HAL
open science

Géométrie et topologie pour les maillages 3D

Franck Hetroy-Wheeler, Jean-Luc Mari, Gérard Subsol

To cite this version:

Franck Hetroy-Wheeler, Jean-Luc Mari, Gérard Subsol. Géométrie et topologie pour les maillages 3D. Jérémie Chalopin; Pierre Guillon. Informatique Mathématique, Une photographie en 2019, CNRS Editions, 2019, 978-2-271-12611-5. hal-02058296

HAL Id: hal-02058296

https://inria.hal.science/hal-02058296v1

Submitted on 4 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chapitre 1

Géométrie et topologie pour les maillages 3D

Franck Hétroy-Wheeler
Jean-Luc Mari
Gérard Subsol

Les formes géométriques, qu'elles proviennent du monde naturel ou du monde manufacturé par l'Homme, ont tendance à être de plus en plus numérisées, cela, entre autres, à des fins de visualisation ou de mesure. Ce processus produit en général des maillages 3D, composés d'une multitude de polygones plans. Ces maillages sont la représentation discrète la plus commune pour caractériser la surface d'une forme virtuelle. Ces représentations surfaciques 3D sont traitées le plus souvent de manière automatique, parfois interactive, afin que leur structure globale ou certains détails soient analysés ou calculés. Cela peut être fait en extrayant des caractéristiques géométriques ou topologiques pertinentes. De telles caractéristiques de forme peuvent simplifier la façon dont l'objet est considéré, elles peuvent aider à la reconnaissance, et elles peuvent le décrire et le classifier selon des critères spécifiques. Ce cours traitera de la définition et du calcul de caractéristiques sur un maillage surfacique 3D et de leur utilisation pour l'analyse de forme. Des méthodes récentes seront décrites pour extraire des caractéristiques ayant une signification liée non seulement à la géométrie mais aussi à la topologie. Plusieurs applications seront développées au cours des travaux pratiques.

1.1 Introduction

Nous rappelons pour commencer quelques définitions de base sur les objets qui nous intéressent. Un *maillage* est un triplet d'ensembles $M = (V, E, F)$. V est l'ensemble des *sommets*, qui sont simplement des points dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ échantillonnant la forme géométrique étudiée. E est l'ensemble des *arêtes*, qui sont des segments reliant les points de V : $E \subset V \times V$. F est l'ensemble des *faces*, qui sont des polygones dont les sommets et les arêtes sont dans V et E, respectivement. Souvent, on se restreint à des faces triangulaires par souci de simplicité. Notons que le couple (V, E) forme un graphe au sens mathématique du terme, et on reprend d'ailleurs dans le cas des maillages beaucoup de la terminologie utilisée pour les graphes : adjacence, incidence, voisinage, degré ou valence d'un sommet ...

Les maillages sont beaucoup utilisés dans l'industrie en raison de quelques bonnes propriétés. Tout d'abord, ils sont généralement faciles et rapides à générer à partir de nuages de points 3D, qui constituent eux-mêmes la donnée de sortie de la plupart des appareils de numérisation (scanners laser, caméras de profondeur, etc.). Ensuite, leur coût de stockage est assez faible, puisqu'il suffit de stocker les coordonnées 3D (donc 3 flottants) de chaque point et un peu d'information de voisinage pour chacun de ces points (par exemple, quels sont les identifiants entiers des sommets de chaque face). De plus, ils peuvent s'adapter à des géométries complexes et être utilisés dans des applications variées. Enfin, leur analyse locale est relativement facile car l'information de voisinage est donnée explicitement par les primitives géométriques (arêtes et faces). Cependant, ils ne sont pas dépourvus d'inconvénients. Par exemple, ils représentent une surface de manière plane par morceaux et non lisse. Il peut également être laborieux de les modifier/adapter, car il faut pour cela souvent calculer un voisinage de chaque point qui va au-delà du voisinage immédiat.

D'après le dictionnaire Larousse [11], une caractéristique est "*ce qui constitue le caractère distinctif, le trait dominant de quelque chose*". Ceci soulève deux questions principales :

— *caractère* : comment définit-on un caractère ?

— *distinctif* : aux yeux de qui ?

Pour les formes tridimensionnelles, différentes définitions de caractéristiques ont été proposées, selon la réponse apportée à ces deux questions. Nous n'entrerons pas dans les détails ici, mais le lecteur doit garder à l'esprit que d'autres caractéristiques existent que celles présentées dans ce cours. Elles ont notamment été introduites dans les domaines de la topographie, de la perception visuelle et de la vision par ordinateur. Pour notre

part, nous nous intéressons à la définition de caractéristiques analogues à celles définies en mathématiques, mais pour des surfaces discrétisées sous forme de maillages.

1.2 Caractéristiques géométriques s'appuyant sur les courbures

1.2.1 Introduction

En 1983, des chercheurs [24] ont proposé d'utiliser la *géométrie différentielle* pour décrire la forme d'une surface discrète (dans leur cas, définie comme une image d'élévation $z = f(x, y)$). Pour cela, ils ont introduit une description appelée *topographic primal sketch* composée de points (comme des pics, des creux ou des selles), de lignes (comme des crêtes ou des ravins) et de morceaux de surface (en particulier plans) caractéristiques de la forme. Deux ans après, d'autres chercheurs [5] ont décrit une autre modélisation fondée elle aussi sur la géométrie différentielle pour analyser la forme d'une surface représentée par un maillage 3D et ils l'ont appliquée sur plusieurs exemples réels. Ils ont utilisé comme caractéristiques des lignes de courbure et des morceaux de plans. Au même moment, dans sa thèse de doctorat [3], Besl a proposé de calculer les courbures principales d'un maillage 3D pour créer une *HK-sign map* qui permet de segmenter une surface en régions homogènes où des primitives géométriques peuvent être ajustées.

Depuis, de nombreuses recherches ont été menées sur l'extraction et l'utilisation de caractéristiques géométriques de maillages 3D fondées sur la géométrie différentielle. Nous pouvons trouver facilement dans des livres de mathématiques les formules pour calculer les paramètres différentiels sur une surface paramétrique C^2. Mais dans le cas d'un maillage 3D discret, le problème devient beaucoup plus complexe puisque l'on perd la définition analytique de la surface. Nous devons donc, soit introduire un schéma d'approximation s'appuyant sur des mesures éparses, soit faire quelques hypothèses afin de pouvoir adapter une représentation continue.

De nombreuses méthodes ont été proposées afin de calculer des paramètres différentiels sur un maillage 3D et on peut trouver des études assez complètes dans [30], [19] ou [50]. Dans la suite, nous présentons des versions simplifiées de quelques-uns des algorithmes les plus connus.

1.2.2 Quelques rappels mathématiques

La géométrie différentielle est fondée sur la notion de courbure locale de la surface. Sur une surface Σ (voir figure 1.1), en un point $\mathbf{P}$, un plan normal $\Pi_{\mathbf{t}}$ est défini par le vecteur normal $\mathbf{n}$ et un vecteur tangent $\mathbf{t}$. $\Pi_{\mathbf{t}}$ sectionne Σ suivant la courbe plane $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$. La courbure plane de $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$ en $\mathbf{P}$ est appelée la **courbure normale** $k_{\mathbf{t}}$ en $\mathbf{P}$ de la surface Σ suivant la direction $\mathbf{t}$.

On peut démontrer que si on fait pivoter le vecteur tangent $\mathbf{t}$, la courbure normale $k_{\mathbf{t}}$ atteint un minimum et un maximum appelés les **courbures principales** en $\mathbf{P}$ de la surface Σ (et notés dans la suite k_1 et k_2). Les directions tangentes associés à ces deux extrema sont appelés les **directions principales** en $\mathbf{P}$ de la surface Σ (notées dans la suite $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$). Il s'agit de directions, c'est-à-dire de vecteurs dont le sens n'a pas d'importance, puisque les deux sections $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$ et $\mathcal{S}_{-\mathbf{t}}$ sont les mêmes.

Et on peut démontrer aussi que ces deux directions principales sont orthogonales. On a donc construit en un point $\mathbf{P}$ le repère intrinsèque $(\mathbf{P}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})$ qui caractérise localement les courbures de la surface Σ et par là-même sa forme.

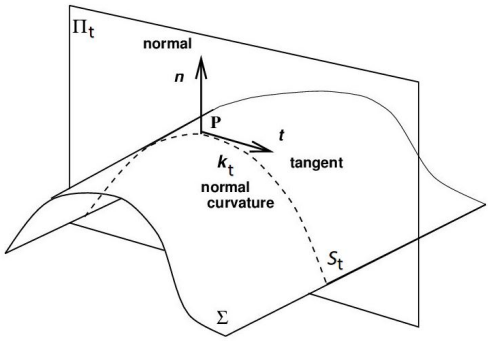


FIGURE *1.1 – Sur une surface Σ, en un point $\mathbf{P}$, un plan normal Π_t est défini par le vecteur normal $\mathbf{n}$ et un vecteur tangent $\mathbf{t}$. Π_t sectionne Σ suivant la courbe plane $\mathcal{S}_t$. La courbure plane de $\mathcal{S}_t$ en $\mathbf{P}$ est appelée la* **courbure normale** *$k_{\mathbf{t}}$ en $\mathbf{P}$ de la surface Σ suivant la direction $\mathbf{t}$.*

On trouvera plus de détails dans les livres [25], [12], [46], [49] ou [38].

1.2.3 Quelques notations

On considère que le maillage 3D surfacique M est défini par son ensemble de sommets $\mathbf{P_i}(x_i, y_i, z_i)$, par l'ensemble d'arêtes $\mathbf{e_i^j}$ reliant deux

sommets $\mathbf{P_i}$ et $\mathbf{P_j}$ et par un ensemble de faces F_k composées d'arêtes, au nombre de 3 dans le cas standard (des faces triangulaires que nous considérerons dans la suite).

