



**HAL**  
open science

# Couverture des arêtes d'un graphe par des graphes bipartis complets

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Couverture des arêtes d'un graphe par des graphes bipartis complets. [Rapport de recherche] 10, LRI - CNRS, University Paris-Sud. 1978, pp.1-3. hal-02346309

**HAL Id: hal-02346309**

**<https://inria.hal.science/hal-02346309>**

Submitted on 5 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COUVERTURE DES ARETES D'UN GRAPHE PAR DES GRAPHS  
BIPARTIS COMPLETS

BY  
J.C. BERMOND

JUIN 1978

*Rapport de Recherche n° 10*

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S. n° 452

"AL KHOWARIZMI"

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE, Bât. 490  
*Université de Paris-Sud - Centre d'Orsay - 91405 ORSAY*

Université de Paris-Sud  
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

# COUVERTURE DES ARETES D'UN GRAPHE PAR DES GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

J.C. BERMOND

Notations. On désigne par  $b(G)$  le nombre minimum de graphes bipartis complets couvrant les arêtes du graphe  $G$ ,

$$b(n) = \max_G b(G) \quad \text{où } G \text{ est un graphe à } n \text{ sommets.}$$

Problème : Que peut-on dire de  $b(n)$  ? Ce problème est posé par RIVEST et BLONIAZ qui conjecturaient que  $b(n) \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ .

Les propositions suivantes sont immédiates.

Proposition 1 :  $b(n) \leq n-1$

Proposition 2 :  $b(n) \leq b(n+1) \leq b(n)+1$

Proposition 3 : si  $G$  est formé de 2 graphes sommet-disjoints  $G_1$  et  $G_2$ , reliés entre eux par au plus une arête alors  $b(G) \geq b(G_1)+b(G_2)$

Corollaire 4 :  $b(n) \geq b(n_1) + b(n_2)$  avec  $n_1+n_2=n$

Corollaire 5 : si  $b(n) \geq \alpha(n)$  alors  $b(kn) \geq \alpha kn$ . En particulier si  $b(n_0) = \alpha n_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)/n \geq \alpha$ .

Proposition 6 : pour  $n \leq 10$ ,  $b(n)$  est donné par le tableau ci-dessous

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b(n)	1	2	2	3	4	5	5	6	7

Pour  $n=5,6,7$  les graphes extrémaux (vérifiant  $b(G) = b(n)$ ) sont donnés en Fig. 1

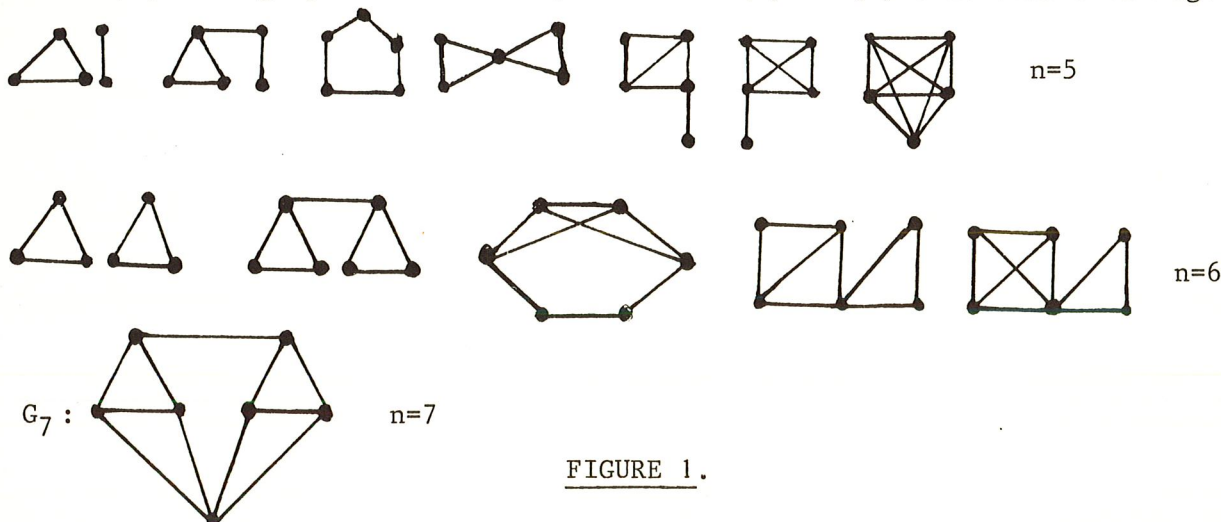


FIGURE 1.

Preuve : Pour  $n \leq 6$  on obtient le résultat par examen de tous les cas. Pour  $n=7$ , un graphe  $G$  vérifiant  $b(G)=5$  doit satisfaire pour tout sommet  $x$ ,  $b(G-x)=4$ . Un seul graphe convient c'est  $G_7$  (voir Fig. 1) ; on vérifie aisément que pour ce graphe  $b(G)=5$ .

Pour  $n=8$ , s'il existait un graphe à 8 sommets vérifiant  $b(G)=6$ , on devrait avoir  $G-x$  isomorphe à  $G_7$  pour tout sommet  $x$  et  $d(x) \geq 4$  (voir démonstration de la proposition 10) ; un tel graphe ne peut pas exister. On a d'après la proposition 2,  $b(9) \leq 6$ ,  $b(10) \leq 7$  et d'après le corollaire 4  $b(9) \geq b(6)+b(3)=6$   $b(10) \geq b(7)+b(3)=7$ .

