienne Corman, Nicolas Ray, Dmitry Sokolov

## ► To cite this version:

Victor Blanchi, Etienne Corman, Nicolas Ray, Dmitry Sokolov. Génération de maillage quadrangulaire d'un domaine du plan via les équations de Ginzburg-Landau. Journées Françaises d'Informatique Graphique (JFIG2020), Nov 2020, Nancy, France. hal-02992599

**HAL Id: hal-02992599**

**<https://inria.hal.science/hal-02992599v1>**

Submitted on 7 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Génération de maillage quadrangulaire d'un domaine du plan via les équations de Ginzburg-Landau

Victor Blanchi<sup>1</sup>, Étienne Corman<sup>1</sup>, Nicolas Ray<sup>1</sup> et Dmitry Sokolov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, F-54000 Nancy, France

## Abstract

Générer un maillage d'une surface est un pré-requis souvent indispensable à de nombreuses applications. Certaines (la subdivision de surfaces, la simulation de couches limites) nécessitent l'utilisation de maillage quadrangulaire. L'état de l'art procède en trois étapes. Il s'agit d'abord de calculer un champ de croix, puis de l'intégrer pour obtenir une paramétrisation et enfin d'extraire un maillage quadrangulaire à partir de la paramétrisation. Nous montrerons que les deux premières étapes réfèrent aux mêmes équations et peuvent donc être traitées de la même manière. Cette approche permet de résoudre des problèmes (imprécision loin des bords, mauvaise localisation des singularités) qui se posaient jusqu'alors.

## 1. Introduction

Les méthodes de remaillages sont omniprésentes dans l'industrie et leurs robustesses représentent un enjeu central de la recherche. La fiabilité des simulations numériques dépend en effet fortement de la qualité du maillage utilisé. Il existe différents types de maillages, entre autres le maillage triangulaire et quadrangulaire. Ce dernier présenterait de meilleures performances, mais sa génération est plus complexe. Aujourd'hui beaucoup de maillages quadrangulaires sont édités à la main. Plusieurs méthodes ont été développées afin d'automatiser le processus, citons par exemple la méthode de paving [BS91] ou de Q-morph[OSCS99], elles reposent sur des optimisations locales et donnent des résultats qui ne sont pas toujours fiables.

Le présent article traite de l'amélioration d'une méthode existante qui s'appelle la paramétrisation globale [KNP07], cette approche utilise une optimisation globale et donne dans certains cas de bons résultats. L'idée est de calculer une déformation, que l'on appelle *paramétrisation* de la surface à mailler vers une surface de référence : une union de rectangles alignés sur des valeurs entières au bord. On applique ensuite une texture de grille à la surface de référence que l'on tire en arrière pour obtenir une texture de maille sur la surface de départ (cf Figure 1). Enfin, la dernière étape, que l'on ne considérera pas ici est l'extraction d'un maillage à partir de la texture.

Dans cet article nous essayons d'améliorer la seconde étape. Les techniques actuelles permettant de calculer une paramétrisation posent certains problèmes. Elles engendrent effectivement des imprécisions loin des bords, et un mauvais placement des singularités. Nous proposons une méthode permettant de pallier ces différents problèmes.

Toutes les méthodes reposant sur le calcul d'une paramétrisation globale procèdent en trois étapes illustrées par la Figure 2 :

1. *Calcul d'un champ de croix* : Les croix fournissent une direction locale de la maille. Aux sommets du maillage final, les croix sont alignées avec les arêtes du maillage, et à l'intérieur des mailles,

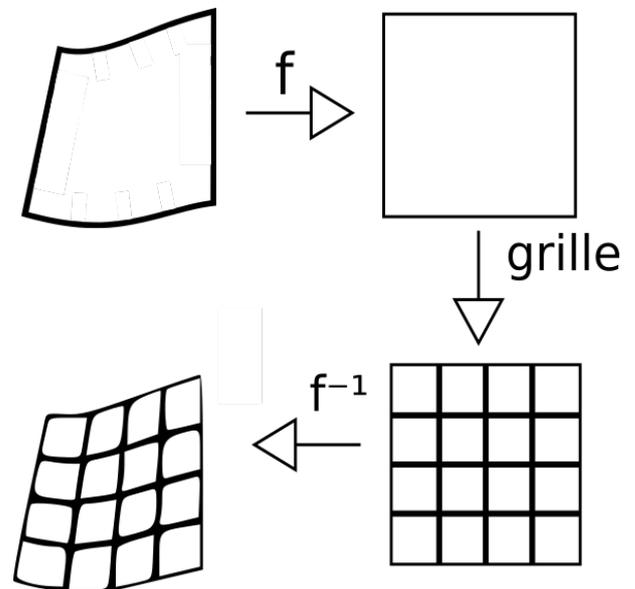


Figure 1: Principe de la paramétrisation globale

le champ de croix correspond à une interpolation continue de l'orientation des croix aux sommets.

