Comparaison des puissances de graphes

Jean-Claude Bermond, Anton Marczyk

THÉORIE DES GRAPHES. — *Comparaison des puissances de graphes.*

Note (*) de **Jean-Claude Bermond** et **Anton Marczyk,** transmise par Robert Fortet.

Nous notons par G^k, la puissance k-ième d'un graphe G, c'est-à-dire le graphe ayant même ensemble de sommets que G et tel que deux sommets sont reliés dans G^k si leur distance dans G est inférieure ou égale à k. Nous noterons par $\mathscr{G}_k$ la classe des graphes qui sontdes puissances k-ième d'un graphe. Nous montrons que $\mathscr{G}_p \subset \mathscr{G}_k$ si et seulement si p est un multiple de k, répondant ainsi à un problème de P. Duchet.

Let G^k denote the kth power of the graph G; that is the graph with the same vertex set as G, two vertices being joined in G^k if their distance is less than, or equal to k. Let $\mathscr{G}_k$ be the set of graphs which are the kth power of a graph. We prove that $\mathscr{G}_p \subset \mathscr{G}_k$ if and only if p is a multiple of k, thus answering a problem of P. Duchet.

Les notations sont celles de ([1]). Soit G un graphe simple. La puissance k-ième de G, notée G^k, est le graphe ayant même ensemble de sommets que G tel que deux sommets x et y sont reliés dans G^k si et seulement si leur distance $d(x, y)$ vérifie $d(x, y) \leqq k$. Nous appellerons $\mathscr{G}_k$ la classe des graphes qui sont des puissances k-ième de graphes : $\mathscr{G}_k = \{H$, il existe G tel que $H = G^k\}$. Dans ([3]) il est montré qu'on ne peut pas caractériser $\mathscr{G}_k$ par sous-graphes exclus et une caractérisation en termes de cliques est donnée (caractérisation aussi compliquée à vérifier que la définition). P. Duchet ([2]) a posé le problème d'obtenir une bonne caractérisation de $\mathscr{G}_k$ et en particulier il demandait si les classes $\mathscr{G}_p$ et $\mathscr{G}_k$ étaient comparables pour l'inclusion. Nous prouvons ici que :

THÉORÈME. — *$\mathscr{G}_p \subset \mathscr{G}_k$ si et seulement si p est un multiple de k.*

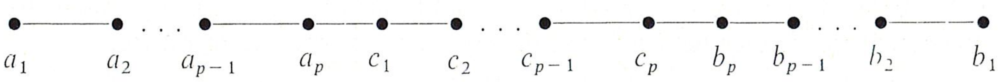
Démonstration. — Il est immédiat que si $p = mk$, m entier, alors $\mathscr{G}_{mk} \subset \mathscr{G}_k$. Pour démontrer que la condition est nécessaire, nous distinguons 2 cas.

Cas 1 : $p < k$. Dans ce cas $\mathscr{G}_p \not\subset \mathscr{G}_k$. En effet, considérons le graphe complet à $p+2$ sommets, moins une arête. Ce graphe appartient à $\mathscr{G}_p$, car c'est $(P_{p+2})^p$ où P_{p+2} est la chaîne à $p+2$ sommets. Il ne peut appartenir à $\mathscr{G}_{p+h}$ avec $h \geqq 1$, car tout graphe à $p+2$ sommets a une puissance $(p+h)$-ième qui est le graphe complet.

Cas 2 : *$p > k$, p non multiple de k.* Nous allons montrer qu'alors la chaîne P_{3p}, ayant $3p$ sommets, vérifie $(P_{3p})^p \notin \mathscr{G}_k$ ce qui prouvera le théorème. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un graphe G tel que $G^k = (P_{3p})^p$.

1. Nous noterons *les sommets* de la chaîne et donc ceux de G : $a_1, a_2, \ldots, a_p, c_1, c_2, \ldots, c_p, b_p, b_{p-1}, \ldots, b_1$ dans l'ordre où on les rencontre sur la chaîne.

P_{3p} :



Posons $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$.

2. Remarquons que dans $G^k = (P_{3p})^p$ le sommet a_i est relié à tous les autres sommets de A et aux sommets c_j de C, tels que $j \leqq i$; de même b_i est relié à tous les autres sommets de B et aux sommets c_j de B, tels que $j \geqq p-i+1$.

3. Enfin nous noterons par $d(x, y)$ *la distance dans* G du sommet x au sommet y et par $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$ la distance dans G du sommet x à l'ensemble Y. Posons pour $1 < \alpha \leqq k$,

$$C_\alpha = \{c \in C \mid d(c, A) = \alpha\} \quad \text{et} \quad C'_\alpha = \{c \in C \mid d(c, B) = \alpha\}.$$

D'après la remarque 2 ci-dessus, les ensembles C_α (respectivement C'_α), $1 \leqslant \alpha \leqq k$ sont non vides et forment une partition de C. D'autre part $C'_1 \subset C_k$ (respectivement $C_1 \subset C'_k$), sinon il existerait un sommet de A à distance inférieure ou égale à k d'un sommet B et ces deux sommets seraient reliés dans G^k ce qui est impossible.

4. On peut supposer par raison de symétrie $|C_1| \leqq |C_k|$; en effet si $|C_1| > |C_k|$ on aurait $|C'_k| > |C'_1|$ et il suffirait de raisonner avec les ensembles C'_α.

