



**HAL**  
open science

# Une représentation d'état pour la commande en boucle fermée des écoulements cisailés

Johan Carlier, Christophe Collewet

► **To cite this version:**

Johan Carlier, Christophe Collewet. Une représentation d'état pour la commande en boucle fermée des écoulements cisailés. CFM 2019 - 24e Congrès Français de Mécanique, Aug 2019, Brest, France. pp.1-17. hal-02283161

**HAL Id: hal-02283161**

**<https://inria.hal.science/hal-02283161>**

Submitted on 10 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une représentation d'état pour la commande en boucle fermée des écoulements cisailés

Johan CARLIER<sup>a</sup>, Christophe COLLEWET<sup>b</sup>

Irstea, UR Opaale, F-35044 Rennes Cedex, France

Inria, Fluminance Project, F-35042 Rennes Cedex, France

a. johan.carlier@irstea.fr

b. christophe.collewet@inria.fr

## Résumé :

*Nous proposons dans cet article une représentation d'état générique pour la commande en boucle fermée des écoulements cisailés. L'objectif de la commande est ici de réguler ces écoulements autour d'un état stationnaire. Nous supposons que l'actionneur agit aux frontières du domaine et que l'état de l'écoulement peut être reconstruit à partir de mesures image. La méthodologie suivie pour la mise en œuvre du contrôle en boucle fermée consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes autour de l'état désiré, à discrétiser spatialement le système linéaire résultant et à déterminer le gain de retour d'état selon une loi de commande optimale. Une représentation d'état matricielle est ainsi obtenue pour l'écoulement de canal plan périodique et l'écoulement de couche de mélange spatiale. Après avoir vérifié la représentativité en terme de stabilité linéaire de la représentation d'état, le gain de retour d'état est implémenté dans un solveur 3D non-linéaire des équations de Navier-Stokes. Les résultats de simulation montrent que le gain de retour d'état stabilise l'écoulement de canal plan périodique, supprimant ainsi le développement du mode instable, et retarde l'apparition des tourbillons primaires dans la couche de mélange, en rejetant des perturbations endogènes relativement lentes survenant au niveau de la commande.*

## Abstract :

*In this paper, we propose a generic state representation for the closed-loop control of shear flows. The objective of the control is here to regulate these flows around a steady state. We assume that the actuator acts at the boundaries and that the state of the flow can be reconstructed from image sensors. The methodology followed for the implementation of the closed-loop control consists of linearizing the Navier-Stokes equations around the desired state, spatially discretizing the resulting linear system and determining the feedback gain according to an optimal control law. A state matrix representation is obtained for the periodic channel flow and the spatially developing mixing layer flow. After verifying the representativity in terms of linear stability, the control law is implemented in a nonlinear 3D solver of the Navier-Stokes equations. The simulation results show that the control law stabilizes the periodic channel flow, thereby suppressing the development of the unstable mode, and delays the onset of large eddies in the mixing layer, by rejecting relatively slow endogenous perturbations occurring on the command.*

**Mots clefs : Commande en boucle fermée ; écoulements cisailés.**

# 1 Introduction

La commande en boucle fermée des écoulements peut se formuler comme un problème d'automatique. La résolution de ce problème permet de spécifier une loi de commande en terme de performance et de robustesse. L'élaboration d'une loi de commande pour le contrôle d'un écoulement est rendue difficile par la non-linéarité des équations du mouvement (sans que ceci soit véritablement spécifique à la mécanique des fluides), mais aussi par la grande dimension du problème à résoudre et des difficultés pratiques liées à l'observabilité et la contrôlabilité en raison de capteurs et d'actionneurs aux performances souvent limitées.

Nous nous intéressons ici au problème de la régulation des écoulements cisailés pour lesquels les lignes de courant sont en moyenne parallèles ou presque parallèles (écoulements cisailés dirigés principalement dans une direction avec éventuellement une légère expansion). L'objectif est de maintenir un état désiré quelles que soient les perturbations qui peuvent l'affecter.

L'approche présentée est analogue à celle développée par Anda-Ondo *et al.* [15], dédiée à la commande en boucle fermée d'une couche de mélange spatiale. La discrétisation des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement désiré (et non perturbé) permet d'obtenir une représentation d'état matricielle décrite par un système linéaire et invariant en temps. L'actionneur agit au niveau des frontières de l'écoulement, ce qui est souvent le cas. L'état de l'écoulement est supposé pouvoir être reconstruit à partir de mesure image, ce qui n'est pas toujours possible mais de plus en plus pratiqué.

Nous nous sommes efforcés de rendre cette approche suffisamment générique pour qu'elle puisse s'appliquer à un large panel d'écoulements. Pour illustrer l'aspect générique de notre approche, nous proposons d'établir une représentation d'état matricielle pour la commande de deux écoulements de nature assez différente : l'écoulement de canal plan périodique et l'écoulement de couche de mélange spatiale. Cette représentation d'état matricielle est constituée de la matrice d'évolution et du vecteur de commande qui traduit l'effet de la commande sur l'écoulement.

L'écoulement de canal plan périodique est souvent utilisé dans la littérature pour évaluer les stratégies de commande en boucle fermée. Dans cette étude, nous considérons le cas du canal super-critique à  $Re = 10\,000$  dont la commande aux frontières par soufflage/aspiration périodique aux parois inférieure et supérieure du canal a pour objectif de stabiliser l'écoulement en s'opposant indirectement aux modes 2D linéairement instables qui s'amplifient au cœur de celui-ci.

La couche de mélange spatiale est un écoulement convectivement instable. Une perturbation impulsionnelle se déplace plus rapidement vers l'aval que son expansion spatiale, conduisant *in fine* à une décroissance en temps de son amplitude en n'importe quel point de l'espace. L'écoulement est donc stable et l'objectif de commande est ici de réguler la couche de mélange autour d'un état souhaité stationnaire en présence de perturbations entretenues et relativement lentes. Dans cette étude, la commande est de même nature que la perturbation. C'est donc une perturbation dite endogène, en l'occurrence un forçage au niveau du cisaillement, en amont de l'écoulement.

La méthode classique de la théorie du contrôle utilisée est un régulateur linéaire-quadratique (LQR) permettant de concevoir une loi de commande par retour d'état appliquée à une dynamique d'écoulement turbulent par essence non-linéaire [1, 2]. En parvenant à réguler un système représentatif (un solveur Navier-Stokes 3D) des deux écoulements considérés autour d'un état désiré stationnaire, nous souhaitons moins montrer l'aptitude d'une loi de commande basée sur un modèle physique connu *a priori* pour le contrôle des écoulements que souligner son potentiel pour la compréhension des mécanismes mis en jeu

pour rendre la commande efficace.

Le document est structuré comme suit. La section 2 est consacrée à la modélisation de l'écoulement et à la conception de la loi de commande. La section 3 décrit les écoulements contrôlés et informe sur la représentativité de la modélisation en terme de stabilité. La section 4 présente les performances de la loi de commande implémentée dans le solveur Navier-Stokes 3D.

