



**HAL**  
open science

## **Chemins et circuits dans les graphes orientés (présenté au Colloque franco-candiende combinatoire, Montréal 1979)**

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann, Dominique  
Sotteau

### ► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann, Dominique Sotteau. Chemins et circuits dans les graphes orientés (présenté au Colloque franco-candiende combinatoire, Montréal 1979). *Annals of Discrete Mathematics*, 1980, 8, pp.293-309. <hal-02379949>

**HAL Id: hal-02379949**

**<https://inria.hal.science/hal-02379949v1>**

Submitted on 26 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# CHEMINS ET CIRCUITS DANS LES GRAPHES ORIENTES

J.C. BERMOND and D. SOTTEAU

Université de Paris Sud, 91405 Orsay, Bâtiment 490, France

A. GERMA and M.C. HEYDEMANN

Université de Paris Sud, 91405 Orsay, Bâtiment 425, France

Let  $D$  be a digraph with  $n$  vertices: we give sufficient conditions and conjectures on the number of arcs of  $D$  to insure that  $D$  has a directed cycle or a directed path of given length  $l$ , with more emphasis on the cases  $l = n$ ,  $n - 1$  or  $l$  small.

We study the case where  $D$  is any digraph and the case where  $D$  is strong.

Dans cet article nous étudions des conditions suffisantes portant sur le nombre d'arcs d'un 1-graphe (orienté)  $D$  afin que ce graphe admette des chemins élémentaires de longueur  $l$  ou des circuits élémentaires de longueur supérieure ou égale à  $k$ .

Dans la 1<sup>ère</sup> partie nous décrivons 5 familles d'exemples qui nous serviront dans la suite, soit pour prouver que les bornes trouvées sont les meilleures possibles, soit pour fonder les conjectures.

Dans la 2<sup>ème</sup> partie nous donnons des conditions assurant l'existence de circuits hamiltoniens pour des graphes orientés quelconques ou fortement connexes, et des conditions pour qu'un graphe soit hamilton-connecté.

Dans la 3<sup>ème</sup> partie nous donnons des conditions assurant l'existence de circuit de longueur  $\geq n - 1$  dans un graphe fortement connexe et nous formulons une conjecture sur l'existence de circuits de longueur  $\geq k$  pour un entier  $k$  donné  $2 \leq k \leq n$ .

Dans la 4<sup>ème</sup> partie nous donnons des conditions assurant l'existence de chemins en particulier de chemins hamiltoniens et nous formulons une conjecture sur l'existence de chemins de longueur  $l$ , pour un entier  $l$  donné,  $2 \leq l \leq n - 1$ , dans un graphe quelconque et dans un graphe fortement connexe.

Les notations et définitions utilisées dans cet article non précisées ci-dessous figurent dans [1].

Dans ce qui suit  $D$  représente toujours un 1-graphe (graphe orienté sans boucle ni arc multiple).

$V(D)$  est l'ensemble des sommets de  $D$ ,  $n = |V(D)|$ .

$E(D)$  est l'ensemble des arcs de  $D$ .

$(x, y)$  dénote l'arc de  $D$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$ .

Deux sommets  $x$  et  $y$  de  $D$  sont dits adjacents si  $(x, y)$  ou  $(y, x)$  appartient à  $E(D)$ .

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V(D), (y, x) \in E(D)\}; \quad d^-(x) = |\Gamma^-(x)|,$$

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V(D), (x, y) \in E(D)\}; \quad d^+(x) = |\Gamma^+(x)|.$$

Soit  $x$  un sommet n'appartenant pas à  $V(D)$ . On note  $D\langle x \rangle$  le graphe défini par

$$V(D\langle x \rangle) = V(D) \cup \{x\},$$

$$E(D\langle x \rangle) = E(D) \cup \{(x, y) \text{ et } (y, x), y \in V(D)\}.$$

Soit  $A$  une partie de  $V(D)$ .  $D-A$  représente le sous-graphe induit par  $V(D)-A$ . Lorsque  $A$  est réduit à un sommet  $x$  on note  $D-A$  par  $D-x$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux parties disjointes de  $V(D)$ ,

$$E(A \rightarrow B) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, (x, y) \in E(D)\},$$

$$E(A, B) = E(A \rightarrow B) \cup E(B \rightarrow A).$$

On appelle longueur d'un chemin dans  $D$  le nombre d'arcs du chemin. Tous les chemins et circuits considérés sont élémentaires.  $D$  est dit hamiltonien connecté si, quelque soit le couple  $x, y$  de sommets de  $D$  il existe un chemin hamiltonien (ou de longueur  $n-1$ ) d'origine  $x$  d'extrémité  $y$ .

On appelle symétrisé d'un graphe non orienté  $G$  et on note  $G^*$  le graphe orienté obtenu en substituant à toute arête  $(x, y)$  les arcs  $(x, y)$  et  $(y, x)$ . Par exemple,  $K_n^*$  est le graphe orienté complet symétrique à  $n$  sommets.

On appelle opposé d'un graphe orienté  $D$  le graphe obtenu en remplaçant tout arc  $(x, y)$  de  $D$  par l'arc  $(y, x)$ . Un graphe et son opposé ayant le même nombre d'arcs et les mêmes propriétés d'existence de chemins et circuits, tous les théorèmes que nous énonçons ci-après, vrais pour un graphe, le sont aussi pour son opposé.

Dans une figure, on représente par une flèche  $\rightarrow$  les arcs simple et par un trait gras  $\text{—}$  les arcs doubles, c'est-à-dire une paire d'arcs  $(x, y)$  et  $(y, x)$ .

## 1. Exemples

(1) Soient  $n$  et  $l$  deux entiers,  $q$  et  $r$  les entiers définis par  $n = ql + r$ ,  $0 \leq r \leq l-1$ .

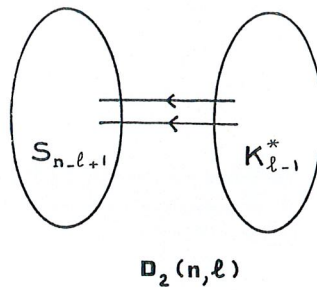
Nous désignons par  $D_1(n, l)$  le 1-graphe à  $n$  sommets, formé de  $l$  stables  $G_1, \dots, G_l$ , avec  $|V(G_i)| = q+1$ ,  $1 \leq i \leq r$ , et  $|V(G_i)| = q$  pour  $r+1 \leq i \leq l$ , et de tous les arcs  $(x, y)$  tels que  $x \in V(G_i)$ ,  $y \in V(G_j)$ ,  $i < j$ .

Ce graphe a  $f(n, l)$  arcs avec

$$f(n, l) = \frac{q^2 l(l-1)}{2} + rq(l-1) + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{n^2(l-1)}{2l} - \frac{r(l-r)}{2l}.$$

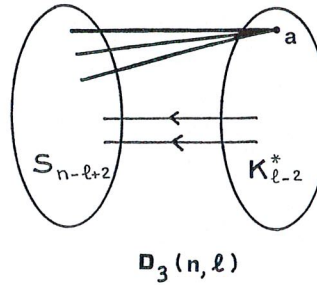
Il n'admet pas de chemin de longueur  $l$ .

(2) Soit  $D_2(n, l)$  le 1-graphe formé d'un graphe complet symétrique à  $l-1$  sommets  $G_1$ , d'un stable  $G_2$  à  $n-l+1$  sommets et de tous les arcs  $(x, y)$  tels que  $x \in V(G_1)$ ,  $y \in V(G_2)$ . Ce graphe a  $g(n, l)$  arcs avec  $g(n, l) = (n-1)(l-1)$  et n'admet pas de chemin de longueur  $l$ .



