



HAL
open science

Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet. Hypergraph Seminar 1972, Springer Verlag Lecture Notes 411, 1974, Columbus, Ohio, États-Unis. pp.34-53. hal-02371597

HAL Id: hal-02371597

<https://inria.hal.science/hal-02371597>

Submitted on 19 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jean-Claude Bermond, C.N.R.S.

I. Introduction

Définition 1. h étant un entier positif et $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_h$ un h -uplet d'entiers positifs, on désignera par $K_{n_1, n_2, \dots, n_h}^h$ l'hypergraphe h -parti complet formé en considérant h ensembles disjoints, X_k , avec $|X_k| = n_k$; les sommets de $K_{n_1, n_2, \dots, n_h}^h$ sont les éléments de $X = \bigcup_k X_k$ et les arêtes sont les parties E_i de X , telles que $|E_i \cap X_k| = 1$ pour tout k ($1 \leq k \leq h$).

Dans le cas où $n_k = n$ pour tout k , on notera cet hypergraphe $K_{h \times n}^h$. Ces hypergraphes constituent une généralisation du graphe biparti complet (cas $h=2$ de la définition) et sont étudiés dans [3] et [13].

Définition 2. H étant un hypergraphe simple, $L_{h-1}(H)$ désigne le graphe simple, dont les sommets représentent les arêtes de H et où deux sommets sont reliés si et seulement si les arêtes qu'ils représentent ont une intersection de cardinalité $\geq h-1$. Dans le cas $h=2$, $L_1(H)$ n'est autre que le graphe représentatif des arêtes de l'hypergraphe H ([4] p. 383).

Remarque 1: Aux arêtes d'un hypergraphe H on associe aussi un multigraphe $R(H)$, dont les sommets représentent les arêtes de H et où deux sommets sont reliés par k arêtes dans $R(H)$, si les arêtes de H qu'ils représentent ont une intersection de cardinalité k . Dans le cas des hypergraphes h -parti complets, la donnée de $L_{h-1}(H)$ détermine $R(H)$ et $L_1(H)$. En effet 2 arêtes de H ont une intersection de cardinalité k si et seulement si les points qui les représentent dans $L_{h-1}(H)$ sont à une distance $h-k$.

Remarque 2: Les arêtes d'un hypergraphe h -parti complet peuvent être considérées comme les bases d'un matroïde sur X . $L_{h-1}(K_{n_1, n_2, \dots, n_h}^h)$ n'est autre alors que le "basis graph" de ce matroïde. (Le "basis graph" d'un matroïde est le graphe simple dont les sommets représentent les bases du matroïde, deux sommets étant reliés si et seulement si les bases associées ont une différence symétrique de cardinalité 2). Les "basis-graph" ont été étudiés par Bondy [5], Cunningham [6] et Maurer [12].

Nous nous proposons ici de caractériser $L_{h-1}(H)$ dans le cas où H est un hypergraphe h-parti complet, problème évoqué dans un article de Grünbaum [9 p. 119] (qui appelle $L_{h-1}(H)$ le "h-1 interchange graph"). Nous généraliserons ainsi des résultats de Hoffman [10], Moon [14] et Shrikhande [16] pour le cas $h=2$ (graphe représentatif des arêtes du graphe biparti complet) ; des résultats de Laskar [11] et Aigner [1] pour le cas $h=3$ ($L_2(K_3^3 \times n)$ est appelé alors "cubic lattice graph") et de Rao [15] pour les cas $h=4$ et 5. Le problème analogue concernant les hypergraphes h-complets (les arêtes sont les parties à h éléments d'un ensemble X) a été étudié dans le cas général par Dowling [7] auquel on renvoie pour la bibliographie.

II. Résultats.

Nous nous limiterons ici au cas où $n_k = n$ pour tout k, c'est à dire à l'étude de $L_{h-1}(K_h^h \times n)$. La plupart des résultats peuvent se généraliser au cas où tous les n_k ne sont pas égaux, mais les conditions obtenues sont très lourdes.

Notations : Dans un graphe G on désignera par $d(x,y)$ la distance entre deux points x et y (longueur d'une plus courte chaîne entre x et y), par $D_i(x)$ l'ensemble des points à distance i de x.

On a la proposition suivante immédiate.

Proposition : $L_{h-1}(K_h^h \times n)$ vérifie les propriétés suivantes

P_1 : son nombre de sommets est n^h

P_2 : c'est un graphe connexe régulier de degré $|D_1(x)| = h(n-1)$

P_3 : si $d(x,y) = 1$ alors $|D_1(x) \cap D_1(y)| = n-2$.

P_4 : si $d(x,y) = 2$ alors $|D_1(x) \cap D_1(y)| = 2$.

P_4 bis : si $d(x,y) = 2$ alors $D_1(x) \cap D_1(y)$ est formé de 2 points non adjacents.

P_5 : si $d(x,y) = 2$ alors $|D_1(x) \cap D_3(y)| \geq (h-2)(n-1)$.

P_7 : si $d(x,y) = 3$ alors $|D_1(x) \cap D_2(y)| \leq 3$.

Remarque : $L_{h-1}(K_h^h \times n)$ vérifie aussi la propriété P_6 introduite dans [1].

P_6 : pour tout sommet x, $D_1(x)$ est l'union de h cliques, à n-1 sommets, 2 à 2 disjointes.

Nous verrons plus loin (lemme 3) que P_4^{bis} et P_6 sont équivalentes pour un graphe qui vérifie P_2, P_3, P_4 . Tout graphe qui vérifie P_4 et ne vérifie pas P_4^{bis} contient un sous graphe isomorphe à G_0 , où G_0 est le graphe complet à 4

Remarque : On peut vérifier que le graphe exception, donné ci-dessus, ne vérifie pas la propriété P_4^{bis} ou P_6 : par exemple on a $d(3,7) = 2$
 $D_1(3) \cap D_1(7) = \{1,2\}$ or 1 et 2 sont adjacents. On peut aussi remarquer que $D_1(1)$ est un cycle de longueur 6 et non l'union de 2 cliques à 3 sommets.

Pour une démonstration des théorèmes 1 et 2 on peut voir Aigner [2].

Cas $h=3$.

Théorème 3 (Laskar [11] et Aigner [1]) : Si G est un graphe vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pour $h=3$ et si $n \neq 4$, alors G est isomorphe à $L_2(K_3^3 \times n)$.

Ce résultat a d'abord été prouvé par Laskar pour $n > 7$ et ensuite par Aigner pour tout $n \neq 4$ par une autre méthode. Aigner a aussi prouvé :

Théorème 4 : (Aigner [1]) : Si G est un graphe vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 (ou P_4^{bis}) pour $h=3$, alors G est isomorphe à $L_2(K_3^3 \times n)$.

Théorème 5 : (Aigner [1]) : Pour $h=3$ et $n=4$ il existe un graphe et un seul vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 non isomorphe à $L_2(K_3^3 \times 4)$.

Théorème 6 : (Dowling [8]) : Si $n > 7$ et $h=3$, P_5 est conséquence de P_1, P_2, P_3, P_4 .

Cas $h=4$ et $h=5$.

Théorème 7 : (Rao [15]) : Si G est un graphe vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 pour $h=4$ ou 5 et si $n > 1 + \frac{h(h+1)}{2}$ alors G est isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$.

Nous nous proposons ici (en suivant la méthode d'Aigner [1]) de généraliser d'une part le théorème 4, puis les théorèmes 1, 3, 7 et enfin les théorèmes 2 et 5.

Théorème A : Si G est un graphe vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4, P_4^{\text{bis}}, P_5$ et P_7 , pour h et n , alors G est isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$.

