

# Μελέτη πολυομογενών πολυωνυμικών συστημάτων μέσω πινάκων της απαλοίφουσας

Άγγελος Μαντζαφλάρης<sup>†</sup>

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,  
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,  
Πανεπιστημιούπολη, Ιλίσια, 15784, Αθήνα, Ελλάδα  
amantzaf@di.uoa.gr

**Περίληψη** Η απαλοίφουσα ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων εκφράζει την επιλυσιμότητά του και επιτρέπει την αριθμητική του επίλυση μέσω των πινάκων της απαλοίφουσας. Εξετάζουμε το πρόβλημα της κατασκευής πινάκων απαλοίφουσας για συστήματα με ειδική δομή, η οποία γενικεύει την κλασική ομογενή περίπτωση. Γενικεύουμε τα γνωστά αποτελέσματα σε συστήματα με κλιμακωτό βαθμό. Προτείνουμε κατασκευές από όλο το φάσμα πινάκων απαλοίφουσας, τύπου Sylvester, Bézout και υβριδικού, η ορίζουσα των οποίων ισούται με την απαλοίφουσα. Παραμετροποιούμε συνδυαστικά αυτές τις κατασκευές και αποδεικνύουμε φράγματα στις τιμές των παραμέτρων, καθώς και συγκεκριμένες επιλογές τους που δίνουν μικρούς πίνακες. Γίνεται παρουσίαση του πακέτου για πολυομογενείς απαλοίφουσες που υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό πακέτο MAPLE.

**Λέξεις κλειδιά:** πολυομογενές σύστημα, πίνακας απαλοίφουσας, τετραγωνική φόρμουλα, υλοποίηση MAPLE

## 1 Εισαγωγή

Οι απαλοίφουσες (resultants) προσφέρουν αποτελεσματικούς τρόπους για τη μελέτη και επίλυση συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων μέσω πινάκων. Η παρούσα εργασία ασχολείται με την αραιή ή αλλιώς τορική (sparse or toric) απαλοίφουσα, η οποία εκμεταλλεύεται εκ των προτέρων γνώση στη δομή των εξισώσεων. Επικεντρωνόμαστε σε μεικτά πολυομογενή συστήματα (mixed multihomogeneous systems). Η μελέτη αυτών των συστημάτων είναι το πρώτο βήμα προς τη γενίκευση της ομογενούς θεωρίας ώστε να εκμεταλλεύεται οποιαδήποτε αραιή δομή.

Η δουλειά μας, που δημοσιεύεται και στο [4], συνεχίζει αυτή των [3,8,10], όπου μελετήθηκε η περίπτωση μη μεικτών συστημάτων. Επικεντρωνόμαστε σε συστήματα των οποίων τα πολύεδρα του Νεύτωνα (Newton polytopes) είναι σκαλωτά αντίγραφα (scalar copies) ενός πολυέδρου, κάνοντας έτσι το πρώτο βήμα προς συστήματα οποιασδήποτε δομής. Πρόκειται για την πρώτη δουλειά που μελετά μεικτά (mixed) πολυομογενή συστήματα και παρέχει κατασκευαστικά τους πίνακες της απαλοίφουσας για αυτά.

Οι πίνακες αραιής απαλοίφουσας είναι πολλών ειδών. Από τη μία είναι οι πίνακες τύπου Sylvester, οι οποίοι γεμίζουν με συντελεστές των πολυωνύμων· τέτοιοι είναι ο πίνακας Sylvester πολυωνύμων μιας μεταβλητής και οι πίνακες του Macaulay.

<sup>†</sup> Επιβλέπων: Καθηγητής Ιωάννης Εμίρης

Από την άλλη υπάρχουν οι πίνακες τύπου Βέζουτ, οι οποίοι γεμίζουν με τους συντελεστές του πολυωνύμου που είναι γνωστό ως Βέζουτιαν. Υβριδικό (hybrid) πίνακες είναι αυτοί που περιέχουν υποπίνακες (blocks) και των δυο μορφών.

Μελετάμε σύμπλοκα Weyman (ορίζονται πιο κάτω), τα οποία γενικεύουν το σύμπλοκο Cayley-Koszul και δίνουν την πολυμογενή απαλοίφουσα ως την ορίζουσα του συμπλόκου (complex). Αυτά τα σύμπλοκα παραμετροποιούνται από ένα βαθμοδιάνυσμα (degree vector)  $m$ . Όταν το σύμπλοκο έχει μόνο δυο όρους, η ορίζουσά του είναι αυτή ενός πίνακα που εκφράζει την απεικόνιση μεταξύ των δυο αυτών όρων, και ισούται με την απαλοίφουσα. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε πως υπάρχει μια τετραγωνική φόρμουλα (determinantal formula). Όπως συνηθίζεται σε αυτές τις προσεγγίσεις, έτσι και σε αυτήν την εργασία, θεωρούμε ότι οι συντελεστές των πολυωνύμων είναι αρκετά γενικοί (sufficiently generic).

Συνοψίζουμε τις συνεισφορές μας. Πρώτον, εδραιώνουμε ανάλογα φράγματα σαν αυτά του [3, Ενότητα 3] και απλοποιούμε σημαντικά την απόδειξη που δόθηκε εκεί για τη μη μεικτή περίπτωση. Χαρακτηρίζουμε τα σκαλωτά συστήματα για τα οποία υπάρχει τετραγωνική φόρμουλα, καθαρή ή υβριδική. Στις περιπτώσεις που υπάρχουν καθαρές τετραγωνικές φόρμουλες, παρέχουμε κλειστούς τύπους για τα βαθμοδιανύσματα που τις δίνουν. Στην αναζήτηση για τετραγωνικές φόρμουλες, ανακαλύπτουμε κουτιά πλήρη με τετραγωνικά διανύσματα, βελτιώνοντας έτσι την τυφλή αναζήτηση που υιοθετήθηκε στο [3]. Εικάζουμε ότι μια φόρμουλα ελάχιστης διάστασης μπορεί να βρεθεί στο κέντρο αυτών των κουτιών, ανάλογα με την ομογενή περίπτωση. Δίνουμε πίνακες για τα διαφορικά (differentials) στο σύμπλοκο Weyman καθώς και λεπτομέρειες για τον υπολογισμό τους. Τέλος, δίνουμε ένα πλήρες, ανοικτού κώδικα πακέτο MAPLE για τον υπολογισμό πολυμογενών πινάκων απαλοίφουσας. Είναι βασισμένο σε κώδικα από το [3], κι έχει εμπλουτιστεί με νέες συναρτήσεις, πολλές από τις οποίες δεν είχαν υλοποιηθεί στην μη μεικτή περίπτωση, όπως η κατασκευή των πινάκων απαλοίφουσας.