## 2 Modélisation pour la commande

L'objectif de cette section est de déduire un système continu et linéaire décrivant l'évolution de petites perturbations autour d'un écoulement de base stationnaire. Ce système linéaire est complété par un terme de forçage représentatif d'une commande, voire d'une perturbation, située aux frontières. Une loi de commande pour la régulation de ce système est obtenue en utilisant une méthode simple de contrôle optimal par retour d'état.

### 2.1 Équations d'évolution

Pour un fluide incompressible et Newtonien, l'écoulement d'un fluide visqueux est décrit par les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité. La forme adimensionnée du système résultant est donnée par :

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathbf{u}^\top \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla^\top \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\nabla = [\partial_x \ \partial_y \ \partial_z]^\top$  est l'opérateur différentiel gradient et  $\Delta = \nabla^\top \nabla = (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})$  est l'opérateur différentiel de Laplace. Les variables adimensionnées sont la vitesse  $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^\top$  et la pression  $p$ . La viscosité dynamique du fluide  $\mu$  apparaît dans ce système comme un paramètre sans dimension : le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu}$  où  $\rho_0$  est l'échelle de masse volumique,  $U_0$  est l'échelle de vitesse et  $L_0$  est l'échelle de longueur de l'écoulement.

Nous considérons ici le cas d'un écoulement désiré stationnaire parallèle à l'axe  $x$  et cisailé selon  $y$ , avec  $\mathbf{U}_b = [U_b(y) \ 0 \ 0]^\top$  et  $P_b$  solution du système :

$$\begin{cases} (\mathbf{U}_b^\top \nabla) \mathbf{U}_b = -\nabla P_b + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U}_b, \\ \nabla^\top \mathbf{U}_b = 0, \end{cases} \quad (2)$$

augmenté de conditions limites appropriées.

En supposant les fluctuations  $\mathbf{u}_d = [u_d \ v_d \ w_d]^\top$  et  $p_d$  petites autour de la solution de base, avec  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_b + \mathbf{u}_d$  et  $p = P_b + p_d$ , le système (1) peut alors être linearisé et réduit, donnant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_d \\ \dot{v}_d \\ \dot{w}_d \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_b \partial_x + \frac{1}{Re} \Delta & -\partial_y U_b & 0 & -\partial_x \\ 0 & -U_b \partial_x + \frac{1}{Re} \Delta & 0 & -\partial_y \\ 0 & 0 & -U_b \partial_x + \frac{1}{Re} \Delta & -\partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ v_d \\ w_d \\ p_d \end{bmatrix}, \quad (3)$$

où  $\dot{(\ )}$  indique une dérivation en temps.

La formulation vorticité-fonction de courant du système (3) permet de s'affranchir du terme de pression  $p_d$  [3, 4, 5]. En se limitant au cas d'un écoulement incompressible et bidimensionnel, la fonction

de courant s'écrit :

$$U_b = +\partial_y \Psi_b, \quad (4)$$

$$u_d = +\partial_y \psi_d, \quad (5)$$

$$v_d = -\partial_x \psi_d, \quad (6)$$

et la vorticité est seulement définie par sa composante selon  $z$  :

$$\Omega_b = -\Delta \Psi_b, \quad (7)$$

$$\omega_d = -\Delta \psi_d. \quad (8)$$

La formulation vorticité-fonction de courant du système (3) est alors donnée par l'équation différentielle homogène suivante :

$$\Delta \dot{\psi}_d = \Gamma \psi_d, \quad (9)$$

où  $\Gamma = [-U_b \partial_x \Delta + U_b'' \partial_x + \frac{1}{Re} \Delta^2]$  est un opérateur différentiel dans lequel  $U_b''(y)$  est la dérivée seconde de  $U_b(y)$ . Notons qu'une perturbation de type onde plane progressive conduit l'éq. (9)   l'équation de Rayleigh ou d'Orr-Sommerfeld [4, 6].

## 2.2 Contrôles aux frontières

Nous considérons ici le cas d'un contrôle aux frontières. Le contrôle au niveau des conditions limites associées à l'éq. (9) est converti en un contrôle par forçage pour se conformer à la modélisation usuelle de l'automatique [7, 8, 5, 9]. Pour ce faire, la fonction de courant est scindée en deux parties :

$$\psi_d = \psi_h + \psi_c, \quad (10)$$

où  $\psi_h(x, y, t)$  décrit l'écoulement avec des conditions de Dirichlet homogènes et  $\psi_c(x, y, t)$  spécifie le contrôle à la frontière du domaine et modélise son effet à l'intérieur du domaine.

En substituant cette décomposition dans l'éq. (9), nous obtenons l'équation différentielle inhomogène suivante :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\psi}_h = \Gamma \psi_h - (\Delta \dot{\psi}_c - \Gamma \psi_c) & \text{dans } \Omega, \\ \psi_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1, \\ \psi_h = \text{  spécifier} & \text{sur } \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (11)$$

avec

- $\partial\Omega_1$  : le segment de frontière où le contrôle agit ;
- $\partial\Omega_2$  : le reste de la frontière avec des conditions limites appropriées à l'écoulement considéré.

La substitution de  $\psi_c(x, y, t) = f(x, y) \phi(t)$  dans l'éq. (11) donne :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\psi}_h = \Gamma \psi_h - (\Delta f \dot{\phi} - f_\Gamma \phi) & \text{dans } \Omega, \\ \psi_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12)$$

où  $\phi(t)$  est le signal de commande (scalaire ici), et  $f_\Gamma(x, y)$  est l'opérateur différentiel  $\Gamma$  appliqué à  $f(x, y)$ .

## 2.3 Discrétisation du modèle linéarisé

Nous considérons ici un domaine  $\Omega$  rectangle de dimension  $L_x$  par  $L_y$ . La discrétisation de l'éq. (12) est réalisée en utilisant un schéma aux différences finies. La fonction de courant  $\psi_h$  est d'abord discrétisée sur une grille cartésienne et les dérivées spatiales sont approchées en utilisant des schémas compacts d'ordre élevé. Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\psi}}_h = \mathbf{G}\boldsymbol{\psi}_h - \mathbf{F}\dot{\phi} + \mathbf{F}_\Gamma\phi, \quad (13)$$

où  $\boldsymbol{\psi}_h$  est la matrice colonne :

$$\boldsymbol{\psi}_h = [[\psi_{1,1} \cdots \psi_{nx,1}] \cdots [\psi_{1,ny} \cdots \psi_{nx,ny}]]^\top, \quad (14)$$

avec  $\psi_{i,j} = \psi_h(x_i, y_j)$  et où  $\boldsymbol{\psi}_h$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}_\Gamma$  sont des vecteurs de dimension  $(nx \times ny)$  avec  $\mathbf{F} := f$  et  $\mathbf{F}_\Gamma := \Gamma f$ . Aussi,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{G}$  sont des matrices de différentiation discrètes de plein rang de dimension  $(nx \times ny)$  avec  $\mathbf{L} := \Delta$  et  $\mathbf{G} := \Gamma$ .