Théorème B : La propriété P_7 se déduit des propriétés $P_2, P_3, P_4, P_4^{\text{bis}}$ et P_5 pour $h \leq 5$ et $n \geq h-1$.

Théorème C : La propriété P_4^{bis} se déduit des propriétés P_2 , P_3 et P_4 pour $n \geq h(1+\sqrt{2})-1$.

En d'autres termes, si G est un graphe vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_7 , pour h et n , alors G est isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$ si $n \geq h(1+\sqrt{2})-1$.

Théorème D : Pour $n=4$ et $h \geq 2$ il existe un graphe vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_7 et non isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$.

III. Démonstration des théorèmes A, B, C, D.

Définition. (voir [4] p. 363) - Etant donnés deux graphes simples $G_1 = (X, E)$ et $G_2 = (Y, F)$ on appelle somme cartésienne de G_1 et G_2 et on note $G_1 + G_2$, le graphe dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien des ensembles X et Y et où deux sommets (x, y) et (x', y') de $X \times Y$ sont reliés si et seulement si on a : soit $\{x = x' \text{ et } yy' \in F\}$, soit $\{xx' \in E \text{ et } y = y'\}$. (Cette opération est appelée "product" et notée $G_1 \times G_2$ dans [5] ou dans le livre d'Harary - Graph Theory - , Addison Wesley).

Remarque : Nous utiliserons ici la somme cartésienne de G et K_n (graphe complet à n sommets) ; $G + K_n$ peut être considéré comme un graphe formé de n copies de G (c'est à dire de n sous graphes isomorphes à G , $\bigcup_{i=1}^n G_i$, ($i=1, 2, \dots, n$) tels que deux points de 2 copies différentes sont reliés si et seulement si ils sont images du même point de G).

La proposition suivante sera très utile : elle ramène le problème de la caractérisation de $L_{h-1}(K_h^h \times n)$ à la caractérisation de la somme cartésienne de h graphes complets.

Proposition. $L_{h-1}(K_{n_1, n_2, \dots, n_h}^h)$ est isomorphe à $K_{n_1} + K_{n_2} + \dots + K_{n_h}$ (K_{n_k} désigne le graphe complet ou clique à n_k sommets).

Démonstration : On va montrer que $L_{h-1}(K_{n_1, n_2, \dots, n_h}^h)$ est isomorphe à $L_{h-2}(K_{n_1, n_2, \dots, n_{h-1}}^{h-1}) + K_{n_h}$, ce qui par récurrence entrainera la proposition, $L_0(K_{n_1})$ étant isomorphe à K_{n_1} . Soient x_1, x_2, \dots, x_{n_h} les éléments de X_h . Une arête de K_{n_1, \dots, n_h}^h s'écrit $E \cup \{x_i\}$ où E est une arête de

$K_{n_1, \dots, n_{h-1}}^{h-1}$. On peut donc écrire les sommets de $L_{h-1}(K_{n_1, \dots, n_h}^h)$ sous la forme (e, i) où e est un sommet de $L_{h-2}(K_{n_1, \dots, n_{h-1}}^{h-1})$ et i un sommet de K_{n_h} . Deux sommets (e, i) et (e', i') de $L_{h-1}(K_{n_1, \dots, n_h}^h)$ sont reliés si et seulement

si les arêtes associées vérifient : $|\{E \cup \{x_i\}\} \cap \{E' \cup \{x_{i'}\}\}| = h-1$, donc si l'on a :

soit $E=E'$ et $x_i \neq x_{i'}$,

soit $|E \cap E'| = h-2$ et $x_i = x_{i'}$.

Ceci revient à dire que (e,i) et (e',i') sont reliés si et seulement si :

soit $e=e'$ et ii' est une arête de K_{n_h}

soit ee' est une arête de $L_{h-2}(K_{n_1 \dots n_{h-1}}^{h-1})$ et $i=i'$

C.Q.F.D.

Lemme 1. G étant un graphe simple il y a équivalence entre :

- (i) G vérifie les propriétés $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7$ aux ordres n et h
- (ii) $G+K_n$ vérifie les propriétés $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7$ aux ordres n et $h+1$.

Démonstration : Nous noterons (x,i) un point de $G+K_n$, avec x sommet de G et i sommet de K_n . Remarquons que G est isomorphe aux sous graphes de $G+K_n$ formé des points (x,i_0) avec i_0 fixé.

1. Le nombre de sommets de $G+K_n$ est égal à n fois le nombre de sommets de G d'où l'équivalence entre G vérifie P_1 aux ordres n et h et $G+K_n$ vérifie P_1 aux ordres n et $h+1$.

2. On a $D_1(x,i) = \{(z,i) \text{ où } z \in D_1(x)\} \cup \{(x,j) \text{ avec } j \neq i\}$ d'où $|D_1(x,i)| = |D_1(x)| + n-1$ et de plus $G+K_n$ est connexe si et seulement si G est connexe. On a donc l'équivalence entre G vérifie P_2 aux ordres n et h et $G+K_n$ vérifie P_2 aux ordres n et $h+1$.

3. Soient (x,i) et (y,j) deux points différents de $G+K_n$.

Cas 1 : $i=j$ donc $x \neq y$

Dans ce cas $d((x,i), (y,i)) = d(x,y)$.

De plus $D_1(x,i) \cap D_1(y,i) = \{(z,i) \text{ avec } z \in D_1(x) \cap D_1(y)\}$. Si $d(x,y) = 2$:

$D_1(x,i) \cap D_3(y,i) = \{(z,i) \text{ avec } z \in D_1(x) \cap D_3(y)\} \cup \{(x,j) \text{ avec } j \neq i\}$.

Si $d(x,y) = 3$: $D_1(x,i) \cap D_2(y,i) = \{(z,i) \text{ avec } z \in D_1(x) \cap D_2(y)\}$.

Ces égalités montrent que si $G+K_n$ vérifie P_i ($i = 3,4,5,7$) aux ordres n et $h+1$, G vérifie P_i ($i = 3,4,5,7$) aux ordres n et h (fixer $i = i_0$) et que si G vérifie P_i ($i = 3,4,5,7$) aux ordres n et h , les couples $(x,i), (y,i)$ de $G+K_n$ vérifient P_i ($i = 3,4,5,7$) aux ordres n et $h+1$.

Cas 2 : $i \neq j$

Dans ce cas $d((x,i), (y,j)) = d(x,y) + 1$.

. Si $d((x,i), (y,j)) = 1$, alors $x = y$ et :

$$D_1(x,i) \cap D_1(x,j) = \{(x,k) \text{ avec } k \neq i,j\} \text{ soit } |D_1(x,i) \cap D_1(x,j)| = n-2.$$

$G+K_n$ vérifie donc P_3 pour les couples $(x,i), (y,j)$ avec $i \neq j$.

. Si $d((x,i), (y,j)) = 2$, alors $d(x,y) = 1$ et :

$$D_1(x,i) \cap D_1(y,j) = \{(x,j) \cup (y,i)\} \text{ donc } |D_1(x,i) \cap D_1(y,j)| = 2.$$

$G+K_n$ vérifie donc P_4 pour les couples $(x,i), (y,j)$ avec $i \neq j$

. Si $d((x,i), (y,j)) = 2$ on a $2(n-1)$ points appartenant à

$D_1(x,i) - D_3(y,j)$: les points (z,i) avec $z \in D_1(x) \cap D_1(y)$ en nombre $n-2$ si G vérifie P_2 , les $(n-1)$ points (x,k) avec $k \neq i$ et le point (y,i) .

Si G vérifie P_1 , alors $G+K_n$ vérifie P_1 , donc $|D_1(x,i)| = (h+1)(n-1)$ et par suite $|D_1(x,i) \cap D_3(y,j)| = (h-1)(n-1)$. Donc si G vérifie P_1 et P_2 , $G+K_n$ vérifie P_5 pour les couples $(x,i), (y,j)$ avec $i \neq j$.