Remarque 7 : la valeur de  $b(7)$  montre d'après le corollaire 5 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)/n \geq 5/7$  infirmant ainsi la conjecture de Rivest.

Ceci m'a amené à formuler la conjecture  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)/n=1$ . En fait la conjecture est vraie.

Théorème 8 : (Chung [ 1 ], Chvátal, Erdős [ 2 ]) :  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)/n=1$ .

Chvatal (communication personnelle à Rivest) a remarqué qu'Erdős [2] a prouvé que pour  $n$  assez grand, il existe un graphe  $G$  à  $n$  sommets tel que

- (1)  $G$  ne contienne pas de  $C_4$  (cycle de longueur 4) ou encore  $K_{2,2}$
- (2) tout ensemble stable (ou indépendant) de  $G$  a au plus  $n^{1-\eta}$  sommets avec  $0 < \eta < 1/8$ .

Ceci implique que tout graphe biparti complet de la couverture est une étoile et (2) qu'il faut au moins  $n \cdot n^{1-\eta}$  telles étoiles. Donc  $b(n) \geq n \cdot n^{7/8+\epsilon}$

Chung [ 1 ] a prouvé que pour  $n=q^2+q+1$ ,  $q$  puissance de premier,  $b(n) \geq n^{3/4}$  et que pour  $n$  assez grand  $b(n) > n \cdot n^{19/24+\epsilon}$ .

Proposition 9 : (Harary, Hsu, Miller [ 3 ]) :  $b(K_n) = \lceil \log_2 n \rceil$ .

Preuve : Pour  $K_n$ ,  $b(K_n) = \beta(K_n)$  ou  $\beta(G)$  est le nombre minimum de graphes bipartis (pas forcément complets) nécessaires pour couvrir les arêtes de  $G$ . On peut donner une démonstration directe en remarquant que (i)  $b(K_{2n+1}) \geq b(K_{n+1}) + 1$  et donc  $b(K_n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$ . D'autre part  $K_{2^k}$  peut être recouvert par  $k$  graphes bipartis complets (en utilisant une numérotation binaire des sommets).

Proposition 10 : pour  $n \geq 3^{k-1} + 1$ ,  $b(n) \leq n - k$ .

Preuve : Posons  $u_k = 3^{k-1} + 1$ , on a  $u_k = 1 + 3(u_{k-1} - 1)$ . On montre la proposition par induction sur  $k$ , elle est vraie pour  $k=1$  et  $k=2$ . Supposons-la vraie pour  $k-1$ . Notons par  $\Gamma(x)$  l'ensemble des voisins de  $x$ .

i) il existe un sommet  $x$  avec  $d(x) < n - u_{k-1}$  ( $d(x)$  dénote le degré de  $x$ ). On peut alors recouvrir  $G$ , par les étoiles associées aux sommets  $y$  avec  $y$  voisin de  $x$  et par les  $n - d(x) - k$  graphes bipartis complets recouvrant le graphe engendré par  $\overline{\Gamma(x)} = (X - \Gamma(x) - \{x\})$  par l'hypothèse d'induction, ce graphe ayant plus de  $u_{k-1}$  sommets, soit tout  $n - k$  graphes.

ii) donc  $d(x) \geq n - u_{k-1}$  pour tout sommet  $x$ .  $G$  étant différent de  $K_n$  (sinon c'est évident d'après la proposition 9), soient  $x$  et  $y$  deux sommets non reliés. On a  $|\overline{\Gamma(x)}| \leq u_{k-1} - 1$  et  $|\overline{\Gamma(y)}| \leq u_{k-1} - 1$ . Donc  $|\{\Gamma(x) \cup \Gamma(y)\} - \{x\} - \{y\}| \leq 2u_{k-1} - 4$  et  $|\{\Gamma(x) \cap \Gamma(y)\}| \geq n + 2 - 2u_{k-1}$ .

Mais  $n \geq u_k = 1 + 3(u_{k-1} - 1)$  et donc  $|\{\Gamma(x) \cap \Gamma(y)\}| \geq u_{k-1}$ .

On peut alors recouvrir les arêtes de  $G$  par :

- le graphe biparti complet :  $\{\{x, y\} ; \{\Gamma(x) \cap \Gamma(y)\}\}$
- les étoiles associées aux sommets  $Z$  avec  $z \in \{\overline{\Gamma(x)} \cup \overline{\Gamma(y)}\} - \{x\} - \{y\}$
- les  $|\{\Gamma(x) \cap \Gamma(y)\} - (k-1)$  graphes bipartis complets recouvrant le sous graphe engendré par  $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$  d'après l'hypothèse d'induction, soit en tout  $n - k$  graphes.

Remarque : Il semble que l'on ait  $b(n) \leq n - k$  pour  $n \geq 2^k$ .

-----  
REFERENCES

- [1] F.R.K. CHUNG : On covering of graphs, manuscript.
- [2] P. ERDÖS : Graph theory and Probability, Canadian J. Math. 11, 1959, 34-38.
- [3] F. HARARY, D. HSU et Z. MILLER : The biparticity of a graph, J. Graph Theory 1, 1977, 131-133.