



HAL
open science

Nombre Chromatique Total Du Graphe R-Parti Complet

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Nombre Chromatique Total Du Graphe R-Parti Complet. Journal of the London Mathematical Society, 1974, s2-9 (2), pp.279-285. 10.1112/jlms/s2-9.2.279 . hal-02366538

HAL Id: hal-02366538

<https://inria.hal.science/hal-02366538>

Submitted on 16 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOMBRE CHROMATIQUE TOTAL DU GRAPHE r -PARTI COMPLET

JEAN-CLAUDE BERMOND

ABSTRACT

In the article [3], R. Laskar and W. Hare pose a conjecture concerning the total chromatic number of the complete r -partite balanced graph $K_{r \times n}$. In this paper we determine the exact value of this number, thus showing that their conjecture applies only in certain cases.

1. Définitions et notations

Dans toute la suite, on considérera des graphes finis, non orientés sans boucles ni arêtes multiples. L'ensemble des sommets sera noté par X , celui des arêtes par E et le graphe $G = (X, E)$.

Un *ensemble indépendant de sommets* d'un graphe $G = (X, E)$ est un sous-ensemble S de X , deux sommets quelconques de S n'étant pas adjacents. Le nombre minimum d'ensembles indépendants dans lequel X peut être partitionné est appelé *nombre chromatique* de G et noté $\chi(G)$.

Un *ensemble indépendant d'arêtes* d'un graphe $G = (X, E)$ est un sous-ensemble A de E , deux arêtes quelconques de A n'étant pas adjacentes (c'est-à-dire n'ayant aucune extrémité en commun). Le nombre minimum d'ensembles indépendants (d'arêtes) dans lequel E peut être partitionné est appelé l'*indice chromatique* de G et noté $q(G)$.

Un *ensemble indépendant de sommets et d'arêtes* d'un graphe $G = (X, E)$ est un sous-ensemble $C = S \cup A$ de $X \cup E$ avec $S \subset X$ et $A \subset E$ vérifiant:

- (i) deux sommets quelconques de S ne sont pas adjacents,
- (ii) deux arêtes quelconques de A ne sont pas adjacentes,
- (iii) un sommet quelconque de S n'est extrémité d'aucune arête de A (on dira qu'un sommet de S et une arête de A ne sont pas adjacents).

Le nombre minimum d'ensembles indépendants de sommets et d'arêtes dans lequel $X \cup E$ peut être partitionné est appelé le *nombre chromatique total* du graphe G et sera noté $t(G)$. (Ce nombre est aussi le nombre chromatique du graphe total $T(G)$ associé à G de la manière suivante: les sommets de $T(G)$ sont les éléments de $X \cup E$, deux sommets de $T(G)$ étant reliés s'ils correspondent à deux sommets adjacents de G , ou deux arêtes adjacentes de G ou une arête et un sommet adjacents.)

Dans la suite, la partition de $X \cup E$ en ensembles indépendants de sommets et d'arêtes sera appelée une *coloration totale* et les ensembles indépendants des *couleurs*.

Un graphe r -parti complet est défini par la donnée de r ensembles 2 à 2 disjoints X_i ($i = 1, 2, \dots, r$); l'ensemble des sommets est $\bigcup_{i=1}^r X_i$, et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils appartiennent à deux ensembles différents X_i et X_j (avec $j \neq i$). Dans la suite nous nous intéresserons aux seuls *graphes r -parti complets*

pour lesquels $|X_i| = n$ pour tout i (appelés *balanced* dans [3]). On notera un tel graphe $K_{r \times n}$. Un sommet de $K_{r \times n}$ sera noté $x_{i,j}$ où i varie de 1 à r et j varie de 1 à n (ceci signifie que c'est le j ième sommet de l'ensemble X_i).

Le nombre de sommets de $K_{r \times n}$ est égal à nr .

Le nombre d'arêtes de $K_{r \times n}$ est égal à $\frac{1}{2}n^2 r(r-1)$.

Remarquons que $K_{r \times 1}$ désigne le *graphe complet* à r sommets et que $K_{2 \times n}$ désigne le *graphe biparti complet*.