*Remarque.*  $f(n, l) \leq g(n, l)$  pour  $n \leq 2l - 1$ ,  $f(n, l) \geq g(n, l)$  pour  $n \geq 2l - 1$ .

(3) Soient  $n$  et  $l$  deux entiers,  $3 \leq l \leq n + 1$ . Nous désignons par  $D_3(n, l)$  le 1-graphe  $D_2(n - 1, l - 2) \langle a \rangle$ . Ce graphe est fortement connexe, a  $\psi(n, l)$  arcs avec  $\psi(n, l) = (l - 1)n - 2l + 4$ . Il n'admet ni chemin de longueur  $l$ , ni circuit de longueur supérieure ou égale à  $l$ .



(4) Soit  $k$  un entier  $\geq 3$ , soit  $D_4(n, k)$  le 1-graphe  $D_1(n - 1, k - 2) \langle b \rangle$ . Ce graphe a  $n$  sommets avec  $n = q(k - 2) + r + 1$ ,  $0 \leq r < k - 2$ . Il est fortement connexe, a  $\varphi(n, k)$  arcs avec

$$\varphi(n, k) = \frac{n^2(k - 3) + 2n(k - 1) - (k - 2)(r + 3) + r^2 - 1}{2(k - 2)}.$$

Il ne possède pas de chemin de longueur  $2k - 3$ , ni de circuit de longueur supérieure ou égale à  $k$ .

*Remarque.* Pour  $k \leq n \leq 2k - 4$ , on a  $\varphi(n, k) \leq \psi(n, k)$ ; pour  $n \geq 2k - 4$ , on a  $\varphi(n, k) \geq \psi(n, k)$ .

(5) Soit  $k$  un entier,  $k \geq 3$ . Soit  $D_5(n, k)$  le 1-graphe formé de  $D_4(n - 1, k)$ , d'un sommet  $c$ , de l'arc  $(b, c)$  et de tous les arcs  $(c, x)$  où  $x$  décrit  $V(D_4(n - 1), k)$ .

Ce graphe est fortement connexe, a  $n$  sommets avec  $n = q(k - 2) + r + 2$ ,  $0 \leq r < k - 2$  et  $\varphi'(n, k)$  arcs avec

$$\varphi'(n, k) = \frac{n^2(k - 3) + 2nk - (k - 1)(r + 4) + r^2 + r}{2(k - 2)}.$$

Il n'admet pas de chemin de longueur  $2k - 2$ .

*Remarque.* Pour  $n \geq 4k - 8$ , on a  $\varphi(n, k) \geq \psi(n, 2k - 3)$ ; pour  $n \leq 4k - 8$ , on a  $\varphi(n, k) \leq \psi(n, 2k - 3)$ . Pour  $n \geq 4k - 6$ , on a  $\varphi'(n, k) \geq \psi(n, 2k - 2)$ ; pour  $n \leq 4k - 6$ , on a  $\varphi'(n, k) \leq \psi(n, 2k - 2)$ .

## 2. Circuits hamiltoniens

Dans [6] Lewin donne des conditions suffisantes, les meilleures possibles en un certain sens, portant sur le nombre d'arcs d'un 1-graphe  $D$ , pour que  $D$  soit hamiltonien. Nous précisons ici ce résultat avec le théorème suivant:

**2.1. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe à  $n$  sommets  $n \geq 2$ . Alors

- (a) Si  $|E(D)| > (n-1)^2$   $D$  est hamiltonien,
- (b) Si  $|E(D)| = (n-1)^2$  et si  $D$  n'est pas isomorphe à  $D_2(n, n)$  ou à son opposé pour  $n \geq 3$ , ni à  $K_{1,2}^*$  pour  $n = 3$ ,  $D$  est hamiltonien.
- (c) Si  $|E(D)| = (n-1)^2 - 1$  et si  $D$  n'est pas isomorphe à  $D_2(n, n)$  moins un arc, ou son opposé, pour  $n \geq 3$ , ni, pour  $n = 4$ , à un des graphes  $G_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) représentés dans la Fig. 1,  $D$  est hamiltonien.

**Preuve.** (a) Voir [6].

(b) Supposons  $D$  non hamiltonien et  $|E(D)| = (n-1)^2$ .

Pour tout sommet  $x$  de  $D$   $|E(D-x)| = (n-1)^2 - d(x)$  et donc  $(n-1)^2 - d(x) \leq (n-1)(n-2)$ . On a donc  $d(x) \geq n-1$ .

Si pour tout  $x$  de  $D$  on a  $d(x) \geq n$ , alors  $D$  n'est pas fortement connexe sinon  $D$  serait hamiltonien, d'après le théorème de Ghouila-Houri [4].

On peut alors décomposer  $V(D)$  en  $A \cup B$  avec  $E(B \rightarrow A) = \emptyset$ ,  $|A| = p$ ,  $|B| = n-p$ .

On a  $p \geq 2$  et  $n-p \geq 2$  car  $d(x) \geq n$  pour tout  $x$ . Alors

$$|E(D)| \leq p(p-1) + (n-p)(n-p-1) + p(n-p),$$

$$|E(D)| \leq n^2 - n(p+1) + p^2.$$

Comme  $|E(D)| = (n-1)^2$ , on a donc  $n(p-1) \leq p^2 - 1$  et, puisque  $p \neq 1$ ,  $n \leq p+1$ , ce qui contredit  $n-p \geq 2$ .

Il existe donc dans  $D$  un sommet  $x$  de degré  $n-1$ . Alors  $|E(D-x)| = (n-1)^2 - (n-1) = (n-1)(n-2)$  et par suite  $D-x$  est le graphe complet symétrique à  $(n-1)$  sommets,  $K_{n-1}^*$ .

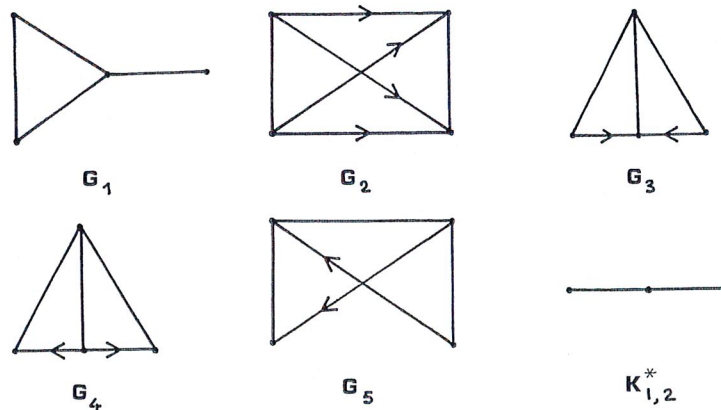


Fig. 1.

$D$  étant non hamiltonien l'ensemble  $E(D)$  est alors défini par

$$E(D) = E(D-x) \cup \{(x, y), y \in D-x\}.$$

Pour  $n=3$ , on a de plus le graphe  $K_{1,2}^*$  (Fig. 1).

(c) Soit  $D$  non hamiltonien à  $(n-1)^2-1$  arcs. Comme dans (b) on montre alors que tout point de  $D$  est de degré supérieur ou égal à  $n-2$ .