Pour chaque sommet $\mathbf{P_i}$, on définit son voisinage $N(\mathbf{P_i})$ comme l'ensemble de tous les sommets connectés à $\mathbf{P_i}$. On suppose que le maillage est orientable, ce qui signifie que l'ordre des sommets d'une face est cohérent [1] pour deux faces adjacentes : lorsque deux sommets d'une arête commune sont ordonnés dans un sens pour une face, ils doivent être ordonnés dans le sens opposé pour l'autre face. Ceci permet de définir les deux côtés de M.

1.2.4 Estimation de la normale

Pour calculer les paramètres différentiels, de nombreuses méthodes nécessitent, en premier lieu, le calcul du vecteur normal discret $\mathbf{n_i}$ en chaque sommet $\mathbf{P_i}$ d'un maillage 3D. C'est un point important car il peut avoir des conséquences importantes sur la suite du processus. De nombreux algorithmes ont été proposés et il est possible de trouver un état de l'art de la plupart d'entre eux dans [27].

Parmi les approches classiques, on peut trouver les méthodes s'appuyant sur la moyenne pondérée, en particulier celle décrite dans [31]. Les auteurs font l'hypothèse que tous les triangles du maillage sont orientés de manière cohérente. Dans le cas de la moyenne pondérée par les aires des triangles adjacents, l'algorithme est présenté dans l'algorithme 1.1.

Il est généralement accepté que le vecteur normal calculé pointe vers l'extérieur du maillage. Ceci dépend, en réalité, du choix initial de l'orientation des faces qui définit la direction du produit vectoriel. Dans la plupart des cas, le processus de conception ou d'acquisition d'un maillage 3D génère une orientation correcte de toutes les faces. Cependant, certaines méthodes ont été proposées pour corriger les incohérences de l'orientation des faces ou de la direction des normales (voir par exemple [48]).

1.2.5 Calcul des courbures par ajustement local de fonction paramétrique

Pour calculer les paramètres différentiels, une première idée consiste à ajuster localement une surface continue paramétrée $f(u, v)$ sur le maillage 3D, autour du point $\mathbf{P_i}$. Un des premiers algorithmes a été proposé dans [23] même si l'on peut trouver dans des articles plus anciens des méthodes

1. Dans le sens direct (CCW pour *counter clockwise* en anglais) ou dans le sens indirect (CW pour *clockwise*).

Algorithme 1.1 : Calcul du vecteur normal $\mathbf{n_i}$ au sommet $\mathbf{P_i}$ par la méthode de la moyenne pondérée par les aires des triangles adjacents.

Entrée : Sommet $\mathbf{P_i}$
Sortie : Vecteur normal $\mathbf{n_i}$
début
- Extraire l'ensemble des sommets voisins $\mathbf{P_j} \in N(P_i)$.
- Tous ces sommets composent un ensemble de faces F_i^j qui partagent le sommet $\mathbf{P_i}$.
- **pour chaque** *face F_i^j (qui peut être triangulaire ou non)* **faire**
  - Calculer les 2 vecteurs $\mathbf{e_i^j}$ et $\mathbf{e_i'^j}$ correspondant aux deux arêtes de la face F_i^j incidentes à $\mathbf{P_i}$.
  - Définir le triangle $(\mathbf{P_i}, \mathbf{e_i^j}, \mathbf{e_i'^j})$ et calculer son aire $A_i^j = \frac{1}{2}\|\mathbf{e_i^j} \times \mathbf{e_i'^j}\|$ et son vecteur normal $\mathbf{n_i^j} = (\mathbf{e_i^j} \times \mathbf{e_i'^j})/A_i^j$.
- Le vecteur normal à $\mathbf{P_i}$ sera calculé par la moyenne de tous les vecteurs normaux aux triangles incidents pondérée par les aires :

$$\mathbf{n_i} = \frac{1}{\Sigma_j A_i^j} \sum_j A_i^j \mathbf{n_i^j}$$

similaires mais qui n'ont été appliquées qu'à des images de profondeur [47]. L'algorithme 1.2 vise à ajuster une surface quadratique autour de chaque sommet dans le but de calculer formellement les paramètres différentiels.

Dans [39], il est souligné que cette classe de méthodes repose fortement sur la précision du calcul des normales à la surface. Les auteurs proposent donc un algorithme plus sophistiqué qui s'appuie sur une surface quadratique étendue, ce qui permet de raffiner itérativement le calcul du vecteur normal.

Dans [6], les auteurs proposent d'utiliser un ajustement polynomial de degré supérieur à 2. En augmentant le degré, il est possible de calculer les dérivées des paramètres différentiels, ce qui permet de définir des lignes caractéristiques. Cette méthode est intégrée dans la bibliothèque open-source CGAL [2] (*Computational Geometry Algorithms Library*, voir aussi [7]).

2. `http://doc.cgal.org/latest/Jet_fitting_3/classCGAL_1_1Monge__via__jet_fitting.html`

Algorithme 1.2 : Calcul des paramètres différentiels par ajustement local d'une fonction quadratique.

Entrées : Sommet $\mathbf{P_i}$, vecteur normal $\mathbf{n_i}$
Sorties : Courbures principales $(k_1(\mathbf{P_i}), k_2(\mathbf{P_i}))$ et directions principales associées $(\mathbf{t_1}(\mathbf{P_i}), \mathbf{t_2}(\mathbf{P_i}))$
début

Définir le plan Π passant par $\mathbf{P_i}$ et de vecteur normal $\mathbf{n_i}$. Π correspond au plan tangent en $\mathbf{P_i}$ au maillage 3D.

Construire un repère orthogonal centré en $\mathbf{P_i}$ et défini par le vecteur normal $\mathbf{n_i}$ et deux vecteurs orthogonaux $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ pris au hasard dans Π. Par exemple, on peut utiliser (après normalisation) $\mathbf{u} = \mathbf{n_i} \times \mathbf{i}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{n_i} \times \mathbf{u}$ où $\mathbf{i}$ est le premier vecteur du repère courant.

pour chaque *sommet voisin* $\mathbf{P_j} \in N(\mathbf{P_i})$ **faire**

Calculer les coordonnées (u_j, v_j, w_j) de $\mathbf{P_j}$ dans ce repère. En particulier, w_j correspond à la distance entre $\mathbf{P_j}$ et le plan Π.

Ajuster localement au maillage 3D une surface paramétrique définie par un polynôme bivarié de degré 2 (ce qui correspond au développement de Taylor à l'ordre 2 autour de $\mathbf{P_i}$) :

$$w(u, v) = au^2 + 2buv + cv^2$$

$w(0, 0) = 0$ du fait de la définition de l'origine du repère en $\mathbf{P_i}$ et les valeurs $w(u_j, v_j)$ doivent être aussi proches que possible des w_j.

En introduisant la distance au carré :

$$E = \sum_{N(\mathbf{P_i})} [(au_j^2 + 2bu_jv_j + cv_j^2) - w_j]^2$$

l'objectif est donc de trouver les paramètres a, b et c qui minimise E. Ceci correspond à une minimisation classique aux moindres carrés (voir par exemple, la section 15.1 de [41]).

Nous avons maintenant une surface continue autour de $\mathbf{P_i}$ qui est définie par la fonction paramétrique $\mathbf{P}(u, v) = (u, v, w(u, v))$. Nous pouvons donc calculer formellement les courbures principales $(k_1(\mathbf{P_i}), k_2(\mathbf{P_i}))$ et les directions principales associées $(\mathbf{t_1}(\mathbf{P_i}), \mathbf{t_2}(\mathbf{P_i}))$.

1.2.6 Calcul des courbures par opérateur de Géométrie Différentielle Discrète

L'objectif de la Géométrie Différentielle Discrète (GDD) est de définir des opérateurs différentiels géométriques, tels que les courbures Gaussienne ou moyenne directement, à partir de mesures effectuées sur les éléments discrets d'un maillage 3D, comme l'aire des faces ou les angles entre deux sommets. En d'autres termes, tous les calculs sont effectués sans aucune approximation (voir [10] pour plus de détails).

L'idée est de caractériser la forme locale d'un maillage 3D (que l'on considère triangulé) au sommet $\mathbf{P_i}$ par la primitive géométrique la plus simple afin de calculer la courbure Gaussienne (en s'appuyant sur une sphère) ou la courbure moyenne (en utilisant des cylindres).

Courbure Gaussienne [33]

Définissons le cône Γ par son sommet $\mathbf{P}$, son angle α et la longueur de sa génératrice l (voir la figure 1.2, gauche). Le rayon de la base du cône est alors $R = l \sin \alpha$, ce qui donne le périmètre $2\pi l \sin \alpha$. Si nous découpons le cône Γ le long d'une génératrice et si nous déplions sa surface sur un plan, nous obtenons un secteur circulaire de rayon l et d'angle θ (voir la figure 1.2, droite). Notons que $2\pi - \theta$ est appelé le *déficit d'angle* ou le *défaut d'angle* au point $\mathbf{P}$.

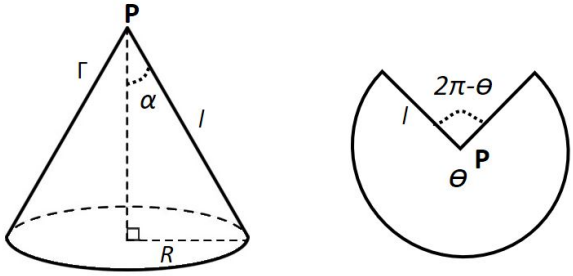


FIGURE 1.2 – *Gauche : le cône Γ est défini par le sommet $\mathbf{P}$, l'angle α et la longueur de la génératrice l. Droite : le cône est développé sur le plan et forme un secteur circulaire d'angle θ.*

Le périmètre du secteur circulaire est θl. Par construction, il est égal au périmètre de la base du cône ce qui donne $2\pi l \sin \alpha = \theta l$ ou $2\pi \sin \alpha = \theta$.

