



**HAL**  
open science

## Chiralités et exponentielles: un peu de différentiation

Esaïe Bauer, Marie Kerjean

► **To cite this version:**

Esaïe Bauer, Marie Kerjean. Chiralités et exponentielles: un peu de différentiation. 2019. hal-02320704v1

**HAL Id: hal-02320704**

**<https://inria.hal.science/hal-02320704v1>**

Preprint submitted on 19 Oct 2019 (v1), last revised 4 Dec 2019 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Chiralités et exponentielles: un peu de différentiation

Esaïe Bauer<sup>1</sup> and Marie Kerjean<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ENS Lyon

<sup>2</sup> LS2N et Inria, Équipe Gallinette

## Résumé

Nous donnons une sémantique catégorique à la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée. Cette axiomatique donne un cadre à des modèles polarisés précédemment mis à jour dans les espaces vectoriels topologiques. Elle s'appuie sur la notion de chiralités et les modèles non-polarisés de la logique linéaire différentielle munis d'un biproduit.

## 1 Introduction

L'informatique, comme la physique et la biologie, est source de structures abstraites et de modèles dont l'étude est intrinsèquement intéressante. Ces différentes perspectives sémantiques - entre modèles d'un mouvement physique et modèle d'un calcul - se rejoignent parfois. En particulier, on retrouve dans l'étude de modèles dénotationnels du lambda-calcul une caractérisation des preuves en terme de *linéarité* des fonctions. La logique linéaire (LL) [6] désigne le calcul des séquent extrait de ce modèle, et permet une compréhension des règles logiques structurelles en terme de gestion des ressources. De même, l'interprétation des formules de LL par des espaces vectoriels permet de retrouver la notion de différentielle. La logique linéaire différentielle (DiLL) [3] est un calcul des séquent qui rajoute ainsi à LL des règles co-structurelles, décrivant la différentiation des fonctions d'ordres supérieures.

La logique linéaire (LL) construit un transfert de techniques entre l'algèbre et la logique : elle permet un nouveau point de vue sur le tiers-exclu, et la règle d'élimination de la double négation qui en découle :  $\neg\neg A \rightarrow A$ . LL raffine la logique intuitionniste en une logique classique *pour une notion linéaire de négation*. Quand en logique classique la négation d'une formule  $A$  est équivalent à l'implication de l'absurde par la formule  $A$  :

$$\neg A \equiv A \Rightarrow \perp,$$

en logique linéaire la négation correspond naturellement à l'implication linéaire de l'absurde par la formule :

$$A^\perp \equiv A \multimap \perp.$$

Cette nuance permet d'introduire la notion de *dualité* et de *polarisation* en théorie de la preuve. En particulier, la polarisation distingue deux classes de formules, négatives et positives. Les formules négatives sont celles qui sont par constructions stables par double négation, alors que les formules positives se comprennent comme celles à qui un défaut de structure ne permet pas cette invariance [7]. Cette distinction induite par la notion de négation linéaire trouve ensuite des applications en recherche de preuve [1].

Alors que la sémantique dénotationnelle s'attache à interpréter les programmes comme des fonctions - principalement dans la théorie des domaines, la sémantique catégorique est plus spécifique et s'intéresse aux *programmes fonctionnels typés*. À travers la correspondance de Curry-Howard, un programme de type  $A \Rightarrow B$  est interprété comme une preuve de la formule  $B$  sous l'hypothèse  $A$ . A leur tour, ces preuves de  $A \vdash B$  sont interprétées comme des morphismes de l'objet  $A$  vers l'objet  $B$  dans une certaine catégorie. Dans cet article, nous nous intéressons aux modèles catégoriques de DiLL, c'est à dire aux axiomes sur une ou plusieurs catégories qui permettent d'y interpréter DiLL de manière invariante par élimination des coupures.

La différentiation et la notion de polarité n'ont à priori rien à voir : quand la différentielle est historiquement un objet intervenant en analyse, la polarité appartient purement à la théorie des langages de programmation. Pourtant, la dualité au sens algébrique du terme<sup>1</sup> est au centre de la théorie des distributions [13] et d'une majeure partie

---

1. la dualité en algèbre linéaire et en analyse fonctionnelle décrit l'interaction entre un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et l'ensemble des formes linéaires continues sur cet espace  $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

de l'analyse fonctionnelle [8]. Mais lorsque l'on cherche à interpréter DiLL en analyse, on se heurte pourtant à des contraintes de polarités [9]. *L'injonction d'une négation linéaire involutive est trop contraignante* pour permettre à la fois de manipuler des différentielles et pour interpréter toutes les formules de la logique linéaire différentielle dans une même catégorie. Les premiers modèles qui apparaissent sont donc naturellement polarisés : les formules de DiLL sont interprétées par deux classes duales d'espaces topologiques.

La logique linéaire différentielle polarisée, déjà explorée par Vaux [14], est donc une notion logique qui fait sens en sémantique. Mais quand les modèles catégoriques de la logique linéaire différentielle sont largement étudiés dans la littérature [12] [4] [2], peu d'axiomatics catégoriques existent pour la logique linéaire polarisée. C'est l'objet de ce papier. Nous croyons à l'intérêt d'une axiomatique simple et élégante permettant de détecter des nouveaux principes calculatoires.

Dans ce travail, nous donnons un cadre catégorique pour la logique linéaire différentielle *finitaire* DiLL<sub>0</sub>. Ce travail se base sur la notion de chiralité introduite par Melliès [11]. Les chiralités sont un modèle de la partie de la logique linéaire polarisée qui ne traite pas de l'ordre supérieur. Nous étudions l'interaction entre les chiralités et les règles exponentielles de la logique linéaire différentielle finitaire : il s'agit là d'introduire un tout petit peu d'ordre supérieur, sans néanmoins se préoccuper de la règle de la chaîne. La difficulté provient du fait que ce qui se faisait dans une seule catégorie se fait maintenant dans deux catégories mises en relation par deux négations différentes.

**Organisation de l'article.** Nous rappelons en partie 2 les règles de la logique linéaire différentielle, un expliquant le rôle particulier joué par la promotion. Ensuite, nous exposons les principales structures catégoriques permettant l'interprétation de DiLL, en discutant l'intérêt d'une axiomatique catégorique d'un calcul (partie 3). En partie 4, nous donnons la définition de notre modèle et l'interprétation des preuves et des formules. Enfin, en partie 5 nous démontrons l'invariance par élimination des coupures de cette sémantique.

**Notations** Cette article se place à l'intersection de la correspondance de Curry-Howard et de la sémantique dénotationnelle. Une fonction est un programme, et les deux sont typés par une formule. La composition de deux fonctions correspond à l'application d'une règle de coupure entre le type de ces deux fonctions. Dans le cadre de la sémantique dénotationnelle, nous ne nous intéressons pas au calcul effectif de cette fonction. Notre travail consiste justement à trouver des interprétations de la logique *invariantes par élimination des coupures*.

## 2 La logique linéaire différentielle

Nous exposons dans cette partie les règles de la logique linéaire différentielle, sous une forme polarisée. La logique linéaire différentielle a d'abord été introduite sous forme de réseaux d'interaction [3] puis sous forme de séquent. La grammaire de ses formules est la même que celle de la logique linéaire. Nous la présentons en figure 2 sous forme polarisée dans un calcul des séquents, accompagnée d'un langage de termes afin de mettre en évidence le caractère fonctionnel de ces règles. La grammaire utilisée pour les formules est celle de la logique linéaire polarisée [7] :

$$\begin{aligned} \text{Formules positives : } N, M &:= a \mid ?P \mid \uparrow P \mid N \wp M \mid \perp \mid N \& M \mid \top. \\ \text{Formules négatives : } P, Q &:= a^\perp \mid !N \mid \downarrow N \mid P \otimes Q \mid 0 \mid P \oplus Q \mid 1. \end{aligned}$$

La négation d'une formule  $A$  est notée  $A^\perp$  et définit comme suit :

$$\begin{aligned} (!A)^\perp &= ?A^\perp & (A \& B)^\perp &= A^\perp \oplus B^\perp & (A \oplus B)^\perp &= A^\perp \& B^\perp \\ (?A)^\perp &= !A^\perp & (A \wp B)^\perp &= A^\perp \otimes B^\perp & (A \otimes B)^\perp &= A^\perp \wp B^\perp \\ (\uparrow A)^\perp &= \downarrow A^\perp & (\downarrow A)^\perp &= \uparrow A^\perp & 0^\perp &= \top \\ 1^\perp &= \perp & \perp^\perp &= 1 & \top^\perp &= 0 \end{aligned}$$

En particulier, la négation d'une formule positive est négative et vice-versa.

Rappelons tout d'abord la pierre angulaire de la logique linéaire : la non-linéarité d'une preuve est décomposée à travers une exponentielle notée  $!$ .

$$!A \multimap B \equiv A \Rightarrow B.$$

**Règles logiques, additives et multiplicatives :**

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash v : A, v^\perp : A^\perp} \text{ (axiom)} \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, A \quad \vdash A^\perp, \mathcal{M}}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}} \text{ (cut)} \\
\frac{}{\vdash 1} \text{ (1)} \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}}{\vdash \mathcal{N}, \perp} (\perp) \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, N, M}{\vdash \mathcal{N}, N \wp M} (\wp) \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, P \quad \vdash \mathcal{M}, Q}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, P \otimes Q} (\otimes) \\
\frac{}{\vdash \mathcal{N}, \top} \top \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, N \quad \vdash \mathcal{N}, M}{\vdash \mathcal{N}, N \& M} \& \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, P}{\vdash \mathcal{N}, P \oplus Q} \oplus_L \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, Q}{\vdash \mathcal{N}, P \oplus Q} \oplus_R
\end{array}$$

**Règles exponentielles :**

$$\begin{array}{c}
\frac{\vdash v : \mathcal{N}}{\vdash cst_v : \mathcal{N} \wp ?P \equiv !P^\perp \multimap \mathcal{N}} w \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, f : ?P, g : ?P}{\vdash \mathcal{N}, f.g : ?P} c \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, \ell : P \equiv (P^\perp) \multimap \perp}{\vdash \mathcal{N}, \ell : ?P} d \\
\frac{}{\vdash \delta_0 : !N} \bar{w} \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, \phi : !N \quad \vdash \mathcal{M}, \psi : !N}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, \phi * \psi : !N} \bar{c} \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, v : N}{\vdash \mathcal{N}, (f \mapsto D_f(v)) : !N} \bar{d}
\end{array}$$

**FIGURE 1:** La logique linéaire différentielle finitaire et polarisée (DiLL<sub>0,pol</sub>)

Via cette équivalence et l'élimination de la double négation  $A^{\perp\perp} \equiv A$ , l'exponentielle  $!N$  représente les actions linéaires sur les implications non-linéaires, quand son dual représente les fonctions non linéaires :

$$\begin{aligned}
!N &\equiv (N \Rightarrow \perp) \multimap \perp \\
?P &\equiv (P \multimap \perp) \Rightarrow \perp
\end{aligned}$$

Le langage de terme typé par la logique présentée en figure 2 est une traduction directe de ces équivalences. Une formule  $?P$  est le type d'une fonction  $f$ , quand une formule  $!N$  est le type d'une distribution  $\phi$ .

