



HAL
open science

1-graphes réguliers minimaux de girth donné

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. 1-graphes réguliers minimaux de girth donné. Cahiers du Centre d'études de recherche opérationnelle, 1975, 17, pp.125-135. hal-02366958

HAL Id: hal-02366958

<https://inria.hal.science/hal-02366958>

Submitted on 16 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

1-GRAPHES REGULIERS MINIMAUX DE GIRTH DONNE

J.C. BERMOND

Abstract : A directed graph G is r -regular if $d^+(x) = d^-(x) = r$ for every vertex of G . The girth g of a directed graph G containing (directed) circuits is the length of the smallest circuit in G . Let $f(r, g)$ be the minimum number of vertices that a r -regular graph, having girth g , may possess. In [1] it was conjectured that $f(r, g) = r(g-1) + 1$. We prove here essentially that the conjecture is true for $r = 2$ and $r = 3$ and arbitrary g (the case $r = 2$ has been solved in [2], but the proof given here is shorter).

1. Introduction et définitions.

Les définitions et notations sont celles de [4]. Rappelons que pour un 1-graphe (graphe orienté, sans boucles, ni arcs multiples) $G = (X, U)$ on a :

$$\Gamma^+(x) = \{ y \in X : (x, y) \in U \} ; \quad d^+(x) = |\Gamma^+(x)|.$$

$$\Gamma^-(x) = \{ y \in X : (y, x) \in U \} ; \quad d^-(x) = |\Gamma^-(x)|.$$

($|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A).

Pour $A \subset X$ on note $\Gamma^+(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma^+(x)$ et $\Gamma^-(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma^-(x)$.

Un 1-graphe G est dit r -régulier si $d^+(x) = d^-(x) = r$ pour tout sommet x de G . Le "girth" ou "maille" g , d'un 1-graphe G , ayant au moins un circuit (orienté) est la longueur du plus petit circuit de G . On a $g \geq 2$, G étant sans boucles. Le nombre minimum de sommets que peut avoir

un graphe r -régulier, de girth g , sera noté $f(r, g)$. Dans [1] il est prouvé que :

Proposition 1.1. [1] : $f(r, g) \geq r(g-1) + 1$.

Démonstration : Il suffit de considérer le 1 -graphe G , ayant $r(g-1) + 1$ sommets labellés i , $i = 1, 2, \dots, r(g-1) + 1$ et où (i, j) est un arc de G si et seulement si $j - i \equiv 1, 2, \dots, r \pmod{r(g-1) + 1}$. G est bien r -régulier et de girth g .

Dans [1] il est conjecturé que :

Conjecture 1.2. [1] $f(r, g) = r(g-1) + 1$

La conjecture est prouvée dans [1] pour les couples (r, g) suivants :

$\{(r, g) : g = 2, 3\} \cup \{(r, g) : r = 1\} \cup \{(2, 4), (3, 4), (4, 4), (2, 5)\}$ et

dans [2] la conjecture est prouvée pour $r = 2$, g quelconque. Le problème a été reposé dans [3].

Nous nous proposons ici de donner une preuve plus simple du cas $r = 2$, g quelconque et de prouver la validité de la conjecture pour $r = 3$, g quelconque et pour d'autres couples de valeurs.

2. Proposition principale.

Proposition 2.1 : Soit G un 1 -graphe r -régulier de girth g .

Supposons qu'il existe un sommet x_0 de G et des ensembles

X_i et Y_i avec $i = 1, 2, \dots, [g/2]$ (où $[x]$ désigne le plus grand entier

inférieur ou égal à x) tels que :

- (i) $X_1 = \Gamma^-(x_0)$; $Y_1 = \Gamma^+(x_0)$
(ii) $|X_i| = r$; $|Y_i| = r$ $1 \leq i \leq [g/2]$
(iii) $X_i \subset \Gamma^-(\bigcup_{j < i} X_j)$ - $\bigcup_{j < i} X_j$ $2 \leq i \leq [g/2]$
 $Y_i \subset \Gamma^+(\bigcup_{j < i} X_j)$ - $\bigcup_{j < i} X_j$ $2 \leq i \leq [g/2]$

Alors G contient au moins $r(g-1)+1$ sommets.

