



HAL
open science

Grands Graphes De Degré Et Diamètre Fixés

Jean-Claude Bermond, Charles Delorme, Jean-Jacques Quisquater

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Charles Delorme, Jean-Jacques Quisquater. Grands Graphes De Degré Et Diamètre Fixés. *Annals of Discrete Mathematics*, 1983, 17, pp.65-73. 10.1016/S0304-0208(08)73374-7. hal-02435537

HAL Id: hal-02435537

<https://inria.hal.science/hal-02435537>

Submitted on 13 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GRANDS GRAPHS DE DEGRÉ ET DIAMÈTRE FIXÉS

J.-C. BERMOND and C. DELORME

Université Paris-Sud, Informatique, Bât. 490, ERA 452 du C.N.R.S., 91405 Orsay, France

J.-J. QUISQUATER

Philips Research Laboratory, Av. van Becelaere 2, B-1170 Brussels, Belgium

The following problem arises in telecommunication networks: given Δ , the maximum degree, and D , the diameter, find graphs having the greatest possible number of vertices. We give here two constructions improving earlier results and we present an extended table with the best known values.

1. Introduction

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, non orienté, où X désigne l'ensemble des sommets et E celui des arêtes. La *distance* entre deux sommets x et y de G , notée $\delta(x, y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne entre x et y . Le *diamètre* D du graphe est défini par $D = \max_{(x,y) \in X^2} \delta(x, y)$. Le *degré* $d(x)$ du sommet x est le nombre de sommets adjacents à x et Δ désigne le degré maximum de G .

Nous nous intéressons au problème suivant (appelé ' (Δ, D) -graph problem' dans la littérature): trouver le nombre maximum $n(\Delta, D)$ de sommets d'un graphe de degré maximum Δ et de diamètre D . Ce problème se pose dans les réseaux de communications (ou réseaux de microprocesseurs): les sommets représentent les stations ou processeurs et les arêtes, les liaisons bilatérales entre ces stations; le degré d'un sommet est le nombre de canaux bidirectionnels d'une station et le diamètre représente le maximum de liaisons (ou de stations intermédiaires plus un) à utiliser pour transmettre un message.

Ce problème semble avoir été considéré pour la première fois dans la littérature par Elspas [11]. La table de Storwick [19] résume les diverses contributions jusqu'en 1970. Récemment, ces résultats ont été améliorés par divers auteurs, e.g. Memmi et Raillard [16], Arden et Lee [1], Leland, Finkel, Qiao, Solomon et Uhr [15] et les auteurs de [4], [5], [9], [10], [18].

Une borne théorique sur $n(\Delta, D)$ a été donnée par Moore (voir [6] ou [7])

$$n(2, D) \leq 2D + 1,$$

et pour $\Delta > 2$,

$$n(\Delta, D) \leq (\Delta(\Delta - 1)^D - 2)/(\Delta - 2).$$

Il existe des graphes, appelés graphes de Moore, pour lesquels il y a égalité dans la formule ci-dessus: il s'agit des $(2D + 1)$ -cycles pour $\Delta = 2$, des $(\Delta + 1)$ -cliques pour $D = 1$, du graphe de Petersen à 10 sommets pour $\Delta = 3$ et $D = 2$, du graphe d'Hoffman–Singleton à 50 sommets pour $\Delta = 7$ et $D = 2$ et, peut-être, d'un graphe à 3250 sommets pour $\Delta = 57$ et $D = 2$.

La recherche de la valeur exacte de $n(\Delta, D)$ apparaît comme un problème difficile (voir [3]). On s'est donc intéressé à construire des graphes de degré maximum et diamètre donnés ayant un grand nombre de sommets. Le but de cet article est de donner la table des meilleures valeurs connues actuellement. Une bonne partie provient d'autres articles, essentiellement [4], [5], [9], [10] et [18]. De plus, nous donnons deux théorèmes nouveaux, qui permettent d'améliorer certaines valeurs.