. Si $d((x,i), (y,j)) = 3$ alors $d(x,y) = 2$ et :

$D_1(x,i) \cap D_2(y,j) = \{(z,i) \text{ avec } z \in D_1(x) \cap D_1(y)\} \cup \{x,j\}$, d'où si G vérifie P_4 $|D_1(x,i) \cap D_2(y,j)| = 3$. Donc si G vérifie P_4 , $G+K_n$ vérifie P_7 pour les couples $(x,i), (y,j)$ avec $i \neq j$

C.Q.F.D.

Lemme 2. G étant un graphe simple il y a équivalence entre

(i) G vérifie P_4^{bis} aux ordres n et h .

(ii) $G+K_n$ vérifie P_4^{bis} aux ordres n et $h+1$.

Démonstration : On a vu au lemme 1 (3. Cas 1) que :

$D_1(x,i) \cap D_1(y,i) = \{(z,i) \text{ avec } z \in D_1(x) \cap D_1(y)\}$. Donc si $G+K_n$ vérifie P_4^{bis} , G vérifie P_4^{bis} et si G vérifie P_4^{bis} , les couples $(x,i), (y,i)$ de $G+K_n$ vérifient P_4^{bis} . De plus on a vu dans le cas 2, que si $d((x,i), (y,j)) = 2$ et $i \neq j$ alors $D_1(x,i) \cap D_1(y,j) = \{(x,j) \cup (y,i)\}$; les deux points (x,j) et (y,i) sont dans ce cas non adjacents, d'où $G+K_n$ vérifie P_4^{bis} pour les couples (x,i) et (y,j) avec $i \neq j$.

C.Q.F.D.

Théorème D. Pour $n=4$ et $h \geq 2$ il existe un graphe vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7$ et non isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$.

Démonstration : Pour $h=2$ un tel graphe existe d'après le théorème 2 (Skrikhande [16]) et on a vu qu'il ne vérifiait pas P_4^{bis} . On en déduit par récurrence, qu'il existe pour $n=4$ et $h \geq 2$ un graphe vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7$ (d'après le lemme 1 $i \implies ii$) et ne vérifiant pas P_4^{bis} (d'après le lemme 2 $ii \implies i$). Un tel graphe n'est pas isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$, qui lui vérifie P_4^{bis} .

Notation : Dans la suite, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous noterons $D_1(x)$ aussi bien l'ensemble des sommets adjacents à x , que le sous graphe engendré par cet ensemble (au lieu de $G_{D_1(x)}$)

La propriété P_6 s'énonce : (une clique étant un graphe complet).

P_6 : $D_1(x)$ est l'union de h cliques, à $n-1$ sommets, 2 à 2 disjointes (au sens des sommets).

Remarque : Si G vérifie de plus P_3, P_6 est équivalente à :

P_6^{bis} : $D_1(x)$ est formé de h composantes connexes, qui sont des cliques à $n-1$ éléments.

En effet, soit $y \in D_1(x)$, et soit C_y la clique à $n-1$ sommets contenant y d'après P_6 . D'après P_3 $|D_1(x) \cap D_1(y)| = n-2$. Or $D_1(x) \cap D_1(y) \supset C_y - \{y\}$, donc $D_1(x) \cap D_1(y) = C_y - \{y\}$, d'où y est relié dans $D_1(x)$ aux seuls sommets de $C_y - \{y\}$ et C_y est bien une composante connexe.

Lemme 3. Soit G un graphe simple vérifiant P_2, P_3, P_4 alors les propriétés P_4^{bis} et P_6 sont équivalentes.

Démonstration : Supposons que G vérifie P_4^{bis} et soit x un sommet de G . Soit $z_0 \in D_1(x)$, d'après P_3 on a $|D_1(x) \cap D_1(z_0)| = n-2$. Nous allons montrer que les $n-2$ points de $D_1(x) \cap D_1(z_0)$: $z_1 \dots z_{n-2}$ forment une clique. En effet supposons que $d(z_i, z_j) \neq 1$, alors $d(z_i, z_j) = 2$; or $D_1(z_i) \cap D_1(z_j) \supset \{x, z_0\}$ avec x et z_0 adjacents ce qui contredirait P_4^{bis} . Donc z_0, z_1, \dots, z_{n-2} forment une clique à $n-1$ éléments dans $D_1(x)$ et de plus un sommet z_i de cette clique n'est relié à aucun autre point de $D_1(x)$ d'après P_3 appliquée à x et z_i . Enfin d'après P_2 $|D_1(x)| = h(n-1)$ ce qui prouve que $D_1(x)$ est bien formé de h cliques, à $n-1$ sommets, 2 à 2 disjointes.

Réciproquement, supposons que G vérifie P_6 et soient x et y deux sommets tels que $d(x, y) = 2$. Soient, d'après P_4 , z_1 et z_2 les

deux sommets de $D_1(x) \cap D_1(y)$. Supposons que z_1 et z_2 soient adjacents, alors $D_1(z_1) \supset \{x, y, z_2\}$. D'après P_6^{bis} (équivalente à P_6 d'après la remarque ci-dessus) x et z_2 étant adjacents doivent appartenir à une même clique de $D_1(z_1)$, de même y et z_2 appartiennent à une même clique de $D_1(z_1)$; mais x et y non adjacents appartiennent à 2 cliques différentes d'où une contradiction, ce qui prouve que z_1 et z_2 sont non adjacents.

C.Q.F.D.

Théorème C. La propriété P_4^{bis} (ou P_6) se déduit des propriétés P_2, P_3, P_4 pour $n \geq h(1 + \sqrt{2}) - 1$.

Démonstration : De P_2, P_3, P_4 on déduit que le graphe engendré par $D_1(x)$ vérifie, pour tout x , les propriétés suivantes :

- Q_1 . son nombre de sommets est $h(n-1)$.
- Q_2 . Il est régulier de degré $n-2$.
- Q_3 . Si $d(x, y) = 2$ alors $|D_1(x) \cap D_1(y)| \leq 1$.

On est donc amené à étudier les graphes H vérifiant les propriétés Q_1, Q_2, Q_3 aux ordres h et n . Montrer le théorème C revient à montrer, que H est formé de h cliques, à $n-1$ sommets, 2 à 2 disjointes pour $n \geq h(1 + \sqrt{2}) - 1$. Il suffit de montrer que pour ces valeurs de n , H admet une clique à $n-1$ sommets. En effet le graphe H^* obtenu en enlevant cette clique de H , vérifie les propriétés Q_1, Q_2, Q_3 aux ordres $h-1$ et n , et l'on a bien $n \geq (h-1)(1 + \sqrt{2}) - 1$. En raisonnant par récurrence sur h , la propriété étant évidente pour $h=1$ (H étant alors la clique à $n-1$ sommets), H^* est l'union de $h-1$ cliques, à $n-1$ sommets, 2 à 2 disjointes et H est bien l'union de h cliques, à $n-1$ sommets, 2 à 2 disjointes.

Démonstration de : Pour $n \geq (1 + \sqrt{2}) - 1$ H admet une clique à $n-1$ sommets.

1.- Soit C une clique maximale de H , alors si $x \notin C$, x est adjacent à au plus un point de C (immédiat d'après Q_3).

2.- Deux cliques maximales distinctes C et C' de H s'intersectent en au plus 1 point : ceci résulte de 1. appliqué à la clique C et à un point $x \notin C$ et $x \in C'$.

