



HAL
open science

Regards sur les numérotations de graphes

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Regards sur les numérotations de graphes. Proceedings Coll. Cerisy, 1980, Cerisy, France. pp.171-176. hal-02426800

HAL Id: hal-02426800

<https://inria.hal.science/hal-02426800>

Submitted on 2 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

J-C. BERMOND

Laboratoire de Recherche en Informatique

ERA 452, Bât 490

Université Paris Sud

91405 ORSAY

Il existe de nombreuses manières de numéroter un graphe ; la plupart des numérotations existantes ont été introduites en vue d'applications dans des domaines très variés (informatique, codages, réseaux, astronomie, cristallographie, ...). Ces numérotations sont souvent une mine de "problèmes plaisants et délectables" de formulation très simple, mais de résolution apparemment difficile. Dans ce qui suit nous ne voulons pas faire le tour du sujet mais plutôt donner au lecteur une idée des problèmes en souhaitant lui donner le goût d'aller plus loin.

Nous considérerons des graphes simples $G = (X, E)$ où X est l'ensemble des sommets, E l'ensemble des arêtes et nous noterons par $e = |E|$ le nombre d'arêtes du graphe.

Les numérotations les plus répandues que nous appellerons numérotations classiques consistent à attribuer à chaque sommet x du graphe un numéro $\phi(x)$, entier non négatif, de sorte que les numéros attribués à deux sommets distincts soient des entiers distincts - (en d'autres termes ϕ est une injection de X dans \mathbb{N}) - On attribue ensuite à chaque arête un numéro égal à la valeur absolue de la différence des valeurs des sommets extrémités, c'est-à-dire, le numéro de l'arête $\{x, y\}$ est $|\phi(x) - \phi(y)|$. (Pour un certain nombre d'exemples voir la synthèse faite en [1]).

Numérotations gracieuses.

Ce sont certainement les plus connues (sinon les plus belles !) Une numérotation classique ϕ est dite gracieuse si $\max_{x \in X} \phi(x) \leq e$ où (rappelons que e est le nombre d'arêtes du graphe) et si les numéros des arêtes sont tous distincts (où, ce qui revient au même, l'ensemble des numéros des arêtes est l'ensemble des entiers de 1 à e). Un graphe est dit gracieux s'il admet une numérotation gracieuse. La figure 1 donne une numérotation gracieuse de K_3, K_4 et C_4 (le cycle à 4 sommets). Le lecteur pourra vérifier que le cycle C_5 ou le graphe complet $K_n (n \geq 5)$ n'est pas gracieux.

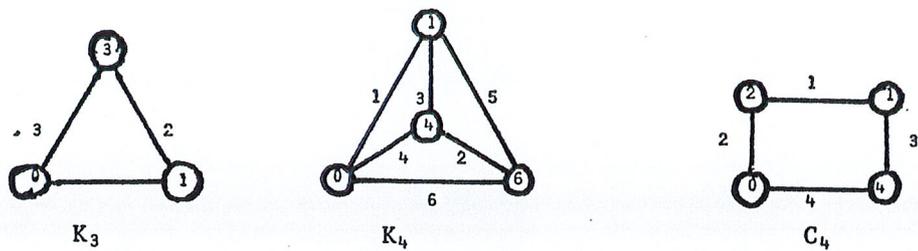


Fig 1 : Certains graphes gracieux.