Ξεκινάμε με την αραή απαλοίφουσα και τα σύμπλοκα Weyman στην Ενότητα 2. Η Ενότητα 3 χαρακτηρίζει τα συστήματα που επιδέχονται είτε υβριδικής είτε καθαράς τετραγωνικής φόρμουλας· δίνουμε κλειστούς τύπους για τα καθαρά βαθμοδιανύσματα και εικάζουμε επιλογές που δίνουν τη μικρότερη διάσταση πίνακα. Επίσης βρίσκουμε φράγματα στις συντεταγμένες οποιουδήποτε τετραγωνικού βαθμοδιανύσματος. Στην Ενότητα 4 κατασκευάζουμε τους εν λόγω πίνακες· παρουσιάζονται πίνακες τύπου Sylvester και τύπου Βέζουτ οι οποίοι είναι τα βασικά συστατικά και των υβριδικών πινάκων. Ολοκληρώνουμε με την παρουσίαση της υλοποίησής μας στο υπολογιστικό πακέτο MAPLE. Οι μεταφρασμένες ορολογίες ακολουθούνται από τον αγγλικό όρο σε παρένθεση, την πρώτη φορά που εμφανίζονται στο κείμενο.

## 2 Απαλοίφουσες μέσω συμπλόκων

Θεωρούμε το γινόμενο  $X := \mathbb{P}^{l_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{l_r}$  προβολικών χώρων υπεράνω ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος  $\mathbb{F}$  χαρακτηριστικής μηδέν, για  $r \in \mathbb{N}$ . Η διάστασή του είναι ίση με τον αριθμό των αφινικών μεταβλητών,  $n = \sum_{k=1}^r l_k$ . Θεωρούμε πολυώνυμα στον  $X$ , με σκαλωτό βαθμό. Ο πολυ-βαθμός (multidegree) τους είναι πολλαπλάσιο ενός βασικού βαθμού  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r) \in \mathbb{N}^r$ , έστω  $\deg f_i = s_i \mathbf{d}$ . Υποθέτουμε ότι  $s_0 \leq \dots \leq s_n$  και  $\mu\kappa\delta(s_0, \dots, s_n) = 1$ , ούτως ώστε τα δεδομένα  $\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s} = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$  να χαρακτηρίζουν πλήρως το σύστημα. Συμβολίζουμε με  $S(\mathbf{d})$  το διανυσματικό χώρο των πολυμογενών μορφών βαθμού  $\mathbf{d}$  ορισμένων

στον  $X$ . Αυτές είναι ομογενή πολυώνυμα στις μεταβλητές  $x_k$  βαθμού  $d_k$  για  $k = 1, \dots, r$ . Ένα σύστημα τύπου  $(\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$  ανήκει στον χώρο  $V = S(s_0 \mathbf{d}) \oplus \dots \oplus S(s_n \mathbf{d})$ .

**Ορισμός 1.** Έστω ένα γενικό σκαλωτό πολυομογενές σύστημα  $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)$  που ορίζεται από τους πληθάρηθμους  $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^r$ , το βασικό βαθμό  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^r$  και το  $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^{n+1}$ . Η πολυομογενής απαλοίφουσα  $\mathcal{R}(f_0, \dots, f_n) = \mathcal{R}_{\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s}}(f_0, \dots, f_n)$  είναι το μοναδικό, εξαιρώντας το πρόσημο, ανάγωγο (irreducible) πολυώνυμο του  $\mathbb{Z}[V]$ , το οποίο μηδενίζεται αν υπάρχει κοινή ρίζα του  $f_0, \dots, f_n$  στον  $X$ .

Αυτό το πολυώνυμο υπάρχει για οποιαδήποτε δεδομένα  $\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s}$ , αφού είναι μια ειδική περίπτωση της αραιής απαλοίφουσας [5]. Είναι με τη σειρά του πολυομογενές στους συντελεστές καθενός  $f_i$ , βαθμού  $o$  οποίος δίνεται από το πολυομογενές φράγμα Bézout:

**Λήμμα 1.** Η απαλοίφουσα είναι ομογενές πολυώνυμο στους συντελεστές κάθε  $f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , βαθμού

$$\deg_{f_i} \mathcal{R} = \binom{n}{l_1, \dots, l_r} \frac{d_1^{l_1} \dots d_r^{l_r} s_0 \dots s_n}{s_i}.$$

Αυτό μας δίνει και το συνολικό βαθμό της απαλοίφουσας,  $\sum_{i=0}^n \deg_{f_i} \mathcal{R}$ .

Μπορεί να δει κανείς το μηδενισμό της πολυομογενούς απαλοίφουσας σαν την την απώλεια ακρίβειας (exactness) σε ένα σύμπλοκο sheafs. Αυτό επιτρέπει την κατασκευή μιας κλάσης συμπλόκων από διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης των οποίων η ορίζουσα είναι η απαλοίφουσα. Αυτός ο ορισμός της απαλοίφουσας θεωρήθηκε από τον Cayley [5, Παρ. Α], [9].