2. Résultats

Dans [3] les valeurs de $\chi(K_{r \times n})$ et de $q(K_{r \times n})$ sont déterminées:

$$\chi(K_{r \times n}) = r,$$

$$q(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1 \quad \text{si } nr \text{ est impair,}$$

$$q(K_{r \times n}) = n(r-1) \quad \text{si } nr \text{ est pair.}$$

Dans [1] sont déterminées les valeurs de $t(K_{r \times 1})$ et $t(K_{2 \times n})$:

$$t(K_{r \times 1}) = r \quad \text{si } r \text{ est impair,}$$

$$t(K_{r \times 1}) = r + 1 \quad \text{si } r \text{ est pair,}$$

$$t(K_{2 \times n}) = n + 2.$$

Dans [4] il est prouvé que $t(K_{r \times n}) \leq n(r-1) + 2$.

Dans [3] R. Laskar et W. Hare conjecturaient que

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1 \quad \text{si } nr \text{ est impair,}$$

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 2 \quad \text{si } nr \text{ est pair.}$$

Leur conjecture n'est pas exacte; les valeurs de $t(K_{r \times n})$ sont données par le théorème suivant.

THÉORÈME. *Le nombre chromatique total du graphe r -parti complet $K_{r \times n}$ est donné par:*

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 2 \quad \text{si } r = 2 \text{ ou si } r \text{ est pair avec } n \text{ impair;}$$

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1 \quad \text{si } r \text{ est impair ou si } r \text{ est pair, } r \neq 2, \text{ avec } n \text{ pair.}$$

3. Lemmes

LEMME 1. *Pour $r = 2$, $t(K_{2 \times n}) = n + 2$.*

Ce résultat est établi dans [1]. Si C_i est un ensemble indépendant de sommets et d'arêtes de $K_{2 \times n}$ on a $|C_i| \leq n$. Comme $|X \cup E| = n^2 + 2n$, $t(K_{2 \times n}) \geq n + 2$. On a une coloration totale en $n + 2$ couleurs en attribuant 2 couleurs aux deux ensembles indépendants $C_1 = X_1$ et $C_2 = X_2$ et en répartissant les arêtes en n ensembles indépendants d'après le résultat de König $q(K_{2 \times n}) = n$.

LEMME 2. $t(K_{r \times n}) \geq n(r-1) + 1$.

En effet pour tout graphe G on a $t(G) \geq \delta + 1$ où δ désigne le maximum des degrés.

Ici $K_{r \times n}$ est régulier et $\delta = n(r-1)$.

Les lemmes suivants sont dus à Lucas (voir [2; p. 237]) et donnent l'indice chromatique de $K_{p \times 1}$.

LEMME 3. Si p est impair on peut répartir les paires de nombres appartenant à $1, 2, \dots, p$ en p classes P_i ($i = 1, 2, \dots, p$) formées de $\frac{1}{2}(p-1)$ paires sans élément en commun et telles que l'élément i n'apparaisse dans aucune paire de P_i .

Il suffit de considérer par exemple les classes P_i ainsi définies $P_i = \{i+s, i-s\}$ où $s = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$ (les nombres considérés étant pris modulo p). On notera une paire de la classe P_i (α_i, β_i) avec la convention $1 \leq \alpha_i < \beta_i \leq p$.

LEMME 4. Si p est pair on peut répartir les paires de nombres appartenant à $1, 2, \dots, p$ en $p-1$ classes P'_i ($i = 1, 2, \dots, p-1$) formées de $p/2$ paires sans élément en commun.

Il suffit de considérer les $p-1$ classes P_i définies par le lemme 3, $P'_i = P_i \cup \{i, p\}$. On notera encore une paire de la classe P'_i (α_i, β_i) avec $1 \leq \alpha_i < \beta_i \leq p$.

LEMME 5. Tout ensemble indépendant de sommets S de $K_{r \times n}$ est inclus dans un des ensembles X_i (d'après la définition de $K_{r \times n}$).

LEMME 6. Pour toute coloration de $K_{r \times n}$ en $n(r-1)+1$ couleurs $C_i = S_i \cup A_i$ on a $|S_i| + 2|A_i| = nr$ pour tout i .