Maintenant, introduisons dans le cône une sphère de rayon r. Elle se stabilise en touchant le cône le long d'un cercle tangent de rayon R. Soit A l'aire de la calotte sphérique Σ qui est au-dessus du cercle tangent. Si nous

notons h la hauteur de la calotte (voir la figure 1.3, gauche), nous avons $A = 2\pi rh$ et donc $h = A/2\pi r$. En utilisant les relations du triangle rectangle, il est facile d'obtenir $h = r(1 - \sin\alpha) = r(1 - \theta/2\pi)$. Du coup, à partir des deux expressions précédentes, nous en déduisons $1/r^2 = (1/A)(2\pi - \theta)$.

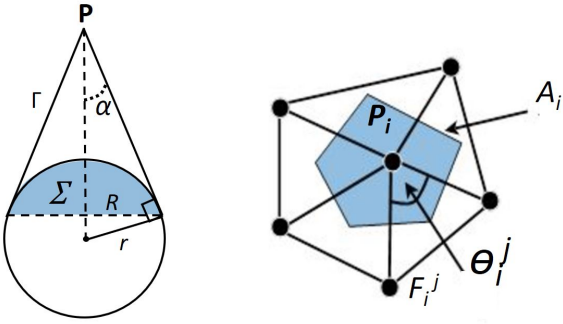


FIGURE 1.3 – *Gauche : si nous introduisons la sphère de rayon r dans le cône, elle se stabilisera le long d'un cercle tangent de rayon R ; la calotte sphérique* Σ *de hauteur h et d'aire A se trouve au dessus du cercle. Droite : la courbure Gaussienne discrète au sommet* $\mathbf{P_i}$ *est fondée sur les angles* θ_i^j *des faces* F_i^j *adjacentes à* $\mathbf{P_i}$ *qui définissent un "déficit d'angle" et sur une "aire" définie autour de* $\mathbf{P_i}$.

Si nous approximons la courbure Gaussienne en $\mathbf{P}$ par la courbure Gaussienne de la sphère qui est, par définition, égale à $1/r^2$, nous pouvons en déduire la formule suivante qui relie la courbure Gaussienne et le déficit d'angle :

$$k_g(\mathbf{P}) = \frac{1}{A}(2\pi - \theta) \tag{1.1}$$

Dans un maillage 3D discret, l'ensemble des faces F_i^j qui partagent le sommet $\mathbf{P_i}$ forme un cône généralisé (avec une véritable forme conique si le maillage est localement convexe ou concave). Il est alors possible d'obtenir une formule similaire à l'équation 1.1 pour calculer la courbure Gaussienne :

$$k_g(\mathbf{P_i}) = \frac{1}{A_i}(2\pi - \sum_j \theta_i^j)$$

où θ_i^j est l'angle de la face F_i^j au sommet $\mathbf{P_i}$ et A_i est une "aire" calculée autour du sommet $\mathbf{P_i}$ (voir la figure 1.3, droite).

La démonstration de cette formule est assez complexe car elle fait intervenir soit le théorème de Gauss-Bonnet [35], soit l'application de Gauss [1] ou l'étude des polygones sphériques [32].

En fait, comme indiqué dans [15], il y a différentes manières de définir l'aire A_i ce qui donne des résultats différents. Les formulations les plus utilisées sont :

— *Aire barycentrique*. Nous avons alors $A_i = \frac{1}{3}\sum_j A_i^j$ où A_i^j est l'aire de la face F_i^j.

— *Aire mixte* (quelquefois appelée *aire de Voronoï*) [35]. Dans ce cas, pour chaque face F_i^j, nous effectuons une triangulation de Voronoï à partir des trois sommets et nous prenons seulement en compte l'aire de la cellule de Voronoï contenant $\mathbf{P_i}$.

Nous pouvons trouver une discussion sur ces deux définitions dans [52].

Courbure moyenne [34, 15]

Supposons que nous remplaçons chaque arête $\mathbf{e_i^j}$ entre les sommets $\mathbf{P_i}$ et $\mathbf{P_j}$ par une petite portion cylindrique Σ_i^j de rayon r_i^j qui joint les faces adjacentes tangentiellement (voir la figure 1.4, gauche). Pour un cylindre de rayon r, la courbure principale associée à la génératrice est égale à 0 (le rayon de courbure est infini le long de la génératrice) alors que l'autre, qui est associée à un cercle, est égale à $1/r$. Ainsi pour tout point de Σ_i^j, nous avons $k_1 = 1/r_i^j$, $k_2 = 0$ et donc comme courbure moyenne $k_m^j = 1/2r_i^j$.

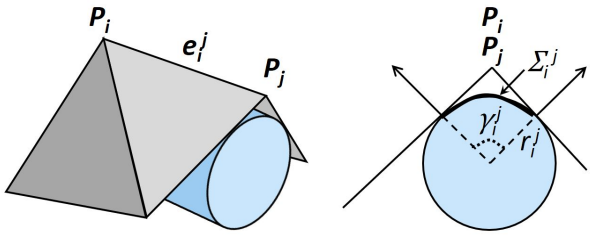


FIGURE *1.4 – L'arête* $\mathbf{e_i^j}$ *entre le sommet* $\mathbf{P_i}$ *et un sommet voisin* $\mathbf{P_j}$ *est approximée par la portion cylindrique tangente* Σ_i^j *de rayon* r_i^j.

Soit γ_i^j l'angle entre les vecteurs normaux des deux faces adjacentes (voir figure 1.4, droite). L'aire de la portion cylindrique Σ_i^j est égale à $A_i^j = \gamma_i^j\, r_i^j\, ||\mathbf{e_i^j}||$.

Maintenant, l'idée est d'approximer la courbure moyenne au sommet $\mathbf{P_i}$ en effectuant la moyenne des courbures moyennes de chaque Σ_i^j pondérée par leurs aires. Comme chaque aire concerne deux faces, il faut diviser le résultat par 2. Nous obtenons alors :

$$k_m(\mathbf{P_i}) = \frac{1}{A_i}\sum_j \frac{1}{2} A_i^j k_m^j = \frac{1}{A_i}\sum_j \frac{1}{2}\gamma_i^j\, r_i^j ||\mathbf{e_i^j}|| \frac{1}{2r_i^j} = \frac{1}{4A_i}\sum_j \gamma_i^j\, ||\mathbf{e_i^j}||$$

où A_i est l'aire autour de $\mathbf{P_i}$. Comme pour la courbure Gaussienne, on prend souvent pour A_i la formule de l'aire barycentrique ou de l'aire mixte.

Une autre méthode pour calculer la courbure moyenne a été proposée dans [35]. Elle est fondée sur la version discrète de l'opérateur de Laplace-Beltrami et elle fournit aussi une somme pondérée des longueurs des arêtes incidentes à $\mathbf{P_i}$, mais avec des angles différents :

$$k_m(\mathbf{P_i}) = \frac{1}{2A}\sum_j (\cot\alpha_i^j + \cot\beta_i^j)||\mathbf{e_i^j}||$$

où α_i^j et β_i^j sont les mesures des angles opposés à l'arête $\mathbf{e_i^j}$ et A est l'aire mixte. Une discussion sur ces deux formules se trouve dans [34] et [45].

Dans sa forme la plus simple, l'algorithme s'appuyant sur les opérateurs de Géométrie Différentielle Discrète est décrit dans l'algorithme 1.3.

1.2.7 Calcul de courbures s'appuyant sur les courbures 2D

Un des premiers algorithmes pour calculer des paramètres différentiels sur un maillage 3D a été décrit dans [8]. Il se fonde sur le calcul des rayons des cercles allant d'un sommet à deux des sommets de son voisinage. Pour chaque cercle, l'inverse du rayon donne une estimation de la courbure 2D dans une direction tangente, grâce à un théorème classique de géométrie différentielle nommé théorème de Meusnier (voir [38, section 3.3]). En utilisant l'estimation pour plusieurs cercles, il devient possible d'estimer les courbures principales grâce à un autre théorème classique de géométrie différentielle, le théorème d'Euler (voir [38, section 10.2.1]). L'algorithme 1.4 présente une version simple de l'algorithme.

Notons que dans la méthode originale, le vecteur normal $\mathbf{n_i}$ était calculé à partir des vecteurs $\mathbf{n_{jk}}$.

Dans [51] et [13], nous pouvons trouver d'autres méthodes similaires qui sont aussi fondées sur le théorème d'Euler. Cependant, l'approximation de la courbure n'utilise qu'un seul voisin $\mathbf{P_j}$ mais prend en compte le vecteur normal $\mathbf{n_j}$.

Algorithme 1.3 : Calcul des paramètres différentiels par opérateurs de Géométrie Différentielle Discrète.

Entrée : Sommet $\mathbf{P_i}$

Sorties : Courbure Gaussienne k_g et moyenne k_m, courbures principales ($k_1(\mathbf{P_i}), k_2(\mathbf{P_i})$) et directions principales associées $(\mathbf{t_1}(\mathbf{P_i}), \mathbf{t_2}(\mathbf{P_i}))$

début

- **pour chaque** *face* F_i^j *adjacentes au sommet* $\mathbf{P_i}$ *(qui sont supposées triangulaires)* **faire**
  - Calculer l'aire A_i^j.
  - Calculer l'angle θ_i^j en $\mathbf{P_i}$.
- **pour chaque** *arête* $\mathbf{e_i^j}$ **faire**
  - Calculer l'angle γ_i^j entre les deux faces adjacentes.
- Calculer $A_i = \frac{1}{3}\sum_j A_i^j$.
- Calculer :

$$k_g(\mathbf{P_i}) = \frac{1}{A_i}(2\pi - \sum_j \theta_i^j)$$

$$k_m(\mathbf{P_i}) = \frac{1}{4A_i}\sum_j \gamma_i^j \, ||\mathbf{e_i^j}||$$

- Calculer $k_1(\mathbf{P_i})$ et $k_2(\mathbf{P_i})$ en résolvant l'équation du second degré donnée par la relation $k_1 k_2 = k_g$ et $(k_1 + k_2)/2 = k_m$.
- Calculer les directions principales associées $(\mathbf{t_1}(\mathbf{P_i}), \mathbf{t_2}(\mathbf{P_i}))$, par exemple, par la méthode d'ajustement aux moindres carrés décrite dans [35, section 5.3].