Δηλώνουμε με  $H^q(X, \mathcal{O}_X(\mathbf{u}))$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^r$  την  $q$ -στή συνομολογία (cohomology) του  $X$  με συντελεστές στο sheaf  $\mathcal{O}_X(\mathbf{u})$ . Σε όλο το κείμενο γράφουμε για απλότητα  $H^q(\mathbf{u})$ , αν και κρατούμε επίσης το χώρο οποτεδήποτε αυτός είναι διαφορετικός από τον  $X$ , για παράδειγμα  $H^0(\mathbb{P}^k, u_k)$ . Για ένα πολυωνυμικό σύστημα  $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)$  στον  $V$ , ορίζουμε ένα πεπερασμένο σύμπλοκο από sheaves  $K_\bullet$  στον  $X$ :

$$0 \rightarrow K_{n+1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta_2} K_1 \xrightarrow{\delta_1} K_0 \xrightarrow{\delta_0} \dots \rightarrow K_{-n} \rightarrow 0 \quad (1)$$

Είναι γνωστό ότι αυτό το σύμπλοκο (του οποίου οι όροι θα οριστούν στον Ορ. 2 πιο κάτω) είναι ακριβές (exact) αν τα  $f_0, \dots, f_n$  δεν έχουν κοινές ρίζες στον  $X$ : άρα είναι ακριβές για γενικά (generic) πολυώνυμα. Όταν περνάμε από το σύμπλοκο των sheaves στο σύμπλοκο των διανυσματικών χώρων υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας, εκφραζόμενος από το βαθμοδιάγραμμα  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ .

Για κάθε δοθέν  $\mathbf{f}$  εξειδικεύουμε τα διαφορικά (differentials)  $\delta_i : K_i \rightarrow K_{i-1}$ ,  $i = 1-n, \dots, n+1$  αντικαθιστώντας σε αυτά του συντελεστές του  $\mathbf{f}$  για να πάρουμε ένα σύμπλοκο διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Η βασική ιδιότητα είναι ότι το σύμπλοκο αυτό είναι ακριβές αν  $\mathcal{R}(f_0, \dots, f_n) \neq 0$  [9, Πρότ. 1.2].

Η κατασκευή που μελετούμε είναι ακριβώς αυτό το σύμπλοκο, το οποίο ορίζουμε στο δικό μας πλαίσιο. Επεκτείνει τη μη μεικτή περίπτωση, όπου για συγκεκριμένο  $p$  το ευθύ άθροισμα γίνεται  $\binom{n+1}{p}$  αντίγραφα μιας μόνο συνομολογικής ομάδας.

**Ορισμός 2.** Για  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$ ,  $\nu = -n, \dots, n+1$  και  $p = 0, \dots, n+1$  ορίζουμε

$$K_{\nu, p} = \bigoplus_{0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} H^{p-\nu} \left( \mathbf{m} - \sum_{\theta=1}^p s_{i_\theta} \mathbf{d} \right)$$

όπου το ευθύ άθροισμα λαμβάνεται σε όλους τους δυνατούς δείκτες  $i_1 < \dots < i_p$ . Το σύμπλοκο Weyman  $K_\bullet = K_\bullet(\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s}, \mathbf{m})$  είναι ακριβές για γενικά πολυώνυμα

$$\text{και έχει όρους } K_\nu = \bigoplus_{p=0}^{n+1} K_{\nu,p}.$$

Το παραπάνω γενικεύει το κλασικό σύμπλοκο Cayley-Koszul. Η ορίζουσα του συμπλόκου μπορεί να εκφραστεί σαν λόγος γινομένων υπο-οριζουσών των  $\delta_i$ . Είναι αναλλοίωτη (invariant) για διαφορετικές επιλογές του  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$  και ισούται με την πολυμογενή απαλοίφουσα  $\mathcal{R}(f_0, \dots, f_n)$ .

## 2.1 Η συνδυαστική δομή του $K_\bullet$

Παρουσιάζουμε μια συνδυαστική περιγραφή των όρων στο σύμπλοκο. Λεπτομέρειες για τα συνολογικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε δίνονται στο [5].

Από τη φόρμουλα του Künneth έχουμε τη διάσπαση (decomposition)

$$H^q(\boldsymbol{\alpha}) = \bigoplus_{j_1 + \dots + j_r = q}^{j_k \in \{0, l_k\}} \bigotimes_{k=1}^r H^{j_k}(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k), \quad (2)$$

όπου  $q = p - \nu$  και το ευθύ άθροισμα είναι σε όλα τα αθροίσματα ακεραίων  $j_1 + \dots + j_r = q, j_k \in \{0, l_k\}$ . Συγκεκριμένα, η  $H^0(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k)$  είναι ισόμορφη με το  $S(\alpha_k)$ , το βαθμονομημένο (graded) κομμάτι του  $S$  βαθμού  $\alpha_k$ , ή εάν προτιμάτε το χώρο όλων των ομογενών πολυωνύμων σε  $l_k + 1$  μεταβλητές συνολικού βαθμού  $\alpha_k$ , όπου  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{m} - z\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^r$  για  $z \in \mathbb{Z}$ .

Από τη δυϊκή θεωρία του Serre (Serre's duality), για κάθε  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^r$ , έχουμε

$$H^q(\boldsymbol{\alpha}) \simeq H^{n-q}(-\mathbf{l} - \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})^*, \quad (3)$$

όπου  $*$  δηλώνει δυϊκό (dual), και  $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^r$  είναι διάνυσμα με μονάδες. Επιπλέον, αναγνωρίζουμε την  $H^{l_k}(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k)$  σαν το δυϊκό χώρο  $S(-\alpha_k - l_k - 1)^*$ . Αυτός είναι ο χώρος των γραμμικών συναρτήσεων  $\Lambda : S(\alpha_k) \rightarrow \mathbb{F}$ . Χρησιμοποιούμε τις αρνητικές συμμετρικές δυνάμεις (negative symmetric powers) για να μεταφράσουμε δυϊκούς χώρους, όπως στο [10, σελ. 576].

**Πρόταση 1.** [1] Για κάθε  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^r$  και  $k \in \{1, \dots, r\}$ ,

(α)  $H^j(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k) = 0, \forall j \neq 0, l_k$ ,

(β)  $H^{l_k}(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_k < -l_k, \dim H^{l_k}(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k) = \binom{-\alpha_k - 1}{l_k}$ .