*Cas 1.* Il existe dans  $D$  un sommet  $x$  de degré  $n-2$ . Alors  $|E(D-x)| = (n-1)^2-1-(n-2) = (n-1)(n-2)$  et donc  $D-x$  est un graphe  $K_{n-1}^*$ .  $D$  étant non hamiltonien, l'ensemble  $E(D)$  est alors défini par

$$E(D) = E(D-x) \cup \{(x, y), y \in V(D) - \{x, x'\}\} \quad \text{où } x' \in V(D-x).$$

Ceci pour  $n \geq 2$ . Pour  $n=4$  on a de plus le graphe  $G_1$  de la Fig. 1.

*Cas 2.* Pour tout  $x$  de  $D$ ,  $d(x) \geq n-1$ .

Si  $D$  est fortement connexe, comme  $D$  est non hamiltonien il existe un point  $x$  tel que  $d(x) = n-1$  et  $|E(D-x)| = (n-1)(n-2)-1$ , donc  $D-x$  est un graphe  $K_{n-1}^*$  moins un arc et est donc hamiltonien connecté pour tout  $n$  tel que  $n-1 \geq 4$ ; comme  $D$  est fortement connexe  $d^+(x) > 0$  et  $d^-(x) > 0$ ; comme de plus  $d(x) = n-1 \geq 3$  pour  $n \geq 4$ ,  $D$  est hamiltonien, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans le cas  $n-1=3$ , les seuls graphes fortement connexes, non hamiltoniens, à 8 arcs, vérifiant pour tout  $x$ ,  $d(x) \geq 3$  sont les graphes  $G_3, G_4, G_5$  de la Fig. 1. Pour  $n-1=2$  il n'existe pas de graphe fortement connexe à 3 arcs non hamiltonien.

Si  $D$  n'est pas fortement connexe, comme dans (b) on peut partitionner  $V(D)$  en deux ensembles  $A$  et  $B$  avec  $E(B \rightarrow A) = \emptyset$ ,  $|A|=p$ ,  $|B|=n-p$ . On obtient ici  $n^2 - n(p+1) + p^2 \geq (n-1)^2 - 1$  soit  $n(p-1) \leq (p^2-1) + 1$  ce qui donne, pour  $n \neq 4$ ,  $p=1$  ou  $n-p=1$ , et pour  $n=4$ ,  $p=2=n-p$ .

Le cas  $p=1$  donne alors, si  $A = \{x\} : d(x) = n-1$ , le sous-graphe induit par  $B$  est le graphe complet  $K_{n-1}^*$  moins un arc, et  $E(D)$  est défini par

$$E(D) = E(D-x) \cup \{(x, y), y \in B\}.$$

Le cas  $p=n-1$  donne le graphe opposé du précédent.

Pour le cas  $p=2, n=4$ , le seul graphe  $D$  non fortement connexe à 8 arcs, non hamiltonien est le graphe  $G_2$  de la Fig. 1.

En vue de la démonstration du Théorème 2.3 nous allons établir un lemme:

**2.2. Lemme.** Soit  $x$  un sommet d'un 1-graphe  $D$  tel que  $d(x) \geq n+1$  et  $D-x$  hamiltonien connecté: alors  $D$  est hamiltonien connecté.

**Preuve.** Soit  $y$  un sommet de  $D-x$ . Comme  $d(x) \geq n+1$  implique  $d^-(x) \geq 2$ , il existe  $z$  dans  $\Gamma^-(x) - \{y\}$ . Considérons dans  $D-x$  un chemin hamiltonien d'origine  $y$  et d'extrémité  $z$ : il se prolonge en un chemin hamiltonien de  $D$

d'origine  $y$ , d'extrémité  $x$ . Symétriquement, on peut construire un chemin hamiltonien dans  $D$ , de  $x$  à  $y$ . Soient  $y$  et  $z$  deux sommets de  $D - x$ . Considérons un chemin hamiltonien

Posons

$$\begin{aligned} x_1 = y, x_2, \dots, x_{n-1} = z & \text{ dans } D - x. \\ I = \{i \mid 1 \leq i \leq n-2; (x_i, x) \in E(D)\}, \\ J = \{i \mid 1 \leq i \leq n-2; (x, x_{i+1}) \in E(D)\}. \end{aligned}$$

On a  $d^-(x) = |I| + 1$ ,  $d^+(x) = |J| + 1$ , d'où  $n + 1 \leq d(x) \leq |I| + |J| + 2 \leq |I \cup J| + |I \cap J| + 2 \leq n + |I \cap J|$ , ce qui prouve  $I \cap J \neq \emptyset$ : on peut donc allonger le chemin considéré en un chemin hamiltonien de  $y$  à  $z$  dans  $D$ .

Dans le Théorème 2.3 nous retrouvons un résultat de Lewin [6] en le précisant (la preuve donnée ici est différente de la sienne).

**2.3. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe tel que  $|E(D)| \geq (n-1)^2 + 1$ ,  $n \geq 2$ . Alors  $D$  est hamilton connecté, sauf si  $|E(D)| = (n-1)^2 + 1$  et  $D$  est le graphe  $D_3(n, n+1)$  ou son opposé, pour  $n \geq 2$ , ou si  $n = 4$  et  $D$  est le graphe de la Fig. 2.

**Preuve.** Par récurrence sur  $n$

- les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  sont évidents,
- supposons  $n \geq 4$  et soit  $D$  tel que  $|E(D)| \geq (n-1)^2 + 1$ .

Remarquons que pour tout sommet  $x$  on a  $d(x) \geq n$  car

$$d(x) = |E(D)| - |E(D - x)| \geq n^2 - 2n + 2 - (n-1)(n-2) = n.$$

Cas 1. Il existe un sommet  $x_0$  de degré  $n$ : alors il existe au moins un sommet  $x_1$  tel que  $(x_0, x_1)$  et  $(x_1, x_0)$  soient des arcs de  $D$ . D'où, comme

$$\begin{aligned} d(x_1) &= |E(D)| - n + 2 - |E(D - \{x_0, x_1\})| \\ 2n - 2 \geq d(x_1) &\geq n^2 - 3n + 4 - |E(D - \{x_0, x_1\})| \geq n^2 - 3n + 4 - (n-2)(n-3). \end{aligned}$$

On en déduit  $d(x_1) = 2n - 2$ ,  $|E(D)| = n^2 - 2n + 2$ ,  $|E(D - \{x_0, x_1\})| = (n-2)(n-3)$ . Ceci montre que  $D - x_0$  est un graphe  $K_{n-1}^*$ .

Si  $d^+(x_0) = 1$  ou  $d^-(x_0) = 1$ ,  $D$  est un graphe  $D_3(n, n+1)$  ou son opposé.

Sinon, si on a  $d^+(x_0) \geq 2$  et  $d^-(x_0) \geq 3$  ou  $d^+(x_0) \geq 3$  et  $d^-(x_0) \geq 2$  (ce qui est toujours le cas pour  $n \geq 5$ ), on vérifie aisément que  $D$  est hamilton connecté.

Il reste le cas  $n = 4$ ,  $d^+(x_0) = d^-(x_0) = 2$ . Le seul graphe vérifiant toutes ces hypothèses et non hamilton connecté est celui de la Fig. 2.

Cas 2. Pour tout  $x$ ,  $d(x) \geq n + 1$ .

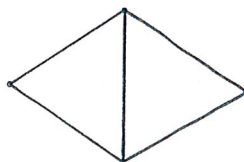


Fig. 2.

