Hypergraphes et configurations

Jean-Claude Bermond, Jean-Claude Meyer

HYPERGRAPHES ET CONFIGURATIONS

J.C. BERMOND et J.C. MEYER

Abstract: *Let $K^h_{q\times n}$ be the hypergraph with vertex set X, where X is the union of q disjoint sets X_i ($1 \leqslant i \leqslant q$) , with $|X_i| = n$; and with edges all the subsets E of X, such that $|E| = h$ and $|E \cap X_i| \leqslant 1$ for $1 \leqslant i \leqslant q$. H being a hypergraph, let us denote by $L_k(H)$ the following graph (without loops): its vertices are associated with the edges of H and two vertices are joined if and only if the corresponding edges of H intersect in at least k elements.*

We study the stability number and the chromatic number of $L_k(K^h_{q\times n})$

-In the case n = 1 (complete hypergraph), existence of stable sets of maximal size is related to the existence of k-designs (or tactical configurations) and the determination of the chromatic number is related to the existence of some resolvable k-designs (in the case k = 2, h = 3 it is related to the existence of disjoint Steiner triple systems).

-In the case q = h (complete h-partite hypergraphs), existence of stable sets of maximal size is related to the existence of orthogonal arrays and in this case we determine the chromatic number (theorem 3.9)

- In the general case existence of stable sets of maximal size is related to the existence of new configurations, which generalize k-designs and orthogonal arrays. We give a sufficient condition for the existence of such configurations.

1. Introduction et définitions

Les définitions et notations qui ne sont pas rappelées ici sont celles de [3].

Etant donnés trois entiers, h, q et n, avec $h \leqslant q$, l'hypergraphe simple ayant pour ensemble de sommets la réunion d'ensembles disjoints $X_1, X_2, \ldots, X_q$, avec $|X_i| = n$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, et pour arêtes tous les ensembles E de $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant q} X_i$, de cardinalité h, tels que $|E \cap X_i| \leqslant 1$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant q$, s'appelle l'hypergraphe q-parti h-complet sur $X_1, X_2, \ldots, X_q$ et est noté $K^h_{q \times n}$.

Remarques.

- Lorsque $h = 2$, $K^2_{q \times n}$ est le graphe multi-parti complet sur $X_1, X_2, \ldots, X_q$. Lorsque $h = 2$ et $n = 1$, $K^2_{q \times 1}$ est le graphe complet K_q et lorsque $h = 2$ et $q = 2$, $K^2_{2 \times n}$ est le graphe biparti $K_{n,n}$.
- Lorsque $n = 1$, $K^h_{q \times 1}$ est l'hypergraphe h-complet à q sommets (c'est-à-dire l'hypergraphe simple dont les arêtes sont les parties à h éléments d'un ensemble à q éléments), noté K^h_q.
- Lorsque $q = h$, $K^h_{h \times n}$ est appelé l'hypergraphe h-parti complet (voir [4] et [11]).

Notations.

Dans la suite nous poserons pour $1 \leqslant i \leqslant q$

$$X_i = \{x_i^j \mid 0 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

α étant un nombre réel $[\alpha]$ désignera la partie entière par défaut de α, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à α, et $[\alpha]^*$ la partie entière par excès de α, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à α.

Etant donné un hypergraphe $H = (X, \mathcal{E})$ et k un entier $\geqslant 1$, $L_k(H)$ désignera le graphe simple dont l'ensemble des sommets est en correspondance bijective avec $\mathcal{E}$, deux sommets de $L_k(H)$ étant adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes de H s'intersectent en au moins k points. Lorsque $k = 1$, $L_1(H)$ n'est autre que le graphe représentatif des arêtes de H (ou linegraph).

G étant un graphe, $\alpha(G)$ désigne la cardinalité maximum d'un ensemble stable de G (c'est-à-dire la cardinalité maximum d'un sous-ensemble S de sommets de G, deux sommets distincts quelconques de S n'étant pas adjacents) et $\gamma(G)$ le nombre chromatique de G (c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G, de sorte que deux sommets adjacents distincts soient de couleurs différentes).