2. Nouvelles constructions

Théorème 1. Soit G_1 , un graphe dont l'ensemble X des sommets a n_1 éléments, de diamètre D_1 et de degré maximum Δ_1 . Soit $\Delta \geq \Delta_1$. Soit G_2 un graphe à n_2 sommets, de diamètre D_2 et de degré maximum au plus $n_1\Delta - \sum_{x \in X} d_1(x)$, où d_1 est le degré dans G_1 . Alors, il existe un graphe, noté $G_1[G_2]$, ayant n_1n_2 sommets, de degré maximum Δ et de diamètre au plus $(D_1 + 1)(D_2 + 1) - 1$.

Preuve. Soit X (resp. Y) l'ensemble des sommets de G_1 (resp. G_2). Le graphe G aura pour ensemble de sommets le produit $X \times Y$. Les arêtes sont de deux sortes:

(1) Les arêtes $\{(x, y)(x', y)\}$ avec $\{x, x'\}$ arête de G_1 (on a donc n_2 copies de G_1).

(2) Pour décrire l'autre sorte d'arêtes, associons à chaque sommet y de G_2 une application $f_y : \Gamma_2(y) \rightarrow X$ telle que pour tout x on ait $|f_y^{-1}(x)| \leq \Delta - d_1(x)$. Une telle application existe car $|\Gamma_2(y)| \leq \Delta_2 \leq \sum_{x \in X} (\Delta - d_1(x))$. Les arêtes de la deuxième sorte sont alors du type $\{(f_y(y'), y), (f_{y'}(y), y')\}$, où $\{y, y'\}$ est une arête de G_2 .

Le graphe G ainsi obtenu a n_1n_2 sommets; son degré maximum est au plus Δ (le degré du sommet (x, y) est $d_1(x) + |f_y^{-1}(x)| \leq \Delta$). Cherchons son diamètre. Soient (x, y) et (x', y') deux sommets du graphe. Il existe une chaîne de longueur $D \leq D_2'$ reliant y à y' dans G_2 ; soit $y = y_0, y_1, \dots, y_D = y'$ cette chaîne. La distance de $(f_{y_i}(y_{i-1}), y_i)$ à $(f_{y_i}(y_{i+1}), y_i)$ est au plus D_1 , de même que la distance de (x, y) à $(f_y(y_1), y)$ et celle de (x', y') à $(f_{y'}(y_{D-1}), y')$. On a ainsi formé un chemin de longueur au plus $D_1(D + 1) + D$ entre (x, y) et (x', y') ; le diamètre est, donc, au plus $D_1(D_2 + 1) + D_2 = (D_1 + 1)(D_2 + 1) - 1$. \square

Exemples. (Les notations utilisées sont détaillées à la fin de cet article.)

En Fig. 1, nous avons représenté le graphe $G = G_1[G_2]$, avec

$$G_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ / \quad | \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right]$$

et $G_2 = K_7$, $\Delta = 3$. Les sommets de K_7 sont notés $0, 1, \dots, 6$ et $f_y(y') = \lceil z/2 \rceil$ où $1 \leq z \leq 6$ et $y + z \equiv y' \pmod{7}$. Le graphe G , de diamètre 5, a 28 sommets de degré 3.

Dans le cas particulier où G_2 est le graphe complet, on retrouve une construction due à Quisquater [18]: par exemple, en prenant pour G_1 le graphe d'Hoffman–Singleton à 50 sommets, de degré 7 et de diamètre 2, et pour G_2 , le graphe K_{51} , on obtient un graphe à 2550 sommets noté $HS[K_{51}]$, de degré maximum 8 et de diamètre 5. Ce dernier graphe a aussi été trouvé par Uhr (voir [15]).

