



HAL
open science

Intersection de deux cercles dans le plan.

Denis Roegel

► **To cite this version:**

Denis Roegel. Intersection de deux cercles dans le plan.. [Rapport de recherche] LORIA - Université de Lorraine. 2001. hal-02340537

HAL Id: hal-02340537

<https://inria.hal.science/hal-02340537>

Submitted on 30 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intersection de deux cercles dans le plan

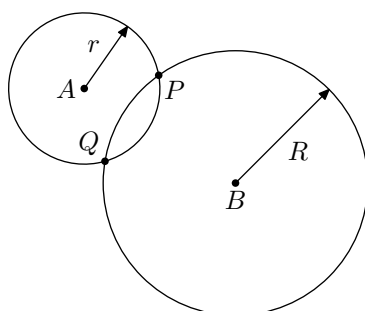
D. Roegel

17 décembre 2001

Résumé

Cette note donne des indications sur le calcul de l'intersection de deux cercles dans le plan, en prenant pour hypothèse que l'intersection existe. Je l'avais initialement rédigée pour des étudiants, mais il s'est avéré qu'ils n'en avaient pas besoin. Ce document peut facilement être généralisé pour traiter les cas d'une intersection unique ou de l'absence d'intersection.

1 Le problème



Il s'agit en général de déterminer les deux points P et Q connaissant les centres A , B et les deux rayons r et R . Il n'y a pas toujours deux intersections, mais dans notre cas il en sera toujours ainsi.

2 Une solution

On note (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées de A et B . Des équations des deux cercles sont donc :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = R^2 \quad (2)$$

Pour P et Q , les deux équations sont vraies simultanément. On a donc

$$x^2 + y^2 - 2xx_A - 2yy_A + x_A^2 + y_A^2 = r^2 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_B - 2yy_B + x_B^2 + y_B^2 = R^2 \quad (4)$$

Pour simplifier, on va commencer par supposer que $(x_A, y_A) = (0, 0)$. Les solutions correctes dans le cas où $(x_A, y_A) \neq (0, 0)$ pourront facilement être trouvées à la fin.

Les formules précédentes deviennent donc :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_B - 2yy_B + x_B^2 + y_B^2 = R^2 \quad (6)$$

Nous avons alors par simple substitution :

$$r^2 - 2xx_B - 2yy_B + x_B^2 + y_B^2 = R^2 \quad (7)$$

soit

$$2xx_B + 2yy_B = x_B^2 + y_B^2 - R^2 + r^2 \quad (8)$$

Posons $a = 2x_B$, $b = 2y_B$ et $c = x_B^2 + y_B^2 - R^2 + r^2$, nous avons alors

$$ax + by = c \quad (9)$$

qui est l'équation d'une droite. C'est la droite sur laquelle se trouvent les points P et Q . Nous pouvons maintenant réinjecter ce résultat dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$:

$$by = c - ax \quad (10)$$

$$b^2y^2 = c^2 + a^2x^2 - 2acx \quad (11)$$

$$b^2(r^2 - x^2) = c^2 + a^2x^2 - 2acx \quad (12)$$

$$b^2r^2 - c^2 = (a^2 + b^2)x^2 - 2acx \quad (13)$$

d'où l'équation du second degré :

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2acx + c^2 - b^2r^2 = 0 \quad (14)$$

On pose $\Delta = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2)$.

Si $\Delta > 0$, ce que l'on suppose (sinon il n'y a pas d'intersection), on obtient (puisque $a^2 + b^2 > 0$) :

$$x = \frac{2ac \pm \sqrt{\Delta}}{2(a^2 + b^2)} \quad (15)$$

L'équation précédente nous donne x_P et x_Q , mais pour obtenir y_P et y_Q , il faut distinguer deux cas :

1. si $y_B \neq 0$, alors $b \neq 0$ et $ax + by = c$ nous donne immédiatement :

$$y_P = \frac{c - ax_P}{b} \quad (16)$$

$$y_Q = \frac{c - ax_Q}{b} \quad (17)$$

2. si $y_B = 0$, on a $ax = c$ et les deux points P et Q sont sur une droite verticale d'équation $x = c/a$; en utilisant l'équation du cercle de centre B , il vient :

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2 \quad (18)$$

$$\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2 \quad (19)$$

$$y - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2} \quad (20)$$

$$y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2} \quad (21)$$

3 Résumé

On se donne (x_A, y_A) et (x_B, y_B) , ainsi que r et R . Si on suppose $(x_A, y_A) = (0, 0)$, on a la procédure suivante :

1. on pose $a = 2x_B$, $b = 2y_B$ et $c = x_B^2 + y_B^2 - R^2 + r^2$;
2. on pose $\Delta = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2)$;
3. $x_P = \frac{2ac - \sqrt{\Delta}}{2(a^2 + b^2)}$;
4. $x_Q = \frac{2ac + \sqrt{\Delta}}{2(a^2 + b^2)}$;
5. si $b \neq 0$, on a $y_P = \frac{c - ax_P}{b}$ et $y_Q = \frac{c - ax_Q}{b}$;
6. si $b = 0$, on a $x_P = x_Q$ et $y_P = \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2}$ et $y_Q = \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2}$.

Pour adapter ces formules au cas général où (x_A, y_A) est quelconque, il suffit de retrancher x_A à tous les $x...$ et y_A à tous les $y...$, ce qui donne la nouvelle procédure :

1. on pose $a = 2(x_B - x_A)$, $b = 2(y_B - y_A)$ et $c = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - R^2 + r^2$;
2. on pose $\Delta = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2)$;
3. $x_P = x_A + \frac{2ac - \sqrt{\Delta}}{2(a^2 + b^2)}$;
4. $x_Q = x_A + \frac{2ac + \sqrt{\Delta}}{2(a^2 + b^2)}$;
5. si $b \neq 0$, on a $y_P = y_A + \frac{c - a(x_P - x_A)}{b}$ et $y_Q = y_A + \frac{c - a(x_Q - x_A)}{b}$;
6. si $b = 0$, on a $x_P = x_Q$ et $y_P = y_A + \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2}$ et $y_Q = y_A + \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2}$.

Note : ce qui précède n'a pas été testé et il peut y avoir des erreurs.