En effet soit $C = S \cup A$ un ensemble indépendant de sommets et d'arêtes de $K_{r \times n}$, comme un sommet de X apparaît au plus une fois soit dans S , soit comme extrémité d'une arête de A , on a:

$$|S| + 2|A| \leq |X| = nr.$$

Supposons que l'on ait une coloration totale de $K_{r \times n}$ en t couleurs $C_i = S_i \cup A_i$ ($i = 1, 2, \dots, t$), on a alors $\sum_i |S_i| = |X| = nr$ et $\sum_i |A_i| = |E| = \frac{1}{2}n^2 r(r-1)$ d'où $\sum_i |S_i| + 2|A_i| = nr[n(r-1)+1]$. Or $|S_i| + 2|A_i| \leq nr$, d'où on retrouve le lemme 2, $t(K_{r \times n}) \geq n(r-1)+1$, et aussi que si $t(K_{r \times n}) = n(r-1)+1$ alors $|S_i| + 2|A_i| = nr$ pour tout i .

Le lemme 6 revient à dire que si $t(K_{r \times n}) = n(r-1)+1$, chaque sommet apparaît exactement une fois dans chaque couleur soit comme sommet, soit comme extrémité d'arête. Ce lemme nous sera très utile dans la démonstration du théorème, car il détermine la manière de choisir les couleurs.

4. Démonstration du théorème

Nous décomposerons la démonstration en quatre cas suivant les parités respectives de r et n .

Notations et conventions. Dans la suite les classes obtenues par le lemme 3 ou le lemme 4 seront notées par des R (resp. N) suivant qu'elles sont associées à $p = r$ (resp. n). Rappelons qu'une telle classe est formée (d'après les conventions des lemmes 3 et 4) de couples (α, β) (représentant la paire $\{\alpha, \beta\}$ avec $1 \leq \alpha < \beta \leq p$).

Nous noterons une arête de $K_{r \times n}$ $x_{i,j} x_{i',j'}$ si elle contient les points $x_{i,j}$ et $x_{i',j'}$. Dans les exemples donnés un point sera noté x_{ij} . Enfin, dans l'écriture $x_{i,j}$ d'un

point de $K_{r \times n}$ le premier indice est à considérer modulo r (c'est un entier de $[1, r]$) et le deuxième indice est à considérer modulo n (c'est un entier de $[1, n]$).

Cas 1: r impair, n impair

On va montrer que $t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1$. D'après le lemme 6, nr étant impair, les S_i intervenant dans les couleurs C_i devront être de cardinalité impaire un des choix possibles est de prendre $|S_i| = 1$ pour les $n(r-1)$ premières couleurs et $|S_{n(r-1)+1}| = n$.

Soient R_i ($i = 1, 2, \dots, r$) les r classes obtenues d'après le lemme 3 appliqué à $p = r$ et N_j ($j = 1, 2, \dots, n$) les n classes obtenues d'après le lemme 3 appliqué à $p = n$.

On définit alors les $n(r-1)$ premières couleurs $C_{i,j}$ avec $i = 1, 2, \dots, r-1$, $j = 1, 2, \dots, n$ par $C_{i,j} = S_{i,j} \cup A_{i,j}$ où $S_{i,j} = \{x_{i,j}\}$ et où $A_{i,j} = \{x_{\alpha_i, j} x_{\beta_i, j} \text{ où } (\alpha_i, \beta_i) \in R_i\} \cup \{x_{\lambda, \gamma_j} x_{\lambda+i, \delta_j} \text{ où } \lambda = 1, 2, \dots, r \text{ et où } (\gamma_j, \delta_j) \in N_j\}$.

On définit la $n(r-1) + 1$ couleur par $C = S \cup A$ où $S = X_r$ et où

$$A = \{x_{\alpha_r, j} x_{\beta_r, j} \text{ où } (\alpha_r, \beta_r) \in R_r \text{ et où } j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Les ensembles C considérés sont d'après le lemme 3 des ensembles indépendants de sommets et d'arêtes (en particulier parce que i n'apparaît dans aucune paire de R_i et j n'apparaît dans aucune paire de N_j), qui partitionnent $X \cup E$.

Cas 2: r impair n pair

On va montrer que $t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1$. D'après le lemme 6, nr étant pair, les S_i intervenant dans les couleurs C_i doivent être de cardinalité paire; un des choix possibles est de prendre $S_i = X_i$ pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $S_i = \emptyset$ pour les autres couleurs.