2. *Intégration du champ de croix* : Cette étape fournit la déformation de la surface d'origine vers une surface de référence.
3. *Extraction d'un maillage* : La texture de grille obtenue par l'étape précédente ne correspond pas nécessairement à un maillage. Cette étape vise à corriger ce problème. Elle ne sera pas étudiée ici.

Nous verrons que notre approche, basée sur Periodic Global Parameterization (PGP) développé dans [RLL\*06], est fortement liée à la génération de champ de croix et réfère au même problème d'optimisation.

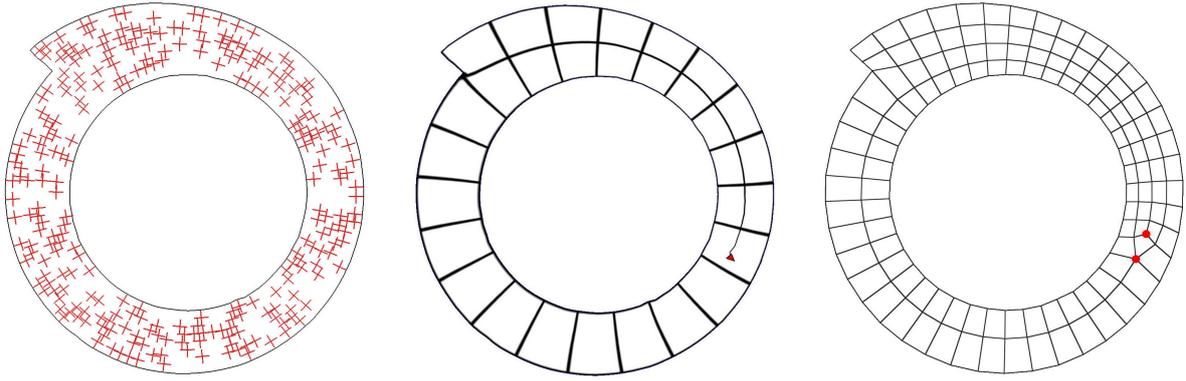


Figure 2: Génération d'un maillage quadrangulaire via la paramétrisation globale. **Gauche** : Un champ de croix donnant l'orientation des mailles. **Milieu** : La paramétrisation globale obtenue fournissant la taille et la position des mailles. Remarquons que ce n'est pas un maillage, mais une texture de grille appliquée sur la surface. Le point rouge représente une singularité de la paramétrisation. **Droite** : Un maillage quadrangulaire extrait de la paramétrisation. La singularité a été remplacée par un dipôle (une paire de sommets de valence 3 et 5 représentés en rouge)

**Champ de Croix:** Une croix est un ensemble de quatre vecteurs unitaires  $\{z_1, z_2, -z_1, -z_2\}$  avec  $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$ . Remarquons qu'une croix est invariante par rotation de  $\pi/2$ . Il s'ensuit qu'un vecteur *unitaire* suffit à représenter une croix : il suffit de le faire tourner trois fois de  $\pi/2$  pour retrouver la croix. Le champ de croix est calculé afin qu'il soit aussi lisse que possible au sens de Dirichlet, c'est à dire en minimisant :

$$z = \operatorname{argmin}_{|z|=1} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 \text{ contraintes aux bords}$$

Cette contrainte sur la norme est problématique pour le calcul d'un bon champ de croix. Une approche classique [RLL\*06; RVAL09; PZ07] est de ne pas en tenir compte, et renormaliser ensuite. Ce n'est pas efficace, dans la mesure où le champ est presque nul loin des bords et donc sujet à des erreurs numériques et des imprécisions quant au placement des singularités. Une méthode proposée par [BLH\*17] permet de résoudre ces problèmes. Elle se base sur les travaux de Ginzburg-Landau et permet de traiter efficacement ce problème d'optimisation (*cf supra*).

Présentons maintenant la technique de Periodic Global Parameterization. Elle est utilisée pour intégrer le champ de croix et obtenir ainsi une paramétrisation. Nous montrerons que cette partie se ramène au même type de problème d'optimisation et peut être résolue via les équations de Ginzburg-Landau.