D'autres résultats sont donnés à la Table 3: par exemple, soient G_1 le graphe d'Hoffman–Singleton et G_2 le graphe P_{149} obtenu comme graphe quotient du graphe d'incidence du plan projectif P d'ordre 149; le graphe G_2 a $149^2 + 149 + 1 = 22351$ sommets, de degré $\Delta_2 = 150$, et est de diamètre 2. Soit $\Delta = 10$, $n_1(\Delta - 7) = 150 = \Delta_2$. Le graphe G est de degré 10, de diamètre 8 et a 1117550 sommets: cette valeur est à comparer avec le graphe à 19305 sommets de la table de Storwick [19] ou avec le graphe à 745104 sommets de Bermond, Delorme et Farhi [4].

Si on prend pour G_1 le graphe à 4680 sommets de notre table 3, de degré 12 et diamètre 4, on peut montrer que ce graphe a 27820 arêtes. Soit $\Delta = 13$ et $G_2 = K_{5201}$. On a $\Delta_2 = 5200$ et $n_1\Delta - \sum d(x) = 60840 - 55640 = 5200$. Le graphe G a donc 24340680 sommets et est de diamètre 9.

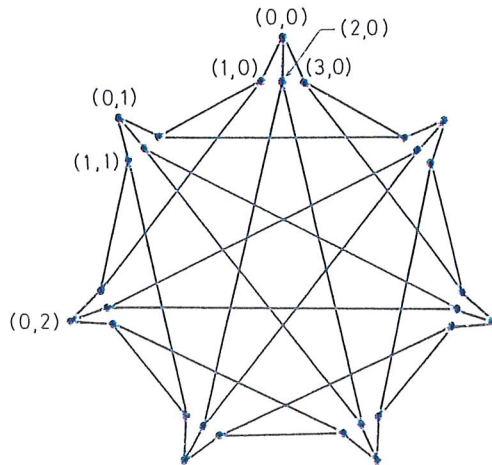


Fig. 1.

D'autres exemples figurent encore dans la Table 3. Pour cela, nous avons besoin de connaître les valeurs de $t = n_1\Delta_1 - \sum_{x \in X} d_1(x)$ pour certains graphes: par exemple,

$$t(P'_q) = q + 1, \quad t(Q'_q) = q^2 + 1,$$

pour G_1 , le graphe à 715 sommets, de degré 11 et de diamètre 3, on a $t(G_1) = 585$,

pour G_1 , le graphe à 910 sommets, de degré 14 et de diamètre 3, on a $t(G_1) = 2340$.

Remarque. Le choix de la fonction f permet bien souvent de construire plusieurs graphes différents ayant les mêmes paramètres.

Corollaire. Lorsque le degré $\Delta \rightarrow \infty$, alors $\liminf(n(\Delta, 5)\Delta^{-5}) \geq 4^4/5^5$.

Preuve. Prenons pour graphe G_1 , le graphe P'_q associé à un plan projectif de diamètre 2, de degré $q + 1$ et ayant $q^2 + q + 1$ sommets: un tel graphe existe si q est une puissance de premier. Posons $q + 1 = 4\Delta/5$. Pour G_2 , prenons le graphe complet sur $\Delta(q^2 + q + 1)/5 + 1$ sommets. On a bien $\Delta_2 \leq (q^2 + q + 1)\Delta - 4\Delta(q^2 + q + 1)/5$. Le graphe $G_1[G_2]$ est de degré maximum Δ , de diamètre 5 et a $\Delta(q^2 + q + 1)^2/5 + q^2 + q + 1 = (4^4/5^5)\Delta^5 + \varepsilon(\Delta)\Delta^5$ sommets où $\varepsilon(\Delta) \rightarrow 0$ quand $\Delta \rightarrow \infty$. Donc, $\liminf(n(\Delta, 5)\Delta^{-5}) \geq 4^4/5^5$. \square

Notons que la meilleure borne connue auparavant était $1/32$ [10].