Algorithme 1.4 : Calcul des paramètres différentiels s'appuyant sur les courbures 2D.

Entrées : Sommet $\mathbf{P_i}$, vecteur normal $\mathbf{n_i}$

Sorties : Courbures principales $(k_1(\mathbf{P_i}), k_2(\mathbf{P_i}))$ et directions principales associées $(\mathbf{t_1}(\mathbf{P_i}), \mathbf{t_2}(\mathbf{P_i}))$

début

- **pour chaque** *couple de sommets voisins de* $\mathbf{P_i}$ *:* $\mathbf{P_j}, \mathbf{P_k} \in N(\mathbf{P_i})$ **faire**
  - Calculer une valeur d'"opposition" $M = \langle \mathbf{P_j}\mathbf{P_i}, \mathbf{P_i}\mathbf{P_k} \rangle$. Plus M est grand, plus les sommets $\mathbf{P_j}$ et $\mathbf{P_k}$ sont opposés.
  - Trier les couples en ordre décroissant de leur valeur d'opposition et garder les premiers couples dans la liste Λ.
  - **pour chaque** *couple* $\mathbf{P_j}, \mathbf{P_k}$ *de* Λ **faire**
    - Calculer le centre $\mathbf{C_{jk}}$ du cercle $\mathcal{C}_{jk}$ passant par $\mathbf{P_j}, \mathbf{P_i}, \mathbf{P_k}$.
    - $\mathbf{n_{jk}} = \mathbf{C_{jk}}\mathbf{P_i} / \left\| \mathbf{C_{jk}}\mathbf{P_i} \right\|$ est le vecteur normal à $\mathcal{C}_{jk}$ en $\mathbf{P_i}$.
    - $k_{jk} = 1 / \left\| \mathbf{C_{jk}}\mathbf{P_i} \right\|$ est la courbure de $\mathcal{C}_{jk}$ en $\mathbf{P_i}$.
    - Calculer $\mathbf{t_{jk}} = \mathbf{n_i} \times \mathbf{n_{jk}}$. Par définition, $\mathbf{t_{jk}}$ est un vecteur orthogonal à $\mathbf{n_i}$ et est donc parallèle au plan tangent.
    - Soit Π_{jk} le plan normal en $\mathbf{P_i}$ défini par le vecteur tangent $\mathbf{t_{jk}}$. Le plan contenant $\mathcal{C}_{jk}$ peut être considéré comme une rotation de Π_{jk} d'un angle α_{jk} autour de l'axe $(\mathbf{P_i}, \mathbf{t_{jk}})$ avec : $\cos \alpha_{jk} = \mathbf{n_i} \cdot \mathbf{n_{jk}}$.
    - Nous pouvons donc appliquer le théorème de Meusnier et nous obtenons une approximation de la courbure normale dans la direction $\mathbf{t_{jk}}$ par : $k_{\mathbf{t}}^{jk} = k_{jk} \cos \alpha_{jk}$.
  - Maintenant, nous pouvons appliquer le théorème d'Euler pour estimer les courbures principales. Nous obtenons donc : $k_1 \cos^2 \theta_{jk} + k_2 \sin^2 \theta_{jk} = k_{\mathbf{t}}^{jk}$ où $\theta_{jk} = \angle(\mathbf{t_1}, \mathbf{t}_{jk})$.
  - Or, dans un repère tangent décalé d'un angle θ_0 par rapport à $\mathbf{t_1}$, nous pouvons écrire :
    $k_1 \cos^2(\theta_{jk} - \theta_0) + k_2 \sin^2(\theta_{jk} - \theta_0) = k_{\mathbf{t}}^{jk}$.
  - Si nous développons :
    $a \cos^2 \theta_{jk} + b \cos \theta_{jk} \sin \theta_{jk} + c \sin^2 \theta_{jk} = k_{\mathbf{t}}^{jk}$.
  - Si nous avons n couples $(\mathbf{P_j}, \mathbf{P_k})$, nous obtenons n équations. En utilisant la méthode des moindres carrés, nous pouvons calculer a, b et c et par là même Θ_0. Cela donne directement le repère des directions principales $(\mathbf{t_1}(\mathbf{P_i}), \mathbf{t_2}(\mathbf{P_i}))$. Enfin, nous calculons les courbures principales $(k_1(\mathbf{P_i}), k_2(\mathbf{P_i}))$.

1.2.8 Calcul des lignes de courbure sur un maillage 3D

Pour extraire les lignes de courbures sur un maillage discret, les auteurs de [42] proposent de calculer d'abord les vecteurs des directions principales $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$ en tout sommet du maillage 3D. Ceci peut être effectué grâce à l'une des méthodes présentées plus haut. Il est alors possible d'obtenir ces vecteurs principaux en n'importe quel point d'une face (supposée triangulaire) par interpolation barycentrique des vecteurs des 3 sommets. Nous allons maintenant construire la ligne de courbure en partant d'un sommet $\mathbf{P_0}$ par intégration locale, par face, le long d'une direction principale sélectionnée $\mathbf{t}$ ($\mathbf{t}$ correspond donc soit à $\mathbf{t_1}$, soit à $\mathbf{t_2}$). Pour cela, nous allons utiliser l'algorithme 1.5.

Algorithme 1.5 : Calcul d'une ligne de courbure sur un maillage 3D.

Entrées : Sommet $\mathbf{P_0}$ et vecteur correspondant à la direction principale sélectionnée $\mathbf{t_0}$
Vecteurs de la direction principale sélectionnée $\mathbf{t_i}$ en chaque sommet du maillage $\mathbf{P_i}$
Longueur maximale de la ligne de courbure *max_length*

Sortie : Liste des points $\mathbf{L_k}$ de la ligne de courbure

début

- $\mathbf{L_0} = \mathbf{P_0}$
- $k = 0$
- F_0 face adjacente à $\mathbf{P_0}$ dans la direction de $\mathbf{t_0}$.
- **tant que** *($k <$ max_length)* **et** *($\mathbf{L_k}$ n'est pas sur un bord du maillage 3D)* **faire**
  - Soit F_{k+1} la face contenant $\mathbf{L_k}$ et opposée à F_k.
  - Calculer le vecteur de la direction principale sélectionnée $\mathbf{t_k}(\mathbf{L_k})$ par interpolation barycentrique des vecteurs t^l_{k+1} associés aux sommets P^l_{k+1} de F_{k+1}.
  - Projeter $\mathbf{t_k}$ sur F_{k+1} et normaliser le vecteur obtenu. Nous obtenons $\mathbf{t^p_k}$.
  - Déterminer le prochain point de la ligne de courbure par $\mathbf{L_{k+1}} = \mathbf{L_k} + h\mathbf{t^p_k}$ où h est une valeur donnée du pas d'intégration.
  - Si $\mathbf{L_{k+1}}$ est en dehors de la face F_{k+1}, calculer le point d'intersection entre $\mathbf{L_k}\mathbf{L_{k+1}}$ et l'arête intersectée de F_{k+1}. $\mathbf{L_{k+1}}$ sera alors placé à cette intersection.
  - $k = k + 1$

En fait, cet algorithme donne seulement un morceau L^+ de la ligne de courbure. Nous devons maintenant relancer l'algorithme depuis le sommet $\mathbf{P_0}$ mais dans l'autre sens, suivant $-\mathbf{t}$, pour obtenir le second morceau L^-. La ligne de courbure L passant par $\mathbf{P_0}$ sera donc obtenue en raboutant L^+ et L^-.

Mais nous devons traiter d'autres difficultés. D'abord, nous devons être sûr que tous les vecteurs principaux des 3 sommets de la face sont orientés de manière cohérente afin que l'interpolation barycentrique donne un résultat significatif. Pour cela, il est proposé dans [42] que lorsqu'un segment $\mathbf{P_i P_{i+1}}$ entre dans une nouvelle face $\mathcal{F}_{i+1}$, tous les vecteurs principaux de la face soient orientés de telle façon que leur produit vectoriel avec $\mathbf{P_i P_{i+1}}$ soit maximal.

D'autre part, la valeur h du pas a une grande influence sur l'intégration de la ligne de courbure. En particulier, si elle est trop importante, nous pouvons facilement dévier de la véritable ligne. L'idée est donc d'ajuster la valeur à chaque étape, en particulier en fonction de la forme locale de la face courante $\mathcal{F}_i$. Nous pouvons trouver dans [42], la formule suivante qui suppose que les faces sont triangulaires. Cette formule est heuristique mais fonctionne bien d'après de nombreuses expériences et est très rapide à calculer :

$$h_i = \frac{c}{2(1 + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j)^2}$$

où c est la circonférence de la face triangulaire $\mathcal{F}_i$ et α_j le plus petit angle entre deux directions principales calculées aux sommets de la face.

Ce schéma d'intégration discrète est amélioré dans [2]. Les auteurs calculent $\mathbf{t_i^p}$ en utilisant un tenseur de courbure 2D qui est obtenu à partir d'une paramétrisation conforme qui aplatit localement la surface. Ils distinguent deux ensembles de lignes de courbure, correspondant aux courbures principales minimale et maximale. Ils supposent qu'une ligne de courbure, soit relie deux ombilics, soit est fermée, soit se termine sur un bord du maillage 3D. Aussi, ils détectent d'abord les ombilics afin d'avoir des points de départ pour calculer les lignes de courbure. Ils appliquent un schéma numérique de Runge-Kutta au 4ème ordre avec un pas adaptatif s'appuyant sur un tenseur nommé "déviateur".

Dans [36], les auteurs détaillent une méthode pour détecter la fermeture d'une ligne de courbure. Elle consiste à suivre la distance entre les deux morceaux de ligne L^+ et L^- et le point de départ $\mathbf{P_0}$. Si dans les deux cas, la distance minimale (en dehors du voisinage de $\mathbf{P_0}$ bien entendu) est très faible, la ligne de courbure est considérée comme fermée. Pour autant, dans la plupart des cas, les deux morceaux L^+ et L^- ne sont pas connectés.