Si  $D$  est complet, il est hamilton connecté. Sinon il existe  $x$ ,  $d(x) \leq 2n - 3$ , d'où  $|E(D - x)| \geq |E(D)| - 2n + 3$ . Si  $|E(D)| \geq n^2 - 2n + 3$  alors  $|E(D - x)| \geq (n - 2)^2 + 2$ , et, par hypothèse de récurrence,  $D - x$  est hamilton connecté; le lemme permet alors de conclure que  $D$  est hamilton connecté.

Si  $|E(D)| = n^2 - 2n + 2$  et s'il existe  $x$  tel que  $d(x) \leq 2n - 4$  on conclut de même. Il reste donc le cas  $|E(D)| = n^2 - 2n + 2$  et, pour tout sommet  $x$ ,  $d(x) \geq 2n - 3$ . Mais on a alors  $|E(D)| \geq \frac{1}{2}n(2n - 3)$  ou  $n^2 - 2n + 2 \geq n^2 - \frac{3}{2}n$  ou  $n \leq 4$ .

Supposons alors  $n = 4$ ,  $|E(D)| = 10$ , pour tout  $x$ ,  $d(x) \geq 5$ : nécessairement  $d(x) = 5$ ,  $|E(D - x)| = 5$ : on vérifie alors aisément que  $D$  est hamilton connecté.

En vue de la preuve des Théorèmes 2.6 et 2.7 nous aurons besoin des lemmes suivants dont le premier est bien connu:

**2.4. Lemme.** Si  $C$  est un circuit maximal d'un 1-graphe  $D$  et si  $z \notin V(C)$  alors  $|E(z, C)| \leq |V(C)|$ .

**2.5. Lemme.** Soit  $D$  un 1-graphe. Si  $D$  est fortement connexe, non hamiltonien, si  $C$  est un circuit de  $D$  contenant au moins 3 sommets et si pour tout sommet  $z$  de  $V(D) - V(C)$ ,  $d(z) \geq n$ , alors  $|E(D)| \leq n^2 - 4n + 8$ .

**Preuve du Lemme 2.5.** Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n \leq 4$  le lemme est trivialement vrai. Soit  $n \geq 5$  et supposons le lemme vrai pour tout  $n' < n$ .

(a) Soit  $C_0$  un circuit tel que  $V(C_0)$  contienne  $V(C)$  et soit maximal pour cette propriété. Posons  $n_0 = |V(C_0)|$ . Puisque  $C_0$  est maximal on a, d'après le Lemme 2.4, pour  $z$  n'appartenant pas à  $V(C_0)$ ,  $|E(z, C_0)| \leq n_0$ . Puisque  $D$  n'est pas hamiltonien, et que pour tout  $z$  n'appartenant pas à  $V(C_0)$ ,  $d(z) \geq n$ , ceci implique  $n_0 \leq n - 2$ .

(b) Désignons par  $C_1, C_2, \dots, C_p$  les composantes fortement connexes de  $D - C_0$  et posons  $n_i = |V(C_i)|$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Pour chaque paire  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq p$  on a, soit

$$E(V(C_i) \rightarrow V(C_j)) = \emptyset, \quad \text{soit } E(V(C_j) \rightarrow V(C_i)) = \emptyset.$$

D'où  $|E(z, C_j)| \leq n_j$  si  $z \in V(C_i)$   $i \neq j$ .

(c) Cas  $p = 1$ .  $D$  étant fortement connexe, il existe des arcs de  $C_0$  vers  $C_1$  et de  $C_1$  vers  $C_0$ . Il convient alors de distinguer 2 cas:

(1) Tous les arcs en question ont leur extrémité dans  $C_0$  commune. On a alors

$$|E(D)| \leq n_0(n_0 - 1) + (n - n_0)(n - n_0 - 1) + 2(n - n_0)$$

et il suffit de prouver l'inégalité

$$n_0(n_0 - 1) + (n - n_0)(n - n_0 - 1) + 2(n - n_0) \leq n^2 - 4n + 8$$

ou encore  $n(2n_0 - 5) \geq 2n_0^2 - 2n_0 - 8$ . Comme  $n_0 \geq 3$ ,  $2n_0 - 5 \geq 0$ . Comme  $n \geq n_0 + 2$ ,  $n(2n_0 - 5) \geq (n_0 + 2)(2n_0 - 5)$ . Or  $(n_0 + 2)(2n_0 - 5) = 2n_0^2 - n_0 - 10 \geq 2n_0^2 - 2n_0 - 8$  dès que  $n_0 \geq 2$ .

(2) Il existe un arc de  $C_0$  vers  $C_1$  et un arc de  $C_1$  vers  $C_0$  dont les extrémités dans  $C_0$  sont distinctes. Comme  $C_1$  est fortement connexe il existe un chemin  $z_0 z_1 \cdots z_m$ ,  $m \geq 2$ ,  $z_0$  et  $z_m$  dans  $C_0$ ,  $z_1 \cdots z_{m-1}$  dans  $C_1$ . Remarquons que si  $C_0$  était hamiltonien connecté il serait possible de construire un circuit contenant  $V(C_0)$  et le chemin  $z_0 z_1 \cdots z_m$ : ceci contredit l'hypothèse de maximalité de  $C_0$ .

D'après le Théorème 2.3, on en déduit

$$|E(C_0)| \leq n_0^2 - 2n_0 + 2.$$

D'après (a), on a  $|E(C_0, C_1)| \leq n_0 n_1$ . Par ailleurs,  $|E(C_1)| \leq n_1(n_1 - 1)$ ,

$$|E(D)| \leq n^2 - n_0 n + n_0^2 - n - n_0 + 2.$$

Or, l'inégalité  $n^2 - n_0 n + n_0^2 - n - n_0 + 2 \leq n^2 - 4n + 8$  est équivalente à  $(n - n_0 - 2)(n_0 - 3) \geq 0$  qui est vraie d'après (a) pour  $n_0 \geq 3$ .

(d) Cas  $p \geq 2$ . Montrons qu'il existe  $i$  tel que le sous-graphe induit par  $V(C_0) \cup V(C_i)$ , noté  $C_0 \cup C_i$  vérifie

$$|E(C_0 \cup C_i)| \leq (n_0 + n_i)^2 - 4(n_0 + n_i) + 8.$$

S'il existe  $i$  tel que  $C_0 \cup C_i$  soit fortement connexe alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $C_0 \cup C_i$ . En effet,  $n_0 + n_i < n$ ,  $C_0 \cup C_i$  n'est pas hamiltonien puisque  $C_0$  est maximal et, d'après (a) et (b) pour tout  $z$  de  $C_i$ ,

$$|E(z, C_0 \cup C_i)| \geq n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |E(z, C_j)| \geq n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p n_j = n_0 + n_1.$$

Sinon, il existe  $i$  tel que  $E(V(C_0) \rightarrow V(C_i)) = \emptyset$  et  $E((V(C_i) \rightarrow V(C_0))) \neq \emptyset$ . Puisque  $D$  est fortement connexe il existe un chemin  $z_0, z_1, \dots, z_m$ ,  $m \geq 2$  tel que  $z_0 \in V(C_0)$ ,  $z_m \in V(C_i)$ ,  $z_1 \cdots z_{m-1} \in V(D) - V(C_0 \cup C_i)$ .