H étant un hypergraphe, $\nu(H)$ désigne la cardinalité maximum d'un couplage de H (c'est-à-dire la cardinalité maximum d'un sous-ensemble d'arêtes de H deux à deux disjointes) et $q(H)$ l'indice chromatique de H (c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de H, de sorte que deux arêtes non disjointes de H soient de couleurs différentes).

On a, lorsque $k = 1$, $\alpha(L_1(H)) = \nu(H)$ et $\gamma(L_1(H)) = q(H)$.

Le but de cet article est d'étudier $\alpha(L_k(K^h_{q\times n}))$ et $\gamma(L_k(K^h_{q\times n}))$. Nous verrons que l'étude de ces paramètres est liée à l'étude de blocs incomplets équilibrés (block designs), de tableaux orthogonaux (orthogonal arrays) et de nouvelles configurations.

2. *Résultats concernant* $L_1(K^h_{q\times n})$.

PROPOSITION 2.1 :

$$\alpha(L_1(K^h_{q\times n})) = \nu(K^h_{q\times n}) = [\frac{nq}{h}].$$

Preuve : Le nombre de sommets de $K^h_{q\times n}$ est égal à nq. Chaque arête de $K^h_{q\times n}$ étant de cardinalité h, il est clair que $\nu(K^h_{q\times n}) \leqslant [\frac{nq}{h}]$.

D'autre part, pour $1 \leqslant k \leqslant [\frac{nq}{h}]$, définissons l'arête E_k de $K^h_{q\times n}$ par :

$$E_k = \{x^j_i | 1 \leqslant i \leqslant q,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad (k-1)h < qj+i \leqslant kh\}.$$

Pour i fixé, comme $h \leqslant q$, il existe au plus un entier j tel que $(k-1)h < qj+i \leqslant kh$ et par suite $|E_k \cap X_i| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$.

D'autre part pour k fixé, $1 \leqslant k \leqslant [\frac{nq}{h}]$, tout entier p tel que $(k-1)h < p \leqslant kh$ peut s'écrire de façon unique $p = qj+i$ avec $1 \leqslant i \leqslant q$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$, ce qui prouve que $|E_k| = h$. De plus si $1 \leqslant k < k' \leqslant [\frac{nq}{h}]$ on a : $E_k \cap E_{k'} = \emptyset$.

Ainsi $\{E_k | 1 \leqslant k \leqslant [\frac{nq}{h}]\}$ est un couplage de $K^h_{q\times n}$ de cardinalité $[\frac{nq}{h}]$.

Il résulte de cette proposition que $q(K^h_{q\times n}) \geqslant \left\lceil \dfrac{\binom{q}{h} n^h}{[\frac{nq}{h}]} \right\rceil^*$. En effet il est connu que si $H = (X, \mathcal{E})$ est un hypergraphe, $q(H) \geqslant \left[\frac{|\mathcal{E}|}{\alpha(H)}\right]^*$.

L'égalité $q(K^h_{q\times n}) = \left[\frac{\binom{q}{h}n^h}{[\frac{nq}{h}]}\right]^*$ a été démontrée :

1) lorsque $q = h$ (Berge [4]),

2) lorsque $n = 1$ et $h = 2$ (Lucas [3, p. 237]),

3) lorsque $n = 1$ et $h = 3$ (Peltesohn [12]),

4) lorsque $n = 1$ et h quelconque (Baranyai [2]),

et le cas général est annoncé comme résolu dans (Baranyai [2]), ce qui permet d'énoncer :

<u>THEOREME 2.2</u> (Baranyai [2]) :

$$\gamma(L_1(K^h_{q\times n})) = q(K^h_{q\times n}) = \left[\frac{\binom{q}{h}n^h}{[\frac{nq}{h}]}\right]^*.$$

<u>Remarque 2.3</u> : Dans le cas $n = 1$, h quelconque, le théorème 2.2 équivaut à l'existence de "resolvable block designs" (Ray-Chaudhuri et Wilson [14] ; Wilson [16]).

D'autres paramètres concernant les graphes $L_1(K^h_{q\times n})$ ont été étudiés dans (Berge [4]) et (Meyer [11]). Une caractérisation des graphes $L_{h-1}(K^h_{h\times n})$ est donnée dans (Bermond [5]).