Démonstration : a) $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour tous $i, j \leq [g/2]$ car

d'après iii) $X_i \cap (\bigcup_{j < i} X_j) = \emptyset$.

b) si $x \in X_i$, il existe un chemin de x à x_0 de longueur inférieure ou égale à i . En effet c'est vrai pour X_1 . Supposons le vrai pour tout $j \leq i-1$ et soit $x \in X_i$. Comme $X_i \subset \Gamma^-(\bigcup_{j < i} X_j)$, il existe y dans $\bigcup_{j < i} X_j$ tel que $x \in \Gamma^-(y)$. Le chemin de x à x_0 , formé de l'arc (x, y) et du chemin de longueur $\leq i-1$ reliant y à x_0 est de longueur $\leq i$.

c) $x_0 \notin X_i$: sinon on aurait un circuit de longueur inférieure ou égale à $i \leq [g/2] < g$, ce qui contredit la définition de g .

On a de même : $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, $i \leq [g/2]$, $j \leq [g/2]$; si $y \in Y_i$ il existe un chemin de x_0 à y de longueur $\leq i$ et $x_0 \notin Y_i$.

d) $X_i \cap Y_j = \emptyset$ pour $i \leq [g/2]$, $j \leq [(g-1)/2]$. Supposons qu'il existe un sommet z appartenant à $X_i \cap Y_j$; la réunion du chemin de longueur $\leq i$ de z à x_0 et de celui de longueur $\leq j$ de x_0 à z forme un circuit de longueur inférieure ou égale à $i+j \leq [g/2] + [(g-1)/2] = g-1$, ce qui contredit la définition de g .

On a donc exhibé dans G , $\lfloor g/2 \rfloor + \lfloor (g-1)/2 \rfloor = g-1$ ensembles de cardinalité r , 2 à 2 disjoints et ne contenant pas x_0 , soit en tout $r(g-1) + 1$ sommets.

3. Cas $r(\lfloor g/2 \rfloor - 1) < g$.

Nous utiliserons le lemme suivant très classique.

Lemme 3.1 : Si G est un 1-graphe sans circuits, il existe au moins un sommet x tel que $\Gamma^-(x) = \emptyset$ et au moins un sommet y tel que $\Gamma^+(y) = \emptyset$.

Théorème 3.2 : Si $r(\lfloor g/2 \rfloor - 1) < g$, alors $f(r,g) = r(g-1) + 1$.

Démonstration : Nous allons montrer que, si $r(\lfloor g/2 \rfloor - 1) < g$ tout 1-graphe, r -régulier de girth g vérifie les hypothèses de la proposition 2.1. On aura donc $f(r,g) \geq r(g-1) + 1$ et d'après la prop.

1.1 $f(r,g) = r(g-1) + 1$. Soit donc G un 1-graphe, r -régulier de girth g , avec $r(\lfloor g/2 \rfloor - 1) < g$, soit x_0 un sommet quelconque de G et et soient $X_1 = \Gamma^-(x_0)$ et $Y_1 = \Gamma^+(x_0)$. Supposons que l'on ait construit pour tout $j < i \leq \lfloor g/2 \rfloor$ des ensembles X_j vérifiant les hypothèses ii) et iii) de 2.1. On a alors $|\bigcup_{j < i} X_j| = \sum_{j < i} |X_j| = r(i-1)$, les X_j étant 2 à 2 disjoints (d'après iii) et de cardinalité r (d'après ii). Comme $i \leq \lfloor g/2 \rfloor$, $|\bigcup_{j < i} X_j| \leq r(\lfloor g/2 \rfloor - 1) < g$. Le sous graphe engendré par $\bigcup_{j < i} X_j$ est donc sans circuits et d'après le lemme 3.1. il existe un sommet x de $\bigcup_{j < i} X_j$ tel que $\Gamma^-(x) \cap (\bigcup_{j < i} X_j) = \emptyset$. L'ensemble $X_i = \Gamma^-(x)$ vérifie bien ii) et iii). On peut ainsi construire de proche en proche, pour $i \leq \lfloor g/2 \rfloor$ des ensembles X_i , et de la même manière

des ensembles Y_i , vérifiant les hypothèses de la proposition 2.1.