3.- Soit $x_i \in H, D_1(x_i)$ est l'union de cliques maximales C_{i_α} vérifiant

i). $C_{i_\alpha} \cup x_i$ est une clique maximale de H .

ii). Les C_{i_α} sont 2 à 2 disjointes (d'après 2 et 3. i)).

iii). Il n'y a pas d'arête entre C_{i_α} et C_{i_β} ($\alpha \neq \beta$) : en effet un point quelconque de C_{i_α} étant relié à x_i n'est relié à aucun autre point de $C_{i_\beta} \cup x_i$ d'après 1.

4.- Dans la suite C désigne une clique de cardinalité maximum ω :

$C = \{x_1, x_2, \dots, x_\omega\}$. Si $\omega = n-1$ le théorème est démontré, on suppose donc $\omega < n-1$ et on pose $C_i = D_1(x_i) - C$. D'après 3 C_i est l'union de cliques maximales vérifiant les propriétés 3 i). ii). iii).

5.- $|C_i| = n - \omega - 1$ pour $i = 1, 2, \dots, \omega$ (d'après Q_2).

6.- i). $C_i \cap C_j = \emptyset$ d'après 1 appliquée à C .

ii). Il n'y a pas d'arête entre C_i et C_j : en effet soit y un point de C_i ; $d(x_j, y) = 2$, donc d'après Q_3 $|D_1(x_j) \cap D_1(y)| \leq 1$ or $D_1(x_j) \cap D_1(y) \supset x_i$ donc y n'est relié à aucun autre point de C_j .

7.- Soit $y \in C_i$, alors $y \in C_{i_\alpha}$ (pour un certain α) et on a $|D_1(y) - \{C \cup D_1(C)\}| = n-2 - |C_{i_\alpha}|$: en effet si $z \in C \cup D_1(C)$ et $z \notin C_{i_\alpha} \cup x_i$, alors z n'est pas relié à y d'après 3 iii) (si $z \in C \cup C_i$ ou 6 ii). si $z \in C_j$ ($j \neq i$)).

Donc $D_1(y) \cap \{C \cup D_1(C)\} = \{C_{i_\alpha} \cup \{x_i\}\} - \{y\}$, d'où le résultat compte-tenu de $|D_1(y)| = n-2$ d'après Q_2 .

8.- Si $y \in C_i$ et $z \in C_i$ alors $\{D_1(y) \cap D_1(z)\} - \{C \cup D_1(C)\} = \emptyset$.

Cas 1. $y \in C_{i_\alpha}$ et $z \in C_{i_\alpha}$ la propriété résulte de 1 appliquée à $C_{i_\alpha} \cup x_i$.

Cas 2. $y \in C_{i_\alpha}$ et $z \in C_{i_\beta}$, alors $d(y, z) = 2$ d'après 3.iii) donc d'après Q_3 $|D_1(y) \cap D_1(z)| \leq 1$, or $x_i \in D_1(y) \cap D_1(z)$ d'où le résultat.

9.- Si $y \in C_i$ et $z \in C_j$ alors $|D_1(y) \cap D_1(z)| \leq 1$. Ceci résulte du fait que y et z sont non adjacents d'après 6 ii) et de Q_3 .

10.- Première minoration du nombre de sommets de H .

Elle repose sur le fait que $C_{i_\alpha} \cup x_i$ étant une clique maximale $|C_{i_\alpha}| \leq \omega - 1$.

H contient au moins les sommets suivants :

- . ceux de C en nombre ω
- . ceux des C_i soit : $\sum_{i=1}^{\omega} |C_i| = \omega(n-\omega-1)$ d'après 5 et 6 i).
- . ceux de $D_1(C_1)$ non encore rencontrés soit d'après 7 et 8. :

$$\sum_{\alpha} |C_{1\alpha}| (n-2-|C_{1\alpha}|); \text{ compte-tenu de } |C_{1\alpha}| \leq \omega-1 \text{ et de}$$

$$\sum_{\alpha} |C_{1\alpha}| = |C_1| = n-\omega-1, \text{ il y a au moins } (n-\omega-1)^2 \text{ tels sommets.}$$

H contient donc au moins $\omega + \omega(n-\omega-1) + (n-\omega-1)^2$ sommets.

11.- Si $n > h+1$ alors $\omega \geq n-h$.

D'après Q_1 , H a $h(n-1)$ sommets on doit donc avoir $\omega + \omega(n-\omega-1) + (n-\omega-1)^2 \leq h(n-1)$, soit $(n-\omega-1)(n-2) \leq (h-1)(n-1)$ ou encore $f(\omega) = (\omega+1-n)(n-2) + (h-1)(n-1) \geq 0$; $f(\omega)$ est une fonction croissante de ω et $f(n-h-1) = h+1-n$; donc si $n > h+1$, $f(n-h-1) < 0$ et par suite $f(\omega) < 0$ pour $\omega < n-h-1$. Donc si $n > h+1$, alors $\omega \geq n-h$.

12.- Deuxième minoration du nombre de sommets de H. Elle repose sur le fait que $|C_{i\alpha}| \leq |C_i| = n-\omega-1$. Donc 7 s'écrit $|D_1(y) - \{C \cup D_1(C)\}| \geq \omega-1$.

H contient au moins les sommets suivants :

- . ceux de C en nombre ω
- . ceux de $\bigcup_i C_i$ soit : $\omega(n-\omega-1)$
- . ceux de $D_1(C_1)$ non encore rencontrés, en nombre supérieur ou égal d'après 7 et 8 à $|C_1|(\omega-1) = (n-\omega-1)(\omega-1)$
- . ceux de $D_1(C_2)$ non encore rencontrés, en nombre supérieur ou égal, d'après 7, 8, 9. à $|C_2|(\omega-1 - |C_1|)$.

. et ainsi de suite les points de $D_1(C_i)$ non encore rencontrés en nombre supérieur ou égal à : $|C_i|(\omega-1 - |C_1| - |C_2| - \dots - |C_{i-1}|)$ si cette quantité est positive, sinon 0.

H a donc, en posant $\lambda = i-1$, un nombre de sommets supérieur ou égal à :

$$H(\omega) = \omega + \omega(n-\omega-1) + (\omega-1)(n-\omega-1) + \dots + (\omega-1)(\omega-1 - \lambda(n-\omega-1)) + \dots$$

la sommation s'arrêtant au plus grand entier λ tel que

$$\omega-1 - \lambda(n-\omega-1) \geq 0, \text{ soit à } \lambda_0 = \left[\frac{\omega-1}{n-\omega-1} \right] \quad (\text{on désigne}$$

par $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x). On doit avoir $i \leq \omega$ soit $\lambda \leq \omega-1$, ceci est bien réalisé car $\omega < n-1$ entraîne $\lambda_0 \leq \omega-1$.

H a donc au moins $H(\omega)$ sommets :

$$H(\omega) = \omega + \omega(n-\omega-1) + (n-\omega-1) \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda_0} \omega^{-1-\lambda(n-\omega-1)} \right) \text{ où } \lambda_0 = \left\lfloor \frac{\omega-1}{n-\omega-1} \right\rfloor.$$

13.- Si $n \geq 2h+1$ alors $\omega > n-h$.

On va montrer que $\omega = n-h$ conduit à une contradiction. En effet si $n \geq 2h+1$, alors $\lambda_0 \geq 1$ donc : $H(\omega) > \omega + \omega(n-\omega-1) + (\omega-1)(n-\omega-1)$. On doit avoir $H(\omega) \leq h(n-1)$. Or $H(n-h) - h(n-1) > (h-1)(n-2h-1)$. Donc si $n \geq 2h+1$, $H(n-h) > h(n-1)$ d'où la contradiction.