**Promotion interne ?** La logique linéaire contient des règles logiques (traitant l'introduction des conjonctions multiplicatives et additives, des disjonctions multiplicatives et additives), et des règles exponentielles concernant la duplication ou l'introduction d'hypothèses  $!A$ . La logique linéaire différentielle y rajoute des règles traitant de la duplication ou de l'introduction à droite de  $!A$ . L'apport remarquable de la logique linéaire différentielle réside en le fait que ces règles décomposent exactement la différentielle de fonctions d'ordre supérieur.

La logique linéaire différentielle présentée ici ne contient pas la règle de *promotion* propre à la logique linéaire :

$$\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A} p$$

Cette règle de promotion est celle qui permet de *typer la composition entre fonctions non-linéaire*. En effet, étant donné deux fonctions non-linéaires  $f : !A \longrightarrow B$  et  $g : !B \longrightarrow C$ , il n'existe à priori pas de manière canonique de les composer. La règle de promotion permet de composer des fonctions non-linéaires via une composition entre fonctions linéaires :

$$\frac{\frac{f : !A \vdash B}{p(f) : !A \vdash !B} p \quad g : !B \longrightarrow C}{g \circ p(f) : !A \longrightarrow C} \text{ cut}$$

Dans l'élimination des coupures, la règle de promotion est celle qui va faire intervenir le calcul de la dérivée d'une composition. Cette règle est communément appelée la règle de la chaîne. La logique linéaire différentielle finitaire traite donc d'un *opérateur de linéarisation* qui ne respecte pas forcément la règle de la chaîne. Cette logique a une saveur de processus concurrents [5] et se généralise au calcul de solutions d'un opérateur différentiel partiel linéaire

$$\begin{aligned}
w / \bar{w} : \delta_0 : !M)(cst_v : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow v : N \\
c / \bar{w} : \delta_0 : !M)(f.g : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow (\delta_0(f).\delta_0(g) : N). \\
\bar{c} / w : (\phi * \psi : !M)(cst_v : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow \psi(cst_{\phi(cst_v)}). \\
d / \bar{d} : (D(-)_0(v) : !M)(\ell : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow D(\ell)_0(v) = \ell(v) : N). \\
w / \bar{d} : (D(-)_0(v) : !M)(cst_w : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow D(cst_w)(0)(v) = 0 : N). \\
\bar{w} / d : (\delta_0 : !M)(\ell : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow (\ell(0) = 0 : N). \\
\bar{d} / c : (D(-)_0(v) : !M)(f.g : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow Df_0(v).\delta_0(g) + \delta_0(f).Dg_0(v) : N). \\
bc / d : (\phi * \psi : !M)(\ell : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow \psi(\ell) + \phi(\ell) : N. \\
\bar{c} / c : (\phi * \psi : !M)(f.g : ?M^\perp \wp N) &\rightsquigarrow \phi(f_1.f_2).\psi(f_3.f_4).(f_1^\perp * f_3^\perp)(f).(f_2^\perp * f_4^\perp)(g).
\end{aligned}$$

Dans la dernière règle,  $f_1, f_2, f_3, f_4 : ?A^\perp$  sont des variables nouvellement introduites. Leur dual introduit à travers une règle axiome est noté  $f_i^\perp : !A$ .

**FIGURE 2:** Élimination des coupures des règles exponentielles de la logique linéaire différentielle finitaire

à coefficients constant [9]. Nous considérons notre travail sur la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée comme une première étape vers une sémantique décomposant la règle de la chaîne via les règles co-structurelles primitives de la logique linéaire différentielle.

**Élimination des coupures** Les règles d'élimination des coupures sont détaillées dans le monographe introductif de Thomas Ehrhard [4]. Cette réduction a été prouvée confluente par Ehrhard et Régnier. Ces règles de réductions sont volontairement intuitives : les règles de réduction de la logique linéaire différentielle sont exactement celles qui correspondent à l'analyse réelle. Ainsi, la dérivée d'une fonction linéaire est cette même fonction, etc. Derrière ces règles se cache pourtant une intuition calculatoire nouvelle : les règles permettant la différentiation sont duales de celles traitant de l'usage des ressources. En effet, la logique linéaire traduit la linéarité en une hypothèse comme l'utilisation une et une seule fois de cette hypothèse. *La linéarité est une histoire de ressources.* La logique linéaire différentielle permet donc une analyse plus fine des règles de calcul en jeu en analyse.

Nous présentons l'élimination des coupures des règles exponentielles de la logique linéaire différentielle en figure 2, sous forme de règles de réductions du langage des termes. Dans cette réduction apparaît un paramètre important : les preuves de DiLL sont en fait *des sommes de preuves*, et tout séquent  $\vdash \Gamma$  possède une preuve, appelée sa 0-preuve. En annexe (partie B) nous donnons ces règles sous-forme de réécriture d'arbres de preuves.

$$\mathbf{0}_\Gamma : \overline{\vdash \Gamma}.$$

### 3 La sémantique catégorique de DiLL non polarisée.

L'apparition de la logique linéaire différentielle a engendré l'étude de diverses catégories différentielles [2]. Ces structures axiomatiques sont dans des généralisations de modèles de DiLL, mais cherchent à se rapprocher de la géométrie et s'éloignent de l'interprétation des principes calculatoires en jeu. Un premier travail de Fiore [12] met en évidence le rôle important des connecteurs additifs pour l'interprétation des règles exponentielles : quand multiplication et conjonction additives correspondent, alors l'interprétation de  $w$ ,  $c$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{c}$  découle de la monoïdalité forte de l'interprétation de  $!$ . Mais le travail s'attache à interpréter la logique linéaire différentielle *intuitionniste*. Ici, nous voulons mettre en évidence dans les catégories l'importance de la négation linéaire involutive dans la syntaxe de DiLL et en analyse. Dans une autre étape de recherche, nous souhaiterions tirer profit des structures polarisées pour mieux interpréter les règles co-structurelles de la logique linéaire différentielle (voir section 6).

*Remarque 1.* Nous supposons connu le langage de base des catégories - foncteurs, transformation naturelle, (co)-monade, adjonctions. Nous rappelons ici quelques définitions fondamentales à l'interprétation des règles de LL.

### 3.1 Biproduct et règles constructuelles

Nous décrivons dans cette partie le rôle joué par le biproduct dans les modèles non-polarisés de la logique linéaire différentielle, d'après les travaux de Fiore.

**Définition 2.** Soient  $\mathcal{L}$  une catégorie,  $\diamond$  une loi monoïdale sur  $\mathcal{L}$  et soit  $A$  un objet de  $\mathcal{L}$ , avec  $u_A : I \rightarrow A$  et  $\nabla_A : A \rightarrow A \diamond A$  des morphismes. On dit que  $(A, u_A, \nabla_A)$  est un *monoïde commutatif* si les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 A \diamond A \diamond A & \xrightarrow{\nabla_A \diamond \text{Id}} & A \diamond A \\
 \text{Id} \diamond \nabla_A \downarrow & & \downarrow \nabla_A \\
 A \diamond A & \xrightarrow{\nabla_A} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 I \diamond A & \xrightarrow{u_A \diamond \text{Id}} & A \diamond A & \xleftarrow{\text{Id} \diamond u_A} & A \diamond I \\
 \lambda \searrow & & \downarrow \nabla_A & & \swarrow \rho \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \gamma & & \\
 & & \longrightarrow & & \\
 & & A \diamond A & & A \diamond A \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & \nabla_A & & \nabla_A \\
 & & & & \\
 & & & & A
 \end{array}$$

Soient des morphismes  $n_A : A \rightarrow I$  et  $\Delta_A : A \rightarrow A \diamond A$ ,  $(A, n_A, \Delta_A)$  est un *co-monoïde commutatif* si les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta_A} & A \diamond A \\
 \Delta_A \downarrow & & \downarrow \Delta_A \diamond \text{Id} \\
 A \diamond A & \xrightarrow{\text{Id} \diamond \Delta_A} & A \diamond A \diamond A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & A & & \\
 \lambda^{-1} \swarrow & & \downarrow \Delta_A & & \searrow \rho^{-1} \\
 I \diamond A & \xleftarrow{n_A \diamond \text{Id}} & A \diamond A & \xrightarrow{\text{Id} \diamond n_A} & A \diamond I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & A & & \\
 \Delta_A \swarrow & & & \searrow \Delta_A & \\
 & & A \diamond A & & A \diamond A \\
 & \longrightarrow & \gamma & \longrightarrow & 
 \end{array}$$

**Définition 3.** Un *bi-produit* sur une catégorie  $\mathcal{L}$  est une structure monoïdale  $(\diamond, I)$  avec des transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc}
 I & & I \\
 \swarrow u_A & & \searrow n_A \\
 & A & \\
 \swarrow \nabla_A & & \searrow \Delta_A \\
 A \diamond A & & A \diamond A
 \end{array}$$

telles que  $(A, u_A^\diamond, \nabla_A^\diamond)$  est un monoïde commutatif et  $(A, n_A^\diamond, \Delta_A^\diamond)$  est un co-monoïde commutatif. On omettra les  $\diamond$  au-dessus des morphismes quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

*Exemple 4.* L'exemple typique d'un biproduct est le produit des espaces vectoriels : pour tout espaces vectoriels  $E$  et  $F$ ,  $E \times F \simeq E \oplus F$ .

*Remarque 5.* Le biproduct sur une catégorie est ce qui permet d'*additionner les morphismes* et donc d'interpréter les sommes de preuves de DiLL. En effet, la présence d'une structure de biproduct est équivalente à la conjonction d'un enrichissement sur la catégorie des monoïdes et à la présence d'un produit [12, 2.3]. Ainsi, pour deux morphismes  $f, g \in \mathcal{L}(A, B)$ , on construit leur somme :

$$f + g : A \xrightarrow{\Delta} A \diamond A \xrightarrow{f \diamond g} B \diamond B \xrightarrow{\nabla} B.$$

Nous rappelons par ailleurs que tout produit sur une catégorie donne lieu à un morphisme diagonal :

**Proposition 6.** [10, Prop 16] Soit  $(\mathcal{C}, \times, 0)$  une catégorie cartésienne, avec  $n_A : A \rightarrow 0$  comme morphisme terminal. Alors  $\mathcal{C}$  est muni de la transformation naturelle suivante :

$$\Delta_A : A \rightarrow A \times A$$

telle que pour tout objet  $A$  ( $A, \Delta_A, n_A$ ) est un comonoïde commutatif.