3. *Résultats concernant* $L_k(K^h_{q\times n})$.

<u>PROPOSITION 3.1</u> :

h nq n(q-1) n(q-k+1) 11.

<u>Preuve</u> (par induction sur k) : La propriété est vraie pour $k = 1$, d'après la proposition 2.1. Soit k, $2 \leqslant k \leqslant h$, et supposons la propriété vraie pour $k-1$ (pour tout q, tout h et tout n, tels que $h \leqslant q$). Soit S un ensemble stable de $L_k(K^h_{q\times n})$ de cardinalité maximum. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des arêtes de $K^h_{q\times n}$ représentées par S dans $L_k(K^h_{q\times n})$. Soit $x \in X_i$; les parties $E-\{x\}$ où $x \in E \in \mathcal{S}$, représentent les arêtes d'un stable du graphe $L_{k-1}(K^{h-1}_{(q-1)\times n})$, où ici, $K^{h-1}_{(q-1)\times n}$ est construit sur $X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_q$. Par suite, par un point de $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} X_i$ il passe au plus $\alpha(L_{k-1}(K^{h-1}_{(q-1)\times n}))$ arêtes de $\mathcal{S}$. D'autre part une arête de $\mathcal{S}$ contenant exactement h sommets de $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} X_i$ on a :

$$h|\mathcal{S}| \leqslant |\bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} X_i|\,\alpha(L_{k-1}(K^{h-1}_{(q-1)\times n})),$$

soit

$$|S| \leqslant [\frac{nq}{h}\ \alpha(L_{k-1}(K^{h-1}_{(q-1)\times n}))],$$

ce qui, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, démontre l'inégalité annoncée.

Nous allons voir que, contrairement à ce qui se passe pour $L_1(K^h_{q\times n})$, l'égalité n'a pas toujours lieu dans l'énoncé de la proposition 3.1 lorsque $k \geqslant 2$. Nous nous proposons d'étudier, d'abord lorsque $q = h$, les cas d'égalité et dans ces cas de déterminer $\gamma(L_k(K^h_{h\times n}))$.

Cas $q = h$.

COROLLAIRE 3.2 :

$$\alpha(L_k(K^h_{h\times n})) \leqslant n^k.$$

Ceci résulte immédiatement de la proposition 3.1.

DEFINITION 3.3 : Soit A un ensemble à n éléments. Soient h, k et c trois entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant h$. On appelle tableau orthogonal généralisé (generalized orthogonal array) GOA $(h,k,n\ ;\ c)$, un tableau (a^j_i), $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant c$, dont les éléments appartiennent à A, à h lignes, c colonnes, vérifiant la condition d'orthogonalité suivante :

$$(a^j_{i_1}, a^j_{i_2}, \ldots, a^j_{i_k}) \neq (a^{j'}_{i_1}, a^{j'}_{i_2}, \ldots, a^{j'}_{i_k}) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant j < j' \leqslant c \quad \text{et}$$

pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ tel que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant h$.

On a $c \leqslant |A^k| = n^k$ (A^k étant l'ensemble des k-uplets de A) car, pour $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ fixé tel que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant h$, la condition d'orthogonalité entraîne que les k-uplets $(a^j_{i_1}, a^j_{i_2}, \ldots, a^j_{i_k})$, $1 \leqslant j \leqslant c$, doivent être des éléments deux à deux distincts de A^k.

Dans le cas particulier où $c = n^k$, on retrouve la définition d'un tableau orthogonal (orthogonal array) noté alors OA (h,k,n) (voir Rao [13], ou lorsque $k = 2$, Hall [9]).

Exemple 3.4 : Prenons $h = 3$, $n = k = 2$. Un tableau orthogonal $OA\ (3,2,2)$ sur $A = \{0,1\}$ s'écrit par exemple :

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0. \end{matrix}$$

LEMME 3.5 : A tout ensemble stable de $L_k(K^h_{h\times n})$ de cardinalité c, correspond un tableau orthogonal généralisé $GOA\ (h,k,n\ ;\ c)$ sur $A = \{0,1,\ldots,n-1\}$ et réciproquement.