Théorème 2. Soient G_1 et G'_1 deux graphes ayant pour ensembles de sommets respectivement X et X' , avec $|X| = n_1$ et $|X'| = n'_1$, de degrés maxima Δ_1 et Δ'_1 et de diamètres D_1 et D'_1 , respectivement. Soient $\Delta > \Delta_1$ et $\Delta > \Delta'_1$. Soit G_2 un graphe biparti, ayant pour ensemble de sommets $Y \cup Y'$ avec Y, Y' stables et $|Y| = n_2$ et $|Y'| = n'_2$, de diamètre D_2 et tel que le degré d'un sommet de Y soit compris entre n_1 et $n_1\Delta - \sum_{x \in X} d_1(x)$ et le degré d'un sommet de Y' soit compris entre n'_1 et $n'_1\Delta - \sum_{x' \in X'} d'_1(x')$ (où d_1 (resp. d'_1) désigne le degré dans G_1 (resp. G'_1)). Alors on peut construire un graphe noté $(G_1, G'_1)[G_2]$ ayant $n_1n_2 + n'_1n'_2$ sommets, de degré maximum Δ et de diamètre au plus $D_2 + \lceil D_2/2 \rceil \sup(D_1, D'_1) + \lceil D_2/2 \rceil \inf(D_1, D'_1)$.

Preuve. L'ensemble des sommets est constitué par la réunion disjointe de $X \times Y$ et $X' \times Y'$. Les arêtes sont de deux sortes:

Les arêtes $\{(u, y), (v, y)\}$ où y est un sommet de G_2 et $\{u, v\}$ une arête de G_1 ou G'_1 . On a donc n_2 copies de G_1 et n'_2 copies de G'_1 .

A chaque sommet y de Y , associons une application $f_y : \Gamma_2(y) \rightarrow X$ telle que pour tout x de X , $1 \leq |f_y^{-1}(x)| \leq \Delta - d_1(x)$. De même, à chaque sommet y' de Y' , associons une application $f_{y'} : \Gamma_2'(y') \rightarrow X'$ telle que pour tout x' de X' , $1 \leq |f_{y'}^{-1}(x')| \leq \Delta - d_1'(x')$. De telles applications existent d'après les conditions sur les degrés de G_2 . Les arêtes de la deuxième sorte sont les arêtes $\{(f_y(y'), y), (f_{y'}(y), y')\}$ où $\{y, y'\}$ est une arête de G_2 .

Le graphe ainsi formé a $n_1 n_2 + n_1' n_2'$ sommets, de degré maximum Δ car le degré d'un sommet (x, y) est $d(x) + |f_y^{-1}(x)|$. Cherchons son diamètre. Soient (x, y) et (x', y') deux sommets du graphe. S'il existe dans G_2 une chaîne entre y et y' de longueur $D \leq D_2 - 1$, on pourra trouver une chaîne de longueur au plus $[(D+1)/2] \sup(D_1, D_1') + [(D+1)/2] \inf(D_1, D_1') + D$ en traversant $[(D+1)/2]$ copies du graphe G_1 ou G_1' contenant x , $[(D+1)/2]$ copies du graphe G_1 ou G_1' ne contenant pas x et en utilisant D arêtes de la deuxième sorte. Si les sommets y et y' sont à la distance D_2 dans G_2 , le sommet y admet au moins un voisin y_1 , tel que $x = f_y(y_1)$ et tel que y_1 est à distance au plus $D_2 - 1$ de y' , car G_2 est biparti. Donc, le sommet $(f_{y_1}(y), y_1)$, qui est adjacent à (x, y) , est à distance au plus $[D_2/2] \sup(D_1, D_1') + [D_2/2] \inf(D_1, D_1') + D_2 - 1$ de (x', y') , ce qui prouve le théorème. \square

Exemples. La Table 1 ci-dessous donne des exemples d'application quand G_2 est biparti complet.