Le graphe  $H$  obtenu en adjoignant à  $C_0 \cup C_i$  l'arc  $(z_0, z_m)$  est fortement connexe. Il n'est pas hamiltonien car s'il admettait un circuit hamiltonien ce circuit contiendrait l'arc  $(z_0, z_m)$  que l'on pourrait remplacer par le chemin  $z_0, z_1, \dots, z_m$ , ce qui contredit l'hypothèse de maximalité de  $C_0$ . On peut appliquer ici encore l'hypothèse de récurrence à  $H$  et par suite prouver que

$$|E(C_0 \cup C_i)| = |E(H)| - 1 \leq (n_0 + n_i)^2 - 4(n_0 + n_i) + 7.$$

On peut donc supposer, au besoin en changeant les indices, que

$$|E(C_0 \cup C_1)| \leq (n_0 + n_1)^2 - 4(n_0 + n_1) + 8.$$

(e) D'après (a) on a  $|E(C_0, C_j)| \leq n_0 n_j$  pour  $2 \leq j \leq p$ .

D'après (b) on a  $|E(C_i, C_j)| \leq n_i n_j$  pour  $1 \leq i < j \leq p$ .

On a, par ailleurs, toujours  $|E(C_i)| \leq n_i(n_i - 1)$ . On en déduit

$$|E(D)| \leq (n_0 + n_1)^2 - 4(n_0 + n_1) + 8 + \sum_{j=2}^p n_j(n_0 + n_j - 1) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} n_i n_j,$$

soit encore

$$|E(D)| \leq n^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq p} n_i n_j - (n_0 + 1) \sum_{j=2}^p n_j - 4(n_0 + n_1) + 8.$$

Pour prouver  $|E(D)| \leq n^2 - 4n + 8$  il suffit de montrer

$$- \sum_{1 \leq i < j \leq p} n_i n_j - (n_0 + 1) \sum_{j=2}^p n_j - 4(n_0 + n_1) \leq -4n$$

soit

$$(n_0 - 3) \sum_{j=2}^p n_j + \sum_{1 \leq i < j \leq p} n_i n_j \geq 0.$$

Comme  $n_0 \geq 3$  l'inégalité est vérifiée ce qui achève la démonstration du lemme.

**2.6. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe tel que deux sommets quelconques appartiennent à un même circuit. Si

$|E(D)| \geq n^2 - 4n + 9$  alors  $D$  est hamiltonien sauf si  $n \geq 5$ ,

$|E(D)| = n^2 - 4n + 9$ , et si  $D$  est le graphe  $D'$  décrit ci-dessous ou son opposé.

$$V(D') = V(D_3(n, n-1)),$$

$$E(D') = E(D_3(n, n-1)) \cup \{(x, b), x \in G_2\}$$

où  $b$  est un sommet de  $G_1$ ,  $b \neq a$ .

$D_3(n, n-1)$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $a$  sont définis dans les Exemples 2 et 3.

**Preuve.** Soit  $D$  un 1-graphe, non hamiltonien, ayant la propriété que deux sommets quelconques sont sur un même circuit:  $D$  est donc fortement connexe. Montrons qu'alors  $|E(D)| \leq n^2 - 4n + 8$ , sauf pour l'exception définie dans l'énoncé du théorème.

D'après le théorème de Meyniel [7, 3] il existe deux sommets  $x$  et  $y$  non adjacents tels que  $d(x) + d(y) \leq 2n - 2$ . Nous distinguons 3 cas.

*Cas 1.* Pour tout  $z \in V(D) - \{x, y\}$ ,  $d(z) \geq n$ . Par hypothèse, il existe un circuit  $C$  contenant  $x$  et  $y$ . Ces sommets étant non adjacents  $|V(C)| \geq 4$ . On peut donc appliquer le Lemme 2.5 pour conclure.

*Cas 2.* Il existe  $z \in V(D) - \{x, y\}$ ,  $d(z) \leq n - 2$ . On a

$$|E(D)| \leq |E(D - \{x, y, z\})| + d(x) + d(y) + d(z),$$

$$|E(D)| \leq (n-3)(n-4) + 2n - 2 + n - 2 = n^2 - 4n + 8.$$

*Cas 3.* Il existe  $z \in V(D) - \{x, y\}$ ,  $d(z) = n - 1$ . Les inégalités précédentes montrent que l'on a  $|E(D)| \leq n^2 - 4n + 9$  et que l'égalité n'a lieu que si

$$|E(D) - \{x, y, z\}| = (n-3)(n-4), \quad (1)$$

$$d(x) + d(y) = 2n - 2, \quad (2)$$

$$\{x, y, z\} \text{ est un ensemble stable.} \quad (3)$$

Supposons  $|E(D)| = n^2 - 4n + 9$ . D'après (1),  $D - \{x, y, z\}$  est isomorphe à  $K_{n-3}^*$ . Considérons le circuit  $C'$  contenant  $y$  et  $z$ . Si l'on avait  $d(x) \geq n$ , alors, pour tout point  $s$  de  $D - C'$  on aurait  $d(s) \geq n$  (ceci est évident pour  $n \geq 8$  puisque  $s$

appartient à un  $K_{n-3}^*$  et se vérifie aisément pour  $n = 5, 6, 7$ ], on pourrait appliquer le lemme, et en déduire  $|E(D)| \leq n^2 - 4n + 8$ . Par conséquent  $d(x) \leq n - 1$ . Symétriquement  $d(y) \leq n - 1$ , et d'après (2)  $d(x) = d(y) = n - 1$ .

Puisque  $d(x) = n - 1$  et que  $\{x, y, z\}$  est stable, il existe au moins deux sommets  $a, b \in D - \{x, y, z\}$  tels que  $|E(x, a)| = |E(x, b)| = 2$ . Par suite  $n \geq 5$ . S'il existe  $c \in D - \{x, y, z, a, b\}$  et  $|E(y, c)| = 2$ , il est facile de voir que, quels que soient les points  $r$  et  $s$  de  $D - \{x, y, z\}$ , il existe dans  $G - \{z\}$  un chemin hamiltonien d'extrémités  $r$  et  $s$ , ce qui contredit le fait que  $D$  est non hamiltonien. Donc nécessairement, les seuls arcs doubles possibles entre  $\{x, y, z\}$  et  $D - \{x, y, z\}$  sont ceux qui joignent  $x, y, z$  aux sommets  $a$  et  $b$ . Soit encore, pour tout sommet  $t \in D - \{x, y, z, a, b\}$   $|E(t, x)| = |E(t, y)| = |E(t, z)| = 1$ . Par ailleurs, s'il existe  $t, u \in D - \{x, y, z, a, b\}$  avec  $(t, z) \in U$  et  $(y, u) \in U$ , le chemin  $t, z, b, x, a, y, u$  peut être agrandi en un circuit hamiltonien de  $D$  si  $t \neq u$ , ou bien est un circuit si  $t = u$ , auquel on peut appliquer le lemme. Ceci est donc impossible. Ceci prouve que l'on a, soit

$$E(\{x, y, z\} \rightarrow D - \{x, y, z, a, b\}) = \emptyset,$$

soit

$$E(D - \{x, y, z, a, b\} \rightarrow \{x, y, z\}) = \emptyset$$

et ceci achève de prouver que, lorsque  $E(D) = n^2 - 4n + 9$ ,  $D$  a la structure définie dans l'énoncé du théorème.

Dans [6] Lewin donne des conditions suffisantes, les meilleures possibles en un certain sens, portant sur le nombre d'arcs d'un 1-graphe  $D$  fortement connexe pour que  $D$  soit hamiltonien: nous précisons ici ce résultat avec le théorème suivant:

**2.7. Théorème.** Soit  $D$  fortement connexe. Si  $|E(D)| \geq n^2 - 3n + 4$ , alors  $D$  est hamiltonien sauf si  $|E(D)| = n^2 - 3n + 4$  et  $D$  est soit le graphe  $D_3(n, n)$  ou son opposé, pour  $n \geq 3$ , soit le graphe  $D_6(n)$  de la Fig. 3 pour  $n \geq 3$ , soit le graphe  $G_5$  de la Fig. 1 pour  $n = 4$ , soit le graphe  $G_6$  de la Fig. 3 pour  $n = 5$ .