Preuve : Si S est un ensemble de sommets de $L_k(K^h_{h\times n})$, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des arêtes de $K^h_{h\times n}$ représentées par S dans $L_k(K^h_{h\times n})$ et réciproquement.

A chaque arête E_j de $\mathcal{S}$, associons la colonne c_j d'un tableau d'éléments de A à h lignes et $|\mathcal{S}|$ colonnes où $c_j = (a^j_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$, a^j_i étant défini par

$E_j \cap X_i = \{x_i^{a^j_i}\}$, et réciproquement à toute colonne $c_j = (a^j_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ d'un tableau d'éléments de A à h lignes et c colonnes associons l'arête E_j de $K^h_{h\times n}$:

$$E_j = \{x_i^{a^j_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant h\}.$$

La condition d'orthogonalité entre deux colonnes quelconques d'un tableau $GOA\ (h,k,n\ ;\ c)$ est équivalente au fait que les deux arêtes associées à ces colonnes intersectent en au plus $k-1$ points. Ce qui montre l'équivalence entre l'existence d'un ensemble stable de $L_k(K^h_{h\times n})$ de cardinalité c et l'existence d'un tableau orthogonal généralisé GOA $(h,k,n\ ;\ c)$.

<u>Exemple 3.6</u> : Au tableau orthogonal OA $(3,2,2)$ de l'exemple 3.4 est associé l'ensemble stable de cardinalité 4 de $L_2(K^3_{3\times 2})$ représentant les arêtes suivantes de $K^3_{3\times 2}$:

$E_1 = \{x^0_1, x^0_2, x^0_3\}$, $E_2 = \{x^0_1, x^1_2, x^1_3\}$, $E_3 = \{x^1_1, x^0_2, x^1_3\}$ et $E_4 = \{x^1_1, x^1_2, x^0_3\}$.

<u>PROPOSITION 3.7</u> (Aigner [1]) : On a $\alpha(L_k(K^h_{h\times n})) \leqslant n^k$ et il y a égalité si et seulement si il existe un tableau orthogonal OA (h,k,n).

<u>Preuve</u> : Ceci résulte immédiatement du corollaire 3.2 et du lemme 3.5.

<u>Exemples 3.8</u> : Dans le cas particulier $k = 2$, l'existence d'un tableau orthogonal OA $(h,2,n)$ est équivalente à l'existence de $h-2$ carrés latins orthogonaux (voir Wilson [15] pour les résultats sur les carrés latins orthogonaux). Par exemple on a :

$$\alpha(L_2(K^3_{3\times n})) = n^2 \quad \text{pour tout} \quad n,$$

$$\alpha(L_2(K^4_{4\times n})) = n^2 \quad \text{pour tout} \quad n \neq 2 \quad \text{et} \quad n \neq 6,$$

et pour $h = 4$ et $n = 6$, il est bien connu qu'il n'existe pas deux carrés latins orthogonaux d'ordre 6 et donc :

$$\alpha(L_2(K^4_{4\times 6})) < 6^2 = 36.$$

<u>THEOREME 3.9</u> : Si $\alpha(L_k(K^h_{h\times n})) = n^k$, <u>alors</u> $\gamma(L_k(K^h_{h\times n})) = n^{h-k}$.

<u>Preuve</u> :

Notations : Si S (resp. S_i) est un sous-ensemble de sommets de $L_k(K^h_{h\times n})$, nous noterons par $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_i$) l'ensemble des arêtes de $K^h_{h\times n}$ représentées par S dans $L_k(K^h_{h\times n})$ et réciproquement.

Si a est un entier, on notera $\bar{a}$ l'entier congru à a modulo n tel que $0 \leqslant \bar{a} < n$.