Pour formuler le problème à résoudre comme un système linéaire invariant et continu en temps, soit une formulation classique en théorie du contrôle, nous introduisons le vecteur d'état ci-dessous :

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\psi}_h + \mathbf{F}\phi, \quad (15)$$

conduisant à :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (16)$$

où :

- $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{G}$  est la matrice d'état ;
- $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{F}_\Gamma - \mathbf{G}\mathbf{F})$  est la matrice de commande ;
- $\mathbf{U} = [\phi]$  est le vecteur de commande.

Le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  (voir éq. 15) est en fait la fonction de courant  $\psi_d$  (voir éq. 10) évaluée sur une grille cartésienne rectangulaire (voir éq. 14). Ainsi, l'état de l'écoulement peut être obtenu aisément et de manière précise en utilisant un capteur image associé à un algorithme d'estimation de mouvement [10]. Notons que l'utilisation d'un capteur image dans ce contexte de contrôle en boucle fermée d'écoulement de fluide a déjà été utilisée et validée [9, 11].

## 2.4 Loi de commande

À partir du système (16), il est aisé d'appliquer les méthodes classiques du contrôle en boucle fermée. Dans notre étude, nous proposons d'utiliser un régulateur linéaire-quadratique (LQR) à horizon infini. La fonctionnelle à minimiser est :

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{X}^\top(t) \mathbf{Q}\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^\top(t) \mathbf{R}\mathbf{U}(t)] dt, \quad (17)$$

avec  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top \geq 0$  et  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^\top > 0$ .

La matrice  $\mathbf{Q}$  peut être par exemple la matrice identité, la matrice relative à l'énergie cinétique du système [5] ou la matrice relative à l'ensrophie.

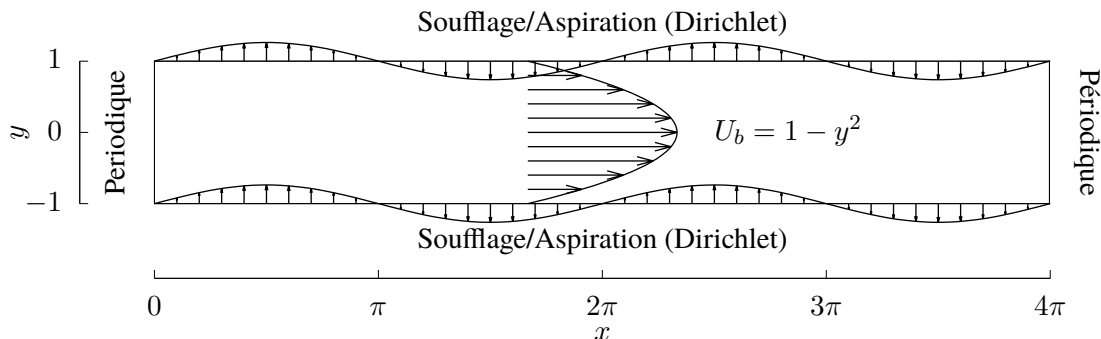


FIGURE 1 – Illustration de l'écoulement de canal périodique.

Ainsi, le signal de commande est obtenu par un retour d'état :

$$\mathbf{U}(t) = [\phi(t)] = -\mathbf{K}\mathbf{X}(t), \quad (18)$$

avec  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}$  la solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (19)$$

### 3 Description et analyse du système linéaire

L'implémentation du modèle d'espace d'état et la résolution du problème de contrôle optimal ont été réalisées avec Matlab 2015b. Deux configurations d'écoulement jugées complémentaires ont été retenues : l'écoulement de canal périodique et l'écoulement de couche de mélange spatiale. Cette section présente ces deux configurations d'écoulement et quelques résultats de stabilité à travers l'étude de la matrice d'état  $\mathbf{A}$  et de la répartition spatiale du gain de retour d'état  $\mathbf{K}$  résultant du problème de contrôle optimal.

#### 3.1 Configurations d'écoulements

Les figures 1 et 2 sont une illustration des deux écoulements considérés et donnent quelques informations sur les géométries, les dimensions et les conditions limites retenues.

L'écoulement de canal périodique est couramment utilisé pour évaluer les stratégies de contrôle. C'est un écoulement linéairement instable en régime supercritique ( $Re > 5772$ ), les modes les plus instables se produisant pour des perturbations 2D. La stabilisation de l'écoulement dans ce régime est possible (du moins pour de petites perturbations) en utilisant un dispositif de contrôle réparti périodiquement sur les parois. Pour le régime souscritique ( $Re \leq 5772$ ), l'amplification linéaire transitoire des perturbations 3D peut être suffisamment importante pour déclencher des effets non-linéaires. Dans une telle situation, la minimisation de la croissance d'énergie transitoire est recherchée pour éviter le basculement de l'écoulement vers la turbulence. Dans cette étude où le modèle d'espace d'état est 2D, nous avons considéré le cas du canal supercritique bien documenté, à  $Re = 10\,000$  et avec soufflage/aspiration en

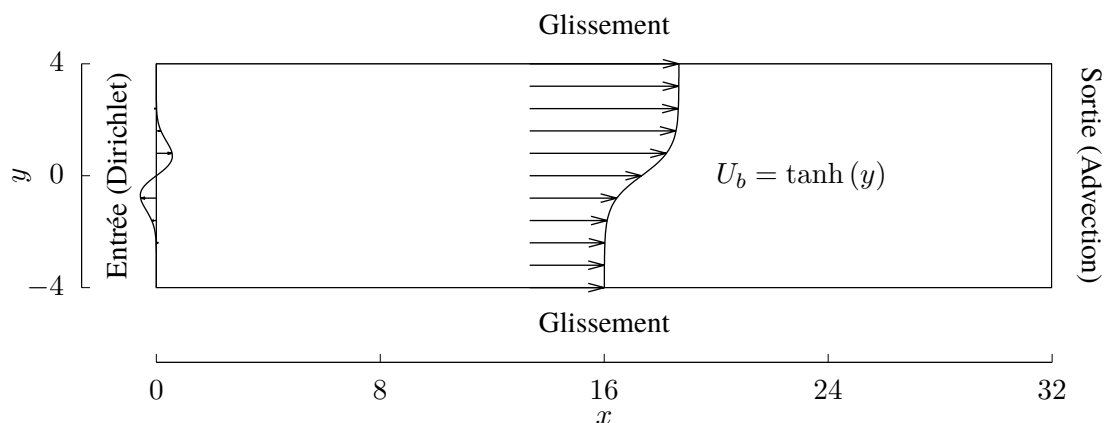


FIGURE 2 – Illustration de l'écoulement de couche de mélange spatiale.

phase sur la paroi inférieure et supérieure du canal, et de même périodicité que le mode instable ( $2\pi$ ). Plus précisément, le contrôle consiste à modifier l'amplitude des fonctions sinusoïdales, soit un contrôle à un degré de liberté commandé.