Soient R_i ($i = 1, 2, \dots, r$) les r classes obtenues d'après le lemme 3 appliqué à $p = r$ et N'_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) les $n-1$ classes obtenues d'après le lemme 4 appliqué à $p = n$.

Les r premières couleurs sont définies par $C_i = S_i \cup A_i$ avec $i = 1, 2, \dots, r$ où $S_i = X_i$ et où

$$A_i = \{x_{\alpha_i, j} x_{\beta_i, j} \text{ où } (\alpha_i, \beta_i) \in R_i \text{ et où } j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Les $(n-1)(r-1)$ autres couleurs sont définies par $C_{i,j} = S_{i,j} \cup A_{i,j}$ avec $i = 1, 2, \dots, r-1$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ où $S_{i,j} = \emptyset$ et où

$$A_{i,j} = \{x_{\lambda, \gamma_j} x_{\lambda+i, \delta_j} \text{ où } \lambda = 1, 2, \dots, r \text{ et où } (\gamma_j, \delta_j) \in N'_j\}.$$

D'après les lemmes 3 et 4 ces $r + (n-1)(r-1) = n(r-1) + 1$ ensembles forment bien une coloration totale.

Cas 3: r pair ($\neq 2$), n pair

On va montrer que $t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1$. Comme dans le cas 2, d'après le lemme 6, nr étant pair, les S_i intervenant dans les couleurs C_i devront être de cardinalité paire; un des choix possibles est de prendre $S_i = X_i$ pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $S_i = \emptyset$ pour les autres couleurs.

Pour construire les premières couleurs nous allons définir des classes de paires d'éléments pris parmi $1, 2, \dots, r$: D_i et \bar{D}_i pour $r \neq 2$. Les nombres intervenant dans les classes D_i et \bar{D}_i seront à considérer modulo r .

Cas 3.1: $r = 4s$. D_i est formée des $\frac{1}{2}r - 1$ paires suivantes: $\{i + \lambda, i + 2s - \lambda\}$ où $\lambda = 1, 2, \dots, s - 1$ et $\{i + 2s - 1 + \mu, i + 4s - \mu\}$ où $\mu = 1, 2, \dots, s$. \bar{D}_i est formée des $\frac{1}{2}r - 1$ paires suivantes (obtenues en ajoutant $2i$ au complément modulo r des éléments des paires de D_i):

$\{i + \mu, i + 2s + 1 - \mu\}$ où $\mu = 1, 2, \dots, s$ et $\{i + 2s + \lambda, i + 4s - \lambda\}$ où $\lambda = 1, 2, \dots, s - 1$.

Exemple. $r = 8$ ($s = 2$). $D_1 = \{2, 4\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}$ et $\bar{D}_1 = \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{6, 8\}$.

Cas 3.2: $r = 4s + 2$ ($s > 0$). D_i est formé des $\frac{1}{2}r - 1$ paires suivantes:

$\{i + \lambda, i + 2s + 2 - \lambda\}$ et $\{i + 2s + 1 + \lambda, i + 4s + 2 - \lambda\}$ où $\lambda = 1, 2, \dots, s$.

\bar{D}_i est formée des $\frac{1}{2}r - 1$ paires suivantes:

$\{i + \lambda, i + 2s + 1 - \lambda\}$ et $\{i + 2s + \lambda, i + 4s + 2 - \lambda\}$ où $\lambda = 1, 2, \dots, s$.

Exemple. $r = 10$ ($s = 2$).

$$D_1 = \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{7, 10\}, \{8, 9\},$$

$$\bar{D}_1 = \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{6, 10\}, \{7, 9\}.$$

Propriétés des classes D_i et \bar{D}_i . Dans les deux cas ($r = 4s$ et $r = 4s + 2$) on vérifie aisément que: une classe D_i est formée de paires 2 à 2 disjointes; les entiers de $[1, r]$, sauf $r/2$, apparaissent une fois et une seule comme différence de deux éléments d'une paire D_i (i fixé). Ceci montre qu'une paire de D_i ne peut pas apparaître dans la classe D_j ($j \neq i$) et que si on rajoute la classe D_{r+1} formée des $r/2$ paires $\{i, i + \frac{1}{2}r\}$ où $i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}r$, on obtient alors une *partition des paires d'éléments pris parmi* $1, 2, \dots, r$ en $r + 1$ classes $D_1, \dots, D_i, \dots, D_r, D_{r+1}$. On obtient de même une *autre partition* des paires d'éléments pris parmi $1, 2, \dots, r$ en $r + 1$ classes: $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_i, \dots, \bar{D}_r$ et $\bar{D}_{r+1} = D_{r+1}$.