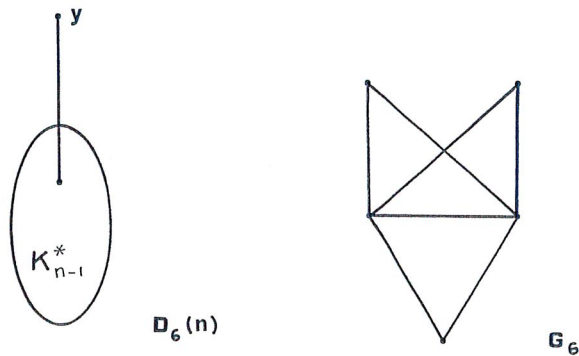


Fig. 3.

**Preuve.** Lewin a prouvé dans [6] que si  $|E(D)| > n^2 - 3n + 4$  alors  $D$ , s'il est fortement connexe, est hamiltonien.

Il nous reste donc à caractériser les graphes  $D$  fortement connexes non hamiltoniens avec  $|E(D)| = n^2 - 3n + 4$ . D'après le théorème de Meyniel il existe deux sommets  $x$  et  $y$  non adjacents avec  $d(x) + d(y) \leq 2n - 2$  et donc  $|E(D - \{x, y\})| \geq n^2 - 3n + 4 - (2n - 2) = (n - 2)(n - 3)$ . Par suite  $D - \{x, y\}$  est le graphe  $K_{n-2}^*$  et  $d(x) + d(y) = 2n - 2$ .

*Cas 1.*  $d(x) \geq n$ . Comme  $D$  est fortement connexe et  $\{x, y\}$  stable  $E(y, D - \{x, y\}) \neq \emptyset$  et  $E(D - \{x, y\}, y) \neq \emptyset$ . Si  $|\Gamma^+(y) \cup \Gamma^-(y)| > 1$ ,  $D - x$  est hamiltonien et, d'après le Lemme 2.4,  $D$  est hamiltonien. Si  $|\Gamma^+(y) \cup \Gamma^-(y)| = 1$ ,  $|E(D - y)| = n^2 - 3n + 4 - 2 = (n - 1)(n - 2)$ . Par suite,  $D - y$  est le graphe  $K_{n-1}^*$  et  $D$  est le graphe  $D_6(n)$  représenté dans la Fig. 3.

*Cas 2.*  $d(x) < n$  et, par symétrie,  $d(y) < n$ : on a nécessairement  $d(x) = d(y) = n - 1$ . Pour  $n \geq 6$ , on laisse au lecteur le soin de vérifier que le seul graphe répondant aux conditions est le graphe  $D_3(n, n)$  ou son opposé. Pour  $n = 4$  ou  $5$  on trouve, en plus des graphes précédents, les graphes  $G_5$  de la Fig. 1 ou  $G_6$  de la Fig. 3.

**2.8. Remarque.** On obtient en corollaire de ce théorème, dans le cas des graphes non orientés, le théorème analogue de J.A. Bondy [2]: les graphes  $D_6$  et  $G_6$  sont les symétrisés des seuls graphes à  $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$  arêtes non hamiltoniens.

### 3. Circuits de longueur $\geq k$

Pour généraliser les théorèmes précédents sur les hamiltoniens on peut se poser le problème de trouver des conditions suffisantes les meilleures possibles portant sur le nombre d'arcs d'un 1-graphe  $D$  pour assurer l'existence d'un circuit de longueur  $\geq k$  dans  $D$  pour  $k < n$ . Dans [5] Häggkvist et Thomassen ont résolu ce problème dans le cas d'un graphe  $D$  quelconque avec le théorème suivant:

**3.1. Théorème.** Soient  $k$  un entier  $\leq n$ ,  $r$  et  $q$  définis par

$$n = q(k - 1) + r, \quad 0 \leq r < k - 1.$$

Si  $|E(D)| > \frac{1}{2}(n^2 + n(k - 3) + r(r - 1) - r(k - 2))$  alors  $D$  contient un circuit de longueur  $\geq k$  et cette borne est la meilleure possible.

*Remarque.* Les mêmes conditions assurent en fait l'existence d'un circuit de longueur  $k$  exactement.

Dans le cas d'un 1-graphe  $D$  fortement connexe le problème n'est pas résolu. Toutefois, pour  $k = n - 1$  nous avons montré le théorème suivant:

**3.2. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe fortement connexe,  $n \geq 7$ . Si  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 6$  alors  $D$  contient un circuit de longueur  $\geq n - 1$  sauf si  $|E(D)| = n^2 - 4n + 6$  et  $D$  est le graphe  $D_3(n, n - 1)$  ou son opposé.

**Preuve.** D'après le théorème de Meyniel, si pour tout couple de sommets  $(x, y)$  non adjacents  $d(x) + d(y) \geq 2n - 1$ ,  $D$  est hamiltonien et le théorème est vérifié. Sinon il existe dans  $D$  deux sommets  $x$  et  $y$  non adjacents avec  $d(x) + d(y) \leq 2n - 2$ . Soit  $D' = D - \{x, y\}$ : on a alors  $|E(D')| \geq n^2 - 4n + 6 - 2n + 2$  soit  $|E(D')| \geq [(n - 2) - 1]^2 - 1$ . Puisque  $n - 2 \geq 2$ , d'après le Théorème 2.1 on est dans l'un des cas suivants:

*Cas 1.*  $D'$  est hamiltonien.  $D$  possède donc un circuit  $C$  de longueur  $n - 2$  avec 2 sommets  $x$  et  $y$  extérieurs à  $C$  non adjacents.  $D - x$  et  $D - y$  sont fortement connexes. Si  $d(x)$  (ou  $d(y)$ ) est supérieur ou égal à  $n - 1$ , d'après le Lemme 2.4 on peut rallonger  $C$  et le théorème est vérifié.

Reste donc le cas  $d(x) \leq n - 2$ . On a donc

$$|E(D - x)| \geq n^2 - 4n + 6 - (n - 2) = (n - 1)^2 - 3(n - 1) + 4$$

et, d'après le Théorème 2.7, ou bien  $D - x$  est hamiltonien ou bien  $|E(D - x)| = (n - 1)^2 - 3(n - 1) + 4$  (ce qui impose  $d(x) = n - 2$ ) et  $D - x$  est le graphe  $D_3(n - 1, n - 1)$  (ou son opposé) ou le graphe  $D_6(n - 1)$ .

Si  $D - x$  est le graphe  $D_3(n - 1, n - 1)$  (ou son opposé), comme  $D$  est fortement connexe, ou bien  $D$  a un circuit de longueur  $\geq n - 1$  ou bien  $D$  est le graphe  $D_3(n, n - 1)$  (ou son opposé).

Si  $D - x$  est le graphe  $D_6(n - 1)$ ,  $D$  a un circuit de longueur  $\geq n - 1$ .

*Cas 2.*  $D'$  est le graphe  $D_2(n - 2, n - 2)$  (ou son opposé) ou  $D_2(n - 2, n - 2)$  moins un arc (ou son opposé). La forte connexité de  $D$  permet de montrer l'existence d'un circuit de longueur  $\geq n - 1$  dans le graphe  $D$  construit à partir du graphe  $D'$ .