La couche de mélange se développant spatialement amplifie les perturbations initiales et les transporte en aval de l'écoulement. Les perturbations s'éloignent suffisamment rapidement de leur point de départ si bien que localement (point de vue d'Euler), leur amplitude finit pas décroître au cours du temps. L'écoulement est donc stable, mais on le désigne plus couramment par convectivement instable. Dans cette étude, nous souhaitons réguler la couche de mélange spatiale autour d'un état souhaité stable en rejetant des perturbations endogène (de même nature que la commande) relativement lentes survenant en amont de l'écoulement et au niveau de la couche cisailée.

Le contrôle optimal par régulateur linéaire-quadratique (LQR) à horizon infini s'appuie essentiellement sur la matrice d'état  $\mathbf{A}$ , la matrice de commande  $\mathbf{B}$  et les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  apparaissant dans la définition du coût. Ces matrices sont implémentées dans Matlab 2015b conformément à ce qui est décrit dans la section 2.

**Le calcul numérique de la matrice d'état  $\mathbf{A}$**  est effectué en utilisant les caractéristiques d'écoulements suivantes :

**Canal périodique :** Le domaine de calcul ( $L_x \times L_y = 4\pi \times 2$ ) est discrétisé sur une grille cartésienne de  $n_x \times n_y = 33 \times 65$  nœuds avec  $x = [0, 4\pi]$  et  $y = [-1, 1]$ . Le profil de vitesse de base est parabolique avec  $U_b = 1 - y^2$  et les conditions limites sont  $\psi_h(-1) = \psi_h(+1) = 0$ . Due à la nature visqueuse de l'instabilité, le nombre de Reynolds est considéré comme un paramètre ( $Re = 10\,000$ ).

**Couche de mélange spatiale :** Le domaine de calcul ( $L_x \times L_y = 32 \times 8$ ) est discrétisé sur une grille cartésienne de  $n_x \times n_y = 65 \times 33$  nœuds avec  $x = [0, 64]$  et  $y = [-4, 4]$ . Le profil de vitesse de base est en tangente hyperbolique  $U_b = \tanh(y)$  et les conditions limites sont  $\psi_h(-4) = \psi_h(+4) = 0$ . Due à la nature non-visqueuse de l'instabilité, le terme de diffusion n'est pas pris en compte.

**La matrice de commande  $\mathbf{B}$**  résulte principalement de la définition de la matrice  $\mathbf{F}$ , correspondant à la discrétisation de  $f(x, y)$  décrivant l'effet de l'actionneur aux frontières du domaine et à l'intérieur de



celui-ci. Nous choisissons  $f(x, y) = g(x)h(y)$  avec :

$$g(x) = \frac{1}{a} \cos(ax), \quad (20)$$

$$h(y) = b - (1 - b) \cos(\pi y), \quad (21)$$

pour le canal périodique (soit un soufflage/aspiration avec  $a = 1$  et  $b = 0.5$ ) et

$$g(x) = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad (22)$$

$$h(y) = -\frac{b}{2} e^{-\left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad (23)$$

pour la couche de mélange spatiale (un contrôle localisé au niveau de la couche cisailé avec  $a = 4$  et  $b = 1$ ).

**Parmi les différents choix de  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$** , nous avons opté pour  $\mathbf{Q} = q^2 \mathbf{I}$  et  $\mathbf{R} = r^2 \mathbf{I}$ , donnant des résultats tout à fait satisfaisant avec  $q = 10$  et  $r = 1$ .

## 3.2 Stabilité

L'évolution temporelle d'une perturbation initiale  $\mathbf{X}(t_0)$  est donnée par l'intégration en temps de l'éq. (16) donnant :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Soient  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{V}$  les valeurs et vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ , avec par définition  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1}$ , l'éq. (24) sans terme de forçage conduit à une évolution exponentielle de la perturbation initiale :

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(t_0) e^{\mathbf{S}(t-t_0)}. \quad (25)$$

Si au moins une valeur propre  $s$  (élément diagonal de la matrice diagonale  $\mathbf{S}$ ) a une partie réelle positive  $\Re(s) > 0$  (la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe  $z$  sont notées  $\Re(z)$  et  $\Im(z)$ ), la perturbation augmente de façon exponentielle et le système est instable.

L'analyse de la stabilité hydrodynamique est souvent conduite en tenant compte du comportement d'une perturbation de type onde plane progressive. La fonction de courant d'une telle perturbation s'écrit :

$$\mathbf{X}(t) = [\Psi_d(y)] e^{i\alpha(x-ct)}, \quad (26)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  le nombre d'onde et  $c \in \mathbb{C}$  la vitesse de phase. En substituant cette perturbation dans l'éq. (25), nous obtenons une relation entre valeurs propres, nombres d'onde et vitesses de phase :

$$s = -i\alpha c. \quad (27)$$

Les figures 3 et 4 montrent l'évolution du taux de croissance maximum  $[\alpha \Im(c)]_{\max}$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$ . Pour obtenir ce résultat, nous avons construit une version  $\alpha$ -dépendante de la matrice  $\mathbf{A}$  dans laquelle l'approximation de la dérivée dans la direction  $x$  a été substituée par la dérivée exacte ( $\partial_x^k = (i\alpha)^k$ ). Par ailleurs, nous avons considéré spécifiquement dans cette section la couche de mélange temporelle, mieux documentée, plutôt que spatiale, en substituant les conditions d'entrée-sortie par une condition de périodicité.

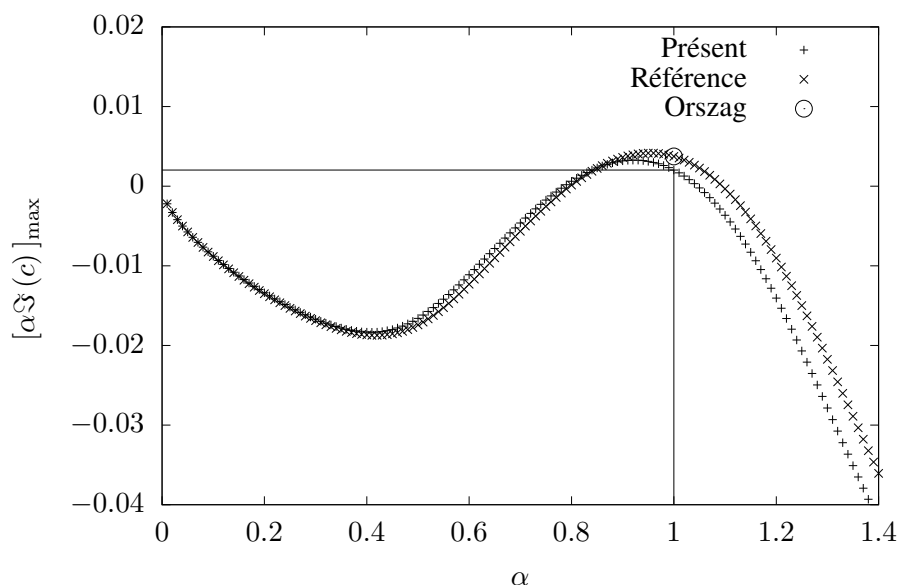


FIGURE 3 – Évolution du taux de croissance maximum  $[\alpha \mathfrak{S}(c)]_{\max}$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  dans le cas du canal périodique (profil de base parabolique  $U_b = 1 - y^2$  avec  $Re = 10\,000$ ) et d'une perturbation de type onde plane progressive. Comparaison entre résultat présent, résultat de référence utilisant une méthode spectrale et résultat de référence de Orszag [12]. Le taux de croissance maximum sans *a priori* sur le type de perturbation est marqué pas les coordonnées  $(1, 0.002021)$ .