(γ)  $H^0(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_k \geq 0, \dim H^0(\mathbb{P}^{l_k}, \alpha_k) = \binom{\alpha_k + l_k}{l_k}$ .

**Ορισμός 3.** Για  $\mathbf{l}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^r$  και  $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^{n+1}$ , ορίζουμε το κρίσιμο βαθμοδιάνυσμα (critical degree vector)  $\rho \in \mathbb{N}^r$  ως  $\rho_k := d_k \sum_{\theta=0}^n s_\theta - l_k - 1$ , για κάθε  $k \in [1, r]$ .

Σε όλο το κείμενο συμβολίζουμε  $[u, v] := \{u, u + 1, \dots, v\}$ . Επίσης από την Πρότ. 1 έχουμε ότι το σύνολο όλων των ακεραίων  $z$  έτσι ώστε και  $H^0(\mathbb{P}^{l_k}, m_k - z d_k)$  και  $H^{l_k}(\mathbb{P}^{l_k}, m_k - z d_k)$  να είναι μηδέν είναι:

$$P_k := \left( \frac{m_k}{d_k}, \frac{m_k + l_k}{d_k} \right] \cap \mathbb{Z}.$$

Οι φόρμουλες εμφανίζονται σε δυϊκά ζευγάρια, κατ' επέκταση της [3, Πρότ. 4.4].

**Λήμμα 2.** Υποθέτουμε ότι τα  $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^r$  ικανοποιούν  $\mathbf{m} + \mathbf{m}' = \boldsymbol{\rho}$ , όπου  $\boldsymbol{\rho}$  το κρίσιμο βαθμοδιάνυσμα. Τότε, το  $K_\nu(\mathbf{m})$  είναι δυϊκό του  $K_{1-\nu}(\mathbf{m}')$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Ειδικότερα, το  $\mathbf{m}$  είναι τετραγωνικό ανν το  $\mathbf{m}'$  είναι τετραγωνικό, και δίνουν πίνακες ίδιου μεγέθους, ίσου με  $\dim(K_0(\mathbf{m})) = \dim(K_1(\mathbf{m}'))$ .

### 3 Τετραγωνικές φόρμουλες

Τετραγωνικές φόρμουλες (determinantal formulae) προκύπτουν αν υπάρχει ακριβώς ένα μη μηδενικό διαφορικό, δηλαδή το σύμπλοκο αποτελείται από δυο διαδοχικούς όρους. Η ορίζουσα του συμπλόκου είναι η ορίζουσα αυτού του διαφορικού.

**Λήμμα 3.** Αν το  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$  είναι τετραγωνικό τότε το σύμπλοκο είναι της μορφής  $\delta_1 : K_1 \rightarrow K_0$ .

#### 3.1 Φράγματα για τετραγωνικά βαθμοδιανύσματα

Γενικεύουμε τα φράγματα του [3, Ενότητα 3] για τις συντεταγμένες οποιουδήποτε τετραγωνικού βαθμοδιανύσματος στην περίπτωση σκαλωτών συστημάτων.

**Λήμμα 4.** Αν ένα διάνυσμα  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$  είναι τετραγωνικό τότε η ένωση  $\bigcup_1^r P_k$  περιέχεται στο  $[0, \sum_0^n s_i]$ .

Καταλήγουμε στο παρακάτω

**Θεώρημα 1.** Για τετραγωνικό  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$  και για κάθε  $k$  ισχύει  $\max\{-d_k, -l_k\} \leq m_k \leq d_k \sum_0^n s_i - 1 + \min\{d_k - l_k, 0\}$ .

Η υλοποίησή μας διεξάγει μια αναζήτηση στο παραπάνω κουτί και, για κάθε  $\mathbf{m}$  εκεί υπολογίζει τη διάσταση του  $K_2$  και  $K_{-1}$ . Αν είναι και οι δυο μηδενικές τότε το βαθμοδιάνυσμα είναι τετραγωνικό. Αυτός ο υπολογισμός είναι χρονοβόρος· για αυτόν το λόγο χρησιμοποιούμε και το φίλτρο που προκύπτει από το:

**Λήμμα 5.** Αν το  $\mathbf{m}$  είναι τετραγωνικό τότε υπάρχουν δείκτες  $k, k' \in [1, r]$  τέτοιοι ώστε  $m_k < d_k(s_{n-1} + s_n)$  και  $m_{k'} \geq d_{k'} \sum_0^{n-2} s_i - l_{k'}$ .

#### 3.2 Χαρακτηρισμός και κλειστοί τύποι

Παρέχουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε δεδομένα  $\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s}$  να επιδέχονται τετραγωνικής φόρμουλας. Τότε αυτά καλούνται τετραγωνικά. Επίσης, ανακαλύπτουμε κουτιά από βαθμοδιανύσματα τα οποία είναι τετραγωνικά και ειμάζουμε ότι η φόρμουλα ελάχιστης διάστασης βρίσκεται στο μέσο αυτών των κουτιών.

Έστω  $\pi[k] := \sum_{\pi(i) \leq \pi(k)} l_i$ . Αν  $\pi = \text{Id}$  αυτό είναι απλώς  $\text{Id}[k] = l_1 + \dots + l_k$ . Χαρακτηρίζουμε τα συστήματα που επιδέχονται τετραγωνικής φόρμουλας:

**Θεώρημα 2.** Τα δεδομένα  $\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s}$  είναι τετραγωνικά ανν υπάρχει μετάθεση  $\pi : [1, r] \rightarrow [1, r]$  τ.ώ.

$$d_k \sum_{n-\pi[k]+2}^n s_i - l_k < d_k \sum_0^{\pi[k-1]+1} s_i, \forall k.$$

**Πόρισμα 1.** Για κάθε μετάθεση  $\pi : [1, r] \rightarrow [1, r]$ , τα βαθμοδιανύσματα  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$  που περιέχονται στο κουτί

$$d_k \sum_{n-\pi[k]+2}^n s_i - l_k \leq m_k \leq d_k \sum_0^{\pi[k-1]+1} s_i - 1$$

για  $k = 1, \dots, r$  είναι τετραγωνικά.