De même, toute catégorie co-cartésienne  $(\mathcal{C}, \times, 0)$  est naturellement munie d'une codiagonale  $\nabla_A : A \oplus A \rightarrow A$ .

### 3.2 Chiralités

Les chiralités ont été introduites par Melliès [11] comme une manière de relâcher l'injonction d'une négation linéaire involutive en une équivalence de catégories. Dans leur première forme, les chiralités consistent en deux foncteurs contravariants formant une équivalence entre deux catégories monoïdales, accompagnés de foncteurs covariants permettant le plongement des catégories l'une dans l'autre. Ces deux paires de foncteurs représentent respectivement les deux négations (des positifs aux négatifs et vice-versa) et les deux shifts.

Nous poussons le raisonnement plus loin en demandant que la composition des foncteurs soit un isomorphisme non pas sur les deux catégories mais sur une seule d'entre elles. Ce cas de figure est celui qui apparaît concrètement dans la modélisation dénotationnelle, où seules l'interprétation des formules négatives sont par construction invariante par double négation. L'interprétation des formules positives nécessite justement l'application d'un shift pour vérifier cette invariance.

**Définition 7.** Une *fermeture polarisée à gauche* (resp. à droite) est une adjonction  $L : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N} \dashv R : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  telle qu'on ait un isomorphisme naturel entre  $L \circ N$  et  $\text{Id}_{\mathcal{N}}$  (resp. un isomorphisme naturel entre  $\text{Id}_{\mathcal{P}}$  et  $N \circ L$ ) qui soit image de l'identité par l'adjonction.

Les chiralités négatives définies ci-dessous sont donc une structure intermédiaire entre les chiralités de dialogue et les chiralités mixtes définies par Melliès.

**Définition 8.** Une *chiralité négative* est la donnée d'une paire de catégories monoïdales  $(\mathcal{P}, \otimes, 1)$  et  $(\mathcal{N}, \wp, \perp)$  avec :

- une forte fermeture à gauche monoïdale polarisée,  $(-)^{\perp L} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}^{op} \dashv (-)^{\perp R} : \mathcal{P}^{op} \rightarrow \mathcal{N}$ ,
- une fermeture polarisée à gauche,  $\downarrow : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \dashv \uparrow : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$ ,
- une famille de bijection :

$$\chi_{p,n,m} : \mathcal{N}(\uparrow p, n \wp m) \simeq \mathcal{N}(\uparrow(p \otimes n^{\perp R}), m) \quad (1)$$

naturel en  $p, n$  et  $m$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(\uparrow(p \otimes (n' \wp n)^{\perp R}), m) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{N}(\uparrow p, (n' \wp n) \wp m) \\ \downarrow \text{associativité, monoïdalité de la négation} & & \uparrow \text{associativité} \\ \mathcal{N}(\uparrow((p \otimes n'^{\perp R}) \otimes n^{\perp R}), m) & \xrightarrow{\chi} \mathcal{N}(\uparrow p \otimes n'^{\perp R}, n \wp m) \xrightarrow{\chi} & \mathcal{N}(\uparrow p, n \wp (n' \wp m)) \end{array} \quad (2)$$

On omettra les indices sur  $\chi$  quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

**Notation 9.** Soit  $F$  un foncteur monoïdal de  $(\mathcal{C}, \diamond, I)$  vers  $(\mathcal{D}, \blacklozenge, J)$ , on note  $m_{F, \diamond, \blacklozenge}^{A,B}$  le morphisme de  $F(A \diamond B)$  vers  $F A \blacklozenge F B$  et on notera  $m_{F, \diamond, \blacklozenge}^0$  le morphisme de  $F I$  vers  $J$ .

On notera  $m_F^{A,B}$ ,  $m_F$  ou même  $m$  quand il n'y a pas d'ambiguïté.

**Notation 10.** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  une catégorie monoïdale symétrique, on adoptera les notations suivantes pour les isomorphismes naturels accompagnant cette structure :

- morphismes d'associativité :  $\alpha_{A,B,C}^{\otimes} : (A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$ .
- morphismes de neutralité :  $\rho_A^{\otimes} : A \otimes 1 \simeq A$ ,  $\lambda_A^{\otimes} : 1 \otimes A \simeq A$ .
- morphisme de commutativité :  $\gamma_{A,B}^{\otimes} : A \otimes B \simeq B \otimes A$ .

Sans d'ambiguïté on notera respectivement  $\alpha_{A,B,C}$ ,  $\rho_A$ ,  $\lambda_A$ ,  $\gamma_{A,B}$  voir  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  pour  $\alpha_{A,B,C}^{\otimes}$ ,  $\rho_A^{\otimes}$ ,  $\lambda_A^{\otimes}$ ,  $\gamma_{A,B}^{\otimes}$ .

## 4 Un modèle polarisé de $\text{DiLL}_{0,\text{pol}}$

Dans cette partie nous donnons un cadre catégorique pour interpréter les règles de la logique linéaire différentielle finitaire et polarisée, de manière invariante par élimination des coupures. Ce modèle consiste en une chiralité négative, interprétant les connecteurs multiplicatifs, un biproduit *sur chacune des catégories de la chiralité*, ainsi qu'un opérateur de co-déréliction interprétant la règle du même nom.

Une difficulté de ce modèle provient du fait que l'interprétation d'une preuve fait intervenir les plongements covariant d'une catégorie dans une autre (les shifts  $\uparrow$  et  $\downarrow$ ) : les structures doivent donc être compatibles avec ceux-ci. De manière intéressante, exiger un biproduit sur l'une des catégories ne semble pas suffire ; nous avons besoin d'un biproduit sur chacune des deux catégories de la chiralité.

Une deuxième difficulté provient de la structure exponentielle. Les lois régissant ! sont traditionnellement modélisées par une adjonction entre une catégorie  $\mathcal{L}$  aux morphismes linéaires et une catégories  $\mathcal{L}_!$  aux morphismes non-linéaires [10]. Ces deux adjonctions doivent maintenant interagir avec les deux catégories représentant la polarisation. Ainsi, l'interprétation de l'exponentielle ! et de son dual ? font explicitement intervenir des shifts  $\uparrow$  et  $\downarrow$  (voir définition 15).

**Définition 11.** Un modèle de  $\text{DiLL}_{0,\text{pol}}$  consiste en :

- $\perp$  Une chiralité négative  $(\mathcal{P}, \otimes, 1)$  et  $(\mathcal{N}, \wp, \perp)$  avec une clôture monoïdal forte  $(-)^{\perp L} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N}^{\text{op}} \dashv (-)^{\perp R} : \mathcal{N}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{P}$ , et une clôture polarisée  $\uparrow : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \dashv \downarrow : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$ . Nous noterons  $\chi$  la famille de bijections :  $\chi : \chi_{p,n,m} : \mathcal{N}(\uparrow p, n \wp m) \simeq \mathcal{N}(\uparrow(p \otimes n^{\perp R}), m)$ .

**Notation 12.** On notera  $\text{refl}$  l'isomorphisme de  $(-)^{\perp R \perp L}$  vers  $\text{Id}$  dans  $\mathcal{N}$ , et  $\text{compl}$  l'isomorphisme de  $\uparrow \circ \downarrow$  vers  $\text{Id}$  dans  $\mathcal{P}$ .

- $\oplus$  Un bi-produit  $(\diamond, I)$  sur  $\mathcal{P}$ . Nous notons  $I \xrightarrow{u_P^\diamond} P$ ,  $P \diamond P \xrightarrow{\nabla_P^\diamond} P$ ,  $P \xrightarrow{n_P^\diamond} I$  et  $P \xrightarrow{\mathcal{M}_P^\diamond} P \diamond P$  les transformations naturelles telles que  $(P, u^\diamond, \nabla^\diamond)$  est un monoïde commutatif et  $(P, n^\diamond, \mathcal{M}^\diamond)$  est un co-monoïde commutatif.

**Notation 13.** Ce biproduit sera également noté  $\oplus$  et interprétera la disjonction additive de  $\text{DiLL}$ .

- $\times$  Un bi-produit  $(\times, J)$  sur  $\mathcal{N}$ . Nous notons  $I \xrightarrow{u_N^\times} N$ ,  $N \times N \xrightarrow{\nabla_N^\times} N$ ,  $N \xrightarrow{n_N^\times} I$  et  $N \xrightarrow{\mathcal{M}_N^\times} N \times N$  les transformations naturelles telles que  $(N, u^\times, \nabla^\times)$  est un monoïde commutatif et  $(N, n^\times, \mathcal{M}^\times)$  est un co-monoïde commutatif.

- $\oplus_\infty$  Une catégorie co-cartésienne  $(\mathcal{N}^\infty, \oplus_\infty, 0)$

- $\otimes$  Une clôture monoïdale forte

$$\mathcal{E} : (\mathcal{P}^{\infty,\text{op}}, \oplus, 0_{\mathcal{P}^\infty}) \longrightarrow (\mathcal{N}^{\text{op}}, \wp, 1) \dashv \mathcal{U} : (\mathcal{N}^{\text{op}}, \wp, 1) \longrightarrow (\mathcal{P}^{\infty,\text{op}}, \oplus, 0_{\mathcal{P}^\infty}).$$

**Notation 14.** On note  $d : \text{Id} \longrightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{U}$  l'unité de l'adjonction précédente entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$ . Pour tout  $N \in \mathcal{N}$ ,  $d_N$  est donc un morphisme de  $\mathcal{N}$ .