Corollaire 3.3. $[1,2]$: $f(r,2) = r+1$; $f(r,3) = 2r+1$ et $f(2,g) = 2g+1$.

Démonstration : L'hypothèse du théorème 3.2 est bien vérifiée car si $g = 2$ ou 3 : $[g/2] = 1$ et si $r = 2$, $2([g/2] - 1) < g$. La conjecture 1.2 est aussi vérifiée pour les couples (r,g) : $\{3,4\}$; $\{3,5\}$; $\{3,7\}$ et $\{4,5\}$.

4. Fonction $m(n,r,g)$ et cas $r = 3$.

Pour étudier d'autres cas nous sommes amenés à considérer la famille $G(n,r,g)$, formé des 1-graphes, ayant n sommets, de girth g et tel que $d^+(x) < r$ et $d^-(x) < r$ pour tout sommet x . Soit $m(n,r,g)$ le maximum d'arcs que peut avoir un 1-graphe de $G(n,r,g)$.

Lemme 4.1 : Si $n > r$, $m(n+1,r,g) > m(n,r,g) + r$.

Démonstration : Soit G un 1-graphe de $G(n,r,g)$ ayant $m(n,r,g)$ arêtes. Le 1-graphe obtenu en ajoutant à G un sommet x et r arcs d'extrémité initiale x (ce qui est possible car $n \geq r$) appartient à $G(n+1,r,g)$ d'où le lemme.

Lemme 4.2 : $m(n+1,r,g) \leq m(n,r,g) + 2r$.

Démonstration : Soit G un 1-graphe de $G(n+1,r,g)$: en enlevant x un sommet quelconque de G et les arcs d'extrémité x en nombre inférieur ou égal à $d^+(x) + d^-(x) \leq 2r$ on obtient un graphe de $G(n,r,g)$ qui a au plus $m(n,r,g)$ arcs, d'où le lemme.

Lemme 4.3 : $m(g,r,g) = g$.

Démonstration : Le lemme résulte du fait que le seul graphe de $G(g,r,g)$ est le circuit à g sommets.

Lemme 4.4 : Soit G un 1-graphe de $G(n, r, g)$ où $n > g$; soit C un circuit de longueur g de G et soit x un sommet n'appartenant pas à C. Alors $|\{\Gamma^-(x) \cup \Gamma^+(x)\} \cap C| \leq \max\{3, \min(r, g)\}$.

Démonstration : Si $\Gamma^-(x) \cap C = \emptyset$ alors le lemme résulte du fait que $|\Gamma^+(x) \cap C| \leq \min(r, g)$. On traite de même le cas $\Gamma^+(x) \cap C = \emptyset$. Supposons donc $\Gamma^+(x) \cap C \neq \emptyset$ et $\Gamma^-(x) \cap C \neq \emptyset$. Soit $C = (x_1, \dots, x_g)$ le circuit de G ; si (x_i, x) est un arc de G, alors (x, x_{i+k}) où $3 \leq k \leq g$ et où les indices sont à considérer modulo g n'est pas un arc de G, sinon on aurait un circuit de longueur $< g$. De même si (x, x_j) est un arc de G, (x_{j-k}, x) où $3 \leq k \leq g$ n'est pas un arc de G. Dans le cas $\Gamma^-(x) \cap C \neq \emptyset$ et $\Gamma^+(x) \cap C \neq \emptyset$ on a donc $|\{\Gamma^-(x) \cup \Gamma^+(x)\} \cap C| \leq 3$.