14.- Fin de la démonstration.

$$H(\omega) = \omega + \omega(n-\omega-1) + (n-\omega-1) \left((\lambda_0 + 1)(\omega-1) - \frac{\lambda_0(\lambda_0+1)}{2} (n-\omega-1) \right). \text{ On a}$$

$$\lambda_0(n-\omega-1) = \left\lfloor \frac{\omega-1}{n-\omega-1} \right\rfloor (n-\omega-1) \leq \omega-1 \text{ d'où } H(\omega) \geq \omega + \omega(n-\omega-1) + (n-\omega-1)(\omega-1) - \frac{\lambda_0+1}{2}$$

Or $(\lambda_0 + 1)(n-\omega-1) > \omega-1$ soit $(\lambda_0 + 1)(n-\omega-1) \geq \omega$.

Donc $H(\omega) \geq \omega + \omega(n-\omega-1) + \frac{\omega(\omega-1)}{2}$. On doit avoir $H(\omega) \leq h(n-1)$ on est donc amené à étudier $F(\omega) = \omega^2 - (2n-1)\omega + 2h(n-1)$ qui doit être ≥ 0 . Dans l'intervalle $[n-h+1, n-2]$ auquel appartient ω d'après 4 et 13 $F(\omega)$ est décroissante, donc $F(\omega) \leq F(n-h+1)$ où $F(n-h+1) = -n^2 + (2h+1)n + h^2 - 5h + 2$.

On a un polynôme du 2ème degré en n dont le discriminant

$$\Delta = 8h^2 - 16h + 9 < (2h\sqrt{2}-3)^2 \text{ donc } F(n-h+1) < 0 \text{ si}$$

$$n \geq \frac{2h+1 + 2h\sqrt{2}-3}{2} = h(1+\sqrt{2})-1. \text{ Pour } n \geq h(1+\sqrt{2})-1 \text{ on a donc } F(\omega) < 0$$

d'où une contradiction et alors $\omega = n-1$.

C.Q.F.D.

Remarque : La valeur trouvée donne que le théorème B est vrai pour $h = 3$ si $n \geq 7$, pour $h = 4$ si $n \geq 9$, pour $h = 5$ si $n \geq 12$. Pour $h = 5$ si on calcule directement $f(\omega)$ pour $n = 11$ on trouve $f(6) = 54$ $f(7) = 55$ $f(8) = 56$ $f(9) = 54$ et $h(n-1) = 50$. Donc dans ce cas $\omega = 10$ et pour $h = 5$ le théorème B est vrai pour $n = 11$. On peut montrer de même que pour $h = 6, 7, 8$ le théorème B est vrai pour $n \geq 2h+1$. On peut donc par un calcul plus poussé, espérer

peut être, établir le théorème B pour $n \geq 2h+1$ (pour tout h). De toute façon par la méthode ci-dessus on ne peut espérer trouver mieux car pour $n=2h$ il existe des graphes H vérifiant Q_1, Q_2, Q_3 non formés de h cliques à $n-1$ sommets. Il faut donc recourir à des considérations directes comme l'a fait Aigner [1] pour $h=3$.

Dans la suite G désigne un graphe simple vérifiant $P_2, P_3, P_4, P_4^{\text{bis}}$ et P_5 pour h et n . Pour démontrer les théorèmes A et B nous aurons besoin des définitions suivantes.

On appelle pont (bridge dans [15]) entre deux ensembles C et C' de sommets de G , une arête xy de G avec $x \in C-C'$ et $y \in C'-C$.

Deux cliques maximales distinctes C et C' de G seront dites couplées, s'il existe une bijection entre les sommets de C et ceux de C' , telle qu'un sommet de C et un sommet de C' sont adjacents si et seulement si ils se correspondent dans la bijection ; deux tels sommets seront dits couplés. On peut dire aussi que $C \cup C' = C+K_2 = C'+K_2$. (Deux cliques couplées sont deux cliques vérifiant " $\delta(C, C') = 2$ " dans [1] ou "appartenant à $\eta(G)$ " dans [15]).

Remarquons que toute clique maximale de G contient n sommets d'après P_6 et que deux cliques couplées sont disjointes : en effet si $x \in C \cap C'$, il n'y a pas de pont entre C et C' (d'après P_6^{bis}). Si x et y sont adjacents, d'après P_6 il existe une unique clique maximale de G contenant x et y , que nous noterons $C_{x,y}$.

Lemme 4.- Soit G un graphe simple vérifiant $P_2, P_3, P_4, P_4^{\text{bis}}$ et P_5 . S'il existe deux ponts disjoints entre deux cliques maximales C et C' de G , alors les cliques C et C' sont couplées.

Démonstration : Soient x_1y_1 et x_2y_2 les deux ponts entre C et C' où x_1 et x_2 appartiennent à $C-C'$ ($x_1 \neq x_2$) et y_1 et y_2 appartiennent à $C'-C$ ($y_1 \neq y_2$). D'après P_6^{bis} les cliques $C-\{x_1\}$ et $C_{x_1y_1} - \{x_1\}$ sont 2 cliques disjointes de $D_1(x_1)$ sans pont entre elles ; donc si $x \in C$, $d(x, y_1) = 2$. A tout point x de C , $x \neq x_1$, associons le point $y = \varphi(x) = \{D_1(x) \cap D_1(y_1)\} - \{x_1\}$. D'après P_5 $|D_1(y_1) - D_3(x)| \leq 2(n-1)$. Or les $2(n-1)$ points des cliques $C_{y_1, y} - \{y_1\}$ et $C_{x_1, y_1} - \{y_1\}$ appartiennent à $D_1(y_1) - D_3(x)$, et $y_2 \in D_1(y_1) - D_3(x)$; $y_2 \notin D_1(x_1)$ donc $y_2 \in C_{y_1, y} - \{y_1\}$, d'où $C_{y_1, y} = C_{y_1, y_2} = C'$. En posant $\varphi(x_1) = \{y_1\}$ on définit ainsi une application φ de C dans C' . Cette application est injective : en effet supposons que $y = \varphi(x) = \varphi(x')$ avec $x \neq x'$, y est différent de y_1 , car $\varphi(x) \in C' - \{y_1\}$ pour $x \neq x_1$. Mais alors $D_1(x_1) \cap D_1(y) \supset \{x, x', y_1\}$ contrairement à P_4 appliquée à x_1 et y . L'application φ est bijective car $|C| = |C'| = n$.

C.Q.F.D.

Lemme 5. Soit G un graphe simple vérifiant P_2, P_3, P_4, P_4^{bis} et P_5 . Soit $C = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ une clique maximale de G contenant x_1 et soit $y_1 \in D_1(x_1) - C$, alors il existe une unique clique maximale couplée avec C et contenant y_1 , qu'on notera $C_y = \{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ où y_i désigne le point couplé avec x_i .

Démonstration : Soit $x_i \in C$, $x_i \neq x_1$. Toute clique couplée avec C et contenant y_1 doit contenir l'unique point (d'après P_4^{bis}) $y_i = \{D_1(x_i) \cap D_1(y_1)\} - \{x_i\}$. Or il existe une unique clique contenant y_1 et y_i : C_{y_1, y_i} et d'après le lemme 4 elle est couplée avec C (les deux ponts disjoints étant $x_1 y_1$ et $x_i y_i$). C.Q.F.D.

Lemme 6. Soit G un graphe simple vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4, P_4^{bis}, P_5$ et P_7 aux ordres n et h , alors G peut s'écrire $G^* + K_n$.

Démonstration : On va montrer que G est formé de n copies $\varphi_i(G^*)$ d'un graphe G^* , que l'on va construire. Soit x_1 un point de G et soit $C = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ une clique maximale contenant x_1 . Posons $\varphi_i(x_1) = x_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

1.- $D_1(C)$ est formé de n copies de $\{x_1\} \cup \{D_1(x_1) - C\}$ qui sont : $\{x_i\} \cup \{D_1(x_i) - C\}$ pour $i=1, 2, \dots, n$.

