



**HAL**  
open science

# Graphes orientés fortement $k$ -connexes et graphes "k arc hamiltoniens"

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Graphes orientés fortement  $k$ -connexes et graphes "k arc hamiltoniens". Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1970, 271, pp.141-144. hal-02373335

**HAL Id: hal-02373335**

**<https://inria.hal.science/hal-02373335>**

Submitted on 20 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



0. DÉFINITIONS ET NOTATIONS (1). — On considère un graphe  $G$  orienté, sans boucles,  $(X, U)$  à  $n$  sommets :  $|X| = n$ . On désigne par  $d_G^+(x)$  (*demi-degré extérieur du sommet  $x$* ) le nombre d'arcs du graphe  $G$  d'extrémité initiale  $x$ . De même on désigne par  $d_G^-(x)$  (*demi-degré intérieur du sommet  $x$* ) le nombre d'arcs du graphe  $G$  d'extrémité terminale  $x$ . Un graphe orienté  $G$  est dit fortement  $k$ -connexe ( $k < |X|$ ), s'il est fortement connexe et s'il le reste après suppression de  $k - 1$  sommets quelconques.

1. LEMME. — *Soit  $G$  un graphe orienté non fortement connexe, alors il existe dans  $G$  :*

— *une composante fortement connexe  $C_\alpha$  telle que pour tout sommet  $x$  de  $C_\alpha$  :  $d_G^+(x) \leq |C_\alpha| - 1$ ;*

— *une composante fortement connexe  $C_\beta$  ( $\neq C_\alpha$ ) telle que pour tout sommet  $x$  de  $C_\beta$  :  $d_G^-(x) \leq |C_\beta| - 1$ .*

*Démonstration.* — Soit  $G^*$  le graphe construit de la manière suivante à partir de  $G$  : les sommets  $c_1, \dots, c_h$  de  $G^*$  représentent les composantes fortement connexes  $C_1, \dots, C_h$  de  $G$ ;  $c_i c_j$  est un arc de  $G^*$  si et seulement si il existe au moins un arc  $x_i x_j$  dans  $G$ ,  $x_i$  appartenant à  $C_i$  et  $x_j$  à  $C_j$ . Le lemme résulte de ce que  $G^*$  est un graphe sans circuits et admet donc deux points distincts  $c_\alpha$  et  $c_\beta$  tels que  $d_{G^*}^+(c_\alpha) = 0$  et  $d_{G^*}^-(c_\beta) = 0$ .

2. CONDITION DE FORTE  $k$ -CONNEXITÉ D'UN GRAPHE ORIENTÉ  $G$ . — On suppose que les demi-degrés extérieurs (resp. intérieurs) sont rangés par ordre croissant :  $d_1^+ \leq d_2^+ \dots \leq d_n^+$  et  $d_1^- \leq d_2^- \dots \leq d_n^-$ .  $d_j^+$  (resp.  $d_j^-$ ) désigne donc la  $j^{\text{ième}}$  valeur de la suite des  $d^+$  (resp.  $d^-$ ). On désigne par  $E[m]$  la partie entière du nombre  $m$ .

THÉORÈME. — *Soit  $G$  un graphe orienté  $(X, U)$ , sans boucles, à  $n$  sommets :  $|X| = n$  et soit  $k$  un entier :  $1 \leq k < n$ . Les demi-degrés extérieurs et intérieurs étant rangés par ordre croissant :*

$$\text{si } d_j^+ \geq j + k - 1 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n - 1 - d_E^-\left[\frac{n-k}{2} + 1\right]$$

$$\text{et si } d_j^- \geq j + k - 1 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n - 1 - d_E^+\left[\frac{n-k}{2} + 1\right],$$

*alors  $G$  est fortement  $k$ -connexe.*

*Démonstration.* — Soit  $S$  un ensemble d'articulation à  $s$  sommets :  $|S| = s$ , c'est-à-dire que le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en supprimant les sommets de  $S$  n'est pas fortement connexe. Soient  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  les composantes de  $G'$  obtenues dans le lemme ci-dessus. Posons



$j = \inf[|C_x|, |C_\beta|]$ . On a  $j \leq (n-s)/2$ . Pour la commodité du raisonnement nous supposons par exemple  $j = |C_x|$ . On a pour tout  $x$  sommet de  $C_x$  :  $d^+(x) \leq j - 1 + s$ . Comme  $|X_x| = j$  :  $d_j^+ \leq j + s - 1$ . D'après l'hypothèse, soit (i)  $s \geq k$ , soit (ii)  $j > n - 1 - d_{E, (n-k/2)+1}^-$ . Les  $n - s - j$  points de  $X - C_x - S$  ont un demi-degré intérieur inférieur ou égal à  $n - 1 - j$ . Donc  $d_{n-s-j}^- \leq n - j - 1$ .

(ii) Si  $j > n - 1 - d_{E, (n-k/2)+1}^-$  :  $d_{n-s-j}^- < d_{E, (n-k/2)+1}^-$  soit  $n - s - j \leq (n - k)/2$ ; comme  $j \leq (n - s)/2$ , il vient  $s \geq k$ .