Lemme 4.5 : Si $g \geq r \geq 3$ on a :

$$m(g+\alpha, r, g) \leq g + \binom{\alpha}{2} + r\alpha \quad \text{pour } 0 \leq \alpha \leq r$$

$$m(g+\alpha, r, g) \leq g + \binom{r}{2} + r^2 + 2r(\alpha-r) \quad \text{pour } \alpha \geq r.$$

$\binom{n}{p}$ désigne le nombre de combinaisons de n éléments pris p à p.

Démonstration : Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe de $G(g+\alpha, r, g)$ avec $0 \leq \alpha \leq r$. Soit C un circuit de longueur g et soit $Y = X - C$.

$$|U| = |U \cap \{C \times C\}| + |U \cap \{Y \times Y\}| + |U \cap \{(C \times Y) \cup (Y \times C)\}|.$$

$$|U \cap \{C \times C\}| = g ; |U \cap \{Y \times Y\}| \leq \binom{\alpha}{2} \quad \text{le sous graphe engendré}$$

par les α sommets de Y étant sans circuits car $\alpha \leq r \leq g$;

$$\text{enfin } |U \cap \{(C \times Y) \cup (Y \times C)\}| \leq r\alpha, \quad \text{d'après le lemme 4.4}$$

appliqué aux α points de Y et le fait que $g \geq r \geq 3$ entraîne

$\max \{3, \min (r, g)\} = r$. Donc $|U| \leq g + \binom{\alpha}{2} + r \alpha$. Dans le cas $\alpha \geq r$ le lemme 4.2 appliqué $\alpha - r$ fois donne :

$$m(g+\alpha, r, g) \leq m(g+r, r, g) + 2r(\alpha-r) \leq g + \binom{r}{2} + r^2 + 2r(\alpha-r).$$

Remarque : Les bornes données dans le lemme 4.5 ne sont pas les meilleures possibles (voir lemmes 4.7 et 4.8), néanmoins elles vont nous permettre de montrer la conjecture 1.2 pour $r = 3$.

Théorème 4.6 : $f(3, g) = 3g - 2$.

Démonstration : Nous allons montrer que tout 1-graphe, r -régulier, avec $r = 3$, vérifie les hypothèses de la proposition 2.1. On aura donc $f(3, g) \geq 3g - 2$ et d'après 1.1 égalité. Soit G un 1-graphe, r -régulier, $r = 3$, de girth g ; soit x_0 un sommet quelconque et soient $X_1 = \Gamma^-(x_0)$ et $Y_1 = \Gamma^+(x_0)$. Supposons que l'on ait construit pour tout $j < i \leq [g/2]$ des ensembles X_j vérifiant les hypothèses ii) et iii) de 2.1.

Posons $Z = \bigcup_{j < i} X_j$. On a $|Z| = r(i-1)$.

Cas 1 : Le sous graphe engendré par Z contient un sommet x tel que $\Gamma^-(x) \cap Z = \emptyset$; on prend alors $X_i = \Gamma^-(x)$.

Cas 2 : Un tel sommet n'existe pas ; le sous graphe engendré par Z contient au moins un circuit (sinon on aurait une contradiction avec le lemme 3.1) et soit h son girth : $h \geq g$. Nous allons montrer que $|\Gamma^-(Z) - Z| \geq r$; on prendra alors pour X_i un ensemble de r points inclus dans $\Gamma^-(Z) - Z$.

Dans les deux cas l'ensemble X_i vérifie les hypothèses ii) et iii). On construit donc ainsi pour $i \leq [g/2]$ des ensembles X_i et

de la même manière des ensembles Y_i vérifiant les hypothèses de la proposition 2.1.