Enfin la classe D_i ne contient pas les éléments i et d_i où

$$d_i = i + [\frac{1}{4}(r + 2)] \text{ (soit } d_i = i + s \text{ si } r = 4s; d_i = i + s + 1 \text{ si } r = 4s + 2),$$

et la classe \bar{D}_i ne contient pas les éléments i et \bar{d}_i où

$$\bar{d}_i = i - [\frac{1}{4}(r + 2)] \text{ (soit } \bar{d}_i = i + 3s \text{ si } r = 4s; \bar{d}_i = i + 3s + 1 \text{ si } r = 4s + 2).$$

Suivant la convention du début de la démonstration, nous considérerons dans la suite D_i et \bar{D}_i comme des classes de couples (α_i, β_i) (le couple (α_i, β_i) est associé à la paire $\{\alpha_i, \beta_i\}$ avec $1 \leq \alpha_i < \beta_i \leq r$). Nous allons donner une coloration totale de $K_{r \times n}$ en utilisant ces classes D_i et \bar{D}_i pour $i = 1, 2, \dots, r + 1$ et les classes N'_j pour $j = 1, 2, \dots, n - 1$ obtenues d'après le lemme 4 appliqué à $p = n$. Les r premières couleurs seront $C_i = S_i \cup A_i$ avec $i = 1, 2, \dots, r$ où $S_i = X_i$ et où

$$A_i = \{\{x_{\alpha_i, \gamma_1}, x_{\beta_i, \gamma_1}\} \cup \{x_{\bar{\alpha}_i, \delta_1}, x_{\bar{\beta}_i, \delta_1}\} \cup \{x_{d_i, \gamma_1}, x_{\bar{d}_i, \delta_1}\} \text{ où } (\gamma_1, \delta_1) \in N'_1,$$

$$\text{où } (\alpha_i, \beta_i) \in D_i, (\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i) \in \bar{D}_i, d_i = i + [\frac{1}{4}(r + 2)] \text{ et } \bar{d}_i = i - [\frac{1}{4}(r + 2)]\}.$$

La $r + 1$ couleur sera $C_{r+1} = S_{r+1} \cup A_{r+1}$ où $S_{r+1} = \emptyset$ et où

$$A_{r+1} = \{x_{\alpha_{r+1}, j}, x_{\beta_{r+1}, j} \text{ où } (\alpha_{r+1}, \beta_{r+1}) \in D_{r+1} \text{ et où } j = 1, 2, \dots, n\}.$$

D'après les propriétés des classes D_i , les ensembles C_1, \dots, C_{r+1} sont des ensembles indépendants de sommets et d'arêtes qui partitionnent X et les arêtes de la forme $x_{i,j} x_{i',j}$ et celles de la forme $x_{\alpha, \gamma_1} x_{\alpha+\frac{1}{2}r, \delta_1}$ (provenant de $x_{d_i, \gamma_1} x_{\bar{d}_i, \delta_1}$). On partitionne les arêtes restantes de la forme $x_{i, \gamma_1} x_{i', \delta_1}$ dans les $r-2$ couleurs: $C_{i,1} = S_{i,1} \cup A_{i,1}$ avec $i \in [1, r-1]$ et $i \neq r/2$ où $S_{i,1} = \emptyset$ et $A_{i,1} = \{x_{\lambda, \gamma_1} x_{\lambda+i, \delta_1} \text{ où } \lambda = 1, 2, \dots, r \text{ et où } (\gamma_1, \delta_1) \in N'_1\}$.

Enfin les arêtes restantes sont réparties dans les $(n-2)(r-1)$ classes $C_{i,j} = S_{i,j} \cup A_{i,j}$ avec $i = 1, 2, \dots, r-1, j = 2, 3, \dots, n-1$ où $S_{i,j} = \emptyset$ et où $A_{i,j} = \{x_{\lambda, \gamma_j} x_{\lambda+i, \delta_j} \text{ où } \lambda = 1, 2, \dots, r \text{ et où } (\gamma_j, \delta_j) \in N'_j\}$.