Table 1

G_1	G_1'	n_1	n_1'	n_2	n_2'	n	Δ	D
$K_3 \times C_5$	H_3'	15	364	392	15	11340	5	9
$P \times F_4$	—	40	—	—	40	30240	—	10
K_4	$H_4 r$	4	2734	n_1'	12	43744	6	9
$K_3 \times P_2 d$	—	24	—	—	24	131232	—	10
K_5	$H_5 r$	5	7817	—	15	156340	7	9
$K_3 \times P_2 d$	—	24	—	—	48	562824	—	10
K_6	$H_6 r$	6	39223	—	24	1176690	9	9
HS	—	50	—	—	100	5883450	—	10
K_6	$H_6 r$	6	74906	—	30	2696616	10	9
HS	—	50	—	—	150	14981200	—	10
K_7	$H_7 r$	7	132869	—	35	5580498	11	9
HS	—	50	—	—	200	33217250	—	10
P_9'	$H_{11} r$	91	354323	—	283	121296802	13	—
—	$H_{13} r$	—	804401	—	465	447391446	15	—

On peut aussi donner des exemples avec des quadrangles à deux paramètres $Q_{u,v}$, avec $n_2 = (1+v)(1+uv)$ et $n_2' = (1+u)(1+uv)$ (voir Payne [17] et Thas [20]).

Table 2

G_1	G'_1	G_2	n_1	n'_1	n_2	n'_2	n	Δ	D
K_1	P	$Q_{3,9}$	1	10	280	112	1400	4	8
K_1	HS	$Q_{7,49}$	1	50	1720	2752	154800	8	8

Table 3

Plus grands (Δ, D) graphes connus (Octobre 1981)

$\Delta \backslash D$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	P 10	$C_5 \times 4$ 20	LFQSU 34	AL 56	H_2r 128	H_2idr 158	Y 244	Y 340	Y 536
4	$K_3 \times 5$ 15	$P \times 4$ 40	$C_5 \times 19$ 95	H'_5 364	H_3r 731	H_3idr 837	Thm. 2 1400	$C_{12} \times C_{161}$ 1932	$C_5(5,9)$ 2560
5	$K_3 \times 8$ 24	15×4 60	Q_4r 174	H'_5d 532	H_1r 2734	H_4idr 2988	$O_{2,4}dr$ 5004	Thm. 2 11340	Thm. 2 30240
6	$K_3 \times 8$ 32	21×5 105	Q_5r 317	H'_5d 756	H_3r 7817	$H_4 \times 4$ 10920	$H_4 \times 6$ 16380	Thm. 2 43744	Thm. 2 131232
7	HS 50	24×5 120	Q_5dr 352	$Q_5 \times 4$ 1248	H_3dr 8998	$H_5 \times 4$ 31248	$24[P'_{17}]$ 54168	Thm. 2 156340	Thm. 2 562824
8	P'_7 57	HS $\times 4$ 200	Q_7r 807	HS[K_{51}] 2550	H_7r 39223	H_7idr 40593	Thm. 2 154800	$H_5 \times 35$ 273420	$C_5(5,9)$ 1310720
9	P'_8d 74	Q'_8 585	Q_8r 1178	HS[K_{101}] 5050	H_8r 74906	$H_7 \times 4$ 156864	HS[$P'_{97}d$] 480250	Thm. 2 1176690	Thm. 2 5883450
10	P'_9 91	Q'_8d 650	Q_9r 1629	HS[K_{151}] 7550	H_9r 132869	$Q'_8[K_{651}]$ 380835	HS[P'_{149}] 1117550	Thm. 2 2696616	Thm. 2 14981200
11	P'_9d 94	Q'_8d 715	$Q'_8 \times 5$ 2925	$P'_8[K_{156}]$ 11388	H_9dr 142494	$Q'_8[K_{1236}]$ 723060	HS[P'_{199}] 1990050	Thm. 2 5580498	Thm. 2 33217250
12	P'_{11} 133	Q'_8d 780	$Q'_8 \times 8$ 4680	$P'_9[K_{193}]$ 17563	$H_{11}r$ 354323	$Q'_8[K_{1821}]$ 1065285	$P'_8[P'_{227}]$ 3778261	LVLQ 10077696	$C_p(3,5)$ 85887453
13	$P'_{11}d$ 136	Q'_8d 845	$Q'_8 \times 9$ 5265	$P'_9[K_{284}]$ 25844	$H_{11}dr$ 394616	$715[K_{2016}]$ 1414440	$P'_9[P'_{281}d]$ 7211386	$4680[K_{5201}]$ 24340680	Thm. 2 121296802
14	P'_{13} 183	Q'_8d 910	650×9 5850	$P'_{11}[K_{279}]$ 37107	$H_{13}r$ 804481	$910[K_{2311}]$ 2130310	$P'_9[P'_{373}]$ 12694773	$4680[K_{9881}]$ 46243080	$C_5(1,10)$ 282475249
15	$P'_{13}d$ 186	$P'_{11} \times 8$ 1064	$Q'_8 \times 13$ 7605	$P'_{11}[K_{412}]$ 54796	$H_{13}dr$ 892062	$H_{13} \times 4$ 3217872	$P'_{11}[P'_{409}d]$ 22303302	$4680[K_{11561}]$ 68145480	Thm. 2 447391446