Tout d'abord si $\alpha(L_k(K^h_{h\times n})) = n^k$, alors $\gamma(L_k(K^h_{h\times n})) \geqslant \frac{n^h}{n^k} = n^{h-k}$, car pour tout graphe $G = (X, \mathcal{E})$ on a $\gamma(G) \geqslant \left[\frac{|X|}{\alpha(G)}\right]^*$. Nous allons montrer que $\gamma(L_k(K^h_{h\times n})) = n^{h-k}$ en construisant, à partir d'un stable S de cardinalité maximum n^k, une partition des sommets de $L_k(K^h_{h\times n})$ en n^{h-k} stables S_i, $0 \leqslant i < n^{h-k}$.

Soit S un ensemble stable de cardinalité n^k. S étant un ensemble stable, il passe par un point de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ une arête de $\mathcal{S}$ au plus et comme $|S| = |X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k| = n^k$ il en passe exactement une. Quitte à réindexer les sommets dans chaque ensemble $X_k, \dots, X_h$, on peut supposer que les arêtes $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^i, \dots, x_h^i\}$, pour $0 \leqslant i < n$, sont des arêtes de $\mathcal{S}$. Numérotons les n^{h-k} arêtes de $K^{h-k+1}_{(h-k+1)\times n}$ sur $X_k, \dots, X_h$ passant par le point x_k^0, l'arête 0 étant l'arête $\{x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_h^0\}$, l'arête numérotée i s'écrivant :

$$\{x_k^0, x_{k+1}^{\alpha_{k+1}(i)}, \dots, x_h^{\alpha_h(i)}\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i < n^{h-k}.$$

Définissons, pour $0 \leqslant i < n^{h-k}$, l'ensemble $\mathcal{S}_i$ d'arêtes de $K^h_{h\times n}$ sur $X_1, X_2, \dots, X_h$ par :

$$\mathcal{S}_i = \{\{x_1^{i_1},\dots,x_k^{i_k},x_{k+1}^{\overline{i_{k+1}+\alpha_{k+1}(i)}},\dots,x_h^{\overline{i_h+\alpha_h(i)}}\mid\{x_1^{i_1},\dots,x_h^{i_h}\}\in\mathcal{S}\}.$$

Alors :

a) $S_o = S.$

b) Pour $0 \leqslant i < n^{h-k}$, S_i est un ensemble stable et $|S_i| = |S| = n^k.$

Montrons que si $E \in \mathcal{S}_i$ et $E' \in \mathcal{S}_i$ avec $|E \cap E'| \geqslant k$, alors $E = E'$. E et E' s'écrivent respectivement :

$$E = \{x_1^{i_1},\dots,x_k^{i_k},x_{k+1}^{\overline{i_{k+1}+\alpha_{k+1}(i)}},\dots,x_h^{\overline{i_h+\alpha_h(i)}}\}$$

$$E' = \{x_1^{i'_1},\dots,x_k^{i'_k},x_{k+1}^{\overline{i'_{k+1}+\alpha_{k+1}(i)}},\dots,x_h^{\overline{i'_h+\alpha_h(i)}}\},$$

avec $F = \{x_1^{i_1},\dots,x_h^{i_h}\}$ et $F' = \{x_1^{i'_1},\dots,x_h^{i'_h}\}$ arêtes de $\mathcal{S}$.

Puisque $|E \cap E'| = |F \cap F'|$, la condition $|E \cap E'| \geqslant k$ implique $|F \cap F'| \geqslant k$, et S étant un ensemble stable, $F = F'$ et par suite $E = E'$.

c) Pour $0 \leqslant i < j < n^{h-k}$, on a $S_i \cap S_j = \emptyset.$

En effet supposons qu'il existe une arête $E \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$. Alors E s'écrit :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} E = \{x_1^{i_1},\dots,x_k^{i_k},x_{k+1}^{\overline{i_{k+1}+\alpha_{k+1}(i)}},\dots,x_h^{\overline{i_h+\alpha_h(i)}}\}\in\mathcal{S}_i \\ \text{et} \\ E = \{x_1^{i'_1},\dots,x_k^{i'_k},x_{k+1}^{\overline{i'_{k+1}+\alpha_{k+1}(j)}},\dots,x_h^{\overline{i'_h+\alpha_h(j)}}\}\in\mathcal{S}_j \end{array}\right.$$

avec $F = \{x_1^{i_1}, \dots, x_h^{i_h}\} \in \mathcal{S}$ et $F' = \{x_1^{i'_1}, \dots, x_h^{i'_h}\} \in \mathcal{S}$.