**Periodic Global Parameterization (PGP) :** Dans la partie précédente nous avons calculé deux champs vectoriels  $z_1$  et  $z_2$  correspondant aux directions de la croix. On intègre ces deux champs vectoriels pour obtenir deux champs scalaires  $(u, v)$ , (ce couple de champs scalaires fournit une paramétrisation en associant à chaque point  $(x, y)$  le point  $(u(x, y), v(x, y))$ ). Les champs  $u$  et  $v$  vérifient :

$$\nabla u = z_1 \text{ et } \nabla v = z_2$$

Pour que l'image de la surface par la paramétrisation  $(u, v)$  soit une réunion de rectangles et que la grille coïncide avec la surface

de référence aux bords, on impose que la valeur de  $u$  ou  $v$  soit entière sur les bords. La grille est ensuite plaquée sur l'image de la déformation de sorte que ses sommets soient sur des points entiers. Ainsi, la grille coïncide avec les bords de la surface.

Le problème est de choisir de bonnes conditions sur les bords, ce qui n'est pas une tâche facile. Une approche pour résoudre ce problème consiste à exécuter l'algorithme sans contraindre les bords. On obtient une surface de référence qui n'est pas nécessairement alignée sur des valeurs entières. Ensuite, on déforme le bord en choisissant la valeur entière la plus proche. La paramétrisation  $(u, v)$  est recalculée en contraignant les bords par les valeurs entières précédemment calculées.

Cette technique possède des limites. Sur des objets présentant des décrochages au niveau du bord, le maillage peut ne pas être satisfaisant. Une autre approche, la Periodic Global Parameterization (PGP) ne nécessite pas de connaître *a priori* la surface de référence. L'idée est de représenter les champs scalaires  $u$  et  $v$  par des fonctions périodiques

$$f_1 = e^{2i\pi u} \text{ et } f_2 = e^{2i\pi v}.$$

Les conditions aux bords s'en trouvent simplifiées puisqu'il suffit d'imposer  $f_1 = 1$  et  $f_2 = 1$  sur les bords. Considérons le champ  $u$ . Celui-ci doit vérifier  $\nabla u = z_1$ . Ainsi,

$$\nabla f_1 = 2i\pi \nabla u f_1 = 2i\pi z_1 f_1$$

Il s'ensuit que  $f_1$  vérifie :

$$\nabla f_1 = 2i\pi z_1 f_1$$

Comme précédemment, pour trouver le champ  $u$ , on minimise l'énergie suivante :

$$\int_{\Omega} |\nabla f_1 - 2i\pi z_1 f_1|^2$$

On cherche  $u$  vérifiant :

$$f_1 = \operatorname{argmin}_{|f_1|=1} \int_{\Omega} |\nabla f_1 - 2i\pi z_1 f_1|^2 \text{ avec } f_1 = 1 \text{ aux bords}$$

## 2. Ginzburg Landau à la rescousse!

Les deux étapes précédentes se ramènent donc au même problème d'optimisation. Dans les deux cas, on essaie de minimiser l'énergie suivante :

$$z = \operatorname{argmin}_{|z|=1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathcal{H}(z)|^2 \text{ contraint aux bords}$$

Où  $\mathcal{H}$  est un opérateur linéaire, c'est à dire  $\nabla$  pour le calcul du champ de croix et  $\nabla - iz_k$  pour l'intégration de la direction du champ. Relâçons la contrainte sur la norme, et cherchons

$$z = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{C}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathcal{H}(z)|^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} P(z)$$

où  $P$  est un terme de pénalité lié à la norme de  $z$ . Choisissons pour  $P$  :

$$P(z) = (|z|^2 - 1)^2.$$

Ce terme (proposé par [BLH\*17] pour le calcul du champ de croix) pénalise les champs dont la norme n'est pas unitaire. Il a été utilisé entre autres par Ginzburg Landau pour modéliser le comportement des spins des électrons. Des résultats théoriques montrent qu'à mesure que  $\epsilon$  tend vers 0, le champ converge presque partout vers un champ unitaire sauf à des points singuliers correspondant à des singularités. L'algorithme tend à minimiser le nombre de singularités présentes dans le champ. Cette propriété est très intéressante pour le placement des singularités du champ de croix, car elles sont précisément localisées.

Concrètement, pour calculer un champ  $z$  qui minimise une telle énergie, on discrétise les fonctions avec la méthode des éléments finis, et on applique la méthode de Newton pour trouver un point extremum de l'énergie. Le terme de pénalité n'étant pas convexe, l'initialisation est importante et il n'y a que peu de garanties sur le minimum atteint. On peut convexifier la fonction de pénalité pour traiter ce problème, ou diminuer très progressivement  $\epsilon$ .

