



HAL
open science

Indice chromatique de produits de graphes

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann. Indice chromatique de produits de graphes. Colloque Algèbre appliquée et Combinatoire, 1978, Grenoble, France. pp.106-108. hal-02340658

HAL Id: hal-02340658

<https://inria.hal.science/hal-02340658>

Submitted on 30 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INDICE CHROMATIQUE DE PRODUITS DE GRAPHS

J. -C. BERMOND, A. GERMA, M. -C. HEYDEMANN*

Résumé :

Nous étudions l'indice chromatique de divers produits de graphes réguliers, en particulier nous étudions le cas où cet indice est égal au degré du produit.

Abstract :

We study the chromatic index (edge - coloring number) of some products of regular graphs ; in particular we study the case where this number is equal to the degree of the product.

0. Remarque préliminaire :

Le résultat nouveau (Théorème 3.3) que nous prouvons, nous avait demandé une démonstration assez compliquée ; en particulier il nécessitait des théorèmes sur l'existence de 2 facteurs ($\{2\}$). Lors des journées de Grenoble, une conversation avec J. -L. Fouquet et J. -L. Jolivet, que nous remercions, nous a montré que ce résultat était en fait un corollaire immédiat du théorème de Koenig-Hall. L'intérêt de ce qui suit, réside donc dans les résultats et conjectures de Kotzig (non publiées) et dans les conjectures que nous proposons.

*Université de Paris-Sud, Laboratoire de Recherche en Informatique, Bât. 490

1. Introduction :

Les définitions sont celles de [1].

1.1 Indice chromatique d'un multigraphe G : c'est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de G de façon que deux arêtes adjacentes aient des couleurs différentes. On le note $q(G)$.

1.2 Un graphe régulier G est dit 1-factorisable si et seulement si il existe une partition de ses arêtes en couplages parfaits ou de manière équivalente si $q(G) = \Delta(G)$ où $\Delta(G)$ est le degré du graphe G.

Dans ce qui suit nous donnons des conditions suffisantes pour que le produit de deux graphes réguliers soit 1-factorisable (en particulier dans le cas de la somme cartésienne et du produit cartésien).

2. Somme cartésienne :

Les graphes considérés sont simples, sans boucles, ni arêtes multiples. Les résultats et conjectures sont dûs essentiellement à Kotzig [4]. Nous les avons connus (ainsi que les démonstrations) par des notes de cours de U.F.R. Murty [5].

2.1 Définition : Soient $G=(X,E)$ et $H=(Y,F)$ deux graphes ; on appelle somme cartésienne de G et H, notée $G+H$, le graphe $K=(Z,D)$ avec $Z=X \times Y$ et

$$\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)\} \in D \iff \begin{array}{l} x_1 = x_2 \text{ et } \{y_1, y_2\} \in F \\ \text{ou } y_1 = y_2 \text{ et } \{x_1, x_2\} \in E \end{array}$$

La somme cartésienne de 2 graphes réguliers de degré Δ_1 et Δ_2 est un graphe régulier de degré $\Delta_1 + \Delta_2$.

2.2 Théorème : Si G est un graphe régulier de degré $\Delta(G)$ alors

$$q(G+K_2) = \Delta(G+K_2) = \Delta(G) + 1$$

Ce théorème est dû à P.E. Himmelwright et J.E. Williamson [3] et a été redémontré par Kotzig [4].

2.3 Corollaires : Si G est 1-factorisable et H régulier, $G+H$ est 1-factorisable. Si G et H sont réguliers et admettent chacun un couplage parfait, alors $G+H$ est 1-factorisable.

2.4 Théorème (Kotzig): Si G est cubique et C_n dénote le cycle de longueur n, $G+C_n$ est 1-factorisable pour $n \geq 4$.

2.5 Conjecture (Kotzig) : Si G est cubique sans isthme alors $G+C_3$ est 1-factorisable.

Si G est cubique avec 1 isthme alors $G+C_3$ n'est pas 1-factorisable.

2.6 Conjecture (Kotzig): La somme cartésienne de deux graphes cubiques est 1-factorisable.

2.7 D'une manière générale on peut étudier le problème pour la somme cartésienne

deux graphes réguliers de degré quelconque.

3. Produit cartésien :

Dans ce paragraphe nous considérons des multigraphes sans boucles.

3.1 Définition : Soient $G=(X,E)$ et $H=(Y,F)$ deux multigraphes. On appelle produit cartésien de G et H et on note $G \times H$ le multigraphe $K=(Z,D)$ avec $Z=X \times Y$ et $m_K((x_1,y_1)(x_2,y_2)) = m_G(x_1,x_2) \times m_H(y_1,y_2)$, où $m_G(x,y)$ désigne le nombre d'arêtes de G d'extrémités x et y .

Le produit cartésien de deux multigraphes réguliers est régulier et a pour degré le produit des degrés des multigraphes.

3.2 Exemples : $C_{2p} \times K_2$ est isomorphe à l'union sommet-disjointe de deux C_{2p} .
 $C_{2p+1} \times K_2$ est isomorphe à C_{4p+2} .

3.3 Théorème : Si G est un multigraphe régulier, $G \times K_2$ est 1-factorisable.

Preuve : $G \times K_2$ est un multigraphe régulier biparti ; d'après le théorème de Koenig Hall [1, p. 130] un multigraphe régulier biparti admet un couplage parfait et est donc 1-factorisable.

3.4 Corollaire : Si G est 1-factorisable et H régulier $G \times H$ est 1-factorisable.

3.5 Conjecture : Si G et H sont deux multigraphes réguliers et si $G \times H$ est 1-factorisable. *d'ordre pair alors $G \times H$ est 1-factorisable.*

3.6 Remarque : On peut aussi considérer d'autres produits. On a immédiatement par application de 2.2 et 3.3 que le produit fort d'un graphe régulier par K_2 est 1-factorisable (le produit fort de G et H est l'union de $G+H$ et de $G \times H$)
Le produit lexicographique a été partiellement étudié par P.E. Himmelwright et J. Williamson dans une première version de [3] non publiée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE C. "Théorie des graphes et hypergraphes"
Dunod, 1971.
- [2] BERMOND J.C. et LAS VERGNAS M. "Factors in almost regular graphs"
à paraître.
- [3] HIMMELWRIGHT P.E. et WILLIAMSON J.E. "On 1-factorability and edge colorability of cartesian product of graphs"
Elemente der Mathematik, 29, 1974, 66-67.
- [4] KOTZIG A. "Chosen open problems in graph theory"
Manuscript, C.R. Montréal, Août 1977.
- [5] MURTY U.S.R "Kotzigian products, notes de cours à l'Université de Waterloo" 1978.