(1) implique que $i_\ell = i'_\ell$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant k$, et donc $|F \cap F'| \geqslant k$.
S étant un ensemble stable, on a $F = F'$ et par suite $i_\ell = i'_\ell$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant h$. (1) ne peut avoir lieu que si $\alpha_\ell(i) = \alpha_\ell(j)$ pour $k \leqslant \ell \leqslant h$, ce qui est impossible puisque $i \neq j$.

Ainsi les ensembles stables S_i, $0 \leqslant i < n^{h-k}$, de cardinalité n^k, constituent une partition des sommets de $L_k(K^h_{h\times n})$.

<u>Exemple 3.10</u> : D'après les exemples 3.8 et le théorème 3.9 on obtient :

$$\gamma(L_2(K^3_{3\times n})) = n \quad \text{pour tout } n.$$

$$\gamma(L_2(K^4_{4\times n})) = n^2 \quad \text{pour tout } n \neq 2 \text{ et } n \neq 6.$$

<u>Conjecture 3.11</u> :

$$\gamma(L_k(K^h_{h\times n})) = \left[\frac{n^h}{\alpha(L_k(K^h_{h\times n}))}\right]^*.$$

Le théorème 3.9 démontre la conjecture lorsque $\alpha(L_k(K^h_{h\times n})) = n^k$. Elle est également vérifiée pour $L_2(K^h_{h\times 2})$ car il est facile de voir que $\alpha(L_2(K^h_{h\times 2})) = 2$, donc $\gamma(L_2(K^h_{h\times 2})) \geqslant \frac{2^h}{2} = 2^{h-1}$. D'autre part $\gamma(L_2(K^h_{h\times 2})) \leqslant \gamma(L_1(K^h_{h\times 2}))$ et Berge [4] a montré que $\gamma(L_1(K^h_{h\times 2})) = 2^{h-1}$.

Cas $n = 1$.

DEFINITION 3.12 : Une $(q,h,1)$-k-configuration (k-design ou tactical configuration) est une famille de parties, appelées blocs, de cardinalité h d'un ensemble B à q éléments, telle que toute partie à k éléments de B soit incluse dans exactement un bloc.

PROPOSITION 3.13 (Bhagwan Das [6], Aigner [1]) : On a :

$$\alpha(L_k(K_q^h)) \leqslant \frac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$$

et il y a égalité si et seulement si il existe une $(q,h,1)$-k-configuration.

Comme dans le cas $q = h$, on peut se demander si l'égalité dans la proposition précédente implique :

$$\gamma(L_k(K_q^h)) = \left[\frac{\binom{q}{h}}{\alpha(L_k(K_q^h))}\right]^* = \binom{q-k}{h-k}$$

(ce qui revient à dire qu'il existe $\binom{q-k}{h-k}$ ensembles stables disjoints de cardinalité $\frac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$). Ce problème est équivalent au problème de l'existence de certaines configurations k-résolubles étudiée par Wilson [16] auquel nous renvoyons pour la bibliographie (avec les notations de Wilson, il s'agit de l'existence de $S(h,h,q)$ "k-resolvable designs") et dans le cas $h = 3$, $k = 2$ à l'existence de triplets de Steiner disjoints (Doyen [8]).

Contrairement à ce qui se passe dans le cas $q = h$, il existe des valeurs pour lesquelles on a $\alpha(L_k(K_q^h)) = \frac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$ et

$\gamma(L_k(K_q^h)) > \binom{q-k}{h-k}$. Tel est le cas par exemple pour $k = 2$, $h = 3$, $q = 7$ (Cayley [7]) ; $k = 3+i$, $h = 4+i$, $q = 10+i$ avec $0 \leqslant i \leqslant 2$ (Kramer et Mesner [10]). Dans chacun de ces cas il est montré que le nombre de stables de cardinalité maximum disjoints est strictement inférieur à $\binom{q-k}{h-k}$.

Cas général.