5. Dénotons par $\mu_i (1 \leqq i \leqq p)$ *une des chaînes de longueur minimale joignant* a_i et c_i. Cette chaîne est de longueur inférieure ou égale à k (car a_i et c_i sont reliées dans G^k). De plus si $c_i \in C_k$, μ_i est de longueur k exactement.

6. Si $c_i \in C_k$ et $c_j \in C_k, j \neq i$, alors μ_i et μ_j sont *deux chaînes dont les sommets sont disjoints*. En effet, supposons qu'il existe un sommet c appartenant à μ_i et μ_j. On a $d(c, c_i) = d(c, c_j)$ car μ_i et μ_j sont de même longueur k d'après 5. Donc $d(a_i, c_j) = d(a_i, c_i) = k = d(a_j, c_j) = d(a_j, c_i)$. Donc a_i et c_j sont reliés dans G^k ainsi que a_j et c_i, ce qui contredit le fait que le sommet a_i est relié aux seuls sommets c_j avec $j \leqq i$ (*voir* 2).

7. Donc $|C_\alpha| \geqq |C_k|$ pour $1 \leqq \alpha \leqq k$ et d'après 4 on a $|C_1| = |C_k|$. De plus comme p n'est pas multiple de k, *il existe un entier* β, $2 \leqq \beta \leqq k-1$, tel que $|C_\beta| > |C_k|$ et $|C_{\beta+1}| = |C_{\beta+2}| = \ldots = |C_k|$.

8. Pour un sommet c_i de C, notons par c_{i_1} le premier sommet de la chaîne μ_i (*voir* 5) appartenant à C. Par définition c_{i_1} appartient à C_1. De plus *notons par* ν_i *la portion de la chaîne* μ_i *reliant* c_{i_1} à c_i. Si $c_i \in C_\alpha$ la chaîne ν_i comprend au moins α sommets (d'après la définition de C_α) et au plus k sommets (d'après 5) soit $\alpha \leqq |\nu_i| \leqq k$.

9. D'après 7, $C_\beta \cup C_{\beta+1} \cup \ldots \cup C_k$ comprend au moins $(k-\beta+1)|C_k|+1$ sommets et il existe donc un entier γ, $\beta \leqq \gamma \leqq k$, tel qu'il existe $|C_k|+1$ sommets c_i vérifiant $|\nu_i| = \gamma$. Considérons les $|C_k|+1$ sommets c_{i_1} origines des chaînes ν_i associées aux $|C_k|+1$ sommets ci-dessus. Comme ils appartiennent tous à C_1 et que d'après 7, $|C_1| = |C_k|$, deux de ces sommets sont confondus, soit c_{r_1} et c_{s_1}. On a alors

$$d(a_r, c_r) = d(a_r, c_{r_1}) + d(c_{r_1}, c_r) = d(a_r, c_{r_1}) + \gamma,$$
$$d(a_r, c_s) \leqq d(a_r, c_{s_1}) + d(c_{s_1}, c_s) = d(a_r, c_{s_1}) + \gamma$$

et donc $d(a_r, c_s) \leqq d(a_r, c_r)$ donc a_r et c_s sont reliés dans G^k et d'après 2, $s < r$. Mais on a de même $d(a_s, c_r) \leqq d(a_s, c_s)$ et donc $r < s$ d'où la contradiction. □

Remarques. — Dans le cas $p > k$, p non multiple de k, le contre exemple trouvé n'a certainement pas le plus petit nombre de sommets. On peut montrer que :

PROPOSITION 1. — $(P_{2p+1})^p \notin \mathcal{G}_k$ *pour* $k < p < 2k$;

PROPOSITION 2. — $(P_{12})^5 \notin \mathcal{G}_2$;

PROPOSITION 3. — $(P_q)^p \in \mathcal{G}_2$ *pour* $q \leqq 2p+1$;

PROPOSITION 4. — $(P_q)^p \in \mathcal{G}_k$ *pour* $q \leqslant p+k+1 < 2p+1$.

Il serait intéressant de déterminer, pour $p > k$, p non multiple de k, *la valeur* $f(p, k)$ définie comme le plus petit q tel que $(P_q)^p \notin \mathcal{G}_k$. Dans le cas où $k < p < 2k$ la proposition 1 montre que $f(p, k) \leqslant 2p+1$.

Nous conjecturons que pour $p>5$, p impair, $f(p, 2)=2p+2$ (la proposition 3 montre que $f(p, 2) \geqq 2p+2$ et pour $p=5$ la proposition 2 montre qu'il y a égalité). Dans le cas $k>2$, $p>k$, p non multiple de k nous conjecturons que $f(p, k)=2p+1$.

(*) Séance du 27 novembre 1978, retournée par l'auteur à l'imprimerie le 22 janvier 1979.

(1) C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1973.
(2) P. Duchet, *Séminaire*, Paris, mai 1977.
(3) F. Escalante, L. Montejano et T. Rojano, *J. Comb. Theory*, (B), 16, 1974, p. 282-289.

J. C. B. : *Laboratoire d'Informatique*, bât. n° 490,
Université de Paris-Sud, 91405 *Orsay*;
A. M. : *Institut de Mathématiques*,
Académie des Mines et Métallurgie, 30-059 *Krakow*, *Pologne*.