## 3. Résultats

Cet article se concentre sur la deuxième étapes de la génération de maillage par paramétrisation globale : l'intégration des champs de croix. On présente dans la Figure 3 les textures de grille obtenues sur différentes surfaces. Ces surface ne contiennent pas de singularités à l'intérieur pour un soucis de lisibilité. Remarquons que l'algorithme place des singularités de manière optimale afin de conserver une taille de maille régulière. Dans la Figure 4, la méthode classique est comparée à celle implémentée via les équations de Ginzburg-Landau.

## 4. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu'il était possible de ramener les deux premières étapes de la génération de maillages quadrangulaires à un même problème d'optimisation. Celui-ci se résout efficacement en considérant les équations de Ginzburg Landau : cette approche permet d'obtenir de meilleurs résultats.

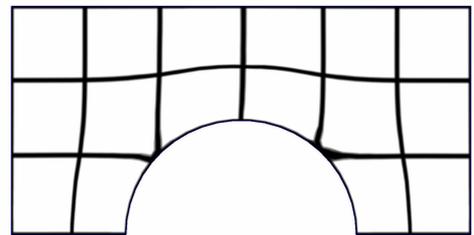
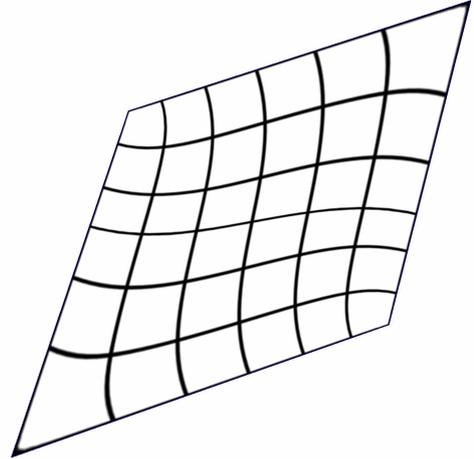
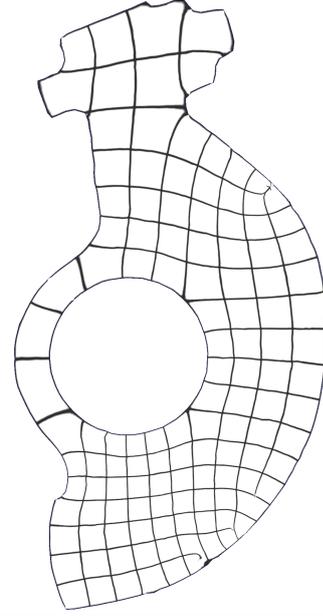


Figure 3: Exemples de paramétrisations obtenues avec la technique PGP et les équations de Ginzburg Landau.