THEOREME 3.14 : On a :

$$\alpha(L_k(K_{q\times n}^h)) \leqslant n^k \frac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$$

et il y a égalité si il existe une $(q,h,1)$-k-configuration et un tableau orthogonal OA (h,k,n).

Preuve : L'inégalité découle immédiatement de la proposition 3.1. Soit $B = \{1,2,\dots,q\}$. L'existence d'une $(q,h,1)$-k-configuration implique l'existence de $b = \frac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$ blocs B_j (les B_j, $1 \leqslant j \leqslant b$, étant des parties de B, de cardinalité h), telle que toute partie à k éléments de B soit incluse dans exactement un bloc B_j.

Pour j fixé, $1 \leqslant j \leqslant b$, considérons l'hypergraphe h-parti complet H_j construit sur les ensembles X_i tels que $i \in B_j$. L'existence d'un tableau orthogonal OA (h,k,n) implique, d'après la proposition 3.7, l'existence d'un ensemble stable S_j de $L_k(H_j)$

ayant n^k sommets. Pour $1 \leqslant j \leqslant b$, H_j est un sous-hypergraphe de l'hypergraphe $K^h_{q\times n}$ construit sur $X_1,\dots,X_q$ et $L_k(H_j)$ est un sous-graphe de $L_k(K^h_{q\times n})$. Nous noterons par $\mathcal{S}_j$ l'ensemble des arêtes de $K^h_{q\times n}$ représenté par S_j dans $L_k(K^q_{q\times n})$.

Montrons que $S = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant b} S_j$ est un ensemble stable de $L_k(K^h_{q\times n})$. Soient $E_1 \in \mathcal{S}_{j_1}$ et $E_2 \in \mathcal{S}_{j_2}$.

Si $j_1 = j_2$, $|E_1 \cap E_2| < k$ car S_{j_1} est un ensemble stable de $L_k(H_{j_1})$.

Si $j_1 \neq j_2$, $|E_1 \cap E_2| < k$. En effet les hypergraphes H_{j_1} et H_{j_2} sont respectivement construits sur les ensembles X_ℓ avec $\ell \in B_{j_1}$ et X_m avec $m \in B_{j_2}$; de plus $(B_j)_{1\leqslant j\leqslant b}$ étant une $(q,h,1)$-k-configuration, on a $|B_{j_1} \cap B_{j_2}| < k$. Donc il existe au plus k-1 ensembles X_i tels que $|E_1 \cap X_i| = |E_2 \cap X_i| = 1$ et par suite $|E_1 \cap E_2| < k$. On a $|S| = \sum_{1\leqslant j\leqslant b} |S_j| = bn^k = n^k \dfrac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$.

L'exemple suivant montre que les hypothèses du théorème 3.14 ne sont nullement nécessaires pour l'existence d'un ensemble stable de $L_k(K^h_{q\times n})$ de cardinalité $n^k \dfrac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}}$.

<u>Exemple 3.15</u> : Prenons $k = n = 2$, $h = 3$ et $q = 4$. Il n'existe pas de $(4,3,1)$-2 configuration, les congruences :

$$q-1 \equiv 0 \bmod h-1$$

et $$q(q-1) \equiv 0 \bmod h(h-1),$$

nécessairement vérifiées pour l'existence d'une $(q,h,1)-2$ configuration n'étant pas toutes deux vérifiées ici. Nous allons cependant construire un ensemble stable de $L_2(K^3_{4\times2})$ de cardinalité

$$n^k \frac{\binom{q}{k}}{\binom{h}{k}} = 8.$$

Considérons l'hypergraphe $K^4_{4\times3}$. D'après un exemple de 3.8 il existe un ensemble stable S de $L_2(K^4_{4\times3})$ de cardinalité 9 et si $\mathcal{S}$ représente les arêtes de S dans $K^4_{4\times3}$, on peut toujours, quitte à réindexer les sommets des ensembles X_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, supposer que l'arête $E_o = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\} \in \mathcal{S}$. Si $E \in \mathcal{S}$, $E \neq E_o$, S étant un ensemble stable, $0 \leqslant |E \cap E_o| \leqslant 1$. Soit alors :