Dans tous les cas :  $s \geq k$  et  $G$  est donc fortement  $k$ -connexe.

3. DANS CE PARAGRAPHE  $k$  DÉSIGNE UN ENTIER :  $1 \leq k < n$ .

COROLLAIRE 1. — Soit  $G$  un graphe orienté à  $n$  sommets. Si  $G$  vérifie : Pour tout entier  $j$  :  $k - 1 \leq j \leq (n + k - 3)/2$ ,  $|S_j^+| \leq j + 1 - k$  et  $|S_j^-| \leq j + 1 - k$  où  $S_j^+ = \{x : x \in X \text{ et } d_G^+(x) \leq j\}$  et  $S_j^- = \{x : x \in X \text{ et } d_G^-(x) \leq j\}$ , alors  $G$  est fortement  $k$ -connexe.

Il se déduit du théorème précédent en remarquant qu'avec ces hypothèses, on a

$$d_{E, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + 1}^- \geq \frac{n+k-3}{2} \quad \text{et} \quad d_{E, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + 1}^+ \geq \frac{n+k-3}{2}.$$

Remarque. — On peut obtenir un énoncé plus fort en supposant que pour  $j = (n + k - 3)/2$ , l'une seulement des inégalités suivantes est vérifiée :

$$\left| S_{\frac{n+k-3}{2}}^+ \right| \leq \frac{n-k}{2} \quad \text{ou} \quad \left| S_{\frac{n+k-3}{2}}^- \right| \leq \frac{n-k}{2}.$$

COROLLAIRE 1 bis (\*). — Soit  $G$  un graphe non orienté à  $n$  sommets, posons

$$S_j = \{x : x \in X \text{ et } d(X) \leq j\}.$$

Si  $G$  satisfait à :

- (1) Pour tout entier  $j$  tel que  $k - 1 \leq j < (n + k - 3)/2$ ,  $|S_j| \leq j + 1 - k$ ;  
 (2)  $|S_{(n+k-3)/2}| \leq n - k$ , alors  $G$  est  $k$ -connexe.

Il suffit d'appliquer le corollaire 1 (énoncé fort) au graphe symétrique orienté associé à  $G$ , en remarquant que  $d_G^+(x) = d_G^-(x)$ , ce qui explique le  $n - k$  [et non  $(n - k)/2$ ] de (2).

COROLLAIRE 2. — Soit  $G$  un graphe orienté à  $n$  sommets tel que pour tout sommet  $x$  :

$$d_G^+(x) \geq \frac{n+k-2}{2} \quad \text{et} \quad d_G^-(x) \geq \frac{n+k-2}{2};$$

$G$  est fortement  $k$ -connexe.

COROLLAIRE 2 bis (\*). — Soit  $G$  un graphe non orienté à  $n$  sommets tel que pour tout sommet  $x$  :  $d(x) \geq (n + k - 2)/2$ , alors  $G$  est  $k$ -connexe.



4. GRAPHEs «  $k$ -ARC HAMILTONIENS ». — L'objet de ce paragraphe est de généraliser un théorème de Posa <sup>(8)</sup> concernant les graphes «  $k$  arête hamiltoniens » : graphes pour lesquels tout système de chaînes élémentaires deux à deux disjointes de longueur totale  $k$  est contenu dans un cycle hamiltonien.

Nous appellerons graphe «  $k$  arc hamiltonien » [ $0 \leq k < n$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe] tout graphe orienté pour lequel *tout système de chemins élémentaires deux à deux disjointes, de longueur totale  $k$ , est contenu dans un circuit hamiltonien*. En particulier tout chemin de longueur  $k$  d'un graphe «  $k$  arc hamiltonien » est contenu dans un circuit hamiltonien.

Pour  $k = 0$  on retrouve la notion de graphe orienté hamiltonien.

Pour  $k = n - 1$ , les graphes «  $n - 1$  arc hamiltoniens » ont été caractérisés par Chartrand, Kronk, Lick <sup>(5)</sup>.

Nous utiliserons la propriété suivante énoncée par Nash Williams <sup>(7)</sup>.

PROPOSITION. — *Si dans un graphe orienté  $G$  on a, quel que soit le sommet  $x$  :  $d_G^+(x) \geq n/2$  et  $d_G^-(x) \geq n/2$ , alors  $G$  possède au moins un circuit hamiltonien.*

Cette proposition se déduit immédiatement du théorème de Ghouila-Houri [(6), p. 318], en remarquant que  $G$  est fortement connexe d'après le corollaire 2.

THÉORÈME. — *Si dans un graphe orienté  $G$  à  $n$  sommets, on a pour tout sommet  $x$  :*

$$d_G^+(x) \geq \frac{n+k}{2}, \quad d_G^-(x) \geq \frac{n+k}{2},$$

alors  $G$  est  $k$ -arc hamiltonien.

Démonstration (par récurrence). — Le théorème est vrai pour  $j = 0$  (proposition précédente); supposons le vrai pour tout  $j < k$  et montrons qu'il est vrai pour  $j = k$ .