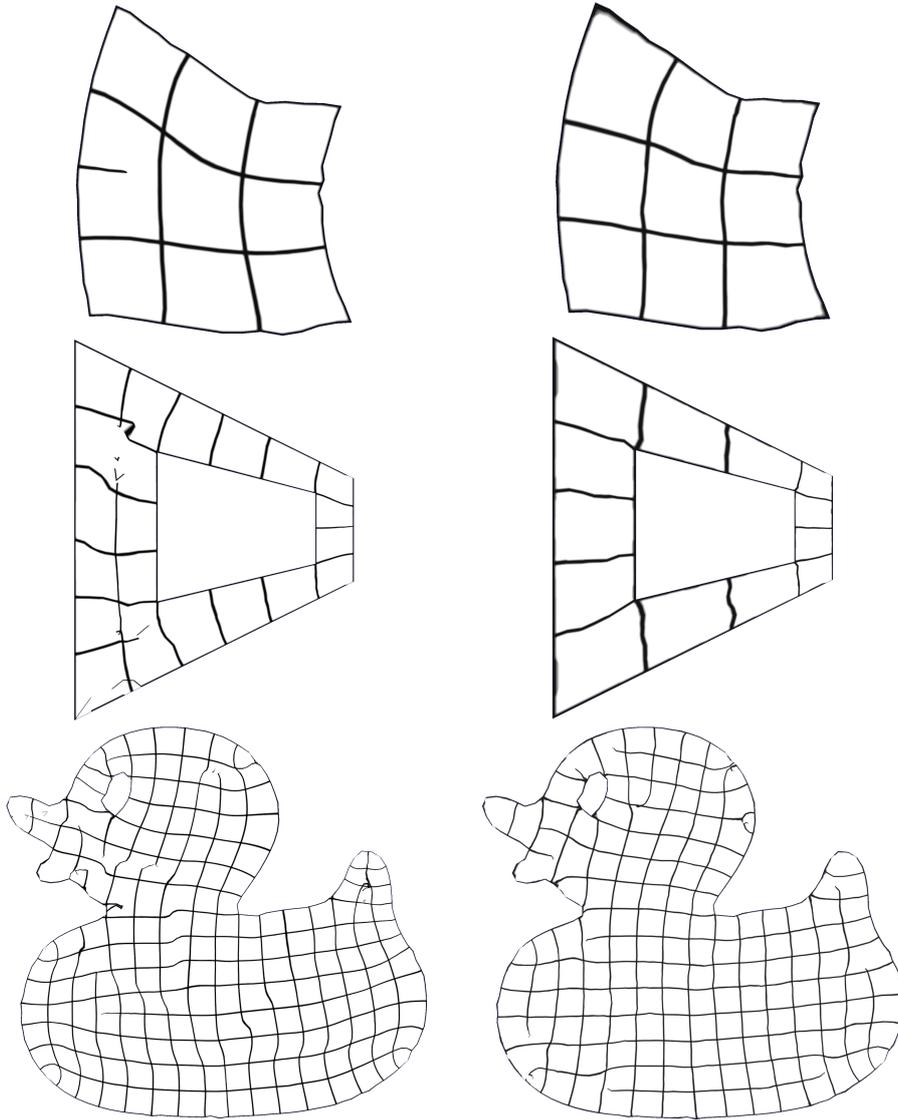


Figure 4: Comparaison entre une étape de la méthode de Periodic Global Parameterization classique (gauche) et via les équations de Ginzburg-Landau (droite). On remarque que notre algorithme enlève les singularités non nécessaires et produit des mailles quadrangulaires de meilleure qualité.

## Références

- [BLH\*17] BEAUFORT, PIERRE-ALEXANDRE, LAMBRECHTS, JONATHAN, HENROTTE, FRANÇOIS et al. "Computing cross fields A PDE approach based on the Ginzburg-Landau theory". In : *Procedia engineering* 203 (2017), p. 219-231 cf. p. 2, 3.
- [BS91] BLACKER, TED D. et STEPHENSON, MICHAEL B. "Paving : A new approach to automated quadrilateral mesh generation". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.4 (1991), p. 811-847. DOI : [10.1002/nme.1620320410](https://doi.org/10.1002/nme.1620320410). eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620320410>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620320410> cf. p. 1.
- [KNP07] KÄLBERER, FELIX, NIESER, MATTHIAS et POLTHIER, KONRAD. "Quadcover-surface parameterization using branched coverings". In : *Computer graphics forum*. T. 26. 3. Wiley Online Library. 2007, p. 375-384 cf. p. 1.
- [OSCS99] OWEN, S. J., STATEN, M. L., CANANN, S. A. et SAIGAL, S. "Q-Morph : an indirect approach to advancing front quad meshing". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44.9 (1999), p. 1317-1340. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990330\)44:9<1317::AID-NME532>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990330)44:9<1317::AID-NME532>3.0.CO;2-N). eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990330%2944%3A9%3C1317%3A%3AAID-NME532%3E3.0.CO%3B2-N>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990330%2944%3A9%3C1317%3A%3AAID-NME532%3E3.0.CO%3B2-N> cf. p. 1.
- [PZ07] PALACIOS, JONATHAN et ZHANG, EUGENE. "Rotational Symmetry Field Design on Surfaces". In : *ACM Trans. Graph.* 26.3 (juil. 2007). ISSN : 0730-0301. DOI : [10.1145/1276377.1276446](https://doi.org/10.1145/1276377.1276446). URL : <http://doi.acm.org/10.1145/1276377.1276446> cf. p. 2.
- [RLL\*06] RAY, NICOLAS, LI, WAN CHIU, LÉVY, BRUNO et al. "Periodic global parameterization". In : *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 25.4 (2006), p. 1460-1485 cf. p. 1, 2.
- [RVAL09] RAY, NICOLAS, VALLET, BRUNO, ALONSO, LAURENT et LEVY, BRUNO. "Geometry-aware Direction Field Processing". In : *ACM Trans. Graph.* 29.1 (déc. 2009), 1 :1-1 :11. ISSN : 0730-0301. DOI : [10.1145/1640443.1640444](https://doi.org/10.1145/1640443.1640444). URL : <http://doi.acm.org/10.1145/1640443.1640444> cf. p. 2.