



**HAL**  
open science

# Algorithmes de Schwarz et conditions absorbantes pour le couplage océan-atmosphère

Sophie Thery

► **To cite this version:**

Sophie Thery. Algorithmes de Schwarz et conditions absorbantes pour le couplage océan-atmosphère. CANUM 2018 - 44e Congrès National d'Analyse Numérique, May 2018, Cap d'Agde, France. hal-01947885

**HAL Id: hal-01947885**

**<https://inria.hal.science/hal-01947885>**

Submitted on 8 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Algorithmes de Schwarz et conditions absorbantes pour le couplage océan atmosphère

Sophie THERY

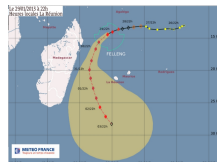
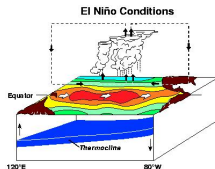
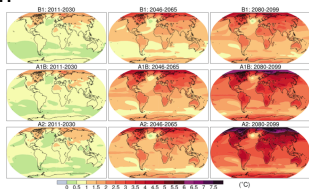
UGA, LJK, AIRSEA

CANUM, 31 mai 2018

# Cadre général : le couplage océan-atmosphère

Phénomènes physiques régis par les interactions océan atmosphère :

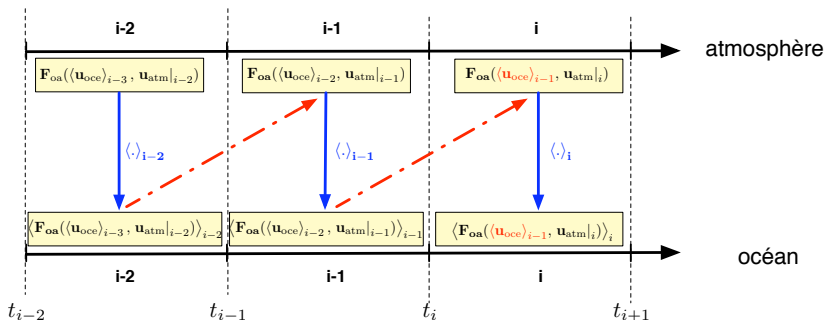
- Climat
- El Niño
- Cyclones tropicaux
- ...



# Motivations

Les méthodes utilisées pour le couplage océan-atmosphère sont peu satisfaisantes :

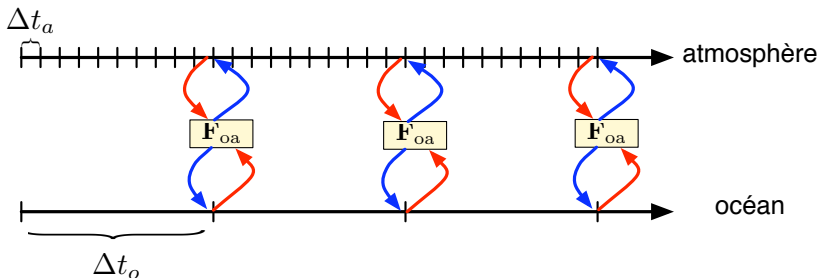
- Couplage asynchrone
  - ▶ équilibre des flux moyen sur chaque fenêtre de temps
  - ▶ problème de synchronisation



# Motivations

Les méthodes utilisées pour le couplage océan-atmosphère sont peu satisfaisantes :

- Couplage asynchrone
- Couplage synchrone
  - ▶ beaucoup de communication  $\Rightarrow$  implémentations inefficace
  - ▶ problèmes de validité physique et de stabilité mathématique.



# Motivations

Les méthodes utilisées pour le couplage océan-atmosphère sont peu satisfaisantes :

- Couplage asynchrone
- Couplage synchrone
- Utilisation des algorithmes de Schwarz : ANR COCOA  $\Rightarrow$  implémentation pratique de Schwarz dans le couplé IPSL et Météo France.

- 1 Le couplage océan atmosphère
- 2 Les algorithmes de Schwarz
- 3 Application au couplage océan-atmosphère
- 4 Objectifs futurs

# Modèle couplé d'océan-atmosphère

- Équations de Navier-Stokes

- ▶ Les variables recherchées : mouvement et contrainte sur fluide, force de gravitation et effet de Coriolis → équation vectorielle sur  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$ .
- ▶ Les principes physiques : conservation de la masse et de l'énergie thermique, conservation/diffusivité de la salinité et humidité, loi de conservation d'état.



# Modèle couplé d'océan-atmosphère

- Équations de Navier-Stokes
- Approximation
  - ▶ champs gravitationnel vertical et constant
  - ▶ approximation du terme de Coriolis
  - ▶ approximation de Boussinecq  $\rightarrow$  variation de  $\rho$  faible
  - ▶ Hypothèse quasi-hydrostatique  $\rightarrow$  simplifie l'équation suivant  $e_z$ .