3. Notations

3.1. Graphes particuliers

- K_n : graphe complet à n sommets.
- C_n : cycle à n sommets.
- P : graphe de Petersen (10 sommets, $\Delta = 3$, $D = 2$).
- HS : graphe d'Hoffman–Singleton (50 sommets, $\Delta = 7$, $D = 2$).
- $LFQSU$: graphe de Leland, Finkel, Qiao, Solomon et Uhr [15].
- AL : graphe de Arden et Lee [1].
- P_q : graphe d'incidence du plan projectif d'ordre q , de degré $q + 1$, ayant $2(q^2 + q + 1)$ sommets et de diamètre 3: il existe si q est une puissance de premier.
- Q_q : quadrangle généralisé d'ordre q , de degré $q + 1$, ayant $2(q^4 - 1)/(q - 1)$ sommets et de diamètre 4; il existe si q est une puissance de premier (Benson [2]).
- H_q : hexagone généralisé d'ordre q , de degré $q + 1$, ayant $2(q^6 - 1)/(q - 1)$ sommets et de diamètre 6; il existe si q est une puissance de premier (Benson [2]).
- P'_q : graphe quotient de P_q par une polarité, graphe de degré $q + 1$, ayant $q^2 + q + 1$ sommets et de diamètre 2.
- Q'_q : graphe quotient de Q_q par une polarité, de degré $q + 1$, ayant $(q^4 - 1)/(q - 1)$ sommets, de diamètre 3; un tel graphe existe s'il existe une polarité, c'est-à-dire pour $q = 2^{2^p+1}$ (en particulier, ici, pour $q = 8$: voir Delorme [9]).
- H'_q : graphe quotient de H_q par une polarité, de degré $q + 1$, ayant $(q^6 - 1)/(q - 1)$ sommets, de diamètre 5; un tel graphe existe s'il existe une polarité, c'est-à-dire pour $q = 3^{2^p+1}$ (en particulier, ici, pour $q = 3$: voir Delorme [9]).
- $O_{p,q}$: octogone généralisé (Yanushka [21]).
- $C_s(m, k)$: graphe de type C_s décrit par Delorme et Farhi [10]: ce graphe a un degré maximum Δ , avec $m(\Delta/2)^k$ sommets et de diamètre donné en [10]. Cette famille de graphes est en fait la même que celle introduite par de Bruijn [8] et retrouvée par Golunkov [12] et Lam [13].
- $LVLQ$: famille de graphes décrite par Quisquater [18] et obtenue à partir d'une construction de matrices circulantes généralisées due à Lam et van Lint [14]. Ces graphes ont un sommet de plus que les graphes $C_s(1, D)$.
- $C_p(m, k)$: graphe de type C_p (associé à un plan projectif) décrit dans Delorme et Farhi [10]. Chaque graphe a un degré maximum Δ , avec $m(\Delta^2/4 - \Delta/2 + 1)^k$ sommets, où $\Delta/2 - 1$ est une puissance de premier.