Ces résultats sont ainsi confrontés aux résultats de référence donnés par Michalke [13] pour la couche de mélange temporelle et par Orszag [12] pour le canal périodique. Les résultats de référence sont éparés et sont donc complétés par un calcul précis effectué avec la bibliothèque MATLAB de Weideman et Reddy [14] pour la résolution d'équations différentielles par méthode de collocation spectrale. La matrice de différentiation  $\mathbf{A}$  correspondant à l'équation d'Orr-Sommerfeld avec un profil de base parabolique  $U_b = 1 - y^2$  et les conditions limites  $\psi_h(-1) = \psi_h(+1) = 0$  a été calculée par une interpolation de Chebyshev à 200 points de collocation. La matrice de différentiation  $\mathbf{A}$  correspondant à l'équation de Rayleigh avec un profil de base en tangente-hyperbolique  $U_b = \tanh(y)$  et des conditions limites rejetées à l'infini  $\psi_h(-\infty) = \psi_h(+\infty) = 0$  a été calculée par une interpolation de Hermite à 200 points de collocation également.

La discrétisation du modèle linéarisé (section 2.3) avec un petit nombre de points de collocation en  $y$  pour limiter la dimension du système linéaire (65 pour le canal et 33 pour la couche de mélange, contre 200 pour les résultats de référence), génère un écart relativement faible entre les résultats présentés et de référence. Cette discrétisation est donc suffisante pour que notre système reproduise de manière satisfaisante la nature et les caractéristiques de stabilité des écoulements considérés. À noter qu'une partie de cet écart dans le cas spécifique de la couche de mélange temporelle est due aux conditions limites bornées utilisées.

La résolution du problème aux valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sans *a priori* sur le type de perturbation a également été effectuée. La représentation spatiale des vecteurs propres associés au mode le plus instable est donnée aux figures 5 et 6. Nous pouvons identifier un train de structures tourbillonnaires de périodicité

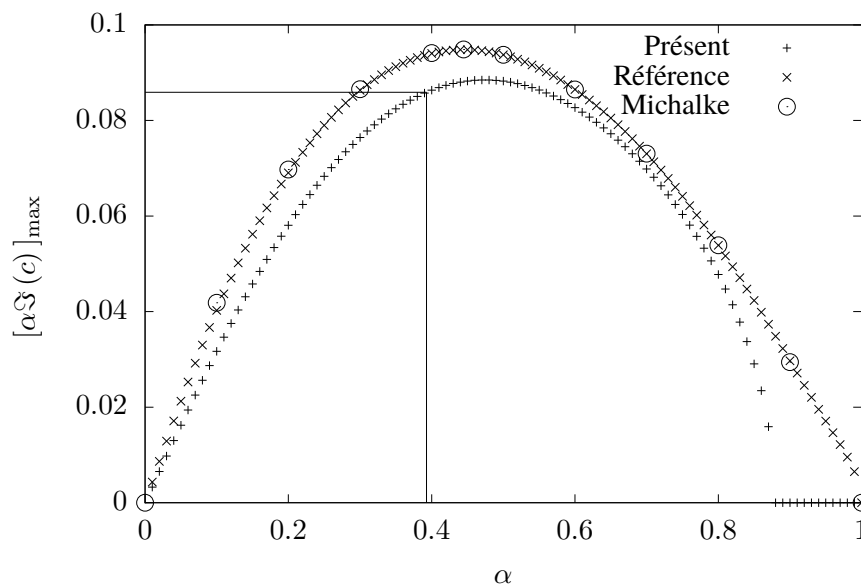


FIGURE 4 – Évolution du taux de croissance maximum  $[\alpha\mathfrak{S}(c)]_{\max}$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  dans le cas de la couche de mélange temporelle (profil de base en tangente-hyperbolique  $U_b = \tanh(y)$ ) et d'une perturbation de type onde plane progressive. Comparaison entre résultat présent, résultat de référence utilisant une méthode spectrale et résultat de référence de Michalke [13]. Le taux de croissance maximum sans *a priori* sur le type de perturbation est marqué par les coordonnées  $(\frac{\pi}{8}, 0.085907)$ .

spatiale  $\alpha = 1$  correspondant à un taux de croissance maximum de  $[\alpha\mathfrak{S}(c)]_{\max} = 0.002021$  pour le canal périodique et  $\alpha = \frac{\pi}{8}$  correspondant à un taux de croissance maximum de  $[\alpha\mathfrak{S}(c)]_{\max} = 0.085907$  pour la couche de mélange temporelle.

En reportant ces valeurs dans les figures 3 et 4, nous pouvons constater que l'on retrouve assez précisément le taux de croissance maximum associé au nombre d'onde correspondant à la périodicité longitudinale identifiée dans la représentation spatiale des vecteurs propres. Cela montre principalement que le système linéaire établi dans les sections 2 et 3.1 est bien représentatif du comportement des écoulements considérés et accessoirement que la matrice d'état  $\alpha$ -dependante peut bien être utilisée pour examiner le taux de croissance maximal en fonction du nombre d'onde  $\alpha$ .

### 3.3 Gain de retour d'état

Le signal de commande est donné par l'éq. (18) rappelée ci-dessous :

$$[\phi(t)] = -\mathbf{K}\mathbf{X}(t),$$

où  $\mathbf{X}$  est un vecteur colonne représentant l'état du système et  $\mathbf{K}$  un vecteur ligne représentant le gain de retour d'état. À chaque composante de l'état est donc associée une composante du gain de retour d'état. Une représentation spatiale de ce gain  $\mathbf{K}$  est donc possible, ce qui est réalisée figures 7 et 8 pour le canal périodique et la couche de mélange spatiale.

Dans le cas du canal périodique, le gain de retour d'état semble être actif en proche paroi alors même que la perturbation se développe plutôt au centre du canal (Fig. 5), tout au moins d'un point de vue énergé-

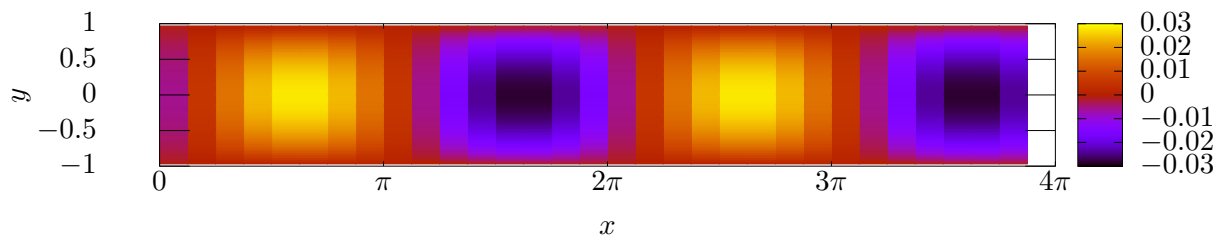


FIGURE 5 – Représentation spatiale du vecteur propre associé à un taux de croissance maximum  $[\alpha \mathfrak{S}(c)]_{\max} = 0.002021$  dans le cas du canal périodique (profil de base parabolique  $U_b = 1 - y^2$  avec  $Re = 10\,000$ ). La périodicité longitudinale correspond manifestement à un nombre d'onde  $\alpha = 1$ .