$\text{clos}_P$  Une famille d'isomorphismes naturels dans  $\mathcal{P}$  :

$$\text{clos}_P : \downarrow P^{\perp L} \simeq (\uparrow P)^{\perp R}.$$

$\bar{d}$  Une transformation naturelle  $\bar{d} : \mathcal{E} \circ \mathcal{U} \longrightarrow \text{Id}$  vérifiant :

$$d_N; \bar{d}_N = \text{Id}_N$$

$\oplus/\wp$  On demande que  $\oplus$  soit compatible avec  $\wp$ , c'est à dire que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes C & \xrightarrow{1 \otimes n} & A \otimes I \\ n \downarrow & \searrow n & \downarrow 1 \otimes u \\ I & \xrightarrow{u} & A \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes C & \xrightarrow{\mathcal{M} \otimes 1_C} & (A \oplus A) \otimes C \\ \downarrow \mathcal{M} & & \downarrow \nabla \otimes 1_C \\ (A \otimes C) \oplus (A \otimes C) & \xrightarrow{\nabla} & A \otimes C \end{array}$$



$\chi/\otimes$  On demande en plus que le diagramme suivant commute pour tout  $P, \mathcal{M} \in \mathcal{N}$  et tout morphisme  $f \in \mathcal{N}(\uparrow 1, P \wp \mathcal{M})$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 \uparrow 1 \otimes \mathcal{M}^{\perp R} & \xrightarrow{\uparrow 1 \otimes x_P^{-1}(f)^{\perp R}} & \uparrow 1 \otimes (\uparrow 1 \otimes P^{\perp R})^{\perp R} & \xrightarrow{\uparrow \lambda} & \uparrow(\uparrow 1 \otimes P^{\perp R})^{\perp R} & (3) \\
 \downarrow x_{\mathcal{M}}^{-1}(f) & & & & \downarrow \uparrow(\uparrow \lambda)^{\perp R} \\
 P & \xleftarrow{\text{refl}} & P^{\perp R \perp L} & \xleftarrow{\text{compl}} & \uparrow \downarrow P^{\perp R \perp L} & \xleftarrow{\uparrow \text{clos}^{-1}} & \uparrow(\uparrow P^{\perp R})^{\perp R}
 \end{array}$$

**Définition 15.** On notera  $?$  le foncteur  $\mathcal{E} \circ \mathcal{U} \circ \uparrow$ , ainsi que  $!$  le foncteur  $(\mathcal{E} \circ \mathcal{U} \circ \uparrow(-)^{\perp R})^{\perp R}$ .

*Remarque 16.* La présence d'un produit sur  $\mathcal{N}$  et d'un coproduit sur  $\mathcal{P}$  est nécessaire à l'interprétation des règles multiplicatives et additives polarisées. Il nous faut aussi sommer les interprétations des preuves de DiLL. Celles ci seront interprétées en généralité  $\mathcal{N}(\uparrow P, N)$ , c'est à dire suivant la remarque 5 il faudra disposer d'un morphisme diagonal  $\Delta_P : P \rightarrow P \oplus P$  (modulo  $\uparrow$ ) et d'un morphisme co-diagonal  $\nabla_N : N \times N \rightarrow N$ . Ceux-ci sont peu ou prou équivalents respectivement à la présence d'un produit sur  $\mathcal{P}$  et d'un coproduit sur  $\mathcal{N}$  [10, prop 16]. Ainsi, dans un premier temps, nous avons demandé un biproduit sur chacune des catégories  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}$ . Nous espérons dans un deuxième temps pouvoir alléger cette structure.

## 4.1 Première propriétés de notre modèle

Soit  $\mathcal{L}$  un modèle de DiLL<sub>pol</sub> comme introduit en définition 11. Avant de nous attaquer à l'interprétation des formules, nous démontrons dans cette section des propriétés dans ce modèle. Les preuves des résultats énoncés ici se trouvent en annexe.

**Proposition 17.** *Le bi-produit est un produit avec projections :  $n \diamond Id; \lambda^\diamond$  et  $Id \diamond n; \rho^\diamond$ . C'est aussi un co-produit avec les co-projections  $(\rho^\diamond)^{-1}; Id \diamond u$  et  $(\lambda^\diamond)^{-1}; u \diamond Id$ .*

Les résultats suivant proviennent du fait que les adjoints à droite préservent les limites :

**Proposition 18.** *Le foncteur  $\uparrow$  est monoïdal fort entre les catégories  $(\mathcal{P}, \oplus, I)$  et  $(\mathcal{N}, \times, J)$ .*

**Proposition 19.**  *$U$  est monoïdal fort entre  $(\mathcal{N}, \times, J)$  et  $(\mathcal{P}^\infty, \oplus_\infty, 0)$ .*

**Corollaire 20.** *Le foncteur  $?$  est monoïdal fort de  $(\mathcal{P}, \oplus, I)$  à  $(\mathcal{N}, \wp, \perp)$ .*

**Notation 21.** *Les notations  $N, M$  ou  $P, Q$  désignent des formules négatives ou positives respectivement. Les notations  $\mathcal{N}, \mathcal{M}$  désignent des multi-ensembles de formules toutes négatives. Les notations  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{P}$  désignent les catégories dans lesquelles nous interprétons les formules négatives et positives respectivement.*

Les morphismes suivant serviront à interpréter la contraction, l'affaiblissement, la co-contraction et le co-affaiblissement :

$$c_P := (m_{?, \oplus, \wp}^{P, P})^{-1}; ?\nabla_P : ?P \wp ?P \rightarrow ?P$$

$$w_P := (m_{?}^0)^{-1}; ?u_P : \perp \rightarrow ?P$$

$$\bar{c}_P := ?\Delta_P; m_{?}^{P, P} : ?P \rightarrow ?P \wp ?P$$

$$\bar{w}_P := ?n_P; m_{?} \perp : ?P \rightarrow \perp$$

Nous donnons la structure additive des morphismes sur  $\mathcal{N}(N, M)$  :

$$f + g := \Delta_N^\times; f \times g; \nabla_M \text{ et } 0_{C(N, M)} := n_N^\times; u_M^\times.$$

## 4.2 Interprétation des formules

Les formules négatives sont interprétés par des objets de  $\mathcal{N}$  quand les formules positives sont interprétés par des objets de  $\mathcal{P}$ . A l'aide d'une première interprétation des formules atomiques dans  $\mathcal{N}$ , l'interprétation des formules se fait par induction sur la grammaire des formules de DiLL. On utilise pour cela les foncteurs définis précédemment, avec des notations correspondantes aux constructeurs logiques employés.

**Proposition 22.** *On interprète la négation d'une formule à l'aide des foncteurs de dualité, de manière à ce que le dual de l'interprétation d'une formule et l'interprétation de la négation du dual soient isomorphes. On note ces isomorphismes  $isopos_P : \llbracket P^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket P \rrbracket^{\perp L}$  et  $isoneg_N : \llbracket N^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket N \rrbracket^{\perp R}$  et on les définit par induction sur les formules. En particulier, afin d'assurer la proposition 23, on s'assure d'utiliser la forte monoidalité de  $\perp_R$  et non celle de  $\perp_L$  (les deux étaient possibles mais un choix était nécessaire).*

$n^\perp$  Si  $P = n^\perp$  (la négation d'une variable) :  $isopos_P := refl^{-1}$ .

$n$  Si  $N = n$  (une variable) :  $isoneg_N := Id_{\llbracket n \rrbracket}$ .

$\otimes$  Si  $P = P_1 \otimes P_2$  :  $isopos_P := refl^{-1}; ((m_{\perp_R}^{\llbracket P_1^\perp \rrbracket, \llbracket P_2^\perp \rrbracket})^{-1})^{\perp L}; (isoneg_{P_1^\perp} \otimes isoneg_{P_2^\perp})^{\perp L}$ .

$\wp$  Si  $N = N_1 \wp N_2$  :  $isoneg_N := isoneg_{N_1} \otimes isoneg_{N_2}; (m_{\perp_R}^{\llbracket N_1 \rrbracket, \llbracket N_2 \rrbracket})^{-1}$ .

$\oplus$  Le cas  $P = P_1 \oplus P_2$  se traite symétriquement au cas  $P_1 \otimes P_2$ .

$\&$  Le cas  $N = N_1 \& N_2$  se traite symétriquement au cas  $N_1 \wp N_2$ .

$!$  Si  $P = !N$  :  $isopos_{!N} := !isoneg_N; refl^{-1}$ .

$?$  Si  $N = ?P$  :  $isoneg_{?P} := (?isoneg_{P^\perp})^{\perp R}$ .

$\downarrow$  Si  $P = \downarrow N$  :  $isopos_{\downarrow N} := refl^{-1}; (clos)^{\perp L}; (\downarrow isopos_{N^\perp})^{\perp L}$ .

$\uparrow$  Si  $N = \uparrow P$  :  $isoneg_{\uparrow P} := \downarrow isopos_P; clos$ .

$1$  Si  $P = 1$  :  $isopos_1 := refl^{-1}; (m_{\perp_R}^0)^{-1})^{\perp L}$ .

$\perp$  Si  $N = \perp$  :  $isoneg_\perp := (m_{\perp_R}^0)^{-1}$ .

$\top, 0$  Les cas  $N = \top$  ou  $P = 0$  se traitent symétriquement aux cas  $N = \perp$  et  $P = 1$ .

On interprète des ensembles de formules négatives  $\mathcal{N} := N_1, \dots, N_n$  par la disjonction multiplicative de l'interprétation des formules :

$$\llbracket \mathcal{N} \rrbracket := \llbracket N_1 \rrbracket \wp \llbracket N_2 \rrbracket \wp \dots \wp \llbracket N_n \rrbracket.$$

La proposition suivante est immédiate :

**Proposition 23.** *Pour toute formule négative  $N$ , on a :*

$$(isoneg_N)^{\perp L}; isopos_{N^\perp}^{-1} = refl_{\llbracket N \rrbracket}.$$

## 4.3 Interprétation des preuves

Nous donnons maintenant l'interprétation des preuves de notre système. Comme dans les chiralités de dialogue, La preuve d'un séquent  $\vdash \mathcal{N}, P$  avec  $\mathcal{N}$  un multi-ensemble de formules négatives et  $P$  une formule positive est interprétée par un morphisme dans  $\mathcal{N}(\llbracket P \rrbracket^{\perp L}, \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)$ . La preuve d'un séquent  $\vdash \mathcal{N}$  avec  $\mathcal{N}$  un multi-ensemble de formules négatives soit interprétée par un morphisme dans  $\mathcal{N}(\uparrow 1, \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)$ .

Cette définition est traditionnellement faite par induction sur la dernière règle utilisée dans la preuve.

cut Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket N \rrbracket$  l'interprétation d'une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, N$  et  $g : \llbracket N^\perp \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  l'interprétation d'une preuve de  $\vdash N^\perp, \mathcal{M}$ . On interprète la preuve de  $\vdash \llbracket \mathcal{N} \rrbracket, \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  résultant d'une coupure entre les deux précédentes preuves par  $f; (isopos; g) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ .

ax Pour toute formule  $N$ , l'axiome prouvant  $\vdash N, N^{\perp R}$  s'interprète par  $refl : \llbracket N \rrbracket^{\perp R \perp L} \longrightarrow \llbracket N \rrbracket$ .