Démonstration de $|\Gamma^-(Z) - Z| \geq r$ (pour $i \leq [g/2]$): Supposons que $|\Gamma^-(Z) - Z| \leq r - 1$, nous allons aboutir à une contradiction en calculant de deux manières $\sum_{x \in Z} d^-(x)$.

$$\sum_{x \in Z} d^-(x) = r |Z| = r^2(i-1)$$

$$\sum_{x \in Z} d^-(x) = |U \cap \{Z \times Z\}| + |U \cap \{(X - Z) \times Z\}|.$$

Le sous graphe engendré par Z appartient à $G(|Z|, r, h)$, donc $|U \cap \{Z \times Z\}| \leq m(|Z|, r, h)$. D'autre part les seuls points de $X - Z$ reliés à Z , par un arc d'extrémité terminale dans Z , sont ceux de $\Gamma^-(Z) - Z$ et un tel point est extrémité initiale d'au plus r arcs d'où :

$$|U \cap \{(X - Z) \times Z\}| \leq r |\Gamma^-(Z) - Z| \leq r(r - 1). \text{ On a donc :}$$

$$\underline{r^2(i - 1)} \leq \underline{m(r(i - 1), r, h) + r(r - 1)}.$$

Prenons $r = 3$ et posons $h + \alpha = 3(i - 1) \leq 3([g/2] - 1)$.

L'inégalité s'écrit : $3(h + \alpha) \leq m(h + \alpha, r, h) + 6$. On peut supposer $h \geq g > 3$, les cas $g = 2$ et $g = 3$ étant résolus en 3.2. On a donc $h \geq r$ et on peut appliquer le lemme 4.5. Si $\alpha \leq 2$ il vient $3(h + \alpha) \leq h + \binom{\alpha}{2} + 3\alpha + 6$ soit $2h \leq 7$ ou $h \leq 3$ (comme h est supposé > 3 , ce cas ne peut se produire); si $\alpha \geq 3$ il vient :

$$3(h + \alpha) \leq h + 3 + 9 + 6(\alpha - 3) + 6 = h + 6\alpha, \text{ soit}$$

$$2h \leq 3\alpha \text{ ou } 5h \leq 3(h + \alpha) = 9(i - 1) \leq 9([g/2] - 1) \text{ soit comme}$$

$$g \leq h : 5g \leq 9([g/2] - 1) \text{ ce qui est impossible. C.Q.F.D.}$$

Dans le cas $r > 3$ on peut appliquer le même type de démonstration mais les bornes obtenues en 4.5 ne suffisent pas à conclure. Nous allons donner des lemmes précisant un peu les bornes de 4.5 et qui nous permettront de vérifier la conjecture 1.2 pour de nouveaux couples de valeurs.

Lemme 4.7 : $m(g+2, 3, g) = g+7$ si $g \geq 3 = r$.

$m(g+2, r, g) = g+2r$ si $g \geq r \geq 4$.

Démonstration : Si $r = 3$, $m(g+2, 3, g) \leq g+7$ pour $g \geq 3$ d'après 4.5. D'autre part le 1-graphe G formé d'un circuit

(x_1, \dots, x_g) et des arcs (x, y) , (x_1, x) , (x, x_2) , (x, x_3) , (y, x_2) , (y, x_3) , (y, x_4) appartient à $G(g+2, 3, g)$.

Si $g \geq r \geq 4$ on a d'après 4.1 $m(g+2, r, g) \geq g+2r$ et d'après 4.5 $m(g+2, r, g) \leq g+2r+1$. Supposons que G soit un 1-graphe de $G(g+2, r, g)$ avec $g+2r+1$ arcs et soit C un circuit de longueur g de G et x et y les deux autres sommets. D'après 4.4

$|\{\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)\} \cap C| \leq r$ et s'il y a égalité, l'un au moins des deux ensembles $\Gamma^+(x) \cap C$ ou $\Gamma^-(x) \cap C$ est vide. Pour que G ait $g+2r+1$ arcs il faut donc que $|\{\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)\} \cap C| = r$,