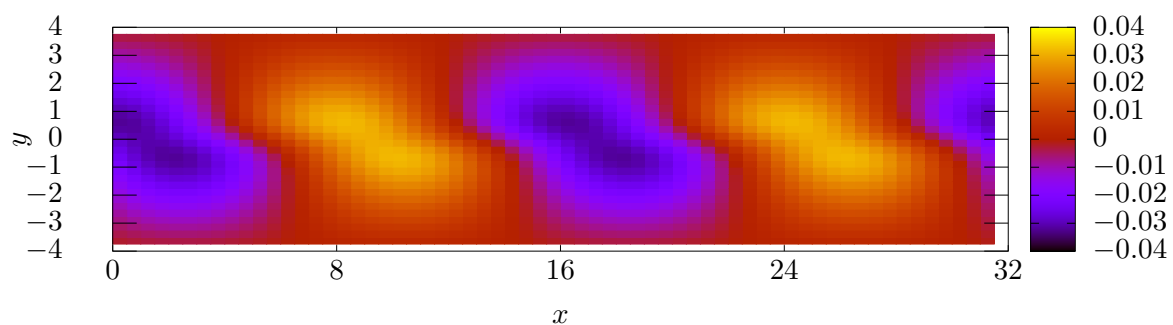


FIGURE 6 – Représentation spatiale du vecteur propre associé à un taux de croissance maximum  $[\alpha \mathfrak{S}(c)]_{\max} = 0.085907$  dans le cas de la couche de mélange temporelle (profil de base en tangente-hyperbolique  $U_b = \tanh(y)$ ). La périodicité longitudinale correspond manifestement à un nombre d'onde  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .

tique. On y retrouve la périodicité en  $2\pi$  choisie pour la répartition longitudinale du soufflage/aspiration pariétale (éq. 21), en accord avec la périodicité de l'onde plane correspondant au taux de croissance maximum.

Dans le cas de la couche de mélange spatiale, le gain de retour d'état semble correspondre à un train de tourbillons de Kelvin-Helmholtz (alors qu'il n'y a aucun *a priori* dans la méthode LQR sur la présence de perturbations en fréquence). L'amplitude du gain de retour d'état diminue en aval et de part et d'autre de la couche de mélange, de sorte que la région de grande amplitude se limite aux environs du début de la couche de cisaillement.

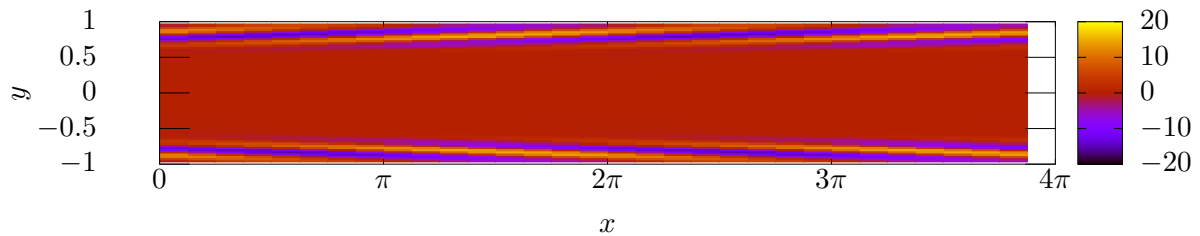


FIGURE 7 – Représentation spatiale du gain de retour d'état dans le cas du canal périodique.

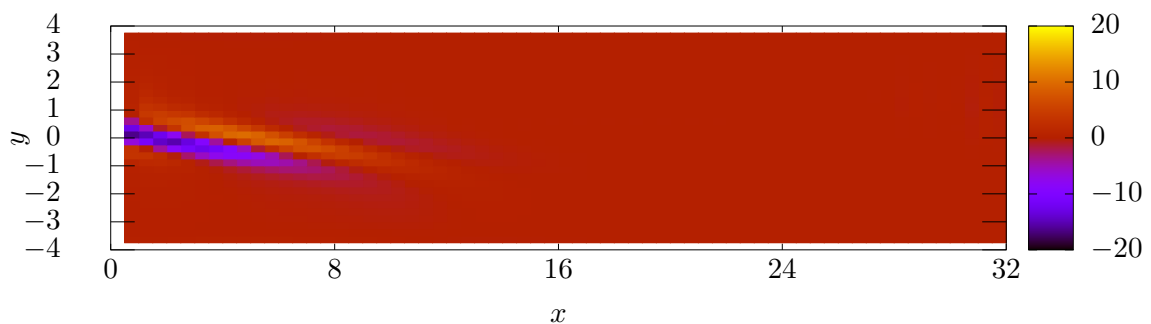


FIGURE 8 – Représentation spatiale du gain de retour d'état dans le cas de la couche de mélange spatiale.

## 4 Contrôle en boucle fermée

Le canal périodique à  $Re = 10\,000$  est un écoulement instable. Un bruit initial ajouté au profil de base suffit à conduire au développement d'une onde plane progressive de périodicité  $2\pi$  avec un taux de croissance exponentiel de 0.002021.

La couche de mélange spatiale est un écoulement stable. Sans perturbation entretenue, le système converge naturellement vers la solution stable  $\mathbf{U}_b$ . Nous introduisons donc une perturbation périodique  $\omega(t)$  endogène (de même nature que la commande) agissant au niveau de la condition d'entrée afin d'éprouver la loi de commande obtenue. Le système (16) est ainsi modifié comme suit :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}[\phi(t) + \omega(t)], \quad (28)$$

et la loi de commande par retour d'état devient :

$$\phi(t) = -\mathbf{K}\mathbf{X}(t) - \hat{\omega}(t), \quad (29)$$

où  $\hat{\omega}$  est un estimé de la perturbation  $\omega$ . Cet estimé est obtenu en résolvant en ligne un système issu du système précédent (voir [15]).

Les lois de commande sont implémentées dans Incompact3d, un solveur des équations de Navier-Stokes incompressible publié sous licence GNU GPL v3 [16, 17, 18]. Le solveur Incompact3d est configuré comme suit :

**Canal périodique :** Le domaine de calcul 3D a une taille de  $L_x \times L_y \times L_z = 4\pi \times 2 \times \pi$ . Ce domaine est discrétisé sur un maillage cartésien de  $n_x \times n_y \times n_z = 256 \times 129 \times 8$  nœuds. Le signal de commande fixe la condition de Dirichlet au niveau des parois. Une première séquence est simulée pour déterminer l'état de base de l'écoulement. Cette séquence est ensuite poursuivie en ajoutant un bruit initial avec la commande activée ou non.