**3.3. Remarque.** Si  $n = 3$ ,  $D$  étant fortement connexe contient un circuit de longueur  $\leq 2$ .

Si  $n = 4$  et si  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 6 = 6$ , on démontre, de manière analogue au cas  $n \geq 7$ , que  $D$  contient un circuit de longueur 3 ou 4 sauf si  $D$  est  $D_3(4, 3)$  ( $= K_{1,3}^*$ ) ou  $P_3^*$  (voir Fig. 4).



Fig. 4.

Pour  $n = 5$ , si  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 8 = 13$ , par une démonstration analogue au cas  $n \geq 7$ , on montre que  $D$  contient un circuit de longueur 4 ou 5. Mais il existe de nombreux graphes fortement connexes avec au plus 12 arcs, ne contenant pas de circuit de longueur  $\geq 4$ , par exemple  $D_3(5, 4)$  et les deux graphes de la Fig. 5. La liste de tous ces graphes est trop longue pour figurer ici.

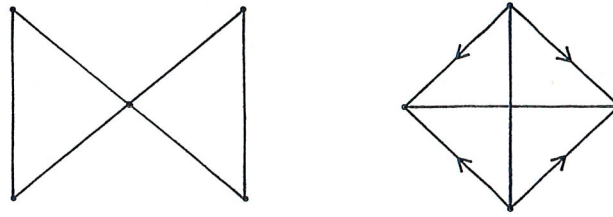


Fig. 5.

Pour  $n = 6$ , si  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 7 = 19$ , on montre que  $D$  contient un circuit de longueur 5 ou 6. Là encore, il existe de nombreux graphes à 6 sommets et 18 arcs sans circuit de longueur  $\geq 5$ , et nous ne donnons comme exemples que  $D_3(6, 5)$  et les deux graphes de la Fig. 6.

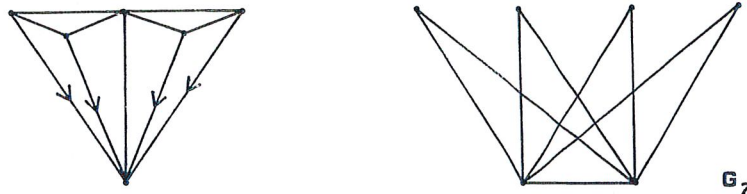


Fig. 6.

En ce qui concerne le problème général de l'existence de circuits de longueur  $\geq k$  ( $k \geq 3$ ), pour des graphes fortement connexes, nous proposons la conjecture suivante.

**3.4. Conjecture.** Soient  $D$  un 1-graphe fortement connexe, avec  $n \geq 4$  et  $k$  un entier,  $k \leq n$ .

$$\text{Si } k \leq n \leq 2k - 4 \text{ et } |E(D)| > \psi(n, k)$$

ou

$$\text{si } n \geq 2k - 4 \text{ et } |E(D)| > \varphi(n, k)$$

alors  $D$  contient un circuit de longueur  $\geq k$ . ( $\psi$  et  $\varphi$  sont respectivement définis dans les Exemples 3 et 4).

Cette conjecture, si elle est vérifiée, est la meilleure possible comme le montrent les graphes  $D_3(n, k)$  et  $D_4(n, k)$ , dont le nombre d'arcs est, respectivement,  $\psi(n, k)$  et  $\varphi(n, k)$ .

Les Théorèmes 2.7 et 3.2 montrent que cette conjecture est vraie pour  $k = n$  et

$k = n - 1$ . Elle est aussi vraie pour  $k = 3$  d'après le théorème suivant, dont la démonstration, très simple, est laissée au lecteur:

**3.5. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe fortement connexe,  $n \geq 4$ .

Si  $|E(D)| \geq 2n - 2$  alors  $D$  contient un circuit de longueur  $\geq 3$ , sauf si  $|E(D)| = 2n - 2$  et  $D$  est le symétrisé d'un arbre.

#### 4. Existence de chemins de longueur $l$

De manière analogue à celle du Paragraphe 3, nous cherchons quel est le nombre minimum d'arcs assurant l'existence d'un chemin de longueur  $\geq l$ , ou ce qui est équivalent, de longueur  $l$  dans un 1-graphe  $D$  quelconque ou fortement connexe.

Tout théorème assurant l'existence d'un circuit de longueur  $\geq l$  dans un 1-graphe fortement connexe a, comme corollaire, un théorème sur l'existence de chemins dans un 1-graphe quelconque, que l'on obtient de la manière suivante:

Etant donné un 1-graphe  $D$  et un sommet  $x$  n'appartenant pas à  $V(D)$  le graphe  $D\langle x \rangle$  est fortement connexe et il contient un circuit de longueur  $\geq l$  si et seulement si  $D$  contient un chemin de longueur  $\geq l - 2$ .

**4.1. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe.

Si  $|E(D)| \geq (n-1)(n-2)$  alors  $D$  est chemin hamiltonien sauf si  $|E(D)| = (n-1)(n-2)$  et  $D$  est un graphe  $D_2(n, n-1)$ , ou son opposé, ou bien  $D$  est la réunion du graphe  $K_{n-1}^*$  et d'un sommet isolé, ou bien  $n = 4$  et  $D = K_{1,3}^*$ .

**Preuve.** On a  $|E(D)| \geq (n-1)(n-2)$  et donc  $|E(D\langle x \rangle)| \geq (n-1)(n-2) + 2n$  ou encore  $|E(D\langle x \rangle)| \geq (n+1)^2 - 3(n+1) + 4$ . D'après le Théorème 2.7,  $D\langle x \rangle$  est hamiltonien sauf si  $|E(D\langle x \rangle)| = (n+1)^2 - 3(n+1) + 4$  et  $D\langle x \rangle$  a une des formes précisées dans le Théorème 2.7. Par conséquent,  $D$  est chemin hamiltonien sauf si  $|E(D)| = (n-1)(n-2)$  et  $D$  est d'une des formes annoncées.

**4.2. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe.

Si  $|E(D)| \geq (n-1)(n-3)$  et  $n \geq 6$  alors  $D$  contient un chemin de longueur  $n-2$  sauf si  $|E(D)| = (n-1)(n-3)$  et  $D$  est un graphe  $D_2(n, n-2)$  ou son opposé.

**Preuve.** On a  $|E(D)| \geq (n-1)(n-3)$  et donc  $|E(D\langle x \rangle)| \geq n^2 - 2n + 3$  ou encore  $|E(D\langle x \rangle)| \geq (n+1)^2 - 4(n+1) + 6$ . Le Théorème 3.2 appliqué  $D\langle x \rangle$  permet alors d'achever la démonstration de manière analogue à celle du Théorème 4.1.

**4.3. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe.

Si  $n \geq 3$  et  $|E(D)| > \frac{1}{4}n^2$ , alors  $D$  possède un chemin de longueur 2.

**Preuve.** Si  $D$  n'a pas de chemin de longueur 2, le graphe non orienté sous-jacent n'a pas de cycle impair: il est donc biparti. Le graphe  $D$  lui-même est donc

biparti. Posons

$$V(D) = A \cup B \quad \text{avec } |A| \leq |B|, \quad E(D) \subset \{(x, y), (y, x), x \in A, y \in B\}.$$

Puisqu'il n'y a pas de chemin de longueur 2 dans  $D$ , on a pour tout sommet  $x \in A$ ,  $|\Gamma(x)| = 1$  ou  $\Gamma^+(x) = \emptyset$  ou  $\Gamma^-(x) = \emptyset$ . D'où  $d(x) \leq \sup(2, |B|)$ , et  $|E(D)| \leq \sup(2|A|, |A||B|)$ .