- ⊗ Soit  $f : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$  et  $g : \llbracket Q \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash Q, \mathcal{M}$ . On définit l'interprétation de  $\vdash P \otimes Q, \mathcal{N}, \mathcal{M}$  résultant de la règle (⊗) appliquée aux deux preuves précédentes par :  $\text{isopos}^{-1}$ ;  $\text{isopos} \wp \text{isopos}$ ;  $f \wp g : (P \otimes Q)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$ .
- ⋈ Soit  $f \in \mathcal{N}(\uparrow 1, \llbracket \mathcal{N}, N_1, N_2 \rrbracket)$  interprétant une preuve du séquent  $\vdash \mathcal{N}, N_1, N_2$ . L'interprétation de la preuve du séquent  $\vdash \mathcal{N}, N_1 \wp N_2$  est également  $f$ .
- ⊕ Soit  $f : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, P$ . On définit l'interprétation de la preuve de  $\vdash \mathcal{N}, P \oplus Q$  résultant par application de la règle (⊕<sub>g</sub>) par :  $\text{isopos}^{-1}$ ;  $\text{isopos} \times \text{isopos}$ ;  $\text{Id} \times n_{\llbracket Q \rrbracket^{\perp L}}; \rho; f : (P \oplus Q)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$ . Le cas de la règle (⊕<sub>d</sub>) se traite de manière symétrique.
- & Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}$  et  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket M \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash M, \mathcal{N}$ . On définit l'interprétation de la preuve de  $\vdash \mathcal{N} \& M, \mathcal{N}$  résultant par application de la règle (&) aux précédentes preuves par : et donc  $\chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}(\mathcal{M}; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \times \chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}^{-1}(g))$ .

- 1 On interprète la preuve qui ne contient que la règle (1) par  $m_{\perp L, \otimes, \wp}^0 \in \mathcal{N}(1^{\perp L}, 0)$ .
- ⊥ Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  l'interprétation d'une preuve de  $\vdash \mathcal{N}$ . On interprète la preuve de  $\vdash \mathcal{N}, \perp$  qui résulte de l'application de la règle (⊥) par  $f; \rho^{-1}$ .
- ⊤ On interprète la preuve ne comportant que cette règle par la zéro-preuve  $0_{\mathcal{N}(\uparrow 1, J \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)}$ .

- c Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ? \llbracket P \rrbracket \wp ? \llbracket P \rrbracket$  interprétant  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . On construit  $f; \mathcal{N} \wp c_{\llbracket P \rrbracket} : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ? \llbracket P \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ .
- $\bar{c}$  Pour la co-contraction, on a  $f : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, !N$  et  $g : (!\llbracket \mathcal{M} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}, !N$ . Et donc on a (  $\text{isopos}$ );  $\bar{c}_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp L}}; ((\text{isopos})^{-1}; f) \wp ((\text{isopos})^{-1}; g) : ?\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}, !N$ .
- w Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant  $\vdash \mathcal{N}$ . On construit  $(\lambda_{\uparrow 1}^{\wp})^{-1}; w_P \wp f : \uparrow 1 \longrightarrow ?\llbracket P \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ .
- $\bar{w}$  On construit  $\text{refl}; \bar{w}_{N^{\perp}} : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \perp$  interprétant  $\vdash !N$ .
- d Soit  $f : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant  $\vdash P, \mathcal{M}$ . On construit

$$\chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow \llbracket P \rrbracket^{\perp L}}^{\otimes}; \text{compl}; f); d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, ?P$ .

- $\bar{d}$  Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{N}$ . On définit

$$f' := \uparrow \lambda_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp R}}^{-1}; \chi_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket}^{-1}(f)$$

et on construit  $\text{refl}; \bar{d}_{\llbracket \mathcal{N} \rrbracket^{\perp R}}; f' : (!\llbracket \mathcal{N} \rrbracket)^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, !N$ .

## 5 Invariance par élimination des coupures

Nous démontrons que l'interprétation d'une preuve après l'élimination d'une coupure est la même qu'avant l'élimination modulo l'utilisation de l'adjonction  $\chi$  et de son inverse  $\chi^{-1}$  et des isomorphismes suivants :  $\lambda, \rho, \gamma, \alpha, \text{clos}$ ,  $\text{refl}$  ainsi que de leurs inverses. Beaucoup des résultats qui suivent proviennent d'outils fournis par le biproduit [12]. La plupart des démonstrations utilisent la naturalité des isomorphismes des catégories monoïdales symétrique et certains diagrammes. Les cas codéréliction/contraction et cocontraction/déréliction sont les cas les plus exigeants : leur démonstration utilise en particulier la compatibilité du bi-produit avec  $\wp$  et des diagrammes du biproduit.

Nous commençons par quelques lemmes préliminaires. Le lemme suivant se démontre à l'aide du fait que  $J$  est terminal et initial (respectivement).

**Lemme 24.** Soit  $f$  un morphisme de  $A'$  vers  $A$ , alors on a :

$$f; 0_{C(A,B)} = 0_{C(A',B)}$$

Soit  $g$  un morphisme de  $B$  vers  $B'$ , alors on a :

$$0_{C(A,B)}; g = 0_{C(A,B')}$$

Les démonstrations des propriétés qui suivent font intervenir les notions de naturalité, de produit cartésien et des diagrammes de catégories monoïdales. Elles serviront plus tard pour l'invariance de la sémantique par l'élimination des coupures pour les cas contraction/codéréliction et dérélliction/cocontraction.

**Proposition 25.** On a l'égalité :

$$\Delta_{?P\wp?P}^{\times}; (\bar{d}_{\uparrow P} \wp \bar{w}_{\uparrow P}) \times (\bar{w}_{\uparrow P} \wp \bar{d}_{\uparrow P}); \rho^{\wp} \wp \lambda^{\wp}; \nabla_{\uparrow P}^{\times} = (m_{?,\wp,\circ}^{P,P})^{-1}; ?\nabla_P; \bar{d}$$

**Proposition 26.** On a l'égalité :

$$\Delta^{\times}; \rho^{-1} \times \lambda^{-1}; (d \wp w) \times (w \wp d); \nabla^{\times} = d; ?\Delta; m_{?}^{P,P}$$

Cette égalité se montre avec les mêmes arguments que la preuve de l'égalité précédente, en utilisant le fait que le bi-produit  $\times$  est un produit co-cartésien cette fois-ci.

*Remarque 27.* On omettra volontairement d'écrire certains isomorphismes dans les calculs pour qu'ils soient plus lisibles. On pourra facilement se convaincre que les propriétés restent vraies si on ne les avait pas omis.

On commence par les coupures logique sur les connecteurs exponentiels :

—  $w$  et  $\bar{w}$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ , on a avant élimination de la coupure :

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\uparrow 1}^{\wp})^{-1}; w_{\llbracket P \rrbracket} \wp f; \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\ &= (\lambda_{\uparrow 1}^{\wp})^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}) \wp f \\ &\cong ?(u_P; n_P); \wp f \quad \text{et donc en utilisant la prop. 2.2 de [12]} \\ &= \perp \wp f \cong f \end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve après élimination de la coupure.

—  $c$  et  $\bar{w}$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ?\llbracket P \rrbracket \wp \llbracket P \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . Avant l'élimination des coupures on a donc une interprétation de la preuve qui est la suivante :

$$\begin{aligned} & f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp c_{\llbracket P \rrbracket}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \\ &\cong f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ((m_{?}^{?P,?P})^{-1}; ?(\nabla_{\llbracket P \rrbracket}, n_{\llbracket P \rrbracket})) \\ &= f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ((m_{?}^{?P,?P})^{-1}; ?(n_{\llbracket P \rrbracket} \circ n_{\llbracket P \rrbracket}; \lambda_I)) \quad \text{On utilise [12] prop. 2.2} \\ &\cong f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp ((?n_{\llbracket P \rrbracket} \wp ?n_{\llbracket P \rrbracket})) \quad \text{Par naturalité de } m_{?}^{\circ} \\ &= f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}) \end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve après coupure.

- $\bar{c}$  et  $w$  : Soit  $f : ?\llbracket N^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  et  $g : ?\llbracket N^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  et  $h : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprètent (respectivement)  $\vdash !N, \mathcal{N}, \vdash !N, \mathcal{M}$  et  $\vdash \mathcal{M}$ . On a comme interprétation avant coupure :

$$\begin{aligned}
& (\lambda_{\uparrow 1}^{\mathfrak{A}})^{-1}; w_{\llbracket N^\perp \rrbracket} \mathfrak{A} h; (\bar{c}_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \\
& \cong (w_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; \bar{c}_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} h \\
& = ((m_\uparrow^0)^{-1}; ?(u_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; \Delta_{\llbracket N^\perp \rrbracket}); (m_\uparrow^{[?N], [?N]})^{-1}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} h \\
& \cong (((m_\uparrow^0)^{-1} \mathfrak{A} (m_\uparrow^0)^{-1}); ?u_{\llbracket N^\perp \rrbracket} \mathfrak{A} ?u_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; f \mathfrak{A} g) \mathfrak{A} h \quad \text{On utilise [12] prop. 2.2 et la naturalité de } m_\uparrow \\
& \cong (w_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; f) \mathfrak{A} (w_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; g) \mathfrak{A} h \\
& = w_{\llbracket N^\perp \rrbracket} \mathfrak{A} ((w_{\llbracket N^\perp \rrbracket} \mathfrak{A} h); (g \mathfrak{A} \mathcal{M})); f \mathfrak{A} \mathcal{N} \mathfrak{A} \mathcal{M}
\end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve après coupure.

- $c$  et  $\bar{c}$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} [?P] \mathfrak{A} [?P]$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . Et donc  $f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} c_{[P]}$  interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ . Soit  $g : ?[P] \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, !P^\perp$  et  $h : ?[P] \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_2 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_2, !P^\perp$ . Et donc  $\bar{c}_{[P]}; g \mathfrak{A} h$  interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, ?P$ .

Finalement, avant élimination des coupures on a cette fonction comme interprétation :

$$f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} (c_{[P]}; \bar{c}_{[P]}; g \mathfrak{A} h)$$

Et après élimination on obtient :

$$f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} (\bar{c}_{[P]}; \text{Id}_{[P]} \mathfrak{A} \text{Id}_{[P]}) \mathfrak{A} (\bar{c}_{[P]}; \text{Id}_{[P]} \mathfrak{A} \text{Id}_{[P]}); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \mathfrak{A} (c_{[P]}; g) \mathfrak{A} (c_{[P]}; h)$$

Il suffit donc de vérifier l'égalité suivante :

$$c; \bar{c} = (\bar{c}; c) \mathfrak{A} (\bar{c}; c).$$

Ce qui revient à vérifier :

$$\nabla; \Delta = (\Delta; \nabla) \diamond (\Delta; \nabla).$$

Et cette dernière équation vient de la naturalité de  $\Delta$ , puis de  $\nabla$ .