Soit $y_1 \in D_1(x_1) - C$ et soit $C_y = \{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ l'unique clique couplée avec C contenant y_1 (lemme 5). Posons $\varphi_i(y_1) = y_i$, où y_i est le point couplé avec x_i ; y_i appartient donc à $D_1(x_i) - C$. Les sous graphes $D_1(x_i) - C$ sont d'après P_6^{bis} tous formés de $h-1$ composantes connexes, qui sont des cliques à $n-1$ éléments. Deux points de deux sous graphes $D_1(x_i) - C$ et $D_1(x_j) - C$ sont adjacents si et seulement si ils sont images par φ_i et φ_j du même point de $D_1(x_1) - C$: en effet si deux points $y_i = \varphi_i(y_1)$ et $y'_j = \varphi_j(y'_1)$ étaient adjacents, avec $y_1 \neq y'_1$, il passerait par $\varphi_i(y_1) = y_i$ deux cliques couplées avec C à savoir : C_y et C_{y_1, y'_j} , ce qui est impossible d'après le lemme 5. De plus un point x_i n'est relié à aucun point de $D_1(x_j) - C$ (avec $j \neq i$) d'après la définition de deux cliques couplées. Si on prend $j=1$, on en déduit que l'application φ_i de $\{x_1\} \cup \{D_1(x_1) - C\}$ dans $\{x_i\} \cup \{D_1(x_i) - C\}$ est injective et bijective (les deux sous graphes ayant même nombre d'éléments). Il reste à vérifier que φ_i est bien un isomorphisme de graphes (c'est à dire conserve l'adjacence) : ceci résulte de ce que la clique C_{x_1, y_i} est couplée avec la clique $C_{x_1 y_1}$ d'après le lemme 4 (on a deux ponts disjoints $x_1 x_i$ et $y_1 y_i$). φ_i transforme donc toute clique maximale de $D_1(x_1) - C$ en une clique maximale de $D_1(x_i) - C$, de manière bijective.

2. $D_1(C) \cup D_2(C)$ est formé de n copies de $\{x_1\} \cup \{D_1(x_1) - C\} \cup \{D_2(x_1) - D_1(C)\}$

Soit $t_1 \in D_2(x_1) - D_1(C)$. D'après P_4^{bis} $t_1 = \{D_1(y_1) \cap D_1(z_1)\} - \{x_1\}$ avec y_1 et z_1 appartenant à $D_1(x_1) - C$ et $d(y_1, z_1) = 2$. Posons :

$\varphi_i(t_1) = t_i = \{D_1(y_i) \cap D_1(z_i)\} - \{x_i\}$ où $y_i = \varphi_i(y_1)$ et $z_i = \varphi_i(z_1)$ ont été définis au 1.

On a : $D_1(t_i) \cap D_1(C) = \{y_i\} \cup \{z_i\}$: en effet t_i n'est pas adjacent à x_i (d'après P_4^{bis}), ni à un $x_j \neq x_i$ (d'après P_4 appliquée à x_i et t_i), ni à un point de $D_1(x_i)$ différent de y_i et z_i (d'après P_4 appliquée à x_i et t_i). Enfin t_i n'est pas adjacent à un point u_j de $D_1(x_j)$, car sinon $D_1(t_i) - D_3(x_i)$ contiendrait au moins $2(n-1)+1$ points : les points de $C_{t_i, y_i} - \{t_i\}$, ceux de $C_{t_i, z_i} - \{t_i\}$ et u_j , contrairement à P_5 .

- $D_1(t_i) \cap \{D_2(x_j) - D_1(C)\} = \{t_j\}$: En effet $|D_1(t_i) \cap D_2(x_j)| \leq 3$ d'après P_7 appliquée à t_i et x_j . $D_1(t_i) \cap D_2(x_j)$ contient les points de

$D_1(t_i) \cap \{D_1(y_j) \cup D_1(z_j)\}$, soit y_i , z_i et les deux points : $\{D_1(t_i) \cap D_1(y_j)\} - \{y_i\}$ et $\{D_1(t_i) \cap D_1(z_j)\} - \{z_i\}$ qui sont donc confondus et identiques à $t_j = \{D_1(y_j) \cap D_1(z_j)\} - \{x_j\}$.

- En prenant $j=1$ on déduit que φ_i est une injection de $\{x_1\} \cup \{D_1(x_1) - C\} \cup \{D_2(x_1) - D_1(C)\}$ dans $\{x_i\} \cup \{D_1(x_i) - C\} \cup \{D_2(x_i) - D_1(C)\}$ et une bijection, les deux sous graphes ayant le même nombre d'éléments. Il reste à vérifier que φ_i est un isomorphisme de graphes. Or dans le sous graphe $\{x_1\} \cup \{D_1(x_1) - C\} \cup \{D_2(x_1) - D_1(C)\}$, t_1 est adjacent aux seuls points de $C_{y_1, t_1} - \{t_1\}$ et $C_{z_1, t_1} - \{t_1\}$; et dans la bijection φ_i , la clique $C_{y_1, t_1} (C_{z_1, t_1})$ est transformée en la clique $C_{y_i, t_i} (C_{z_i, t_i})$ qui lui est couplée d'après le lemme 4, car on a deux ponts disjoints $y_1 y_i (z_1, z_i)$ et $t_1 t_i$.

3. Supposons que l'on ait montré que pour $d \geq 2$, $\bigcup_{1 \leq \delta \leq d} D_\delta(C)$ est formé de n copies de $\{x_1\} \cup \{ \bigcup_{1 \leq \delta \leq d} D_\delta(x_1) - D_{\delta-1}(C) \}$ (en posant $D_0(C) = C$).

Soit $r_1 \in D_{d+1}(x_1) - D_d(C)$ et soit s_1 un point à distance 2 de r_1 sur une plus courte chaîne entre x_1 et r_1 et soient u_1 et v_1 les deux points de $D_1(s_1) \cap D_1(r_1)$. Si on pose $\varphi_i(r_1) = r_i = \{D_1(u_i) \cap D_1(v_i)\} - \{s_i\}$ où

$u_i = \varphi_i(u_1)$; $v_i = \varphi_i(v_1)$ et $s_i = \varphi_i(s_1)$, d'après l'hypothèse de récurrence, les hypothèses du cas 2 sont remplies avec s_1 au lieu de x_1 , u_1 au lieu de y_1 , v_1 au lieu de z_1 et r_1 au lieu de t_1 , on en déduit que φ_i réalise

une copie de $\{D_d(x_1) - D_{d-1}(C)\} \cup \{D_{d+1}(x_1) - D_d(C)\}$ sur

$\{D_d(x_i) - D_{d-1}(C)\} \cup \{D_{d+1}(x_i) - D_d(C)\}$. Comme de plus un point de $D_{d+1}(x_i) - D_d(C)$ n'est relié à aucun point de $\bigcup_{1 \leq \delta \leq d-1} D_\delta(C)$, sinon il serait à distance inférieure ou égale à d de x_i , on en déduit avec les hypothèses de récurrence que $\bigcup_{1 \leq \delta \leq d+1} D_\delta(C)$ est formé de n copies de $\{x_1\} \cup \{ \bigcup_{1 \leq \delta \leq d+1} D_\delta(x_1) - D_{\delta-1}(C) \}$. Le graphe G étant connexe (d'après P_2) et fini (d'après P_1), $d_0 = \max_{y \in G} d(x_1, y)$ est fini et G est formé de n copies de $G^* = \{x_1\} \cup \{ \bigcup_{1 \leq \delta \leq d_0} D_\delta(x_1) - D_{\delta-1}(C) \}$. C.Q.F.D.