Un champ de distance d est alors créé à partir des points de L^+ et L^-. La ligne d'isoparamètre $d(\mathbf{P}) = 0$ interpole des points de L^+ et L^- et est, par construction, fermée ; elle définit alors la ligne de courbure L.

Notons que dans [28], les auteurs généralisent l'algorithme ci-dessus au cas où nous n'avons plus un maillage 3D mais seulement un nuage de points 3D, sans arête, ni face. Il est alors nécessaire d'estimer des plans tangents en chaque sommet du maillage.

1.3 Caractéristiques topologiques

La *topologie* est une branche des mathématiques visant à une analyse *qualitative* des principales propriétés de certains espaces. En particulier, la topologie s'intéresse aux caractéristiques invariantes lors de déformations continues (pas de déchirure ou de collage) de ces espaces. Contrairement à la géométrie, on ne se soucie donc pas des mesures et des distances, et on s'intéresse uniquement à des caractéristiques globales des espaces considérés. Dans cette section, on supposera par souci de simplicité les surfaces représentées sous forme de *complexes simpliciaux*, c'est-à-dire de collections de sommets (0-simplexes), arêtes (1-simplexes) et triangles (2-simplexes) agencés de manière cohérente, *i.e.* telle que l'intersection de deux simplexes soit vide, ou bien soit un simplexe de dimension strictement inférieure et appartenant au complexe.

1.3.1 Les surfaces topologiques

En topologie, la définition habituelle d'une *surface* est celle d'une 2-*variété* : une surface topologique est un espace bidimensionnel tel que le voisinage de tout point y est homéomorphe à un disque. On parle de *surface à bord* lorsque le voisinage de tout point est homéomorphe soit à un disque, soit à un demi-disque. La figure 1.5 montre quelques exemples de surfaces topologiques.

Un des intérêts majeurs de la topologie est qu'elle permet de **classer** les surfaces. Rappelons qu'un sous-ensemble *compact* d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension n est un sous-ensemble fermé (c'est-à-dire que son complément dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert) et borné (c'est-à-dire qu'il est contenu dans une boule euclidienne de rayon fini). Un sous-ensemble d'une surface est *connexe* s'il ne peut pas être représenté comme l'union d'au moins deux sous-ensembles ouverts disjoints et non vides de la surface. Les sous-ensembles connexes maximaux d'une surface sont appelés les *composantes connexes* de la surface. Le nombre de composantes connexes est la **première caractéristique topologique permettant de classer les surfaces**. Par

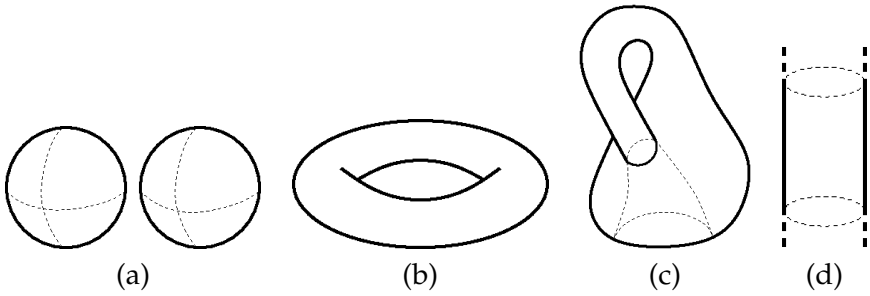


FIGURE 1.5 – *Quelques exemples de surfaces topologiques. (a) Une surface non connexe (deux composantes connexes). (b) Une surface de genre non nul : le tore. (c) Une surface non orientable : la bouteille de Klein. (d) Une surface non bornée : le cylindre infini.*

exemple, les surfaces de la figure 1.5 (b,c,d) ont une seule composante connexe, alors que la surface de la figure 1.5 (a) en possède deux. La **deuxième caractéristique topologique** d'une surface est appelée le *genre* de la surface et découle du *théorème de classification des surfaces* :

Toute 2-variété (sans bord) compacte et connexe est homéomorphe soit à une sphère à g trous, $g \geqslant 0$, soit à une sphère à g bonnets croisés (*cross-caps*), $g \geqslant 1$ [3]. De plus, une surface homéomorphe à une sphère à g_1 trous ne peut être homéomorphe ni à une sphère à g_2 trous si $g_1 \neq g_2$, ni à une sphère à g_2 bonnets croisés même si $g_1 = g_2$. Un *bonnet croisé* est une surface à bord construite en attachant un ruban de Möbius au bord d'un disque. Cette surface n'a qu'une face (donc n'engendre pas de notion d'intérieur ou d'extérieur) et s'auto-intersecte le long d'un intervalle. g est appelé le *genre* de la surface. Une surface homéomorphe à une sphère à g trous peut être plongée dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire qu'il existe une application f de la surface $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui définit un homéomorphisme entre $\mathbb{X}$ et $f(\mathbb{X})$) et est dite *orientable*, quelque que soit la valeur de g. Une surface homéomorphe à une sphère à g bonnets croisés ne peut pas être plongée dans $\mathbb{R}^3$ et est dite *non orientable*, quelque que soit la valeur de g.

Calcul du nombre de composantes connexes et du genre d'une surface

Les composantes connexes d'une surface discrétisée sous forme de complexe simplicial peuvent être calculées facilement en temps linéaire par rapport au nombre de simplexes de la surface en utilisant une struc-

3. Une 2-variété contenant à la fois des trous et des bonnets croisés est en fait homéomorphe à une 2-variété ne contenant que des bonnets-croisés, chaque trou étant équivalent à deux bonnets croisés dans ce cas.

ture de données d'ensemble disjoint [9]. Une telle structure de données opère sur des ensembles disjoints dynamiques identifiés par un élément les représentant. Dans notre cas, ces ensembles contiennent par exemple les sommets de la surface. Typiquement, une structure de données d'ensemble disjoint définit une procédure `Find(v)` qui renvoie le représentant de l'ensemble contenant l'élément `v`, ainsi qu'une procédure `Union(v,w)` qui fusionne les ensembles contenant les éléments `v` et `w`. Au début un ensemble est créé par sommet, ne contenant que ce sommet. Calculer les composantes connexes de la surface revient ensuite à parcourir les arêtes de la surface. Pour chaque arête `vw`, on a uniquement besoin de trouver les ensembles contenant les sommets `v` et `w` et de les fusionner s'ils diffèrent, afin de garder un unique ensemble par composante connexe. Les deux procédures `Find(v)` et `Union(v,w)` ont un coût amorti presque constant si les ensembles sont implémentés avec des forêts et les procédures écrites avec précaution [9], ce qui rend le coût total linéaire.

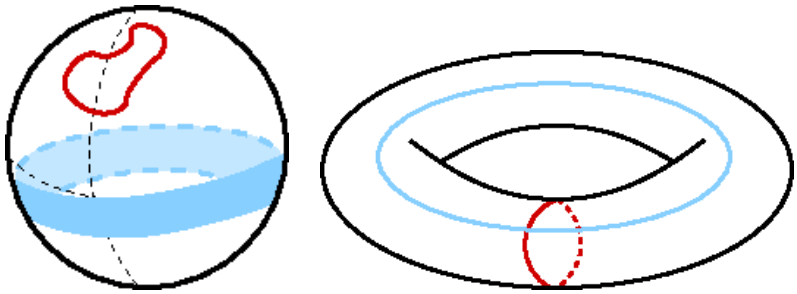
Le genre d'une surface connexe $\mathbb{X}$ se calcule facilement à partir de sa caractéristique d'Euler $\chi(\mathbb{X})$, comme nous le verrons dans la section suivante. Par ailleurs, la *formule d'Euler* dit que cette caractéristique d'Euler peut être calculée comme la somme alternée du nombre d'éléments de dimensions successives : $\chi(\mathbb{X}) = V - E + T$ avec V, E et T le nombre de sommets, arêtes et triangles, respectivement. On peut donc calculer g à partir de V, E et T. Notons que si la surface n'est pas connexe, les caractéristiques d'Euler de ses composantes connexes s'additionnent. Par exemple, si $\mathbb{X}$ comporte deux composantes connexes $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$, alors $\chi(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X}_1) + \chi(\mathbb{X}_2)$.

1.3.2 Homologie

L'homologie est une technique mathématique permettant le calcul d'invariants topologiques plus fins que le nombre de composantes connexes et le genre. Les caractéristiques qu'étudie l'homologie sont des cycles de simplexes de dimension k pour tout k plus petit que la dimension du complexe simplicial considéré (2 en ce qui nous concerne puisqu'on s'intéresse aux surfaces), et donc appelés *k-cycles*. Parmi ces cycles, l'homologie s'intéresse plus particulièrement aux classes d'équivalence de cycles qui *ne* sont *pas* le bord d'un sous-ensemble de dimension $k+1$ du complexe, et qu'on appelle des *chaînes*.

L'homologie est décrite en termes de *groupes d'homologie*. Chaque *groupe d'homologie* $H_k(\mathbb{X})$ d'une surface $\mathbb{X}$ contient les classes d'équivalence des k-cycles de $\mathbb{X}$ qui ne sont pas un bord. Détaillons l'exemple de la 2-sphère. Les 0-cycles sont les points de la sphère. Aucun point ne forme

le bord d'une courbe sur la sphère (sous-ensemble de dimension 1 de la sphère) car une courbe comporte soit deux extrémités, soit aucune si elle est fermée. Tous les points d'une sphère sont homologues (c'est-à-dire appartiennent à la même classe d'équivalence pour l'homologie), en gros car chacun d'entre eux peut être déplacé de manière continue vers un autre sur la sphère le long d'une courbe appartenant à la sphère (car la sphère est connexe). Ainsi, $H_0(\mathbb{X})$ contient une unique classe d'équivalence. $H_1(\mathbb{X})$ ne contient aucune classe d'équivalence car tout cycle fait de courbes est le bord d'un sous-ensemble connexe de dimension 2 de la sphère. Puisque la sphère est de dimension 2, elle ne contient pas de sous-ensemble de dimension 3, donc aucun cycle surfacique (*i.e.* de dimension 2) n'est un bord. Tous ces cycles étant encore une fois équivalents, $H_2(\mathbb{X})$ contient également une unique classe d'équivalence. Dans le cas d'un tore, $H_0(\mathbb{X})$ et $H_2(\mathbb{X})$ contiennent également une unique classe d'équivalence chacun, mais cette fois $H_1(\mathbb{X})$ contient deux classes d'équivalence, représentées par les deux cycles visibles sur la figure 1.6 (b). Notons qu'aucun de ces deux cycles n'est le bord d'un sous-ensemble du tore, car un tel sous-ensemble nécessiterait des courbes supplémentaires pour compléter ce bord.