3.2. Opérations de constructions

- Y : construction de Y -graphes (voir Quisquater [18]): ces graphes interviennent pour le degré 3.
- i : insertion de sommets sur certaines arêtes (voir §9 de Delorme [9]).
- d : opération décrite aux §§7, 8, 9 de Delorme [9]; le cas le plus simple consiste à dédoubler des sommets.
- r : opération qui consiste à remplacer un sommet de degré Δ par un graphe complet K_Δ (voir Quisquater [18]).
- X : plusieurs graphes sont obtenus en utilisant un produit spécial défini par Bermond, Delorme et Farhi [4], [5]. Nous les notons $G \times r$, où G désigne le premier graphe et r , le nombre de sommets du deuxième. Lorsque G est un graphe de notre table (sans nom spécial), nous le notons par son nombre de sommets.
- $G_1[G_2]$: graphe obtenu en appliquant le Théorème 1.
- Thm. 2: graphe obtenu en appliquant le Théorème 2.

Note ajoutée à l'épreuve

Depuis octobre 1981 de nouveaux (Δ, D) graphes ont été trouvés. Une nouvelle table a été publiée dans *Information Processing Letters* 15 (1) (1982) 10–13.

References

- [1] B.W. Arden and H. Lee, A multi-tree-structured network, *Proc. Fall COMPCON 78* (1978) 201–210.
- [2] C.T. Benson, Minimal regular graphs of girths eight and twelve, *Canad. J. Math.* 18 (1966) 1091–1094.
- [3] J.-C. Bermond and B. Bollobás, Diameters in graphs: a survey, *Proc. 12th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Baton Rouge, 1981, to appear.
- [4] J.-C. Bermond, C. Delorme and G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter II, to appear.
- [5] J.-C. Bermond, C. Delorme and G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter III, in: B. Bollobás, ed., *Proc. Conf. on Graph Theory*, *Ann. Discrete Math.* 13 (1982) pp. 23–32.
- [6] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory* (Cambridge University Press, London, 1974).
- [7] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, London Math. Soc. Monograph No. 11 (Academic Press, London, 1978).
- [8] N.G. de Bruijn, A combinatorial problem, *Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen Proc. Ser. A* 49 (1946) 758–764.
- [9] C. Delorme, Grands graphes de degré et diamètre donnés, à paraître.
- [10] C. Delorme and G. Farhi, Large graphs with given diameter I, to appear.
- [11] B. Elspas, Topological constraints on interconnection limited logic, *Proc. 5th Symp. on Switching Theory and Logical Design*, *IEEE S-164* (1964) 133–137.
- [12] Y.V. Golunkov, Automation program realization of substitutions of symmetric semigroups II, *Kibernetika* 5 (1975) 35–42.

- [13] C.W.H. Lam, On some solutions of $A^k = dI + \lambda J$, *J. Comb. Theory, Ser. A* 23 (1977) 140–147.
- [14] C.W.H. Lam and J.H. van Lint, Directed graphs with unique paths of fixed length, *J. Comb. Theory, Ser. B* 24 (1978) 331–337.
- [15] W. Leland, R. Finkel, L. Qiao, M. Solomon and L. Uhr, High density graphs for processor interconnection, *Inform. Process. Lett.* 12 (1981) 117–120.
- [16] G. Memmi and Y. Raillard, Some new results about the (d, k) graphs problem, *IEEE Trans. Comput.* to appear.
- [17] S.E. Payne, Affine representations of generalized quadrangles, *J. Algebra* 16 (1970) 473–485.
- [18] J.-J. Quisquater, New constructions of large graphs with fixed degree and diameter, to appear.
- [19] R.M. Storwick, Improved constructions techniques for (d, k) graphs, *IEEE Trans. Comput.* 19 (1970) 1214–1216.
- [20] J.A. Thas, Combinatorics of finite generalized quadrangles: a survey, Seminar of Geometry and Combinatorics, State University of Ghent, Belgium, Sept. 1980, to appear.
- [21] A. Yanushka, On order in generalized polygons, *Geometriae Dedicata* 20 (1981) 451–458.