Στην περίπτωση που  $r = 1$  μια φόρμουλα ελάχιστης διάστασης βρίσκεται στο κέντρο ενός διαστήματος ακεραίων [2]. Εικάζουμε ότι παρόμοιος άμεσος τρόπος να επιλεγεί μια φόρμουλα ελάχιστης διάστασης υπάρχει και για  $r > 1$ . Πειραματικά αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι φόρμουλες ελάχιστης διάστασης τείνουν να εμφανίζονται κοντά στα κέντρα των μη μηδενικών κουτιών:

*Εικασία 1.* Αν τα δεδομένα  $\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s}$  είναι τετραγωνικά τότε βαθμοδιανύσματα τέτοια ώστε ο αντίστοιχος πίνακας να έχει την ελάχιστη διάσταση βρίσκονται κοντά στο κέντρο των μη κενών κουτιών του Πορ. 1.

### 3.3 Καθαρές φόρμουλες

Μια τετραγωνική φόρμουλα είναι καθαρή αν είναι της μορφής  $K_{1,a} \rightarrow K_{0,b}$  για  $a, b \in [0, n+1]$  με  $a > b$ . Αυτές οι φόρμουλες είναι είτε τύπου Sylvester είτε τύπου Bézout, ονομασίες που εμπνεύστηκαν από τους πίνακες απαλοίφουσας δυο πολυωνύμων μιας μεταβλητής.

Στη μη μεικτή περίπτωση και τα δυο αυτά είδη πινάκων υπάρχουν ακριβώς όταν για κάθε  $k \in [1, r]$  ισχύει  $\min\{l_k, d_k\} = 1$  [8,3]. Το θεώρημα που ακολουθεί επεκτείνει το χαρακτηρισμό αυτό στη σκαλωτή περίπτωση, δείχνοντας ότι μόνο καθαρές φόρμουλες τύπου Sylvester είναι πιθανές και τα μόνα συστήματα που επιδέχονται τέτοιες φόρμουλες είναι συστήματα μιας μεταβλητής και δι-ομογενή συστήματα δυο μεταβλητών.

**Θεώρημα 3.** Αν  $s \neq \mathbf{1}$  τότε μια καθαρή τετραγωνική φόρμουλα τύπου Sylvester υπάρχει αν  $r \leq 2$  και  $\mathbf{l} = (1)$  ή  $\mathbf{l} = (1, 1)$ . Αν  $l_1 = n = 1$  τα αντίστοιχα βαθμοδιανύσματα είναι  $\mathbf{m} = d_1 \sum_0^1 s_i - 1$  και  $\mathbf{m} = -1$  ενώ για  $\mathbf{l} = (1, 1)$  δίνονται από τους τύπους

$$\mathbf{m} = \left( -1, d_2 \sum_0^2 s_i - 1 \right) \quad \text{και} \quad \mathbf{m} = \left( d_1 \sum_0^2 s_i - 1, -1 \right).$$

Καθαρές τετραγωνικές φόρμουλες τύπου Bézout δεν υπάρχουν.

Για  $n = 1$ , οι δυο φόρμουλες που παίρνουμε με τα παραπάνω βαθμοδιανύσματα είναι ο κλασικός πίνακας Sylvester και ο ανάστροφός του.

Όταν  $\mathbf{s} = \mathbf{1}$  καθαρές τετραγωνικές φόρμουλες είναι εφικτές για οσοδήποτε μεγάλα  $n, r$  και υπάρχουν τέτοιες αν για κάθε  $k$ ,  $l_k = 1$  ή  $d_k = 1$  [3, Θεώρ. 4.5]. Επίσης, αν μια καθαρή φόρμουλα Sylvester υπάρχει για κάποιο  $a$  και  $b = a - 1$  τότε μπορεί κανείς να βρει μια ακόμα, για  $a = 1, b = 0$  [3, σελ. 15]. Αυτό δε συμβαίνει όμως για  $s \neq \mathbf{1}, n = 2$ , άρα η κατασκευή του πίνακα απαλοίφουσας για  $a \neq 1$  είναι στην περίπτωση μας ιδιαίτερα σημαντική, σε αντίθεση με το [3].

## 4 Κατασκευή του πίνακα

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε αλγορίθμους για την κατασκευή του πίνακα απαλοίφουσας που εκφράζει το διαφορικό  $\delta_1$  στη φυσική βάση μονωνύμων και κατηγοριοποιούμε όλους τους διαφορετικούς μορφισμούς που μπορεί να εμφανιστούν. Οι πίνακες που κατασκευάζουμε είναι μοναδικοί εξαιρώντας γραμμοπράξεις και στηλοπράξεις, πράγμα που αντανακλά το γεγονός ότι οι βάσεις μονωνύμων μπορούν να θεωρηθούν με μια πληθώρα διαφορετικών διατάξεων. Οι καθαροί τύπου Sylvester ή τύπου Bézout πίνακες αποκτώνται σαν ειδική περίπτωση του (γενικά υβριδικού, αποτελούμενου από υποπίνακες) πίνακα τον οποίο περιγράφουμε εδώ.

Για να κατασκευάσουμε έναν πίνακα απαλοίφουσας πρέπει να βρούμε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης  $\delta_1 : K_1 \rightarrow K_0$  σε κάποια βάση, συνήθως τη φυσική βάση μονωνύμων, με την προϋπόθεση ότι  $K_{-1} = 0$ . Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε (για γενικά πολυώνυμα) μια επί απεικόνιση με κάποια κύρια υπο-ορίζουσα (maximal minor) να είναι πολλαπλάσιο της απαλοίφουσας. Αν επιπλέον έχουμε  $K_2 = 0$  τότε  $\dim K_1 = \dim K_0$  και η ορίζουσα αυτού του τετράγωνου πίνακα είναι ίση με την απαλοίφουσα, δηλαδή η φόρμουλα είναι τετραγωνική.