(a) (b)

FIGURE 1.6 – *(a) Exemples d'un* 1*-cycle et d'un* 2*-cycle sur la sphère. (b) Deux* 1*-cycles représentant les deux classes d'équivalence dans* $H_1(\mathbb{X})$ *pour le tore.*

Les rangs b_k des groupes d'homologie $H_k(\mathbb{X})$ sont appelés *nombres de Betti*. b_0 possède une interprétation géométrique simple : il s'agit du nombre de composantes connexes de $\mathbb{X}$. b_1 correspond au nombre de courbes fermées non équivalentes, qui vaut deux fois le genre de la surface si $\mathbb{X}$ est une surface orientable, et le genre moins un si $\mathbb{X}$ est une surface non orientable. b_2 peut être interprété comme le nombre d'espaces de dimension 3 entourés par la surface. Il vaut un si $\mathbb{X}$ est orientable puisque dans ce cas $\mathbb{X}$ sépare l'espace tridimensionnel en deux sous-espaces, en vertu du théorème de Jordan-Brouwer. Il vaut zéro sinon, car une surface non orien-

table n'est le bord d'aucun objet de dimension 3. La somme alternée des nombres de Betti $b_0 - b_1 + b_2$ est appelée la *caractéristique d'Euler* $\chi(\mathbb{X})$ de la surface. Ainsi, la caractéristique d'Euler d'une surface connexe orientable vaut $2 - 2g$ avec g le genre de la surface, et la caractéristique d'Euler d'une surface non orientable vaut $2 - g$.

Dans le cas des surfaces non orientables, l'homologie s'intéresse aussi aux k-cycles qui ne sont le bord d'aucune chaîne de dimension $k+1$ mais qui deviennent un bord si on les "prend" λ_k fois. Ces nombres λ_k sont appelés *coefficients de torsion*. Ils permettent de classer les k-cycles non orientables. Par exemple, une bouteille de Klein (voir la figure 1.5 (c)) possède un coefficient de torsion λ_1 égal à 2.

Les nombres de Betti b_k et les coefficients de torsion λ_k donnent l'information homologique complète d'une surface. Tout ensemble de $b_k + \lambda_k$ k-cycles représentatifs (un par classe d'équivalence de $H_k(\mathbb{X})$) est appelé un ensemble de **k-générateurs** de la surface.

Calcul des groupes d'homologie

La manière la plus classique de calculer les groupes d'homologie d'une surface représentée sous forme de complexe simplicial est de réduire ses matrices d'incidence à une forme canonique appelée la *forme normale de Smith* (FNS) [14]. Les *matrices d'incidence* sont des matrices d'entiers qui codent quels simplexes du complexe simplicial sont le bord d'un simplexe de plus grande dimension. Ordonnons arbitrairement les simplexes $\sigma_0^k, \ldots, \sigma_l^k$ de dimension k quelconque du complexe simplicial ; alors l'élément à la ligne $i+1$ et la colonne $j+1$ de la matrice d'incidence I^k est égal à 0 si σ_j^{k-1} n'appartient pas au bord de σ_i^k, 1 si σ_j^{k-1} appartient au bord de σ_i^k et -1 si $-\sigma_j^{k-1}$ (le même simplexe mais d'orientation opposée) appartient au bord de σ_i^k. Par exemple, dans le cas simple d'un complexe composé d'un triangle σ_0^2 et de ses sommets incidents $\sigma_0^0, \sigma_1^0, \sigma_2^0$ et arêtes $\sigma_0^1 = \sigma_0^0\sigma_1^0, \sigma_1^1 = \sigma_1^0\sigma_2^0, \sigma_2^1 = \sigma_2^0\sigma_0^0$, on a $I^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une matrice d'incidence I^k est généralement de taille gigantesque puisque celle-ci vaut le nombre de simplexes de dimension $k-1$ fois le nombre de simplexes de dimension k. Sa FNS est une matrice diagonale avec un nombre limité d'éléments diagonaux non nuls. Cependant, la réduction d'une matrice d'incidence à sa FNS est très coûteuse en temps. Les meilleurs algorithmes actuels, comme celui de [14], possèdent une complexité super-cubique. Cette méthode est donc uniquement applicable en pratique pour

des complexes simpliciaux de petite taille.

Afin de calculer l'information homologique de complexes simpliciaux de grande taille, une approche est de *réduire* le complexe à un complexe contenant significativement moins de simplexes, tout en préservant son homologie. La théorie de Morse discrète, introduite par Forman [18], peut être utilisée à cette fin. La *théorie de Morse* est un outil mathématique d'étude de la topologie d'une variété $\mathbb{X}$ avec des fonctions différentiables f. Plus précisément, f étant lisse, la ligne de niveau des points de $\mathbb{X}$ partageant la même valeur pour f est ordinairement un ensemble de courbes fermées sur $\mathbb{X}$. Les cas dégénérés apparaissent lorsque la topologie de la ligne de niveau change, par exemple lorsque deux courbes fermées se rejoignent. Ces cas correspondent aux points pour lesquels le gradient de f disparaît. Ces points sont appelés *points critiques* de f sur $\mathbb{X}$. Pour la plupart des fonctions, dites *fonctions de Morse*, les points critiques sont isolés et la ligne de niveau correspondante soit est réduite à un unique point, soit comprend plusieurs courbes fermées se rejoignant au point critique. Dans le premier cas, le point correspond à un minimum ou un maximum local de f, alors que dans le second cas on l'appelle *point selle* (voir la figure 1.7 (a)). L'*indice* d'un point critique x est le nombre de valeurs propres négatives de sa matrice hessienne (la matrice des dérivées secondes de f en x). Dans le cas d'une surface, cet indice est égal à zéro pour un minimum local, un pour un point selle et deux pour un maximum local. Toutes ces notions et les résultats liés ont été étendus au cas discret par Robin Forman en 1998 [18]. En particulier, plusieurs inégalités relient le nombre n_i de points critiques d'indice i et les nombres de Betti. Soit k la dimension de la variété $\mathbb{X}$ ($k = 2$ dans notre cas). Alors :

$$\chi(\mathbb{X}) = b_0 - b_1 + \cdots \pm b_k = n_0 - n_1 + \cdots \pm n_k \tag{1.2}$$

$$\forall i \in [0, k], n_i \geqslant b_i \tag{1.3}$$

$$\forall i \in [0, k], n_i - n_{i-1} + \cdots \pm n_0 \geqslant b_i - b_{i-1} + \cdots \pm b_0 \,. \tag{1.4}$$

Les équations (1.3) et (1.4) sont appelées *inégalités faibles de Morse* et *inégalités fortes de Morse*, respectivement. Elles peuvent être utilisées pour calculer de manière efficace les nombres de Betti, puisque seuls les points critiques d'une fonction de Morse f ont besoin d'être calculés. Cette fonction de Morse doit cependant être choisie avec précaution, de manière à garder son nombre de points critiques faible par rapport à la taille du complexe simplicial. Ce nombre peut parfois rester élevé malgré tout. Les champs de vecteurs discrets homologiques ont été proposés récemment pour résoudre ce problème [21].

Une troisième catégorie d'approche utilise la théorie de l'*homologie constructive* [43] afin de calculer l'homologie d'un complexe simplicial. Par exemple, Boltcheva *et al.* [4] décomposent le complexe simplicial étudié en composantes dites *variété-connexes* [26], dont l'homologie se calcule ensuite indépendamment les unes des autres. Ceci se fait par réduction des matrices d'incidence correspondantes en leur FNS, ce qui est rapide car chaque composante est petite. L'homologie du complexe global est ensuite déduite en calculant itérativement l'homologie de sous-complexes $A \cup B$ à partir de l'homologie de A, B et $A \cap B$, et en partant des composantes variété-connexes.

1.3.3 Un exemple de caractéristiques topologico-géométriques : graphe de Reeb et complexe de Morse-Smale

Comme on l'a vu, dans la théorie de Morse les points critiques d'une fonction lisse f sur la surface sont utilisés pour calculer les nombres de Betti. On peut en fait aller plus loin et **connecter** ces points critiques, selon f mais aussi selon la géométrie de la surface.

Soit $\mathbb{X}$ une surface et f une fonction de Morse lisse définie sur $\mathbb{X}$. Connecter chaque point critique de f à ses "voisins" génère un **squelette topologique** de la surface (voir la figure 1.7 (a)). Ce squelette est un graphe, appelé *graphe de Reeb*. Le graphe de Reeb de f sur $\mathbb{X}$ est formellement défini comme l'espace quotient $\mathbb{X}/\sim$, avec $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{X}$ telle que $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ et x_1 et x_2 appartiennent à la même composante connexe de $f^{-1}(f(x_1))$. Les nœuds du graphe de Reeb correspondent aux points critiques de f, et ses arêtes sont créées en balayant les lignes de niveau de f et en rétrécissant chaque composante connexe de ces lignes entre deux points critiques en une courbe. Notons que la définition d'un graphe de Reeb s'étend à des espaces plus généraux que les surfaces. On parle aussi parfois de *graphe des contours*.