On a une coloration totale en $r+1+r-2+(n-2)(r-1) = n(r-1)+1$ couleurs.

Remarque. L'hypothèse $r \neq 2$ est nécessaire dans la construction des classes D_i ; dans ce cas on a vu (lemme 1) que $t(K_{2 \times n}) = n+2$.

Exemple: $r = 4, n = 2, t(K_{4 \times 2}) = 7$.

On a $D_1 = (3, 4) \quad D_2 = (1, 4) \quad D_3 = (1, 2) \quad D_4 = (2, 3) \quad \bar{D}_1 = (2, 3) \quad \bar{D}_2 = (3, 4)$

$\bar{D}_3 = (1, 4) \quad \bar{D}_4 = (1, 2); \quad D_5 = \bar{D}_5 = \{(1, 3); (2, 4)\}$ et $N'_1 = \{1, 2\}$

$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad d_3 = 4, \quad d_4 = 1; \quad \bar{d}_1 = 4 \quad \bar{d}_2 = 1 \quad \bar{d}_3 = 2 \quad \bar{d}_4 = 3;$

$C_1 : S_1 = X_1 = \{x_{11}; x_{12}\} \quad A_1 = \{x_{31} x_{41}; x_{22} x_{32}; x_{21} x_{42}\}$

$C_2 : S_2 = X_2 = \{x_{21}; x_{22}\} \quad A_2 = \{x_{11} x_{41}; x_{32} x_{42}; x_{31} x_{12}\}$

$C_3 : S_3 = X_3 = \{x_{31}; x_{32}\} \quad A_3 = \{x_{11} x_{21}; x_{12} x_{42}; x_{41} x_{22}\}$

$C_4 : S_4 = X_4 = \{x_{41}; x_{42}\} \quad A_4 = \{x_{21} x_{31}; x_{12} x_{22}; x_{11} x_{32}\}$

$C_5 : S_5 = \emptyset \quad A_5 = \{x_{11} x_{31}; x_{21} x_{41}; x_{12} x_{32}; x_{22} x_{42}\}$

$C_{11} : S_{11} = \emptyset \quad A_{11} = \{x_{11} x_{22}; x_{21} x_{32}; x_{31} x_{42}; x_{41} x_{12}\}$

$C_{31} : S_{31} = \emptyset \quad A_{31} = \{x_{11} x_{42}; x_{21} x_{12}; x_{31} x_{22}; x_{41} x_{32}\}.$

Cas 4: r pair, n impair

On va montrer que $t(K_{r \times n}) > n(r-1)+1$. Supposons que dans ce cas $t(K_{r \times n}) = n(r-1)+1$, alors d'après le lemme 6, nr étant pair, $|S_i|$ doit être pair pour tout i . D'après le lemme 5, S_i est inclus dans un X_k ; considérons l'ensemble des S_i inclus dans un X_k donné, ils forment d'après la définition d'une coloration totale une partition de X_k , mais ceci est impossible car $|X_k|$ est impair et $|S_i|$ est pair pour tout i . Donc

$$t(K_{r \times n}) > n(r-1)+1.$$

D'après le résultat de Rosenfeld [4] on a $t(K_{r \times n}) \leq n(r-1)+2$ donc

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1)+2.$$

On peut aussi en utilisant des classes déduites des R'_i et les classes N'_j exhiber directement une coloration en $n(r-1)+2$ couleurs.

References

1. M. Behzad, G. Chartrand et J. K. Cooper, "The colour numbers of complete graphs", *J. London Math. Soc.*, 42 (1967), 226–228.
2. C. Berge, *Graphes et hypergraphes* (Dunod, Paris, 1970).
3. R. Laskar et W. Hare, "Chromatic numbers for certain graphs", *J. London Math. Soc.*, 4 (1972), 489–492.
4. M. Rosenfeld, "On the total coloring of certain graphs", *Israël J. Math.*, 9 (1971), 396–402.

CMS–EPHE, 54 bd. Raspail,
75 270 Paris–Cedex 06,
France.