# Modèle couplé d'océan-atmosphère

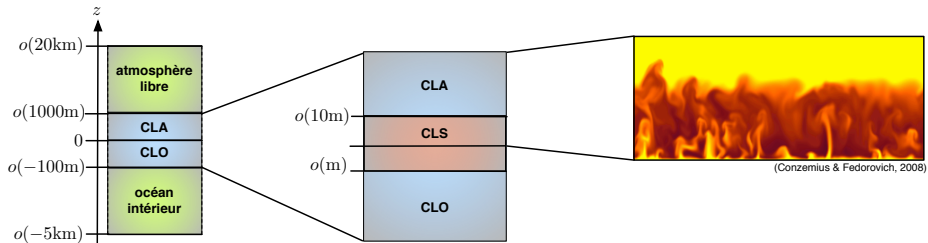
- Équations de Navier-Stokes
- Approximation
- Système d'équation primitives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) - fv - \nu_m \Delta u + \partial_x \rho / \rho_{oa} = 0 \\ \partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{v}v) + fu - \nu_m \Delta v + \partial_y \rho / \rho_{oa} = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \rho, p, \mathbf{v} \end{array} \right.$$

- ▶  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  : vitesse
- ▶  $\nu_m$  : diffusion moléculaire
- ▶  $f$  : fréquence de Coriolis
- ▶  $p$  pression
- ▶  $\rho$  masse volumique

# Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

## Paramétrisation de la turbulence à petite échelle



- Principaux échanges selon  $z$ .

## Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

- Principaux échanges selon  $z$ .
- Décomposition de Reynolds :

- ▶  $u = \tilde{u} + u'$

- ▶  $\langle u' \rangle = 0$ ,  $\langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u}$  et  $\langle \tilde{w}u' \rangle = 0$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} \partial_z (\tilde{w} \tilde{u}) - f \tilde{v} - \nu_m \Delta \tilde{u} + \partial_z \langle w' u' \rangle = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + \partial_z (\tilde{w} \tilde{v}) + f \tilde{u} - \nu_m \Delta \tilde{v} + \partial_z \langle w' v' \rangle = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}} \end{cases}$$

# Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

- Principaux échanges selon  $z$ .
- Décomposition de Reynolds :

- ▶  $u = \tilde{u} + u'$

- ▶  $\langle u' \rangle = 0$ ,  $\langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u}$  et  $\langle \tilde{w}u' \rangle = 0$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - f \tilde{v} - \nu_m \Delta \tilde{u} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{u} = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + f \tilde{u} - \nu_m \Delta \tilde{v} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{v} = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}} \end{cases}$$

- Hypothèse de hydrostatique proche de la surface :  $\tilde{w} = 0$
- Hypothèse de Boussinesq (1897) :  $\langle U'_\beta U'_\gamma \rangle = \nu_t \partial_\gamma \tilde{U}_\beta$

## Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

- Principaux échanges selon  $z$ .
- Décomposition de Reynolds :

- ▶  $u = \tilde{u} + u'$

- ▶  $\langle u' \rangle = 0$ ,  $\langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u}$  et  $\langle \tilde{w}u' \rangle = 0$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - f\tilde{v} - \nu_m \Delta \tilde{u} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{u} = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + f\tilde{u} - \nu_m \Delta \tilde{v} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{v} = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}} \end{cases}$$

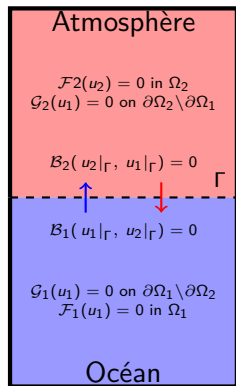
- Hypothèse de hydrostatique proche de la surface :  $\tilde{w} = 0$
- Hypothèse de Boussinesq (1897) :  $\langle U'_\beta U'_\gamma \rangle = \nu_t \partial_\gamma \tilde{U}_\beta$

### Notre modèle d'étude $\Rightarrow$ Couche d'Ekman (1905)

$$\begin{cases} \partial_t u - fv - \partial_z(\nu(z)\partial_z u) = F^u \\ \partial_t v + fu - \partial_z(\nu(z)\partial_z v) = F^v \end{cases}$$

avec  $\nu(z) = az + b > 0$ ,

# Notre modèle d'étude



Sur  $\Omega_2 \times [0, T]$  :

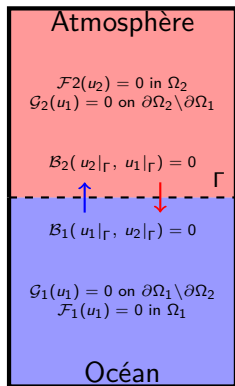
$$\begin{cases} \partial_t u_2 - f v_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z u_2) = F_2^u \\ \partial_t v_2 + f u_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z v_2) = F_2^v \end{cases}$$

Sur  $\Omega_1 \times [0, T]$  :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - f v_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z u_1) = F_1^u \\ \partial_t v_1 + f u_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z v_1) = F_1^v \end{cases}$$

+ Conditions initiales + Conditions au limites extérieures + + Conditions d'interfaces

# Notre modèle d'étude



Sur  $\Omega_2 \times [0, T]$  :