Pour  $n$  pair, on en déduit,  $|E(D)| \leq \sup(n, \frac{1}{4}n^2) = \frac{1}{4}n^2$  ( $n \geq 4$ ).

Pour  $n$  impair,  $|E(D)| \leq \sup(n-1, \frac{1}{4}n^2) = \frac{1}{4}n^2$  ( $n \geq 3$ ).

*Remarque.* Le graphe  $D_1(n, 2)$  montre que la borne trouvée est la meilleure possible.

**4.4. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe à  $n$  sommets.

Si  $n \geq 5$  et  $|E(D)| > \frac{1}{3}n^2$ , alors  $D$  contient un chemin de longueur 3.

La démonstration cas par cas est trop longue pour figurer ici. La borne est la meilleure possible comme le montre l'exemple  $D_1(n, 3)$ .

Les théorèmes précédents nous amènent à formuler la conjecture suivante:

**4.5. Conjecture.** Soient  $D$  un 1-graphe et  $l$  un entier,  $l \leq n-1$ ,

$$\text{si } l+1 \leq n \leq 2l-1 \quad \text{et} \quad |E(D)| > g(n, l),$$

ou

$$\text{si } n \geq 2l-1 \quad \text{et} \quad |E(D)| > f(n, l),$$

alors  $D$  contient un chemin de longueur  $l$  ( $g$  et  $f$  étant respectivement définis dans les Exemples 2 et 1).

**4.6. Remarque.** Si la Conjecture 3.4 est vérifiée alors la Conjecture 4.5 s'en déduit, comme dans les démonstrations des Théorèmes 4.1 et 4.2, par application de 3.4 à  $D\langle x \rangle$ .

**4.7. Remarque.** Nous savons démontrer la Conjecture 4.5 dans de nombreux cas particuliers, par exemple si  $D$  est antisymétrique ou si  $n \leq 7$ . De plus, nous avons prouvé que si la conjecture est vraie pour  $n \leq 2l-1$ , alors elle est vraie pour  $n \geq 2l$ .

Le Théorème 3.2 admet aussi comme corollaire un théorème sur l'existence de chemins hamiltoniens dans un graphe fortement connexe.

**4.8. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe fortement connexe.

Si  $n \geq 7$  et  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 6$ , alors  $D$  est chemin hamiltonien, sauf dans le cas  $|E(D)| = n^2 - 4n + 6$  et  $D$  est le graphe  $D_3(n, n-1)$  ou son opposé.

**Preuve.** Supposons  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 6$  et  $n \geq 7$ .

D'après le Théorème 3.2,  $D$  contient un circuit de longueur  $\geq n - 1$  sauf si  $D$  est le graphe  $D_3(n, n - 1)$  ou son opposé.

Si  $D$  contient un circuit de longueur  $n$ , il contient un chemin de longueur  $n - 1$ . S'il contient un circuit  $C$  de longueur  $n - 1$ , et si  $a$  est le sommet de  $D$  non sur  $C$ , d'après la forte connexité de  $D$ , il existe un arc de  $a$  vers  $C$  et donc un chemin de longueur  $n - 1$  dans  $D$ .

**4.9. Remarque.** On peut montrer à l'aide du théorème de Meyniel et du Théorème 2.3 que l'on a le résultat suivant:

Si  $n = 4, 5, 6$  et si  $|E(D)| \geq n^2 - 4n + 6$ ,  $D$  étant un 1-graphe fortement connexe, alors  $D$  est chemin hamiltonien sauf si  $|E(D)| = n^2 - 4n + 6$  et  $D$  est le graphe  $D_3(n, n - 1)$  ou son opposé, ou, si  $n = 6$  et  $D$  est le graphe  $G_7$  de la Fig. 6.

**4.10. Théorème.** Soit  $D$  un 1-graphe fortement connexe à  $n$  sommets,  $n \geq 6$ .

Si  $|E(D)| \geq n^2 - 5n + 9$  alors  $D$  admet un chemin de longueur  $n - 2$ .

**Preuve.** Nous en donnons seulement une idée ici.

Si  $D$  n'est pas chemin hamiltonien, d'après un corollaire du théorème de Ghouila-Houri, il existe dans  $D$  un sommet  $x$  de degré  $d(x) \leq n - 2$ . On considère alors  $D - x$ . S'il est fortement connexe, on lui applique le Théorème 4.8. Sinon, on considère le graphe des composantes fortement connexes, et on étudie cas par cas suivant l'existence de circuits ou chemins hamiltoniens dans ces composantes fortement connexes.

Les résultats précédents incitent à formuler la conjecture suivante:

**4.11. Conjecture.** Soient  $D$  un 1-graphe fortement connexe et  $l$  un entier  $3 \leq l \leq n$ . Alors  $D$  contient un chemin de longueur  $l$  dans les trois cas suivants:

(a)  $n \leq 2l - 2$ ,  $|E(D)| > \psi(n, l)$ ,

(b)  $n \geq 2l - 2$ ,  $l$  pair,  $l = 2k - 2$ ,  $|E(D)| > \varphi'(n, k)$ ,

(c)  $n \geq 2l - 2$ ,  $l$  impair,  $l = 2k - 3$ ,  $|E(D)| > \varphi(n, k)$ ,

$\psi$ ,  $\varphi'$  et  $\varphi$  étant respectivement définis dans les Exemples 3, 5, 4.

**4.12. Remarques.** (a) Tout graphe fortement connexe à  $n \geq 3$  sommets contient un chemin de longueur 2.

(b) Les bornes données dans la Conjecture 4.11 sont les meilleures possibles comme le prouvent les graphes  $D_3(n, l)$ ,  $D_4(n, k)$ ,  $D_5(n, k)$ .

(c) Si la conjecture 3.4 était vérifiée elle permettrait de prouver avec une démonstration analogue à celle du Théorème 4.8, la Conjecture 4.11 dans le cas (a).

(d) D'après les Théorèmes 4.8 et 4.9 la Conjecture 4.11 est vraie pour  $l = n - 1$  et  $l = n - 2$ .

**Note.** Récemment il a été démontré dans [8] que si la Conjecture 3.4 est vraie pour  $n = 2k - 4$ , alors elle est vraie pour  $n > 2k - 4$ . Ceci implique, d'après les Théorèmes 2.7 et 3.2 que la Conjecture 3.4 est vraie pour  $k = 4$  et  $k = 5$ .

## References

- [1] C. Berge, Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1973).
- [2] J.A. Bondy, Variations on hamiltonian themes, *Can. Math. Bull.* 15 (1972) 57–62.
- [3] J.A. Bondy et C. Thomassen. A short proof of Meyniel's theorem. *Discrete Math.* 19 (1977) 195–197.
- [4] A. Ghouila-Houri, Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien, *C.R. Acad. Sci. Paris* 251 (1960) 495–497.
- [5] R. Häggkvist et C. Thomassen, On pancyclic digraphs, *J. Combinatorial Theory (B)* 20 (1976) 20–40.
- [6] M. Lewin, On maximal circuits in directed graphs, *J. Combinatorial Theory (B)* 18 (1975) 175–179.
- [7] H. Meyniel, Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté, *J. Combinatorial Theory (B)* 14 (1973) 137–147.
- [8] M.C. Heydemann, Thèse d'Etat, Université Paris XI (1980).