- $\bar{d}$  et  $w$ . Soit  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant  $\vdash \mathcal{N}$ . Donc  $(\lambda_{\uparrow 1}^{\mathfrak{A}})^{-1}; w_{[P]} \mathfrak{A} f$  interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ . Soit  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^\perp \rrbracket \mathfrak{A} \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, P^\perp$ . Si on pose :

$$g' := \uparrow \text{isoneg}; \uparrow \lambda^{-1}; \chi_{1, \llbracket P^\perp \rrbracket, \llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g)$$

Alors  $\bar{d}_{\llbracket N^\perp \rrbracket}; g' : ?[P] \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, !P^\perp$ . On a alors  $(\lambda_{\uparrow 1}^{\mathfrak{A}})^{-1}; (w_{[P]}; \bar{d}; g') \mathfrak{A} f$  qui interprète la preuve avant coupure. Comme  $\bar{d}$  est une transformation naturelle, on a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
?I & \xrightarrow{?u_{[P]}} & ?[P] \\
\bar{d}_I \downarrow & & \downarrow \bar{d}_{[P]} \\
\uparrow I & \xrightarrow{\uparrow u_{[P]}} & \uparrow [P]
\end{array}$$

Or  $\uparrow I$  est  $J$  (par définition) donc on a que  $?u_{[P]}; \bar{d}_{[P]} = 0_{C(?I, \uparrow [P])}$ .

Finalement par le lemme 24, on a que notre interprétation est  $0_{C(\uparrow 1, \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \mathfrak{A} \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)}$ , ce qui est bien l'interprétation d'une zéro-preuve du séquent  $\vdash \mathcal{N}, \mathcal{M}$ .

—  $d$  et  $\bar{w}$ . Soit  $f : \llbracket P^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ . Alors :

$$\chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow \downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; f); d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

interprète une preuve de  $\vdash ?P, \mathcal{N}$ . Et donc avant coupure, on a cette interprétation de la preuve :

$$\chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow \downarrow P^\perp}^\otimes; \text{iso}_{\uparrow \downarrow} \longrightarrow Id; f); d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket; \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

Par les mêmes arguments qu'avant, on peut conclure qu'on obtient bien l'élément neutre de l'addition entre fonction.

—  $\bar{d}$  et  $c$ . Si  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^\perp \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, P^\perp$ , alors en posant :

$$f' := \uparrow \text{isoneg}; \uparrow \lambda^{-1}; \chi^{-1}(f)$$

$\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f'$  interprète une preuve de  $\vdash !P^\perp, \mathcal{M}$ . Considérons maintenant  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash \mathcal{N}, ?P, ?P$ . Alors  $g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp c_{\llbracket P \rrbracket}$  qui interprète  $\vdash \mathcal{N}, ?P$ . Avant élimination de la coupure on a l'interprétation suivante de la preuve :

$$g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp c_{\llbracket P \rrbracket}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f')$$

Et après l'élimination de la coupure, nous avons l'interprétation suivante de la preuve :

$$\mathcal{M}^\times; \left( \left[ g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket \wp (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f'); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \lambda^\wp \right] \times \right. \\ \left. \left[ g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket ?P \rrbracket \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; f') \wp \perp; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \rho^\wp \right] \right); \nabla^\times$$

En utilisant la compatibilité de  $\wp$  avec le bi-produit et la naturalité de  $\mathcal{M}^\times$  et de  $\nabla^\times$ , on obtient :

$$= g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\mathcal{M}^\times; (\bar{w}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \bar{d}_{\llbracket P \rrbracket}; \lambda^\wp) \times (\bar{d}_{\llbracket P \rrbracket} \wp \bar{w}_{\llbracket P \rrbracket}; \rho^\wp); \nabla^\times); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp f'$$

Et d'après la propriété 25 :

$$= g; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (c_{\llbracket P \rrbracket}; d_{\llbracket P \rrbracket}); \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp f'$$

Qui est bien l'interprétation de la preuve avant l'élimination de la coupure.

—  $d$  et  $\bar{c}$ . Soit  $f : \llbracket P^\perp \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprétant une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ , alors en posant :

$$f' := \chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow \downarrow \llbracket P^\perp \rrbracket}^\otimes; \text{compl}; f),$$

$f'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash ?P, \mathcal{N}$ .

Soit  $g : \llbracket ?P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, !P^\perp$  et  $h : \llbracket ?P \rrbracket \longrightarrow \llbracket \mathcal{M}_2 \rrbracket$  qui interprète  $\vdash \mathcal{M}_2, !P^\perp$ . Alors  $\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; g \wp h$  interprète  $\vdash \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, !P^\perp$ . Donc avant l'élimination des coupures on a une interprétation de la preuve qui est la suivante :

$$f'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket; (\bar{c}_{\llbracket P \rrbracket}; g \wp h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket.$$

Et après l'élimination des coupures :

$$\Delta^\times; \left( \left[ (\lambda^\wp)^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp (f'; ((d_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)); \gamma; \alpha; \llbracket \mathcal{M}_1 \rrbracket \wp \gamma \right] \times \right. \\ \left. \left[ (\lambda^\wp)^{-1}; (w_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (f'; ((d_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right); \nabla^\times$$

Puis par naturalité de  $\gamma$ ,  $\alpha$  et  $\lambda$ , le dernier terme écrit est égal à :

$$\Delta^\times; \left( \left[ f'; (\lambda^\wp)^{-1}; \gamma; \alpha; (\uparrow \llbracket P \rrbracket \wp \gamma); ((d_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (w_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \times \right. \\ \left. \left[ (\lambda^\wp)^{-1}; ((w_{\llbracket P \rrbracket}; g) \wp (f'; (d_{\llbracket P \rrbracket}; h) \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket)) \right] \right); \nabla^\times$$

On utilise le fait que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
A \wr B & & A \wr B \\
\lambda^{-1} \downarrow & \searrow \rho^{-1} & \searrow A \wr \rho^{-1} \\
\perp \wr (A \wr B) & \xrightarrow{\gamma} & (A \wr B) \wr \perp \\
& & \downarrow A \wr \rho^{-1} \\
& & A \wr (B \wr \perp)
\end{array}
& &
\begin{array}{ccc}
A \wr B & & A \wr B \\
\rho^{-1} \downarrow & \searrow A \wr \rho^{-1} & \searrow \alpha \\
(A \wr B) \wr \perp & \xrightarrow{\alpha} & A \wr (B \wr \perp) \\
& & \downarrow A \wr \lambda^{-1} \\
& & A \wr (\perp \wr B)
\end{array}
\end{array}$$

Et donc le dernier terme que l'on a écrit est égal à :

$$\begin{aligned}
& \Delta^\times; \left( \left[ f'; (\uparrow[P] \wr (\lambda^\wr)^{-1}); ((d_{[P]}; g) \wr (w_{[P]}; h) \wr [\mathcal{N}]) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \left[ (\lambda^\wr)^{-1}; ((w_{[P]}; g) \wr (f'; (d_{[P]}; h) \wr [\mathcal{N}])) \right] \right); \nabla^\times \\
& = \Delta^\times; \left( \left[ f'; (\uparrow[P] \wr (\lambda^\wr)^{-1}); (d_{[P]} \wr (w_{[P]} \wr [\mathcal{N}])); (g \wr (h \wr [\mathcal{N}])) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \left[ f'; (\lambda^\wr)^{-1}; (w_{[P]} \wr (d_{[P]} \wr [\mathcal{N}])); (g \wr (h \wr [\mathcal{N}])) \right] \right); \nabla^\times \\
& = f'; \Delta^\times; \left( \left[ (\uparrow[P] \wr (\lambda^\wr)^{-1}); (d_{[P]} \wr (w_{[P]} \wr [\mathcal{N}])) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \left[ (\lambda^\wr)^{-1}; (w_{[P]} \wr (d_{[P]} \wr [\mathcal{N}])) \right] \right); \nabla^\times; (g \wr (h \wr [\mathcal{N}])) \\
& = f'; \Delta^\times; \left( \left[ (\uparrow[P] \wr (\lambda^\wr)^{-1}); (d_{[P]} \wr (w_{[P]} \wr [\mathcal{N}])); \alpha \right] \times \right. \\
& \quad \left. \left[ (\lambda^\wr)^{-1}; (w_{[P]} \wr (d_{[P]} \wr [\mathcal{N}])); \alpha \right] \right); \nabla^\times; \alpha^{-1}; (g \wr (h \wr [\mathcal{N}]))
\end{aligned}$$

Puis on utilise le fait que ces diagrammes commutent :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
A \wr B & & A \wr B \\
A \wr \lambda^{-1} \downarrow & \searrow \rho^{-1} \wr B & \searrow \lambda^{-1} \wr B \\
A \wr (\perp \wr B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \wr \perp) \wr B \\
& & \downarrow \alpha \\
& & (\perp \wr A) \wr B
\end{array}
& &
\begin{array}{ccc}
A \wr B & & A \wr B \\
\lambda^{-1} \downarrow & \searrow \lambda^{-1} \wr B & \searrow \alpha \\
\perp \wr (A \wr B) & \xrightarrow{\alpha} & (\perp \wr A) \wr B
\end{array}
\end{array}$$

Et donc le dernier terme que l'on a écrit est égal à :

$$= f'; \Delta^\times; \left( \left[ ((\rho^\wr)^{-1} \wr [\mathcal{N}]); ((d_{[P]} \wr w_{[P]}) \wr [\mathcal{N}]) \right] \times \right. \\
\quad \left. \left[ ((\lambda^\wr)^{-1} \wr [\mathcal{N}]); ((w_{[P]} \wr d_{[P]}) \wr [\mathcal{N}]) \right] \right); \nabla^\times; \alpha^{-1}; (g \wr (h \wr [\mathcal{N}]))$$

Par compatibilité du bi-produit avec  $\wr$ , on a que le terme précédent est égal à :

$$= f'; \left( \Delta^\times; (\rho^\wr)^{-1} \times (\lambda^\wr)^{-1}; (d_{[P]} \wr w_{[P]}) \times (w_{[P]} \wr d_{[P]}) \right); \nabla^\times \wr [\mathcal{N}]; \alpha^{-1}; (g \wr (h \wr [\mathcal{N}]))$$

Et d'après la proposition 26 ce dernier terme est égal à :

$$\begin{aligned}
& = f'; (d; ?\Delta; m_{?}^{P,P}) \wr [\mathcal{N}]; \alpha^{-1}; (g \wr (h \wr [\mathcal{N}])) \\
& \cong f'; (d; ?\Delta; m_{?}^{P,P}) \wr [\mathcal{N}]; (g \wr h) \wr [\mathcal{N}]
\end{aligned}$$

qui est bien égal à l'interprétation de la preuve avant coupure.