Théorème A. Soit G un graphe simple vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4, P_4^{bis}, P_5$ et P_7 , aux ordres n et h , alors G est isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$.

Démonstration : On va démontrer le théorème par récurrence sur h . Le théorème est vrai pour $h=1$ (n quelconque), car on a un graphe à n sommets régulier de degré $n-1$ (d'après P_1 et P_2) c'est donc K_n . Supposons le théorème vrai aux ordres n et h , et soit G vérifiant les hypothèses aux ordres n et $h+1$. D'après le lemme 6 $G = G^* + K_n$. D'après les lemmes 1 et 2 (ii \Rightarrow i) G^* vérifie les hypothèses du théorème aux ordres n et h , donc d'après l'hypothèse de récurrence, G^* est isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$ et d'après la proposition 2, G est bien isomorphe à $L_h(K_h^{h+1} \times n)$. C.Q.F.D.

Des théorèmes A et C on déduit le corollaire.

Corollaire. Soit G un graphe simple vérifiant P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_7 aux ordres n et h , avec $n \geq h(1 + \sqrt{2}) - 1$ alors G est isomorphe à $L_{h-1}(K_h^h \times n)$.

Remarque : Dans la démonstration du lemme 6 et du théorème A la propriété P_7 sert uniquement pour montrer dans le cas 2 du lemme 6 que t_i est adjacent à t_j et seulement à t_j dans $D_2(x_j) - D_1(C)$. Pour montrer le théorème B, nous montrerons que t_i est adjacent à t_j (lemme 9) indépendamment de P_7 , ce qui est une étape dans la démonstration de la conjecture suivante : " P_7 se déduit de P_2, P_3, P_4, P_4^{bis} et P_5 ". Auparavant, nous montrons un lemme conséquence de P_5 , qui sera très utile.

Lemme 7. Soit G un graphe simple vérifiant P_2, P_3, P_4, P_4^{bis} , et P_5 et soient C et C' deux cliques maximales de G . S'il existe un pont $x_1 y_1$ entre C et C' et deux points $x \in C, x \neq x_1$ et $z \in C', z \neq y_1$, tels que $d(x, z) = 2$, alors C' est l'unique clique couplée avec C , contenant y_1 (soit $C' = C_y$) et $D_1(x) \cap D_1(z) \subset C \cup C'$.

Démonstration : D'après le lemme 5, il existe une unique clique C_y contenant y_1 et couplée avec C . Supposons que C' soit différente de C_y ; elle est disjointe (d'après P_6) de C_y . Alors $D_1(y_1) - D_3(x)$ contiendrait les $2(n-1)$ points de $C_{x_1, y_1} - \{y_1\}$ et de $C_y - \{y_1\}$, plus le point z , ce qui est impossible d'après P_5 . Donc $C' = C_y$. Comme $d(x, z) = 2$, $D_1(x) \cap D_1(z)$ est formé d'après P_4 de deux points, qui sont nécessairement le point de C' couplé avec x et le point de C couplé avec z , d'où $D_1(x) \cap D_1(z) \subset C \cup C'$.

C.Q.F.D.

Lemme 8. Soit G un graphe simple vérifiant P_2, P_3, P_4, P_4^{bis} et P_5 si $d(x, y) = 3$, alors $D_1(x) \cap D_2(y)$ est formé de points 2 à 2 non adjacents.

Démonstration : Soit x, a_1, b_1, y une chaîne de longueur 3 entre x et y . Supposons qu'il existe $a_2 \in D_1(x) \cap D_2(y)$ avec a_2 adjacent à a_1 . D'après P_6^{bis} , a_2 appartient à la clique C_{x, a_1} et a_2 n'est pas adjacent à b_1 (les cliques C_{a_1, b_1} et C_{x, a_1} ayant deux points non adjacents x et b_1 , n'ont que a_1 en commun). Soit $b_2 \in D_1(a_2) \cap D_1(y)$: un tel point existe d'après la définition de a_2 , est différent de b_1 et de a_1 (sinon $d(x, y) = 2$). Les cliques C_{a_1, b_1} et C_{a_2, b_2} ont un pont $a_1 a_2$ et deux points à distance 2 b_1 et b_2 (en effet, si b_2 était adjacent à b_1 les cliques C_{a_1, a_2} et C_{b_1, b_2} seraient couplées et alors $d(x, y) = 2$; d'après le lemme 7 y qui appartient à $D_1(b_1) \cap D_1(b_2)$ devrait appartenir à $C_{a_1, b_1} \cup C_{a_2, b_2}$ ce qui est impossible car y n'est pas adjacent à a_1 ni à a_2).

C.Q.F.D.

Corollaire. Si $h \leq 3$, la propriété P_7 se déduit des propriétés P_2, P_3, P_4, P_4^{bis} et P_5 .

En effet $D_1(x)$ contient au plus h points 2 à 2 non adjacents d'après P_6^{bis} , d'où le résultat d'après le lemme 8.

Lemme 9. Soit G un graphe simple vérifiant P_2, P_3, P_4, P_4^{bis} et P_5 aux ordres n et h , avec $n \geq h-1$. Soit $C = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ une clique maximale de G , soit y_1 et z_1 deux points de $D_1(x_1) - C$ non adjacents et soient $C_y = \{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ et $C_z = \{z_1, \dots, z_i, \dots, z_n\}$ les cliques uniques couplées avec C_x contenant respectivement y_1 et z_1 . Alors si on pose $t_i = \{D_1(y_i) \cap D_1(z_i) - \{x_i\}\}$, le sous graphe engendré par les $t_i (i=1, 2, \dots, n)$ est une clique C_t couplée avec C_y et C_z .

Démonstration : 1.- On a vu au 2 du lemme 6 (sans utiliser P_7) que : $D_1(t_i) \cap D_1(C) = \{y_i\} \cup \{z_i\}$.

2.- Soit C_{t_i} l'unique clique couplée avec C_y contenant t_i et soit α_i le point couplé avec y_1 ; $\alpha_i = C_{t_i} \cap D_1(y_1)$. Alors si $C_{t_i} \neq C_{t_j}$, $d(\alpha_i, \alpha_j) \geq 2$.

On peut supposer $j \neq 1$. α_i et α_j ne peuvent pas être confondus car sinon il passerait par α_i deux cliques couplées avec C_y , ce qui est impossible (lemme 5). Supposons que $d(\alpha_i, \alpha_j) = 1$. Alors les cliques C_{t_j} et C_{α_i, y_1} ont un pont $\alpha_i \alpha_j$ et deux points à distance 2, y_1 et t_j (car t_j n'est pas relié à y_1 d'après 1), donc d'après le lemme 7, y_j qui appartient à $D_1(y_1) \cap D_1(t_j)$ appartiendrait à $C_{t_j} \cup C_{\alpha_i, y_1}$ ce qui est impossible, car $y_j \notin C_{t_j}$ et y_j n'est pas relié à α_i (α_i étant couplé avec y_1).

3. Si $n \geq h-1$, il existe deux indices i_0 et j_0 tels que
 $C_{t_{i_0}} = C_{t_{j_0}}$.

En effet supposons que les C_{t_i} soient tous distincts, alors les α_i étant non adjacents (d'après 2) appartiendraient à des cliques disjointes de $D_1(y_1)$. De plus α_i n'appartient pas à C_y ni à C_{x_1, y_1} (d'après 1). On aurait donc $n+2$ cliques disjointes dans $D_1(y_1)$, en contradiction avec $n \geq h-1$ et P_6 .