Soit donc un graphe  $G$  avec  $d_G^+(x) \geq (n+k)/2$ ,  $d_G^-(x) \geq (n+k)/2$  pour tout sommet  $x$ . Soit un système quelconque de chemins élémentaires deux à deux disjointes de longueur totale  $k$  et soit  $\mu_0 = [x_0, x_1, \dots, x_h]$  un chemin de ce système. On a  $1 \leq h \leq k$ .

Au chemin  $\mu_0$  associons le graphe  $G_0$  obtenu à partir de  $G$  en supprimant les sommets de  $\mu_0$  et en rajoutant un sommet  $c$  et pour chaque sommet  $x$  n'appartenant pas à  $C$  un arc  $(x, c)$  si  $(x, x_0)$  est un arc de  $G$  et un arc  $(c, x)$  si  $(x_h, c)$  est un arc de  $G$ .

Remarquons qu'il y a équivalence entre :

$G_0$  admet un circuit hamiltonien  $\Leftrightarrow G$  admet un circuit hamiltonien contenant le chemin  $C$ .

$G_0$  est un graphe qui a  $n_0 = n - h$  sommets.

Pour  $x$  sommet de  $G_0$  :  $x \neq c$ , on a

$$\begin{aligned} d_{G_0}^+(x) &= d_G^+(x) - \text{nombre d'arcs } (x, x_i) && \text{avec } x_i \in C, \quad x_i \neq x_0; \\ d_{G_0}^-(x) &= d_G^-(x) - \text{nombre d'arcs } (x_i, x) && \text{avec } x_i \in C, \quad x_i \neq x_h. \end{aligned}$$



Donc

$$d_{G_c}^+(x) \geq d_G^+(x) - h, \quad d_{G_c}^-(x) \geq d_G^-(x) - h.$$

Quant au sommet  $c$ , on a  $d_{G_c}^+(c) \geq d_G^+(x_h) - h$  ( $x_h$  pouvant être relié aux  $hx_i$  de  $C$ ), de même  $d_{G_c}^-(c) \geq d_G^-(x_0) - h$ .

Tenant compte des conditions imposées à  $d_{G_c}^+(x)$  et  $d_{G_c}^-(x)$  il vient

$$d_{G_c}^+(x) \geq \frac{n+k}{2} - h = \frac{|G_c| + k - h}{2},$$

$$d_{G_c}^-(x) \geq \frac{|G_c| + k - h}{2} \quad \text{pour tout sommet } x \text{ de } G_c.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au graphe  $G_c$  avec  $j = k - h$  ( $0 \leq j < k$ ) on en déduit que tout système de chemins élémentaires de longueur totale  $k - h$  de  $G_c$  est contenu dans un circuit hamiltonien, donc que dans  $G$  il existe un circuit hamiltonien contenant le système donné.

COROLLAIRE 3. — *Théorème de Posa* (\*), si dans un graphe (non orienté)  $G$  on a  $d(x) \geq (n+k)/2$  pour tout sommet  $x$  de  $G$ , alors  $G$  est «  $k$  arête hamiltonien ».

COROLLAIRE 4. — Si dans un graphe orienté  $G$  on a quel que soit le sommet  $x$  de  $G$

$$d_{G_c}^+(x) \geq \frac{n+1}{2}, \quad d_{G_c}^-(x) \geq \frac{n-1}{2},$$

alors pour tout couple  $(a, b)$  de sommets distincts, il existe au moins un chemin hamiltonien partant de  $a$  et finissant en  $b$ .

Remarque. — On aurait pu songer à un énoncé plus fort en imposant des conditions à  $d_{G_c}^+(x) + d_{G_c}^-(x)$  mais comme le montre le contre-exemple 3 (p. 324) de Ghouila-Houri (6) il n'en est rien : on peut avoir

$$d_{G_c}^+(x) + d_{G_c}^-(x) \geq n + 1$$

et  $G$  fortement 2-connexe avec des arcs n'appartenant à aucun circuit hamiltonien.

(\*) Séance du 29 juin 1970.

(1) C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris.

(2) J. A. BONDY, *Properties of graphs with constraints on degrees*, multigraphié de l'Université de Waterloo (Ontario, Canada).

(3) CHARTRAND, KAPOOR et KRONK, *Mathematika*, 15, 1968, p. 51-52.

(4) CHARTRAND et HARARY, *Graphs with prescribed connectivities (Symp. on graph theory Titany, Acad. Sci. Hung., 1967, p. 61-63)*.

(5) CHARTRAND, KRONK et LICK, *Fundamentae Mathematicae*, 65, 1969, Pologne.

(6) A. GHOUILA-HOURI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 81, 1964, fasc. 3, p. 317-327.

(7) NASH WILLIAMS, *Hamiltonian circuits in graphs and digraphs (Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, [110] : The many facets in Graphs Theory, 1969, p. 237-243)*.

(8) L. POSA, *Magya. Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, 1, 1963, p. 395-361.

(48 bis, rue A.-Salcl,  
92-Fontenay-aux-Roses,  
Hauts-de-Seine.)