Θεωρούμε τους περιορισμούς  $\delta_{a,b} : K_{1,a} \rightarrow K_{0,b}$  για κάθε ευθύ προσθετό  $K_{1,a}, K_{0,b}$  των  $K_1, K_0$  αντίστοιχα. Κάθε τέτοιος περιορισμός δίνει έναν υποπίνακα του τελικού πίνακα, το μέγεθος του οποίου μπορεί να προσδιοριστεί από τις εκάστοτε διαστάσεις. Στην παρούσα ενότητα τα σύμβολα  $a$  και  $b$  θα αναφέρονται πάντα σε αυτούς τους δείκτες.

### 4.1 Υποπίνακες τύπου Sylvester

Οι πίνακες τύπου Sylvester που εξετάζουμε γενικεύουν τον κλασικό πίνακα Sylvester και τους πίνακες του [8] εισάγοντας πίνακες τύπου Sylvester με επιπλέον δομή. Αν και ήταν γνωστό από το [10] (δείτε την Πρότ. 2 που ακολουθεί) ότι αυτοί οι μορφισμοί τύπου Koszul αντιστοιχούν σε κάποιους πίνακες τύπου Sylvester, ο τρόπος κατασκευής αυτών των πινάκων δεν είχε αναλυθεί ως τώρα.

**Πρόταση 2.** [10] *Αν  $a - 1 < b$  τότε  $\delta_{a,b} = 0$ . Επιπλέον, αν  $a - 1 = b$  τότε το  $\delta_{a,b}$  δίνει πίνακα τύπου Sylvester.*

Αν  $a = 1$  και  $b = 0$  τότε υπάρχουν μόνο συνολογίες μηδενικής τάξης στα  $K_{1,1} = \bigoplus_i H^0(\mathbf{m} - s_i \mathbf{d})$  και  $K_{0,0} = H^0(\mathbf{m})$ . Αυτή είναι μια αρκετά γνωστή απεικόνιση τύπου Sylvester και εκφράζει τον πολλαπλασιασμό  $(g_0, \dots, g_n) \mapsto \sum_{i=0}^n g_i f_i$ . Τα στοιχεία του πίνακα αντιστοιχούν στους εκθέτες της βάσης μονωνύμων του  $\bigoplus_i S(\mathbf{m} - s_i \mathbf{d})$  και  $S(\mathbf{m})$ . Επίσης, από τη δυϊκή θεωρία του Serre ένας υποπίνακας  $K_{1,n+1} \rightarrow K_{0,n}$  αντιστοιχεί στο δυϊκό του  $K_{1,1} \rightarrow K_{0,0}$  και δίνει τον ανάστροφο του πρωταρχικού πίνακα.

Το παρακάτω θεώρημα κατασκευάζει τον πίνακα στη γενική περίπτωση.

**Θεώρημα 4.** *Ο ανάστροφος πίνακας του διαφορικού  $\delta_1 : K_{1,a} \rightarrow K_{0,a-1}$  έχει στην γραμμή  $(I, \alpha)$  και στήλη  $(J, \beta)$  στοιχείο ίσο με:*

$$\begin{cases} 0, & \text{αν } J \notin I, \\ (-1)^{k+1} \text{coef}(f_{i_k}, \mathbf{x}^{\mathbf{u}}), & \text{αν } I \setminus J = \{i_k\}, \end{cases}$$

όπου  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_a\}$  και  $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_{a-1}\}$ ,  $I, J \subseteq \{0, \dots, n\}$ . Τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  διατρέχουν τους εκθέτες της βάσης μονωνύμων των  $H^{a-1}(\mathbf{m} - \mathbf{d} \sum_{\theta=1}^a s_{i_\theta})$ ,  $H^{a-1}(\mathbf{m} - \mathbf{d} \sum_{\theta=1}^{a-1} s_{j_\theta})$ , όπου  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$  με  $u_i = |\beta_i - \alpha_i|$ .

## 4.2 Υποπίνακες τύπου Bézout

Ένα υποπίνακας τύπου Bézout προκύπτει από μια απεικόνιση της μορφής  $\delta_{a,b} : K_{1,a} \rightarrow K_{0,b}$  με  $a - 1 > b$ . Στην περίπτωση που  $a = n + 1$ ,  $b = 0$  πρόκειται για την απεικόνιση που εκφράζει η Bézoutian του συστήματος, ενώ σε άλλες περιπτώσεις έχουμε πίνακες που είναι οι Bézoutians κάποιων τετράγωνων υποσυστημάτων που προκύπτουν με απόκρυψη κάποιων μεταβλητών.

Θεωρούμε την Bézoutian, ή αλλιώς μορφή Morley (cf. [6]), των  $f_0, \dots, f_n$ . Αυτή είναι ένα πολυώνυμο πολυ-βαθμού  $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho})$  στο  $\mathbb{F}[\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}]$  και γράφεται σαν

$$\Delta := \sum_{u_1=0}^{\rho_1} \cdots \sum_{u_r=0}^{\rho_r} \Delta_u(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot \bar{\boldsymbol{y}}^u$$

όπου το  $\Delta_u(\bar{\boldsymbol{x}}) \in S$  έχει  $\deg \Delta_u(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{u}$ . Εδώ με  $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  συμβολίζουμε το διάνυσμα των ομογενών μεταβλητών και με  $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)$  ένα νέο σετ μεταβλητών με τους ίδιους πληθάρθμους.

Η Bézoutian δίνει μια απεικόνιση  $\bigwedge^{n+1} V \rightarrow \bigoplus_{m_k \leq \rho_k} S(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m}) \otimes S(\mathbf{m})$ . Ο χώρος στα αριστερά είναι η  $(n+1)$ -οστή εξωτερική (exterior) άλγεβρα του  $V$  και το ευθύ άθροισμα διατρέχει όλα τα διανύσματα  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r$  με  $m_k \leq \rho_k$  για κάθε  $k \in [1, r]$ .