—  $d$  et  $\bar{d}$ . Si  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^\perp \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, P^\perp$ , alors en posant :

$$f' := \uparrow \lambda^{-1}; \chi^{-1}(f)$$

$\text{refl}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket^\perp R}; f'$  interprète une preuve de  $\vdash !P^\perp, \mathcal{M}$ . Supposons que  $g : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ , alors en posant :

$$g' := \chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; g),$$

on a que  $g'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash ?P, \mathcal{N}$ . Avant l'élimination des coupures l'interprétation de la preuve est :

$$\begin{aligned} & g'; d_{\llbracket P \rrbracket} \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket; (\text{isopos}; \text{refl}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket^\perp R}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\ &= g'; (d_{\llbracket P \rrbracket}; ?\text{isoneg}_{P^\perp}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket^\perp R}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \quad \text{par définition de isopos} \\ &= g'; (\uparrow \text{isoneg}_{P^\perp}; d_{\llbracket P^\perp \rrbracket^\perp R}; \bar{d}_{\llbracket P^\perp \rrbracket^\perp R}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\ &= g'; (\uparrow \text{isoneg}_{P^\perp}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \\ &= \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow 1 \otimes (\uparrow \text{isoneg})^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; g) \end{aligned}$$

On veut montrer que c'est égal à :

$$f; (\text{isopos}; g) \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$$

En appliquant  $\chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}$ , on voit que l'égalité qu'on veut montrer est :

$$\uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow 1 \otimes (\uparrow \text{isoneg})^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; g = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f); \text{isopos}; g$$

Et donc il nous suffit de montrer cette égalité :

$$\uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow 1 \otimes (\uparrow \text{isoneg})^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; \text{isopos}^{-1} = \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f)$$

Le côté gauche de l'égalité est égal à :

$$\begin{aligned} & \uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow(1 \otimes \text{clos}^{-1}); \uparrow \lambda_{\downarrow P^\perp}^\otimes; \text{compl}; \text{isoneg}^{\perp L}; \text{isopos}^{-1} \\ &= \uparrow 1 \otimes f'^{\perp R}; \uparrow \lambda; \uparrow \text{clos}^{-1}; \text{compl}; \text{refl} \quad \text{d'après 23} \end{aligned}$$

En appliquant le diagramme 3, on obtient le résultat.

Nous démontrons les cas plus classiques d'élimination des coupures logiques en annexe (partie A).

## 6 Conclusion

Nous avons construit une axiomatique catégorique pour la logique linéaire différentielle, finitaire polarisée. Celle-ci est construite sur la notion de chiralité, de biproduct et de codéréliction. Notre but était de mettre à jour au niveau catégorique le caractère profondément *classique* de la logique linéaire différentielle.

Nous n'avons que partiellement réussi : en effet, l'ajout d'une codéréliction se fait toujours de manière ad-hoc, et ne rends pas compte du caractère dual entre la déréliction et la codéréliction. De plus, la nécessité de demander un biproduct sur chacune des deux catégories de la chiralité est particulièrement lourde, et il faudrait dans l'idéal pouvoir s'en dégager. Nous pensons qu'exiger un biproduct sur  $\mathcal{N}$  devrait suffire - cela donnerait naturellement un coproduct sur  $\mathcal{P}$ . Il reste néanmoins à vérifier les preuves dans le détail.

On remarque par ailleurs que quand la partie linéaire de DiLL polarisée est interprétée par une chiralité, la partie exponentielle ressemble elle aussi à une chiralité. En effet, la partie exponentielle est interprétée elle aussi par une clôture monoïdale forte (entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$ ), ainsi que par des morphismes  $\bar{d}$  et  $d$  se comportant comme des shifts entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$ . Nous conjecturons que l'interprétation de DiLL *avec promotion* se fera via deux chiralités, l'une traitant de l'interaction positif / négatif et l'autre de l'interaction linéaire / non-linéaire. Nous espérons qu'une telle structure catégorique permettra de décomposer la différentiation avec des opérateurs plus primitifs, et d'éventuellement mettre en valeur les opérateurs de contrôle en jeu dans le calcul de la différentielle.



## Références

- [1] Jean-Marc Andreoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. 1992.
- [2] R. F. Blute, J. R. B. Cockett, and R. A. G. Seely. Differential categories. *Math. Structures Comput. Sci.*, 16(6), 2006.
- [3] T. Ehrhard and L. Regnier. Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2) :166–195, 2006.
- [4] Thomas Ehrhard. An introduction to differential linear logic : proof-nets, models and antiderivatives. *Mathematical Structures in Computer Science*, 28(7) :995–1060, 2018.
- [5] Thomas Ehrhard and Olivier Laurent. Interpreting a finitary pi-calculus in differential interaction nets. *Inf. Comput.*, 2010.
- [6] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–102, 1987.
- [7] Jean-Yves Girard. A new constructive logic : Classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1991.
- [8] Hans Jarchow. *Locally convex spaces*. B. G. Teubner, 1981.
- [9] Marie Kerjean. A logical account for linear partial differential equations. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2018, Oxford*.
- [10] P.-A. Melliès. Categorical semantics of linear logic. *Société Mathématique de France*, 2008.
- [11] Paul-André Melliès. Dialogue categories and chiralities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 52(4) :359–412, 2016.
- [12] M. Fiore. Differential structure in models of multiplicative biadditive intuitionistic linear logic. *Proceedings of TLCA*, 2007.
- [13] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [14] Lionel Vaux. Differential linear logic and polarization. In *Typed Lambda Calculi and Applications, 9th International Conference, TLCA 2009, Brasilia, Brazil, July 1-3, 2009. Proceedings*, pages 371–385, 2009.

## A Invariance par élimination des coupures : cas des règles logiques, multiplicatives et additives

On détaille les cas (plus classique) sur les formules avec des connecteurs binaires comme connecteur principal.

- $\otimes$  et  $\wp$ . On a  $f : \llbracket A \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash A, \mathcal{N}$  et  $g : \llbracket B \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash B, \mathcal{M}$ . Et donc

$$\text{isopos}^{-1}; \text{isopos } \wp \text{ isopos}; f \wp g$$

interprète une preuve de  $\vdash A \otimes B, \mathcal{N}, \mathcal{M}$ . De plus, on a  $h : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket A^{\perp} \rrbracket \wp \llbracket B^{\perp} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, A^{\perp}, B^{\perp}$  et donc aussi de  $\vdash \mathcal{M}, A^{\perp} \wp B^{\perp}$ . L'interprétation de la preuve avant l'élimination de la coupure est :

$$h; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \text{isopos } \wp \text{isopos}; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp f \wp g$$

Et après l'élimination de la coupure :

$$h; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos}; f) \wp \llbracket B^{\perp} \rrbracket; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\text{isopos}; g)$$

Comme  $\wp$  est un bi-foncteur, on a bien le résultat.

- $\oplus$  et  $\&$ . On ne fait le cas que pour la règle  $\oplus_g$ , l'autre est similaire. On a donc une fonction  $h : \uparrow \llbracket A \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  et qui interprète une preuve de  $\vdash A, \mathcal{N}$ . Et donc

$$\text{isopos}^{-1}; \text{isopos} \times \text{isopos}; \text{Id} \times n; \rho; h$$

interprète une preuve de  $\vdash A \oplus B, \mathcal{N}$ . On a aussi une fonction  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket A^{\perp} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, A^{\perp}$  et une fonction  $g : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp \llbracket B^{\perp} \rrbracket$  qui interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, B^{\perp}$ . Et donc

$$\chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \times \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g))$$

interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, A^{\perp} \& B^{\perp}$ . Et donc avant élimination de la coupure, on a une interprétation de la preuve qui est la suivante :

$$\begin{aligned} & \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \times \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g)); (\llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos} \times \text{isopos}; \text{Id} \times n; \rho; h)) \\ &= \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f) \times \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(g); (\text{isopos} \times \text{isopos}; \text{Id} \times n; \rho)); \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp h \\ &= \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\Delta; \text{Id} \times n; \rho; \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f); \text{isopos}); \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp h \\ &= \chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}(\chi_{\llbracket \mathcal{M} \rrbracket}^{-1}(f)); \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos}; h) \\ &= f; \llbracket \mathcal{M} \rrbracket \wp (\text{isopos}; h). \end{aligned}$$

Ce qui est bien l'interprétation de la preuve après élimination de la coupure.

On termine sur les dernières règles du système.

- $\uparrow$  et  $\downarrow$ . Si  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket P^{\perp} \rrbracket \wp \llbracket \mathcal{M} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash \mathcal{M}, P^{\perp}$ , alors en posant :

$$f' := \uparrow \lambda^{-1}; \chi^{-1}(f)$$

$\text{isopos}^{-1}; \uparrow \text{isoneg}; f'$  interprète une preuve de  $\vdash \downarrow P^{\perp}, \mathcal{M}$ . Supposons que  $g : \llbracket P \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$  interprète une preuve de  $\vdash P, \mathcal{N}$ , alors

$$g' := \chi(\uparrow(1 \otimes \text{clos}_{\llbracket P \rrbracket}^{-1}); \uparrow \lambda_{\uparrow \downarrow P^{\perp}}^{\otimes}; \text{compl}; g),$$

interprète une preuve de  $\vdash \uparrow P, \mathcal{N}$ . Avant l'élimination des coupures, l'interprétation de la preuve est :

$$g'; (\uparrow \text{isoneg}_{P^{\perp}}; f') \wp \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$$

On remarque alors qu'on a la même égalité que pour le cas dérélction/co-dérélction, on peut donc appliquer la fin de la démonstration pour ce cas-ci.

- règle  $ax$ . Si au-dessus de la coupure il y a une règle  $ax$ , et que l'interprétation de la preuve de l'autre séquent est  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp \llbracket A \rrbracket$ , on interprète la preuve avant élimination par :

$$f; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\text{isopos}; \text{isopos}^{-1}) = f$$

d'où notre résultat. Si l'interprétation de l'autre séquent est  $f : \llbracket A \rrbracket^{\perp L} \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ , on interprète la preuve après élimination par :

$$\text{isopos}^{-1}; \text{isopos}; f = f$$

et on a aussi notre résultat.