Il n'est pas question de donner ici les résultats obtenus sur les graphes gracieux (voir la synthèse [2]) ni les nombreuses applications (voir [6]). Nous mentionnerons simplement que la caractérisation des graphes gracieux est un problème ouvert (difficile), que la gracieuse conjecture due à Kotzig et Ringel : "les arbres sont gracieux" n'est pas résolue, malgré les coups de hache donnés par plusieurs auteurs. Actuellement on a montré que les arbres suivants étaient gracieux (voir [2] pour les définitions) : les arbres k-aires, symétriques, les "oliviers" (ainsi appelés par H. Raynaud parce que ce sont les "plus tordus des arbres"), les chenilles (eh oui!) par contre les "homards" résistent toujours (malgré une prime d'un homard offerte par l'auteur au premier qui montrera que les "homards" sont gracieux). Mon intérêt dans cette numérotation est venu d'un problème de disposition d'antennes en radioastronomie (voir [3] et [5]). Le problème se ramène à savoir pour quelles valeurs de m, n et p le graphe formé de $m K_n$ ayant un K_p en commun est gracieux. De nombreux cas particuliers ont été résolus (voir [4]) ; un premier cas irrésolu est $p = 1, n = 4$. Dans ce cas les graphes sont appelés des "moulins français" ; pour $n = 2, 3$ les "moulins français" ne sont pas gracieux (avez-vous déjà vu des moulins avec 2 ou 3 ailes ?) ; il est conjecturé que pour $n \geq 4$ ils sont tous gracieux. Kotzig, Rogers et Turgeon ont montré cette conjecture pour diverses familles infinies de valeurs de m .

Graphes d-gracieux et graphes séquentiels.

Un graphe est dit d-gracieux s'il admet une numérotation classique telle que l'ensemble des numéros des arêtes soit l'ensemble des entiers de d à $d+e-1$ (le cas $d = 1$ correspond aux graphes gracieux). Ces numérotations ont été étudiées dans [16], en particulier il y est conjecturé que les roues W_n sont d-gracieuses pour $n \geq 9$ et $1 \leq d \leq \lfloor n/2 \rfloor$. (La roue W_n est obtenue à partir du cycle C_n en rajoutant un sommet joint à tous les sommets du cycle). (voir figure 2).

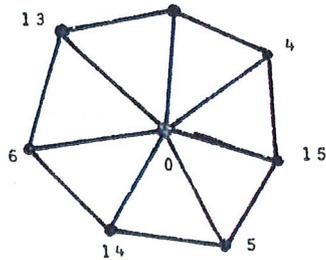


Fig. 2 : Numérotation 3-gracieuse de W_7 .

Un graphe est dit séquentiel s'il existe une numérotation classique telle que l'ensemble des numéros des sommets et des numéros des arêtes soit exactement l'ensemble des entiers de 1 à $n+e$ (n désignant le nombre de sommets du graphe). Si un graphe G est séquentiel alors le graphe obtenu en rajoutant un sommet relié à tous les sommets de G est gracieux. Ces numérotations sont étudiées dans [1] où il est conjecturé que les roues sont séquentielles. (N.B. Les roues sont bien entendu gracieuses : il suffit de montrer que le cycle est séquentiel).

Coût d'un graphe (Arrangement linéaire optimal).

De nombreuses autres numérotations ont été introduites (voir la synthèse de [11]). Appelons coût d'un graphe G pour une numérotation la somme des numéros des arêtes c'est-à-dire $c_\phi(G) = \sum_{\{x,y\} \in E} |\phi(x) - \phi(y)|$.

Le coût du graphe, $c(G)$, est défini comme le minimum de $c_\phi(G)$ pris sur toutes les numérotations classiques ϕ possibles. Une numérotation réalisant ce minimum est appelée "arrangement linéaire optimal". La détermination du coût d'un graphe est un problème NP-complet [12] ; par contre si G est un arbre, il existe des algorithmes en temps polynomial pour déterminer le coût. (voir en particulier [9] pour un algorithme en $n^{1,6}$ étapes). Le coût de nombreuses classes de graphes est connu, en particulier dans [10] a été déterminé le coût des arbres binaires. De nombreux problèmes sont irrésolus en particulier si on prend p comme coût $c_\phi(G) = \sum_{\{x,y\} \in E} |\phi(x) - \phi(y)|^p$.

Largeur de bande.

On peut aussi considérer pour une numérotation ϕ d'un graphe G , la fonction $b(G) = \max_{\{x,y\} \in E} |\phi(x) - \phi(y)|$. Le minimum $b(G)$ de $b_\phi(G)$,

pris sur toutes les numérotations classiques est appelé la "largeur de bande" (bandwidth) du graphe. La détermination de $b(G)$ est un problème NP-complet, même pour les arbres de degré maximum 3 (voir [13]). Là encore, la largeur de bande a été déterminée pour de nombreuses classes de graphes (pour une bibliographie importante sur le sujet voir [8]).