$|\{\Gamma^+(y) \cup \Gamma^-(y)\} \cap C| = r$ et qu'il y ait entre x et y un arc par exemple (x, y) . Si $\Gamma^-(x) \cap C = \emptyset$ on aurait $|\Gamma^+(x) \cap C| = r$ et $d^+(x) = r+1$, ce qui est impossible. Donc $\Gamma^+(x) \cap C = \emptyset$, $|\Gamma^-(x) \cap C| = r$ et de la même manière $\Gamma^-(y) \cap C = \emptyset$ et $|\Gamma^+(y) \cap C| = r$. D'autre part $\Gamma^-(x) \cap \Gamma^+(y) = \emptyset$ sinon on aurait un circuit de longueur 3, donc $|\{\Gamma^-(x) \cup \Gamma^+(y)\} \cap C| = 2r$. Mais si $\Gamma^-(x) \cap C \neq \emptyset$ et $\Gamma^+(y) \cap C \neq \emptyset$ on a $|\{\Gamma^-(x) \cup \Gamma^+(y)\} \cap C| \leq 4$,

sinon on créerait avec l'arc (x,y) un circuit de longueur $\leq g$
d'où une contraction car $2r \geq 8 > 4$.

Lemme 4.8 : $m(g + 3, 3, g) = g + 11$ pour $g \geq 3 = r$.

$m(g + 3, r, g) = g + 3r$ pour $g \geq r \geq 4$.

$m(g + 4, r, g) \leq g + 4r + 1$ pour $g \geq r \geq 4$.

La démonstration de ces inégalités utilise les mêmes idées que
4.7, mais il y a de nombreux cas à considérer.

Théorème 4.9 : La conjecture 1.2 est vérifiée pour les couples
 $(4,g)$ avec $5 \leq g \leq 19$ ou $g = 21, 23, 25$ et les couples $(5,g)$,
 $g = 6, 7, 9$.

Démonstration : Comme dans le théorème 4.6 la conjecture sera
prouvée si on montre que l'inégalité suivante est impossible :

$$r^2(i - 1) \leq m(r(i - 1), r, h) + r(r - 1). \text{ Posons } h + \alpha = (i - 1)r$$

il vient $r(h + \alpha) \leq m(h + \alpha, r, h) + r(r - 1)$. D'après 4.4 ; 4.7 ;

4.8 pour $g \geq r \geq 4$ et $\alpha \leq 4$ on a $m(h + \alpha, r, h) \leq h + \alpha r + 1$.

L'inégalité s'écrit $(r - 1) h \leq r(r - 1) + 1$ soit $h > r$ ce qui

est réalisé dès que $g > r$. Pour $g > r$ on a donc $\alpha > 4$ et d'après

4.8 et 4.2 $m(h + \alpha, r, h) \leq h + 4r + 1 + 2r(\alpha - 4)$.

L'inégalité s'écrit alors $(2r - 1) h \leq r(h + \alpha) + r(r - 1) - 4r + 1$.

Compte tenu de $g \leq h$ et $h + \alpha \leq r(\lfloor g/2 \rfloor - 1)$ il vient

$(2r - 1) g \leq r^2 \lfloor g/2 \rfloor - 5r + 1$. Pour $r = 4$ cette inégalité est

impossible si $g \leq 19$ ou $g = 21, 23, 25$ et pour $r = 5$ si $g = 6, 7$ ou

9.

Remarque : On peut par une méthode analogue à celle utilisée dans [1], pour démontrer la conjecture pour $r = 4 = g$, démontrer la conjecture pour $r = 5 \quad g = 4,5$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Behzad, G Chartrand, et C.E. Wall : On minimal regular digraphs with given girth, *Fund Math*, 69 (1970) 227 - 231.
- [2] M. Behzad : Minimal 2-regular digraphs with given girth, *J. Math Soc. Japan*, 25 (1973), 1 - 6.
- [3] M. Behzad : Two unsolved problems in Graph Theory, *Proc. Coll. Keszthely* (1973) à paraître.
- [4] C. Berge : *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.