Au-delà de la "contraction" d'une surface en un squelette topologique, les points critiques d'une fonction de Morse f peuvent être utilisés pour **décomposer** la surface en cellules. Pour cela, nous nous intéressons aux *lignes intégrales* de f, c'est-à-dire les courbes paramétriques $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{X}$ vérifiant la condition :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t) = \nabla f(\gamma(t)).$$

Cette condition exprime qu'en chacun de ses points la vitesse le long de la courbe doit correspondre au gradient de f. Remarquons que toute ligne intégrale sur $\mathbb{X}$ se termine en un point critique de f, où sa vitesse

devient alors nulle. En effet les points critiques sont par définition les points où le gradient de f disparaît. Soit x un point critique de f, l'ensemble des lignes intégrales de f convergeant en x est une cellule appelée la *variété descendante* de x. De manière équivalente, l'ensemble des lignes intégrales de $-f$ convergeant en x est appelé la *variété ascendante* de x. La dimension de ces variétés dépend de l'indice i du point critique. La variété descendante d'un minimum local ($i = 0$) est réduite au point lui-même, tandis que sa variété ascendante est une cellule de dimension 2, c'est-à-dire un morceau continu de la surface. Réciproquement, la variété descendante d'un maximum local ($i = 2$) est une cellule de dimension 2 alors que sa variété ascendante est réduite au point critique. La variété descendante tout comme la variété ascendante d'un point selle ($i = 1$) sont des cellules de dimension 1, c'est-à-dire des courbes sur la surface. Prises toutes ensemble, les variétés descendantes décomposent $\mathbb{X}$ en un complexe cellulaire (un ensemble de cellules telles que le bord d'une cellule de dimension k est l'union de cellules de dimension $k-1$) appelé *complexe de Morse descendant*. De même, les variétés ascendantes définissent le *complexe de Morse ascendant*. Dans le cas où toute variété descendante intersecte toute variété ascendante uniquement de manière transversale, f est dite *fonction de Morse-Smale* et l'intersection du complexe de Morse descendant et du complexe de Morse ascendant est appelé *complexe de Morse-Smale* de f.

Un complexe de Morse-Smale sur une surface est une collection de cellules quadrangulaires de dimension 2, ayant chacune pour sommets deux points critiques, un minimum local et un maximum local, et dont le bord est constitué de courbes joignant soit un minimum local à un point critique, soit un point critique à un maximum local (jamais deux points critiques). La figure 1.7 (b) présente un complexe de Morse-Smale possible pour la surface et la fonction de la figure 1.7 (a).

De nombreuses méthodes ont été proposées pour calculer efficacement les complexes de Morse-Smale sur des surfaces discrètes, voir [17] pour un état de l'art. Un des intérêts principaux de ces complexes réside en leur simplification, pour des applications à la fois topologiques et géométriques. Comme expliqué auparavant, les fonctions de Morse peuvent avoir beaucoup de points critiques sur la surface, ce qui rend les algorithmes de calcul de l'homologie particulièrement coûteux en temps. Simplifier un complexe de Morse-Smale permet de supprimer les points critiques "superflus" de manière itérative, en fusionnant une paire maximum local-point selle en un maximum local ou une paire minimum local-point selle en un minimum local. Ceci conduit à des algorithmes de calcul de l'homologie plus efficaces. D'un point de vue géométrique, les complexes de Morse-Smale ont été largement utilisés pour l'analyse et la simplification de champs de vecteurs,

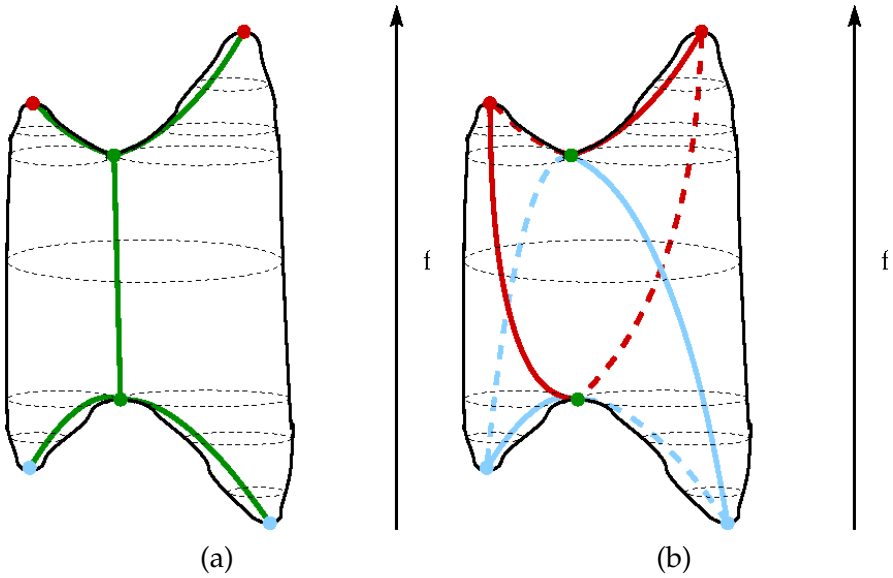


FIGURE 1.7 – *(a) Théorie de Morse : exemple 2D avec une fonction de hauteur f. Les points critiques sont en bleu (minima locaux), rouge (maxima locaux) et vert (points selles). Quelques lignes de niveau sont représentées en lignes pointillées. Le graphe de Reeb de f est en vert. (b) Complexe de Morse-Smale de la fonction f. Les courbes bleues sont les variétés descendantes des points selles, tandis que les courbes rouges sont leurs variétés ascendantes.*

voir par exemple [22]. Dans ce cas, la fonction de Morse-Smale f est choisie de manière à ce que son champ de gradient corresponde au champ de vecteurs. Une autre application des complexes de Morse-Smale concerne la segmentation hiérarchique de la surface. Celle-ci a montré son intérêt en particulier en biologie structurelle [37].

1.4 Conclusion

Dans ce cours, nous avons vu qu'un maillage 3D pouvait principalement être analysé de deux manières : soit en considérant sa géométrie, soit en caractérisant sa topologie. Ces deux façons de "voir" un objet 3D, ces deux angles différents pour la compréhension d'une forme, peuvent être totalement décorrélés ou bien partiellement liés. Certaines approches mélangent en effet la géométrie et la topologie, soit en proposant des solutions géométriques qui prennent en compte certaines garanties topologiques, soit au contraire en analysant la topologie et en ajoutant quelques notions

géométriques qui enrichissent ainsi la compréhension de la forme.

La première moitié du cours était dédiée à l'étude de la géométrie d'une forme, notamment à l'aide d'un outil puissant issu de la géométrie différentielle : les courbures. L'enjeu repose ici sur la transposition du calcul de paramètres différentiels non plus dans le monde continu, mais dans le monde du maillage surfacique plongé dans l'espace tridimensionnel. Pour aller plus loin, une fois le calcul de ces estimateurs effectué, on peut s'intéresser à leur utilisation. Des caractéristiques géométriques pertinentes peuvent alors être extraites des maillages 3D. Par exemple, si l'on considère des caractéristiques *linéiques*, des **lignes de crêtes** peuvent être calculées [53]. Elles correspondent à des ensembles de sommets dont les variations des courbures sont extrémales, et elles peuvent être liées à des éléments visuels, voire sémantiques. Parfois, le contexte peut être pris en compte et ces lignes peuvent avoir un sens dans les domaines de la géologie, de la planétologie, de la médecine, de la biologie, etc. Les algorithmes pour extraire ces lignes sont nombreux, et certains ont une considération pour la topologie des entités calculées, par exemple, en veillant à préserver la connexité des lignes, ou les cycles qui pourraient exister sur des zones de la surface à traiter [29]. Outre ces attributs linéiques, il est également possible de calculer des caractéristiques *surfaciques* sur un maillage, en détectant des zones ayant des propriétés différentielles similaires et en groupant les sommets d'après de tels critères. On parle alors de "segmentation de maillages" [44]. Certains travaux vont plus loin en proposant des techniques pour extraire des caractéristiques d'ordre structurel : des graphes sont utilisés pour expliciter l'agencement des différentes zones similaires, et permettent ainsi de mettre en évidence certains motifs dans les formes [40].

La deuxième moitié du cours était consacrée à l'étude de la topologie d'une forme, en particulier au calcul d'invariants topologiques et de l'homologie. Des structures topologiques enrichies de notions géométriques telles que les graphes de Reeb et les complexes de Morse-Smale ont été présentées, mais il est possible d'aller plus loin encore dans l'analyse de la topologie avec des considérations géométriques. Il est par exemple intéressant de pouvoir mieux comprendre l'agencement, la structure et l'allure d'une forme en observant la création et la disparition de ses composantes connexes, de ses trous ou de ses cavités à l'aide d'une fonction dite de "filtration". Ainsi, la notion de **persistance homologique** a été utilisée dans de nombreux algorithmes permettant de comprendre la façon dont ces invariants naissent, meurent ou perdurent lorsque l'on fait varier une fonction sur la surface [16]. Ils aident à la détection et à la filtration du bruit topologique, à la mise en évidence de structures plus ou moins importantes et qui ont un sens géométrique, à la détection de caractéristiques difficiles

à observer d'un point de vue purement visuel. Il est également possible, à l'aide de ces techniques, de "quantifier" la topologie d'une forme : la taille des trous, leur épaisseur ou leur fragilité peuvent être calculées et ainsi enrichir l'analyse topologique d'estimateurs géométriques pertinents [20].

Bibliographie

[1] L. ALBOUL et G. ECHEVERRIA : Polyhedral Gauss maps and curvature characterisation of triangle meshes. *In Mathematics of Surfaces XI*, vol. 3604 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 14–33. Springer, 2005.

[2] P. ALLIEZ, D. COHEN-STEINER, O. DEVILLERS, B. LÉVY et M. DESBRUN : Anisotropic polygonal remeshing. *ACM Trans. Graph.*, 22(3):485–493, 2003.

[3] P. J. BESL : *Surfaces in Range Image Understanding*. Springer Series in Perception Engineering. Springer-Verlag, New York, 1988.

[4] D. BOLTCHEVA, D. CANINO, S. MERINO-ACEITUNO, J.-C. LÉON, L. de FLORIANI et F. HÉTROY : An iterative algorithm for homology computation on simplicial shapes. *Comput. Aided Design*, 43(11):1457–1467, 2011.

[5] M. BRADY, J. PONCE, A. L. YUILLE et H. ASADA : Describing surfaces. *Comput. Vis. Graph. Image Process.*, 32(1):1–28, 1985.