Autographes.

Un autographe est un graphe qui admet une numérotation classique telle que l'ensemble des numéros des arêtes est inclus dans l'ensemble des numéros des sommets, appelé alors signature du graphe. Si on se donne un ensemble S de n entiers, on peut donc construire un graphe G à n sommets ayant S comme signature en joignant deux sommets x et y si $|\phi(x) - \phi(y)| \in S$. (voir [7] pour plus de détails).

Graphes harmonieux.

Pour finir nous mentionnerons une numérotation non classique. Un graphe ayant n sommets et e arêtes avec $e \geq n$ est dit harmonieux si on peut numérotter les sommets x avec des éléments distincts $\phi(x)$ de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$

(entiers modulo e) de sorte que si l'arête $\{x,y\}$ est numérotée $\phi(x)+\phi(y)$ (modulo e), les numéros des arêtes soient tout distincts. Si le graphe est un arbre ($e = n-1$) on autorise que deux sommets aient le même numéro. Ces numérotations ont été introduites dans [14] où il est montré que presque tous les graphes ne sont pas harmonieux et où il est conjecturé que les arbres sont harmonieux.

Dernière minute : nous apprenons que les "moulins français" sont harmonieux [15].

Bibliographie.

- [1] D.W. BANGE, A.E. BARKAUSKAS et P.J. SLATER : Simply sequential and graceful graphs , dans Proc. 10th S-E. Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilitas Math Publ., 1980, 155-162.
- [2] J-C. BERMOND : Graceful graphs, radio antennae and French windmills dans Graph Theory and Combinatorics, Pitman Publ. London (1979), 18-37.
- [3] J-C. BERMOND, A. KOTZIG et J. TURGEON : On a combinatorial problem of antennas in radio-astronomy, dans Colloq. Math. Soc. János Bolyai 18, Combinatorics, Keszthely Hungary, North Holland, Amsterdam (1978), 135-149.
- [4] J-C. BERMOND et G. FARHI : Sur un problème combinatoire d'antennes en radioastronomie II, à paraître dans volume en l'honneur de Kotzig.
- [5] F. BIRAUD, E-J. BLUM et J-C. RIBES : Some new possibilities of optimum synthetic linear arrays for radioastronomy, Astronomy and Astrophysics 41(1975) 409-413.
- [6] G.S. BLOOM et S.W. GOLOMB : Applications of numbered undirected graphs, Proc. IEEE 65 (1977) 562-570.
- [7] G.S. BLOOM, P. HELL et H. TAYLOR : Collecting autographs : n-node graphs that have n-integer signature, Annals New York Acad. Sci. 319(1979) 93-102.
- [8] P. CHINN, J. CHVÁTALOVÁ, K. DEWDNEY et N. GIBBS : Graph theory Newsletter supplement, 9, Juillet 1980.
- [9] F.R.K. CHUNG : On linear arrangements of trees, à paraître.
- [10] F.R.K. CHUNG : A conjectured minimum valuation tree, SIAM Review, 20 (1978) 601-604.

- [11] F.R.K. CHUNG : Some problems and results on labelings of graphs, à paraître Proc. Conf. Kalamazoo, Mai 1980.
- [12] M.R. GAREY, D.S. JOHNSON et L. STOCKMEYER : Some simplified NP-complete graph problems, Theoret. Comput. Sci. 1(1976) 237-267.
- [13] M.R. GAREY, R.L. GRAHAM, D.S. JOHNSON et D.E. KNUTH : Complexity results for bandwidth minimization, SIAM J. Appl. Math, 34 (1978), 477-495.
- [14] R.L. GRAHAM and J. SLOANE : On constant weight codes and harmonious graphs, Utilitas Math, à paraître.
- [15] D.F. HSU : Harmonious labellings of windmill graphs and related graphs, manuscript.
- [16] M. MAHEO et H. THUILLIER : On d-graceful graphs, manuscript.