Ειδικότερα, το βαθμονομημένο κομμάτι της  $\Delta$  βαθμού  $(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m}, \mathbf{m})$  είναι

$$\Delta_{\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m}, \mathbf{m}} := \sum_{u_k = m_k} \Delta_u(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot \bar{\boldsymbol{y}}^u$$

για όλα τα μονώνυμα  $\bar{\boldsymbol{y}}^u$  βαθμού  $\mathbf{m}$  και με συντελεστές στο  $\mathbb{F}[\bar{\boldsymbol{x}}]$  βαθμού  $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m}$ . Αυτό μας δίνει μια απεικόνιση  $S(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m})^* \rightarrow S(\mathbf{m})$  η οποία είναι γνωστή σαν η Bézoutian βαθμού  $\mathbf{m}$  των  $f_0, \dots, f_n$ . Το διαφορικό του  $K_{1,n+1} \rightarrow K_{0,0}$  μπορεί να επιλεγεί να είναι ακριβώς αυτή η απεικόνιση αφού είναι φανερό ότι  $K_{0,0} = H^0(\mathbf{m}) \simeq S(\mathbf{m})$  και

$$K_{1,n+1} = H^n \left( \mathbf{m} - \sum_0^n s_i \mathbf{d} \right) \simeq S \left( -\mathbf{m} + \sum_0^n s_i \mathbf{d} + \mathbf{l} + \mathbf{1} \right)^*$$

σύμφωνα με τη δυϊκή θεωρία του Serre (Ενότ. 2.1), άρα  $K_{1,n+1} = S(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m})^*$ .

Το πολυώνυμο  $\Delta$  που ορίστηκε πιο πάνω έχει  $n + r$  ομογενείς μεταβλητές, και για το λόγο αυτό δεν είναι καθαρό πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί σαν ορίζουσα κάποιας συνδυαστικής κατασκευής πίνακα. Μία κατασκευή ενός μέρους  $\Delta_{\boldsymbol{\rho} - \mathbf{m}, \mathbf{m}}$  δίνεται από την αφινική (affine) Bézoutian [7]. Έστω  $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{k,l_k})$  η (απ-ομογενοποιημένη)  $k$ -οστή ομάδα μεταβλητών, και όμοια  $\mathbf{y}_k = (y_{k1}, \dots, y_{k,l_k})$ . Θέτουμε  $\mathbf{w}_t$ ,  $t = 1, \dots, n - 1$  να είναι η συνένωση των πρώτων  $t$  μεταβλητών του  $\mathbf{y}$  και των τελευταίων  $n - t$  μεταβλητών του  $\mathbf{x}$ . Αν  $a = n + 1$ ,  $b = 0$  η κατασκευή της αφινικής Bézoutian γίνεται από το ανάπτυγμα του

$$\begin{vmatrix} f_0(\mathbf{x}) & f_0(\mathbf{w}_1) & \cdots & f_0(\mathbf{w}_{n-1}) & f_0(\mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) & f_n(\mathbf{w}_1) & \cdots & f_n(\mathbf{w}_{n-1}) & f_n(\mathbf{y}) \end{vmatrix} / \prod_{k=1}^r \prod_{j=1}^{l_k} (x_{kj} - y_{kj})$$

σαν πολυώνυμο στο  $\mathbb{F}[\mathbf{y}]$  με συντελεστές στο  $\mathbb{F}[\mathbf{x}]$ . Το στοιχείο που αντιστοιχεί στη γραμμή και στήλη  $\boldsymbol{\alpha}$  και  $\boldsymbol{\beta}$  αντίστοιχα της Bézoutian είναι ο συντελεστής του μονωνύμου  $\mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$  σε αυτό το πολυώνυμο.



## 5 Υλοποίηση και πειραματισμός

Υλοποιήσαμε την αναζήτηση για φόρμουλες και την κατασκευή των πινάκων απαλοίφουσας στο υπολογιστικό πακέτο MAPLE. Η βιβλιοθήκη είναι ελεύθερα διαθέσιμη στη διεύθυνση [www-sop.inria.fr/galaad/amantzaf/soft.html](http://www-sop.inria.fr/galaad/amantzaf/soft.html).

Η υλοποίησή μας έχει τρία μέρη. Δοθέντων  $(\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$  ανακαλύπτει όλες τις τετραγωνικές φόρμουλες: αυτό το κομμάτι είχε υλοποιηθεί για τη μη μεικτή περίπτωση στο [3]. Επίσης, για ένα συγκεκριμένο  $\mathbf{m}$ -διάνυσμα υπολογίζει και σώζει στη μνήμη το σύμπλοκο που προκύπτει σε μια κατάλληλη δομή δεδομένων. Τέλος επιστρατεύονται τα αποτελέσματα της Ενότητας 4 για να υπολογιστεί ο πίνακας που προκύπτει από το σύμπλοκο. Οι κυριότερες λειτουργίες της δίνονται στον Πίνακα 1.

ρουτίνα	περιγραφή
Makesystem	κατασκευάζει ένα σύστημα τύπου $(\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$
mBezout	υπολογίζει το πολυμογενές φράγμα Bézout
allDetVecs	ανακαλύπτει όλα τα τετραγωνικά $\mathbf{m}$ -διανύσματα
detboxes	υπολογίζει τα κουτιά του Πορ. 1
MakeComplex	υπολογίζει το σύμπλοκο για δοθέν $\mathbf{m}$ -διάνυσμα
printBlocks	τυπώνει το σύμπλοκο στη μορφή $\bigoplus_a K_{1,a} \rightarrow \bigoplus_b K_{0,b}$
printCohs	τυπώνει το σύμπλοκο στη μορφή $\bigoplus H^q(\mathbf{u}) \rightarrow \bigoplus H^q(\mathbf{v})$
multmap	κατασκευάζει τον πίνακα πολλαπλασιασμού $M(f_i) : S(\mathbf{u}) \rightarrow S(\mathbf{v})$
Sylvmat	κατασκευάζει τον πίνακα Sylvester $K_{1,p} \rightarrow K_{0,p-1}$
Bezoutmat	κατασκευάζει τον πίνακα Bézout $K_{1,a} \rightarrow K_{0,b}$
makeMatrix	κατασκευάζει τον πίνακα του $K_1 \rightarrow K_0$

Πίνακας 1. Οι κυριότερες λειτουργίες του λογισμικού μας.