**Couche de mélange spatiale :** Le domaine de calcul 3D a une taille de  $L_x \times L_y \times L_z = 256 \times 256 \times 4$ . Ce domaine est discrétisé sur un maillage cartésien (étiré en  $y$ ) de  $n_x \times n_y \times n_z = 513 \times 257 \times 8$  nœuds. Le signal de commande et la perturbation fixent la condition de Dirichlet à l'entrée du domaine. Une première séquence est simulée pour déterminer l'état de base de l'écoulement. Cette séquence est ensuite poursuivie en activant la perturbation pour obtenir *in fine* un écoulement avec une perturbation complètement développée. Cette seconde séquence est à son tour poursuivie avec la commande activée ou non.

Pour ces deux écoulements, le nombre de nœuds selon l'envergure  $z$  est minimal, ce qui a pour conséquence une réduction du temps de calcul et un écoulement quasi-2D, l'aspect 3D étant superflu puisque nous souhaitons mettre en avant le contrôle linéaire d'un écoulement non-linéaire. La fonction de courant (variable d'état du système linéaire à mesurer) est calculée par intégration du champ de vitesse.

Les figures 9 et 11 montrent pour les deux écoulements l'évolution temporelle de la norme du vecteur d'état avec la commande activée ou non. Les figures 10 et 12 montrent l'évolution temporelle de la commande générée par l'évolution de l'état du système commandé.

Pour le canal périodique, la commande permet de stabiliser l'écoulement en évitant la croissance exponentielle du mode instable (droite dans cette représentation semi-logarithmique). La commande générée oscille dans une enveloppe d'amplitude exponentiellement décroissante, suggérant une paire de modes conjugués à partie réelle faiblement négative et partie complexe élevée dans les valeurs propres du système réel commandé. Pour la couche de mélange, la norme du vecteur d'état est réduite de plusieurs ordres de grandeur lorsque le contrôle est activé. Cette performance est atteinte en raison d'une commande qui s'oppose à la perturbation et grâce à un estimateur performant de la perturbation.

## 5 Conclusion

Nous avons montré l'aptitude d'un contrôle en boucle fermée par retour d'état pour stabiliser un écoulement de canal plan périodique, en supprimant le développement du mode instable, et pour réguler un écoulement de couche de mélange spatialement stable, en rejetant les perturbations (endogènes) relativement lentes survenant au niveau de la commande.

Pour ce faire, un soin particulier a été apporté à l'élaboration du modèle linéarisé avec notamment l'utilisation d'opérateurs matriciels de différentiation basés sur les schémas compacts. Dans le cas de perturbations de type onde plane, nous avons pu reproduire le comportement en terme de stabilité linéaire de l'écoulement de canal plan périodique obtenu par Orszag [12] et de la couche de mélange temporelle obtenue par Michalke [13], validant ainsi notre représentation d'état.

Par la suite, nous souhaitons poursuivre ce travail en considérant un contrôle à plusieurs degrés de liberté et un état désiré instationnaire correspondant à une organisation spatio-temporelle particulière des écoulements avantageuse en terme d'applications industrielles. À plus long terme, il s'agira de viser la réalisation effective d'un contrôle en boucle fermée dans le cas particulier de la couche de mélange dans notre soufflerie dédiée [19].

## Références

- [1] J. Kim and T. R. Bewley. A linear systems approach to flow control. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 39 (1) :383–417, 2007. doi : 10.1146/annurev.fluid.39.050905.110153.
- [2] S. L. Brunton and B. R. Noack. Closed-loop turbulence control : Progress and challenges. *Applied Mechanics Reviews*, 67(5) :050801–050801, 2015. doi : 10.1115/1.4031175.
- [3] T. R. Bewley. Flow control : new challenges for a new renaissance. *Progress in Aerospace Sciences*, 37(1) :21–58, 2001. doi : 10.1016/S0376-0421(00)00016-6.
- [4] P. J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and transition in shear flows*, volume 142. Springer, 2001.
- [5] J. McKernan. *Control of Plane Poiseuille Flow : A theoretical and Computational Investigation*. PhD thesis, Cranfield University, School of Engineering, 2006.
- [6] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004. doi : 10.1017/CBO9780511616938.
- [7] S. S. Joshi, J. L. Speyer, and J. Kim. A systems theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite-amplitude disturbances in plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 332 : 157–184, 1997.
- [8] S. S. Joshi, J. L. Speyer, and J. Kim. Finite dimensional optimal control of poiseuille flow. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 22(2) :340–348, 1999. doi : 10.2514/2.4383.
- [9] R. Tatsambon Fomena and C. Collewet. Fluid flow control : a vision-based approach. *Int. Journal of Flow Control*, 3(2) :133–169, 2011.
- [10] D. Heitz, E. Mémin, and C. Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Experiments in Fluids*, 48(3) :369–393, 2010. doi : 10.1007/s00348-009-0778-3.
- [11] N. Gautier and J.-L. Aider. Feed-forward control of a perturbed backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 759 :181–196, 2014. doi : 10.1017/jfm.2014.518.
- [12] S. A. Orszag. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50(04), 1971. doi : 10.1017/S0022112071002842.
- [13] A. Michalke. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, 23 : 521–544, 1965. doi : 10.1017/S0022112065001520.

- [14] J. A. C. Weideman and S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 26(4) :465–519, 2000. doi : 10.1145/365723.365727. URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=365723.365727>.
- [15] D. Anda-Ondo, J. Carlier, and C. Collewet. Contrôle en boucle fermée d’une couche de mélange spatiale. In *23<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Lille (France), August 28-Septembre 1 2017.
- [16] S. Laizet and E Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *J. Comput. Phys.*, 228(16) :5989–6015, 2009. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.010>.
- [17] S. Laizet, E. Lamballais, and J. C. Vassilicos. A numerical strategy to combine high-order schemes, complex geometry and parallel computing for high resolution DNS of fractal generated turbulence. *Computers & Fluids*, 39(3) :471–484, 2010. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2009.09.018>.
- [18] S. Laizet and N. Li. Incompact3d : A powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $o(10^5)$  computational cores. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(11) :1735–1757, 2011. doi : 10.1002/flid.2480.
- [19] K. Sodjavi and J. Carlier. Experimental study of thermal mixing layer using variable temperature hot-wire anemometry. *Experiments in Fluids*, 54(10) :1–19, 2013.