[6] F. CAZALS et M. POUGET : Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets. *Comput. Aided Geom. Design*, 22(2):121–146, 2005.

[7] F. CAZALS et M. POUGET : Algorithm 889 : Jet_fitting_3 : A generic C++ package for estimating the differential properties on sampled surfaces via polynomial fitting. *ACM Trans. Math. Software*, 35(3):24 :1–24 :20, 2008.

[8] X. CHEN et F. SCHMITT : Intrinsic surface properties from surface triangulation. *In ECCV 1992*, vol. 588 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 739–743. Springer, 1992.

[9] T. H. CORMEN, C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST et C. STEIN : *Introduction to algorithms*. The MIT Press, 3rd édn, 2009.

[10] K. CRANE, F. de GOES, M. DESBRUN et P. SCHRÖDER : Discrete differential geometry : An applied introduction. *In SIGGRAPH 2013 courses*. ACM, 2013.

[11] DICTIONNAIRE DE FRANÇAIS LAROUSSE : Définition : caractéristique. `https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/caractéristique/13066?q=caractéristique`, 2018. [Online].

[12] M. P. do CARMO : *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

[13] C.-s. DONG et G.-z. WANG : Curvatures estimation on triangular mesh. *J. Zhejiang Univ. Sci. A*, 6(1):128–136, 2005.

[14] J.-G. DUMAS, F. HECKENBACH, D. SAUNDERS et V. WELKER : Computing simplicial homology based on efficient Smith normal form algorithms. *In* M. JOSWIG et N. TAKAYAMA, éds : *Algebra, Geometry and Software Systems*, p. 177–206. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[15] N. DYN, K. HORMANN, S.-J. KIM et D. LEVIN : Optimizing 3D triangulations using discrete curvature analysis. *In* T. LYCHE et L. L. SCHUMAKER, éds : *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, p. 135–146. Vanderbilt University, Nashville, TN, USA, 2001.

[16] H. EDELSBRUNNER et D. MOROZOV : Persistent homology. *In* J. E. GOODMAN, J. O'ROURKE et C. D. TÓTH, éds : *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chap. 24. CRC Press LLC, 2017.

[17] L. D. FLORIANI, U. FUGACCI, F. IURICICH et P. MAGILLO : Morse complexes for shape segmentation and homological analysis : discrete models and algorithms. *Comput. Graph. Forum*, 34(2):761–785, 2015.

[18] R. FORMAN : Morse theory for cell complexes. *Adv. Math.*, 134(1):90–145, 1998.

[19] T. D. GATZKE et C. M. GRIMM : Estimating curvature on triangular meshes. *Int. J. Shape Model.*, 12(01):1–28, 2006.

[20] A. GONZALEZ-LORENZO, A. BAC, J.-L. MARI et P. REAL : Two measures for the homology groups of binary volumes. *In DGCI 2016*, vol. 9647 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 154–165. Springer, 2016.

[21] A. GONZALEZ-LORENZO, A. BAC, J.-L. MARI et P. REAL JURADO : Allowing cycles in discrete Morse theory. *Topology Appl.*, 228:1–35, 2017.

[22] A. GYULASSY, V. NATARAJAN, V. PASCUCCI, P. BREMER et B. HAMANN : A topological approach to simplification of three-dimensional scalar functions. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, 12(4):474–484, 2006.

[23] B. HAMANN : Curvature approximation for triangulated surfaces. *In* G. FARIN, H. NOLTEMEIER, H. HAGEN et W. KNÖDEL, éds : *Geometric Modelling*, vol. 8 de *Computing Supplementum*, p. 139–153. Springer, Vienna, 1993.

[24] R. M. HARALICK, L. T. WATSON et T. J. LAFFEY : The topographic primal sketch. *Int. J. Robotics Res.*, 2(1):50–72, 1983.

[25] M. HOSAKA : *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*. Computer Graphics – Systems and Applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.

[26] A. HUI et L. de FLORIANI : A two-level topological decomposition for non-manifold simplicial shapes. *In Symposium on Solid and Physical Modeling*, p. 355–360. ACM, 2007.

[27] S. JIN, R. R. LEWIS et D. WEST : A comparison of algorithms for vertex normal computation. *Visual Comput.*, 21(1):71–82, 2005.

[28] E. KALOGERAKIS, D. NOWROUZEZAHRAI, P. SIMARI et K. SINGH : Extracting lines of curvature from noisy point clouds. *Comput. Aided Design*, 41(4):282–292, 2009.

[29] D. KUDELSKI, S. VISEUR et J.-L. MARI : Skeleton extraction of vertex sets lying on arbitrary triangulated 3D meshes. *In DGCI 2013*, vol. 7749 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 203–214, 2013.

[30] E. MAGID, O. SOLDEA et E. RIVLIN : A comparison of Gaussian and mean curvature estimation methods on triangular meshes of range image data. *Comput. Vis. Image Und.*, 107(3):139–159, 2007.

[31] N. MAX : Weights for computing vertex normals from facet normals. *J. Graph. Tools*, 4(2):1–6, 1999.

[32] D. S. MEEK et D. J. WALTON : On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface. *Comput. Aided Geom. Design*, 17(6):521–543, 2000.

[33] M. M. MESMOUDI, E. DANOVARO, L. D. FLORIANI et U. PORT : Surface segmentation through concentrated curvature. *In ICIAP 2007*, p. 671–676. IEEE Computer Society, 2007.

[34] M. M. MESMOUDI, L. D. FLORIANI et P. MAGILLO : Discrete curvature estimation methods for triangulated surfaces. *In WADGMM 2010*, vol. 7346 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 28–42. Springer, 2010.

[35] M. MEYER, M. DESBRUN, P. SCHRÖDER et A. H. BARR : Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. *In* H.-C. HEGE et K. POLTHIER, éds : *Visualization and Mathematics III*, Mathematics and Visualization, p. 35–57. Springer, 2003.

[36] I. MORITA et H. SAKAMOTO : Anisotropic remeshing based on topology of curvature-lines and isoparametric-lines of 3-dimensional surface. *In IWAIT 2010*, 2010.

[37] V. NATARAJAN, Y. WANG, P. BREMER, V. PASCUCCI et B. HAMANN : Segmenting molecular surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 23(6):495–509, 2006.

[38] N. M. PATRIKALAKIS et T. MAEKAWA : *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. Hyperbook edition : `http://web.mit.edu/hyperbook/Patrikalakis-Maekawa-Cho/mathe.html`.

[39] S. PETITJEAN : A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. *ACM Comput. Surv.*, 34(2):211–262, 2002.

[40] A. POLETTE, J. MEUNIER et J.-L. MARI : "Shape-Curvature-Graph" : Towards a new model of representation for the description of 3D meshes. *In AVR (2)*, vol. 10325 de *Lecture Notes in Computer Science*, p. 369–384. Springer, 2017.

[41] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY : *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, New York, 3rd édn, 2007. `http://numerical.recipes/`.

[42] C. RÖSSL et L. KOBBELT : Line-art rendering of 3D-models. *In PG 2000*, p. 87–96. IEEE Computer Society, 2000.

[43] F. SERGERAERT : Constructive algebraic topology. *ACM SIGSAM Bull.*, 33(3):13–25, 1999.

[44] A. SHAMIR : A survey on mesh segmentation techniques. *Comput. Graph. Forum*, 27(6):1539–1556, 2008.

[45] P. SIMARI, L. DE FLORIANI, F. IURICICH et M. M. MESMOUDI : Generalized extrinsic distortion and applications. *Computers & Graphics*, 37(6):582–588, 2013.

[46] M. SPIVAK : *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Houston, TX, 3rd édn, 1999.

[47] E. M. STOKELY et S. Y. WU : Surface parametrization and curvature measurement of arbitrary 3-D objects : five practical methods. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 14(8):833–840, 1992.

[48] K. TAKAYAMA, A. JACOBSON, L. KAVAN et O. SORKINE-HORNUNG : A simple method for correcting facet orientations in polygon meshes based on ray casting. *Journal of Computer Graphics Techniques*, 3(4):53–63, 2014.

[49] V. A. TOPONOGOV : *Differential Geometry of Curves and Surfaces : A Concise Guide*. Birkhäuser, Boston, 2005.

[50] L. VÁŠA, P. VANĚČEK, M. PRANTL, V. SKORKOVSKÁ, P. MARTÍNEK et I. KOLINGEROVÁ : Mesh statistics for robust curvature estimation. *Comput. Graph. Forum*, 35(5):271–280, 2016.

[51] K. WATANABE et A. G. BELYAEV : Detection of salient curvature features on polygonal surfaces. *Comput. Graph. Forum*, 20(3):385–392, 2001.

[52] G. XU : Convergence analysis of a discretization scheme for Gaussian curvature over triangular surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 23(2): 193–207, 2006.

[53] S. YOSHIZAWA, A. BELYAEV, H. YOKOTA et H.-P. SEIDEL : Fast, robust, and faithful methods for detecting crest lines on meshes. *Comput. Aided Geom. Design*, 25(8):545–560, 2008.

Table des matières

1 Géométrie et topologie pour les maillages 3D **1**
1.1 Introduction 2
1.2 Caractéristiques géométriques s'appuyant sur les courbures 3
1.2.1 Introduction 3
1.2.2 Quelques rappels mathématiques 4
1.2.3 Quelques notations 4
1.2.4 Estimation de la normale 5
1.2.5 Calcul des courbures par ajustement local de fonction paramétrique 5
1.2.6 Calcul des courbures par opérateur de Géométrie Différentielle Discrète 8
1.2.7 Calcul de courbures s'appuyant sur les courbures 2D 11
1.2.8 Calcul des lignes de courbure sur un maillage 3D . . 14
1.3 Caractéristiques topologiques 16
1.3.1 Les surfaces topologiques 16
1.3.2 Homologie 18
1.3.3 Un exemple de caractéristiques topologico-géométriques : graphe de Reeb et complexe de Morse-Smale 22
1.4 Conclusion 24
Bibliographie 26