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{S} \mid E \cap E_o = \emptyset\}, \qquad \mathcal{B} = \{E \in \mathcal{S} \mid E \cap E_o \neq \emptyset,\ E \neq E_o\}$$

et

$$\mathcal{S}' = \{E - X_1 \mid E \in \mathcal{A}\} \cup \{E - E_o \mid E \in \mathcal{B}\}.$$

Les éléments de $\mathcal{S}'$ sont des arêtes de l'hypergraphe $K^3_{4\times2}$ construit sur les ensembles $X_i - \{x_i^2\}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Il est clair que $|\mathcal{S}'| = 8$ et que $\mathcal{S}'$ représente dans $K^3_{4\times2}$ un ensemble stable de $L_2(K^3_{4\times2})$.

<u>Remarque 3.16</u> : Il serait intéressant d'étudier lorsqu'il y a égalité dans l'énoncé du théorème 3.14, les configurations associées aux ensembles stables (de la même manière que pour $q = h$, et $n = 1$), configurations qui généraliseraient à la fois les tableaux orthogonaux $OA(h,k,n)$ et les $(q,h,1)$-k-configurations.

REFERENCES

[1] M. AIGNER : Some theorems on coverings, Stud. Sci. Math. Hung. 5 (1970), pp. 303-315.

[2] Z. BARANYAI : On the factorization of the complete uniform hypergraph. Proc. Coll. Keszthely, 1973, à paraître.

[3] C. BERGE : Graphes et Hypergraphes, 2ème éd., Dunod, Paris, 1973.

[4] C. BERGE : Nombres de coloration de l'hypergraphe h-parti complet. Proc. Hypergraph Seminar, Columbus, Ohio, 1972 (ed. C. Berge, D.K. Ray-Chaudhuri), Springer Verlag, Lecture Notes N° 411, 1974, pp. 13-20.

[5] J.C BERMOND : Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet. Proc. Hypergraph Seminar, Columbus, Ohio, 1972 (ed. C. Berge, D.K. Ray-Chaudhuri), Springer Verlag, Lecture Notes N° 411, 1974, pp. 34-53.

[6] BHAGWAN DAS : Tactical configurations and graph theory. Calcutta Stat. Ass. Bull. 16 (1967), pp. 136-138.

[7] A. CAYLEY : On the triadic arrangements of seven and fifteen things, London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. and J. Sci. (3), 37 (1850), pp. 50-53.

[8] J. DOYEN : Construction of disjoint Steiner triple systems. Proc. A.M.S. 32 (1972), pp. 409-416.

[9] M. HALL, Jr.: Combinatorial theory, Blaisdell, Waltham, Mass., 1967.

[10] E.S. KRAMER et D.M. MESNER : Intersections among Steiner systems, J. Combinatorial Theory 16 A (1974), pp. 273-285.

[11] J.C MEYER : Quelques problèmes concernant les cliques des hypergraphes h-complets et q-parti h-complets. Proc. Hypergraph Seminar, Columbus, Ohio, 1972 (ed. C. Berge, D.K. Ray-Chaudhuri), Springer Verlag, Lectures Notes, N° 411, 1974, pp.127-139.

[12] R. PELTESOHN : Das Turnierproblem für Spiele zu je dreien. Dissertationsschrift an der Phil. Fak. der Friedr. - Wilh. - Univer., Berlin 1936.

[13] C.R. RAO : Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays, Suppl. J. Roy. Statist. Soc. 9 (1947), pp. 128-139.

[14] D.K. RAY-CHAUDHURI et R.M. WILSON : The existence of resolvable block designs, dans A survey of combinatorial theory (ed. J.N. Srivastava ...), North Holland Amsterdam, 1973, pp. 361-375.

[15] R.M. WILSON : Concerning the number of orthogonal latin squares. Discrete Math. 9 (1974), pp. 180-198.

[16] R.M. WILSON : Some partitions of all triples into Steiner triple systems .Proc. Hypergraph Seminar, Columbus, Ohio, 1972 (eds. C. Berge, D.K.Ray Chaudhuri), Springer Verlag, Lecture Notes, N° 411, 1974, pp. 267 - 277.