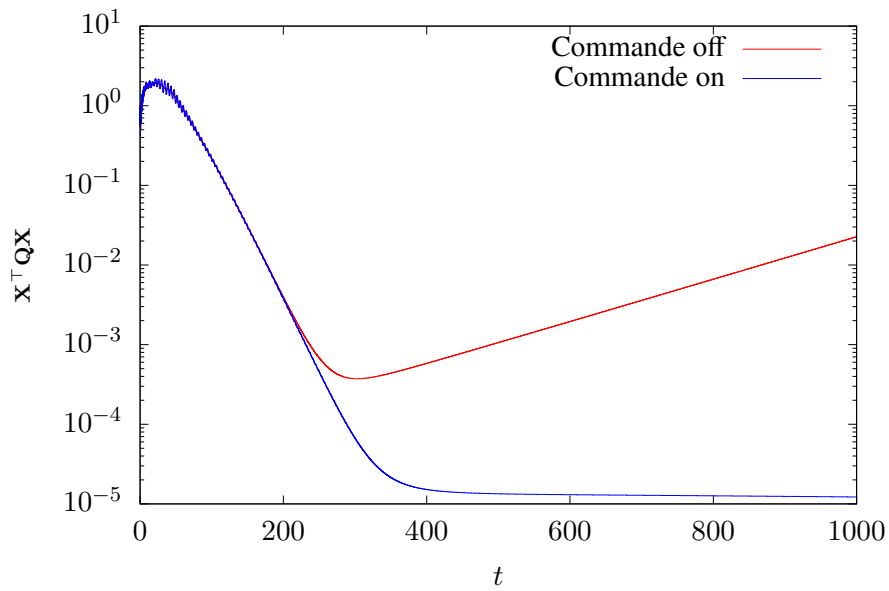


FIGURE 9 – Évolution de la norme du vecteur d'état avec et sans contrôle dans le cas du canal périodique.

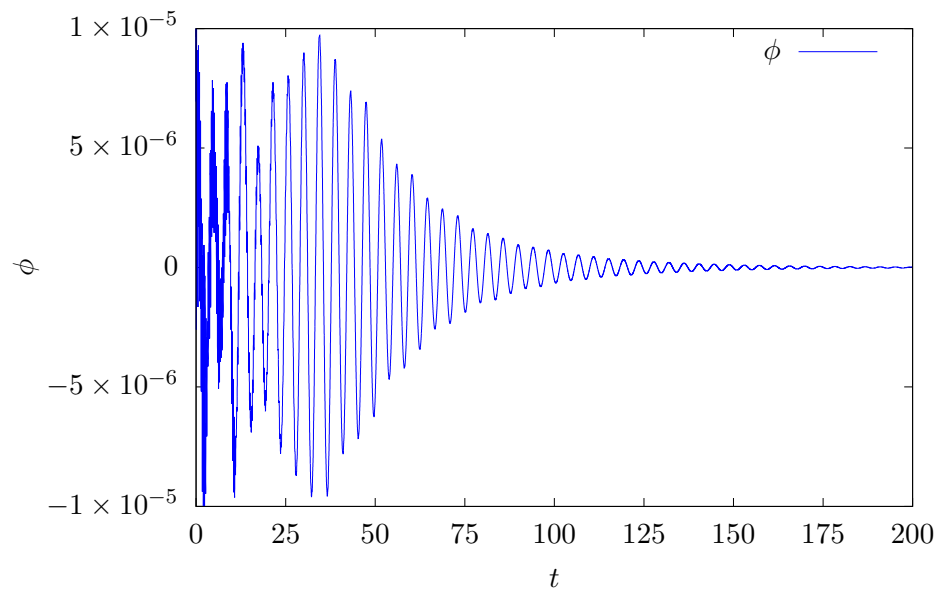


FIGURE 10 – Évolution de l'amplitude du signal de commande dans le cas du canal périodique..

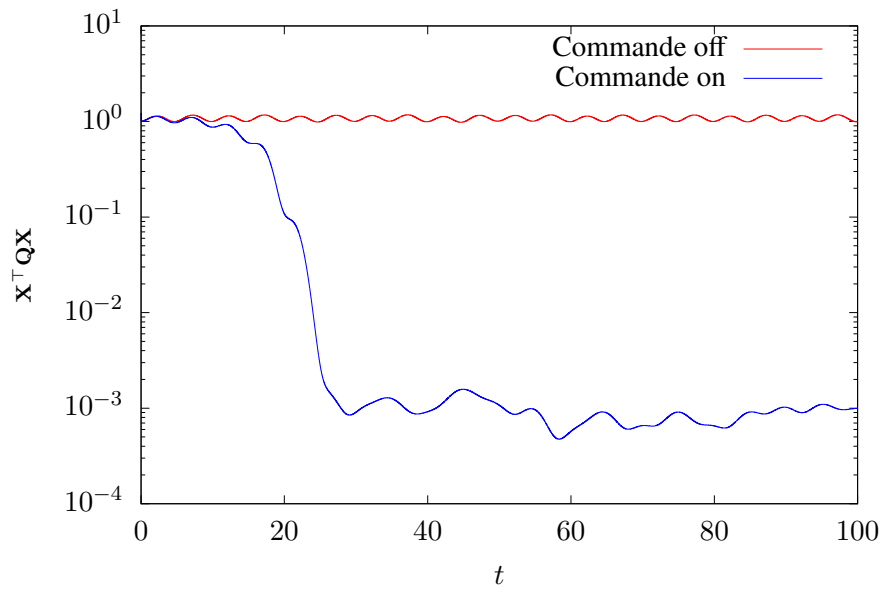


FIGURE 11 – Évolution de la norme du vecteur d'état avec et sans contrôle dans le cas de la couche de mélange spatiale.

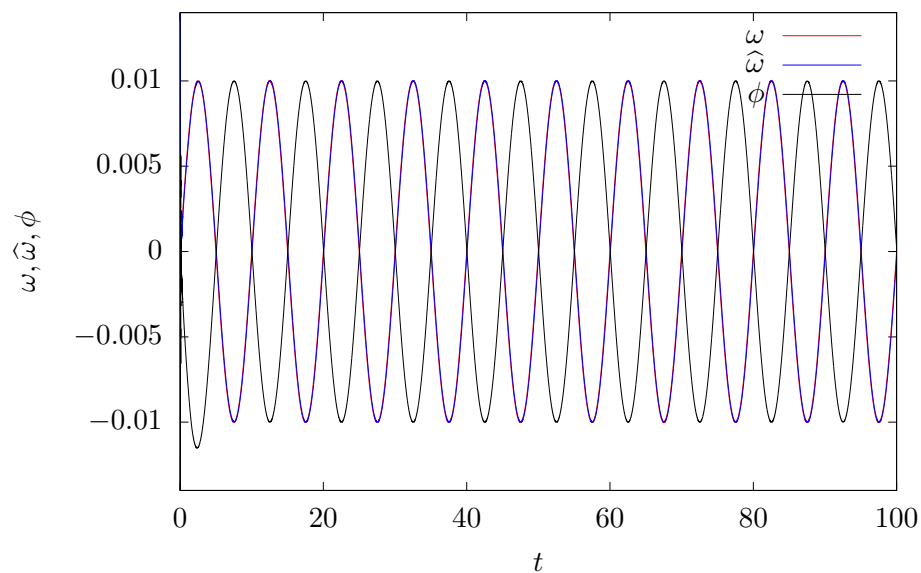


FIGURE 12 – Évolution de l'amplitude du signal de commande, du signal de perturbation et de son estimé dans le cas de la couche de mélange spatiale.