- (1) et  $\perp$ . Si au-dessus de la coupure il y a une règle (1), et que l'interprétation de la preuve de l'autre séquent est  $f : \uparrow 1 \longrightarrow \llbracket \mathcal{N} \rrbracket$ , alors on interprète la preuve avant l'élimination des coupures par :

$$f; \rho^{-1}; \llbracket \mathcal{N} \rrbracket \wp (\text{isopos}; \text{isopos}^{-1}; m) \cong f$$

## B Élimination des coupures dans $\text{DiLL}_{0, \text{pol}}$ .

On donne ici les cas clefs de l'élimination des coupures en distinguant les cas selon les dernières règles utilisées avant la coupure.

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?E} w}{\vdash \Gamma} \quad \frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma} \rightsquigarrow \vdash \Gamma$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, ?E} c}{\vdash \Gamma} \quad \frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma} \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, ?E} \quad \frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma} \text{cut} \quad \frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma} \text{cut}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, !E^\perp}{\vdash \Gamma, \Gamma', !E^\perp} \bar{c}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Delta}{\vdash \Delta, ?E} w}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, !E^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \quad \frac{\frac{\vdash \Delta}{\vdash \Delta, ?E} w}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma, \Delta} w}{\vdash \Gamma, \Delta, ?E} w \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma', !E^\perp}{\vdash \Gamma', \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \text{cut}}}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta} \text{cut}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Delta, E}{\vdash \Delta, ?E} d}{\vdash \Gamma, \Delta} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, E^\perp}{\vdash \Gamma, !E^\perp} \bar{d}}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma, \Delta} \rightsquigarrow \frac{\frac{\frac{\vdash \Delta, E}{\vdash \Gamma, \Delta} \quad \frac{\frac{\vdash \Gamma, E^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?E} w}{\vdash \Gamma, \Delta} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Delta, E^\perp}{\vdash \Delta, !E^\perp} \bar{d}}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma, \Delta} \rightsquigarrow \circ$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash}{\vdash !E^\perp} \bar{w}}{\vdash \Gamma} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, E}{\vdash \Gamma, ?E} d}{\text{cut}}}{\vdash \Gamma} \rightsquigarrow \circ$$



**Les règles multiplicatives**

$$\frac{}{\vdash 1} \text{ (1)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \text{ (\perp)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \text{ (\wp)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \text{ (\otimes)}$$

**Les règles additives**

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \text{ (\top)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \text{ (\&)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus_L$$

$$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus_R$$

**Les règles exponentielles**

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?E} w$$

$$\frac{\vdash \Gamma, ?E, ?E}{\vdash \Gamma, ?E} c$$

$$\frac{\vdash \Gamma, E}{\vdash \Gamma, ?E} d$$

$$\frac{}{\vdash !E} \bar{w}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, !E \quad \vdash \Delta, !E}{\vdash \Gamma, \Delta, !E} \bar{c}$$

$$\frac{\vdash \mathcal{N}, E}{\vdash \mathcal{N}, !E} \bar{d}$$

où le contexte  $\mathcal{N}$  dans la codéréliction est un multi-ensemble de formules négatives.

**C Preuves omises dans le corps du papier**

*preuve de la propriété 17.* Montrons d'abord que  $I$  est terminal. Pour cela, il faut montrer que  $n_A$  est le seul morphisme de  $A$  vers  $I$ . Comme  $(A, n, \mathcal{M})$  est un co-monoïde commutatif, on a que  $I \diamond n$  et  $n \diamond I$  ont des inverses à gauche. De même, comme  $(A, u, \nabla)$  est un monoïde commutatif, on a que  $\nabla$  a un inverse à gauche. Par naturalité de  $\nabla$ , on a :

$$\nabla; n_I = n_I \diamond n; \nabla$$

Et on peut conclure que  $n_I$  a un inverse à gauche. Par naturalité de  $n_I$ , on a que  $n_I = n_I; n_I$ , et donc  $n_I = \text{Id}$ . Supposons maintenant qu'on a un morphisme  $f$  de  $A$  vers  $I$ . Par naturalité de  $n$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & & I \\ & \searrow f & \\ n_A \downarrow & & \\ I & \xleftarrow{n_I (= \text{Id})} & I \end{array}$$

Et on a donc bien que  $I$  est terminal.

Finissons maintenant de montrer que  $c$ 'est un produit cartésien. Soit  $f : C \rightarrow A$  et  $g : C \rightarrow B$  deux morphismes. Alors

$$\langle f, g \rangle := \mathcal{M}_C; f \diamond g$$

vérifie bien :

$$\langle f, g \rangle; n \diamond \text{Id}; \lambda^\diamond = g$$

et

$$\langle f, g \rangle; \text{Id} \diamond n; \rho^\diamond = f$$

On utilise à chaque fois le fait que  $(A, n, \mathcal{M})$  est un co-monoïde commutatif. Et on fait de même pour montrer que ce morphisme est unique. Pour montrer que le bi-produit est un co-produit, on pourra faire un raisonnement similaire.  $\square$

*preuve de la propriété 25.* On a :

$$\nabla^\times = (m_{\uparrow}^{P,P})^{-1}; \uparrow \nabla$$

Pour montrer cela, on remarque que  $\nabla^\times = \text{Id} \times \text{Id}; \nabla^\times$ . Et que donc en pré-composant le membre droite de l'égalité par  $(\lambda^\times)^{-1}; u_{\uparrow P}^\times \times \text{Id}$  ou par  $(\rho^\times)^{-1}; \text{Id} \times u_{\uparrow P}^\times$  on obtient bien à chaque fois l'identité, comme  $\times$  est un co-produit, on a bien l'égalité. Et donc on a :

$$(m_{\uparrow}^{P,P})^{-1}; ?\nabla; \bar{d} = (m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \mathcal{E} \circ U(\nabla^\times); \bar{d}$$

Puisque  $m_{\uparrow}$  vient de la composition des trois foncteurs monoïdaux forts suivants :  $\mathcal{E}$ ,  $U$  et  $\uparrow$ .

Par naturalité de  $\bar{d}$ , on a :

$$(m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \mathcal{E} \circ U(\nabla^\times); \bar{d} = (m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \bar{d}; \nabla^\times$$

Et donc pour montrer notre égalité, il suffit de montrer :

$$\Delta^\times; (\bar{d} \wp \bar{w}) \times (\bar{w} \wp \bar{d}); \rho^\wp \wp \lambda^\wp = (m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}; \bar{d}$$

Comme  $\times$  est un produit, on a égalité si on a égalité en composant à chaque fois par les deux projections. Faisons donc cela pour le morphisme à gauche de l'égalité :

$$\begin{aligned} ?P \wp ?P &\xrightarrow{\Delta^\times} (?P \wp ?P) \times (?P \wp ?P) \xrightarrow{(\bar{d} \wp \bar{w}) \times (\bar{w} \wp \bar{d})} (\uparrow P \wp \perp) \times (\perp \wp \uparrow P) \xrightarrow{\rho^\wp \wp \lambda^\wp} \uparrow P \times \uparrow P \xrightarrow{n^\times \times \text{Id}} J \times \uparrow P \xrightarrow{\lambda^\times} \uparrow P \\ &= ?P \wp ?P \xrightarrow{\Delta^\times} (?P \wp ?P) \times (?P \wp ?P) \xrightarrow{n^\times \times \text{Id}} J \times (?P \wp ?P) \xrightarrow{\lambda^\times} ?P \wp ?P \xrightarrow{\bar{w} \wp \bar{d}} \perp \wp \uparrow P \xrightarrow{\lambda^\wp} \uparrow P \\ &= \bar{w} \wp \bar{d}; \lambda^\wp \end{aligned}$$

Et pour le morphisme à droite :

$$\begin{aligned} ?P \wp ?P &\xrightarrow{(m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}} \mathcal{E} \circ U(\uparrow P \times \uparrow P) \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P \times \uparrow P \xrightarrow{n^\times \times \text{Id}} J \times \uparrow P \xrightarrow{\lambda^\times} \uparrow P \\ &= ?P \wp ?P \xrightarrow{(m_{\mathcal{E} \circ U}^{\uparrow P, \uparrow P})^{-1}} \mathcal{E} \circ U(\uparrow P \times \uparrow P) \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^\times \times \text{Id})} \mathcal{E} \circ U(J \times \uparrow P) \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(\lambda^\times)} ?P \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P \\ &= ?P \wp ?P \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^\times) \wp \text{Id}} \mathcal{E} \circ U(J) \wp ?P \xrightarrow{(m_{\mathcal{E} \circ U}^{J, \uparrow P})^{-1}} \mathcal{E} \circ U(J \times \uparrow P) \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(\lambda^\times)} ?P \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P \end{aligned}$$

Or on a :

$$(m_{\mathcal{E} \circ U}^{J, A})^{-1} = m_{\mathcal{E} \circ U}^0 \wp \text{Id}; \lambda^\wp; \mathcal{E} \circ U((\lambda^\times)^{-1})$$

Et donc le terme d'avant est égal à :

$$?P \wp ?P \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^\times) \wp \text{Id}} \mathcal{E} \circ U(J) \wp ?P \xrightarrow{m_{\mathcal{E} \circ U}^0 \wp \text{Id}} J \times ?P \xrightarrow{\lambda^\wp} ?P \xrightarrow{\bar{d}} \uparrow P$$

Et par naturalité de  $\lambda^\wp$  le terme d'avant est égale à :

$$?P \wp ?P \xrightarrow{\mathcal{E} \circ U(n^\times) \wp \text{Id}} \mathcal{E} \circ U(J) \wp ?P \xrightarrow{m_{\mathcal{E} \circ U}^0 \wp \text{Id}} J \times ?P \xrightarrow{\text{Id} \wp \bar{d}} J \times \uparrow P \xrightarrow{\lambda^\wp} \uparrow P$$

Il nous reste donc à prouver que

$$\bar{w} = \mathcal{E} \circ U(n^\times); m_{\mathcal{E} \circ U}^0$$

On remarque alors qu'on a :

$$\mathcal{E} \circ U(n_{\uparrow P}^\times) = \mathcal{E} \circ U(\uparrow n; m_{\uparrow}^0)$$

Et on peut conclure. Pour montrer qu'on a égalité quand on compose par l'autre projection on raisonne de la même manière.  $\square$