4. Soient i_0 et j_0 deux indices tels que $C_{t_{i_0}} = C_{t_{j_0}}$. Alors on a deux ponts disjoints $z_{i_0} t_{i_0}$ et $z_{j_0} t_{j_0}$ entre C_z et $C_{t_{i_0}}$ donc d'après le lemme 4, C_z et $C_{t_{i_0}}$ sont couplés. Soit s_k l'unique point de $C_{t_{i_0}}$ couplé avec y_k . $C_{t_{i_0}}$ étant couplé avec C_z , soit z_p le point couplé avec s_k . Supposons que $z_p \neq z_k$; alors les cliques $C_{t_{i_0}}$ et C_{z_p, x_p} ont un pont $s_k z_p$ et deux points à distance 2 x_p et s_p point couplé avec y_p ; donc d'après le lemme 7, y_p , qui appartient à $D_1(x_p) \cap D_1(s_p)$, devrait appartenir à $C_{t_{i_0}} \cup C_{z_p, x_p}$ ce qui est impossible. Donc s_k est relié à z_k et $s_k = t_k$ ce qui prouve que t_k appartient à $C_{t_{i_0}}$, pour tout k .
 C.Q.F.D.

Remarque : Dans le cas $h=4$ et $n=2$ on peut montrer que le lemme 9 est encore valable. On peut donc se demander si l'hypothèse $n \geq h-1$ est nécessaire pour montrer le lemme 9.

Théorème B : La propriété P_7 se déduit des propriétés $P_2, P_3, P_4, P_4^{\text{bis}}$, et P_5 pour $h \leq 5$ et $n \geq h-1$.

Démonstration : 1.- Soit G un graphe simple vérifiant $P_2, P_3, P_4, P_4^{bis}, P_5$, avec $n \geq h-1$ et soient x_0 et y_0 deux points tels que $d(x_0, y_0) = 3$ et soit x_0, a_1, b_1, y_0 une chaîne de longueur 3 entre x_0 et y_0 . Posons
 $b_2 = \{D_1(a_1) \cap D_1(y_0)\} - \{b_1\}$; $a_2 = \{D_1(x_0) \cap D_1(b_1)\} - \{a_1\}$;
 $b_3 = \{D_1(a_2) \cap D_1(y_0)\} - \{b_1\}$; $a_3 = \{D_1(x_0) \cap D_1(b_2)\} - \{a_1\}$. Les b_i sont non adjacents à x_0 et les a_i non adjacents à y_0 , sinon $d(x_0, y_0) = 2$; ceci montre que les points $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sont tous distincts. (Remarquons qu'on a ainsi prouvé que si $d(x, y) = 3$ alors $|D_1(x) \cap D_2(y)| \geq 3$, d'où P_7 est équivalente à P_7^{bis} : si $d(x, y) = 3$ alors $|D_1(x) \cap D_2(y)| = 3$).

2.- Montrons que a_3 est adjacent à b_3 : soit $t_1 = \{D_1(a_2) \cap D_1(a_3)\} - \{x_0\}$. Si on pose $C_x = C_{x_0, a_1}$; $C_y = C_{a_2, b_1}$ et $C_z = C_{a_3, b_2}$, les hypothèses du lemme 9 sont satisfaites, avec b_1 couplé avec a_1 et b_2 couplé avec a_1 . On en déduit que t_1 est adjacent à $y_0 = \{D_1(b_1) \cap D_1(b_2)\} - \{a_1\}$. On a donc $D_1(a_2) \cap D_1(y_0) \supset \{b_1, b_3, t_1\}$ comme $t_1 \neq b_1$ (d'après P_4 appliquée à x_0 et b_1) on a $t_1 = b_3$ ce qui prouve que a_3 est adjacent à b_3 .

3.- Supposons que P_7 soit non vrai c'est à dire qu'il existe $c_1 \in D_1(x_0) \cap D_2(y_0)$ avec $c_1 \neq a_i$ ($i = 1, 2, 3$) et soit x_0, c_1, d_1, y_0 une chaîne de longueur 3 entre x_0 et y_0 . c_1 est différent de b_i et d_1 différent de a_i ($i = 1, 2, 3$) sinon $d(x_0, y_0) = 2$. Enfin d_1 est différent de b_i ($i=1, 2, 3$) d'après P_4 appliquée à x_0 et b_i . En recommençant le raisonnement de 1 avec la chaîne x_0, c_1, d_1, y_0 on en déduit l'existence de c_2 et c_3 (ainsi que d_2 et d_3) tels que les c_i ($i = 1, 2, 3$) soient tous distincts et différents des a_j et b_j ($j = 1, 2, 3$). Donc, si P_7 est non vrai $|D_1(x_0) \cap D_2(y_0)| \geq 6$; d'après le lemme 8, les 6 points de $D_1(x_0) \cap D_2(y_0)$ sont 2 à 2 non adjacents, d'où $h \geq 6$.

C.Q.F.D.

En combinant les théorèmes A, B, C on a le corollaire.

Corollaire : P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 caractérisent $L_{h-1}(K_h^h \times n)$ pour $h=2$ et $n \geq 5$; $h=3$ et $n \geq 7$; $h=4$ et $n \geq 9$; $h = 5$ et $n \geq 11$.

Problèmes : Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure les propriétés P_i sont indépendantes les unes des autres en particulier de savoir :

- si P_7 n'est pas conséquence des autres pour $n \geq h-1$ et pour n quelconque.

- si P_4^{bis} n'est pas conséquence de P_2, P_3, P_4 pour $n \geq 2h+1$ et pour $n \geq 5$.

- si P_5 n'est pas conséquence des autres P_i comme cela a été montré pour

$h = 3$ par Dowling [8].

Note (ajoutée en cours de rédaction) : R. Laskar et A. Pellerin auraient prouvé (Notices A.M.S. n° 699-A. 18, Décembre 1972) que P_1, P_2, P_3, P_4 caractérisent $L_3(K_4^4 \times n)$ si $n \geq 12$.

*L'auteur remercie pour son aide précieuse
Jean-Claude Meyer, sans qui cet article n'aurait
pu être mené à bien.*

REFERENCES

1. M. Aigner : The uniqueness of the cubic lattice graph. J. Combinatorial Theory 6 (1969), 282-297.
2. M. Aigner : Note on the characterization of certain association schemes. Ann. Math. Stat. 42 (1971), 363-367.
3. C. Berge : Nombres de coloration de l'hypergraphe h -parti complet, this volume.
4. C. Berge : Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1971.
5. J.A. Bondy : Pancyclic graphs II, J. Combinatorial Theory, (à paraître).
6. W. Cunningham : The matroids of a Basis Graph (à paraître).
7. T.A. Dowling : A characterization of the T_m graph. J. Combinatorial Theory 6 (1969), 251-263.
8. T.A. Dowling : Note on "a characterization of cubic lattice graphs". J. Combinatorial Theory 5 (1968), 425-426.
9. B. Grünbaum : Incidence patterns of graphs and complexes. The many facets of graph theory ; Springer-Verlag, Lecture Notes (110), 115-128.
10. A.J. Hoffman : On the line graph of the complete bipartite graph, Ann. Math. Stat. 35 (1964), 883-885.
11. R. Laskar : A characterization of cubic lattice graphs, J. Combinatorial Theory 3 (1967), 386-401.
12. S.B. Maurer : On matroid basis graphs. Notices Amer. Math. Soc., Août 1972, 617.
13. J.C. Meyer : Quelques problèmes concernant les cliques des hypergraphes h -complets et q -parti h complets, this volume.
14. J. W. Moon : On the line graph of the complete bigraph. Ann. Math. Stat. 34 (1963), 664-667.
15. A.R. Rao : A characterization of a class of regular graphs. J. Combinatorial Theory 10 (1971) 264-274.
16. S.S. Shrikhande : The uniqueness of the L_2 association scheme. Ann. Math. Stat. 30 (1959), 781-798.