Έστω  $\mathbf{l} = \mathbf{d} = (1, 1)$  και  $\mathbf{s} = (1, 1, 2)$ . Κατασκευάζουμε ένα τέτοιο σύστημα:

```
> l:=vector([1,1]): d:=1: s:= vector([1,1,2]):
> f:= Makesystem(l,d,s);
```

$$f_0 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2$$

$$f_1 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2$$

$$f_2 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1x_2 + c_4x_1^2 + c_5x_1^2x_2 + c_6x_2^2 + c_7x_1x_2^2 + c_8x_1^2x_2^2$$

Ελέγχουμε αν επιδέχεται τετραγωνικής φόρμουλας:

```
> has_deter( l, d, s);
```

Βρίσκουμε όλα τα δυνατά τετραγωνικά βαθμοδιανύσματα:

```
> allDetVecs( l, d, s );
[[2, 0, 4], [0, 2, 4], [3, 0, 6], [2, 1, 6], [2, -1, 6], [1, 2, 6], [1, 1, 6],
[1, 0, 6], [0, 3, 6], [0, 1, 6], [-1, 2, 6], [3, 1, 8], [1, 3, 8], [1, -1, 8],
[-1, 1, 8], [3, -1, 10], [-1, 3, 10]]
```

Η αναζήτηση επιστρέφει 17 βαθμοδιανύσματα: επειδή το πλήθος είναι περιττό, θα πρέπει να υπάρχει μια φόρμουλα δυϊκή του εαυτού της. Το κρίσιμο βαθμοδιάνυσμα είναι  $\mathbf{p} = (2, 2)$ , άρα το  $\mathbf{m} = (1, 1)$  είναι αυτο-δυϊκό. Τα υπόλοιπα 16 διανύσματα έρχονται σε δυϊκά ζεύγη, και αν λάβουμε υπόψιν τις συμμετρίες στα δεδομένα βρίσκουμε τελικά 5 + 1 διακεκριμένες φόρμουλες. Με χρήση του Θεωρ. 2 υπολογίζουμε  $2! = 2$  κουτιά ακεραίων:

```
> detboxes( l, d, s );
[[-1, 1], [1, 3]], [[1, 3], [-1, 1]]
```

Τα τετραγωνικά βαθμοδιανύσματα είναι ακριβώς τα ακέραια διανύσματα σε αυτά τα κουτιά. Φόρμουλες ελάχιστης διάστασης δίνονται για  $\mathbf{m} = (2, 0)$  και  $\mathbf{m} = (0, 2)$  όπως σημειώνεται στην Εικ. 1. Ένας καθαρός πίνακας τύπου Sylvester δίνεται για

```
> m:= vector([d[1]*convert(op(s),'+')-1, -1]);
           m = (3, -1)
```

Υπολογίζουμε το αντίστοιχο σύμπλοκο:

```
> K:= makeComplex(1,d,s,m);
> printBlocks(K); printCohs(K);
```

$$H^1(1, -3) \oplus H^1(0, -4)^2 \xrightarrow{K_{1,2} \rightarrow K_{0,1}} H^1(2, -2)^2 \oplus H^1(1, -3)$$

Η δομή του πίνακα φαίνεται με την πρώτη εντολή, ενώ η `printCohs` επιστρέφει την πλήρη περιγραφή του συμπλόκου. Η διάσταση του πίνακα δίνεται από το φράγμα Bézout, Δημ. 1, και είναι

```
> mbezout( 1, d, s ) ;
```

10

Αντιστοιχεί στον πίνακα Sylvester που επιστρέφει η εντολή:

```
> makematrix(1,d,s,m);
```

$$\begin{bmatrix} -b_1 & -b_3 & 0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_0 & -b_2 & 0 & a_0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_3 & 0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_0 & -b_2 & 0 & a_0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_4 & -c_5 & -c_8 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ -c_1 & -c_3 & -c_7 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -c_0 & -c_2 & -c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -c_4 & -c_5 & -c_8 & b_1 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_3 & -c_7 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -c_0 & -c_2 & -c_6 & 0 & b_0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

Ας σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κλασική κατασκευή Bézout-Dixon [7] δίνει πάντα ιδιάζων πίνακα μεγέθους  $6 \times 6$ , ο οποίος δεν παρέχει καμία πληροφορία για το σύστημα. Για περισσότερα παραδείγματα παραπέμπουμε στο [4] καθώς και στο [arXiv:0904.4064\[cs.SC\]](https://arxiv.org/abs/0904.4064).

## Αναφορές

1. R. Bott. Homogeneous vector bundles. *Annals of Math.*, 66:203–248, 1957.
2. C. D’Andrea and A. Dickenstein. Explicit formulas for the multivariate resultant. *J. of Pure & Applied Algebra*, 164(1-2):59–86, 2001.
3. A. Dickenstein and I. Z. Emiris. Multihomogeneous resultant formulae by means of complexes. *J. of Symbolic Computation*, 36(3-4):317–342, 2003.
4. I. Z. Emiris and A. Mantzaflaris. Multihomogeneous resultant formulae for systems with scaled support. In *Proc. of 34th ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC ’09)*, 85–94, 2009.
5. I. Gelfand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
6. J.P. Jouanolou. An explicit duality for quasi-homogeneous ideals. *J. of Symbolic Computation* (2008), doi:10.1016/j.jsc.2008.04.011.
7. I. Z. Emiris and B. Mourrain. Matrices in elimination theory. *J. of Symbolic Computation*, 28(1-2):3–44, 1999.
8. B. Sturmfels and A. Zelevinsky. Multigraded resultants of Sylvester type. *J. of Algebra*, 163(1):115–127, 1994.
9. J. Weyman. Calculating discriminants by higher direct images. *Trans. of American Mathematical Society*, 343(1):367–389, 1994.
10. J. Weyman and A. Zelevinsky. Multigraded formulae for multigraded resultants. *J. of Algebraic Geometry*, 3(4):569–597, 1994.