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - f v_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z u_2) = F_2^u \\ \partial_t v_2 + f u_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z v_2) = F_2^v \end{cases}$$

Sur  $\Omega_1 \times [0, T]$  :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - f v_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z u_1) = F_1^u \\ \partial_t v_1 + f u_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z v_1) = F_1^v \end{cases}$$

+ Conditions initiales + Conditions au limites  
 extérieurs + + Conditions d'interfaces

- Effet du terme de Coriolis
- Effet d'une coefficient de diffusion variable



# Rappel sur les algorithmes de Schwarz

Rappel sur les algorithmes de Schwarz dans le cas :

- deux sous-domaines sans recouvrement
- sur une dimension
- sur des opérateurs linéaires :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1 = F_1 & \text{sur } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1 = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{\text{ext}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2 = F_2 & \text{sur } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2 = G_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{\text{ext}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 u_1 = \mathcal{C}_1 u_2 & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_2 u_2 = \mathcal{C}_2 u_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

# Les algorithmes de Schwarz

---

## Algorithm 1 Schwarz alterné

---

**Require:**  $u_2^0$  sur  $\Gamma$

$n = 0$

**while** non convergence ou  $n < n_{max}$  **do**

résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1^n = F_1 & \text{sur } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1^n = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext}, \\ \mathcal{C}_1 u_1^n = \mathcal{C}_1 u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

puis résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2^n = f_2 & \text{sur } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2^n = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext}, \\ \mathcal{C}_2 u_2^n = \mathcal{C}_2 u_1^n & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

**end while**

# Étude de la convergence des algorithmes de Schwarz

- Système vérifié par les erreurs :

$$e_j^n(z) = u_j^n(z) - u_j^*(z)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_j^n(z) = 0 & \text{sur } \Omega_j \\ \mathcal{B}e_j^n = 0 & \text{sur } \Omega_j^{\text{ext}} \\ C_j e_j^n(0) = C_j e_k^{n-1}(0) \end{cases}$$

# Étude de la convergence des algorithmes de Schwarz

- Système vérifié par les erreurs :

$$e_j^n(z) = u_j^n(z) - u_j^*(z)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_j^n(z) = 0 & \text{sur } \Omega_j \\ \mathcal{B}e_j^n = 0 & \text{sur } \Omega_j^{\text{ext}} \\ C_j e_j^n(0) = C_j e_k^{n-1}(0) \end{cases}$$

- Définition du facteur de convergence :

$$\rho = \frac{\|e_j^n\|}{\|e_j^{n-1}\|}$$

- La facteur de convergence dépend fortement des conditions d'interface.

# Impacte des conditions d'interfaces

Conditions d'interfaces "naturelles"  $\Rightarrow$  sans degrés de liberté.

# Impacte des conditions d'interfaces

Conditions d'interfaces "naturelles"  $\Rightarrow$  sans degrés de liberté.

Introduction de nouveaux opérateur avec degrés de liberté  $\Rightarrow$  conditions de transmissions exactes (convergence en 2 itérations).

# Impacte des conditions d'interfaces

Conditions d'interfaces "naturelles"  $\Rightarrow$  sans degrés de liberté.

Introduction de nouveaux opérateur avec degrés de liberté  $\Rightarrow$  conditions de transmissions exactes (convergence en 2 itérations).

- Instationnaire  $\Rightarrow$  conditions non local en temps
- Optimisation :
  - ▶ méthode "min-max" :

$$\min_{\mathcal{C}_j \in \mathcal{C}} \left( \max_{\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \rho(\omega, \mathcal{C}_j) \right)$$

Introduit par : **Japhet** (1997), **Japhet & Nataf** (2000),  
 Notion d'algorithme de Schwarz optimisé : **Gander et al.** (2001)

- ▶ approximation basse fréquence : Développement de Taylor sur les conditions de transmission exacte . **ONataf et al.** (1994)

# Modèle simplifié pour le couplage océan-atmosphère

Sur  $[0, H_j] \times [0, T]$  :

$$\begin{cases} \partial_t u_j(t, z) - f v_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z u_j(t, z)) = F_j^u(t, z) \\ \partial_t v_j(t, z) + f u_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z v_j(t, z)) = F_j^v(t, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j(t, H_j) = G_j^u(t), & v_j(t, H_2) = G_j^v(t) \\ u_j(0, z) = X_j^u(z), & v_j(0, z) = X_j^v(z) \end{cases}$$

Conditions naturelles de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} u_1(t, 0) & = & u_2(t, 0) \\ \nu_1(0) u_1(t, 0) & = & \nu_2(0) u_2(t, 0) \end{cases}$$



# Modèle simplifié pour le couplage océan-atmosphère

Sur  $[0, H_j] \times [0, T]$  :

$$\begin{cases} \partial_t u_j(t, z) - f v_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z u_j(t, z)) = F_j^u(t, z) \\ \partial_t v_j(t, z) + f u_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z v_j(t, z)) = F_j^v(t, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j(t, H_j) = G_j^u(t), & v_j(t, H_2) = G_j^v(t) \\ u_j(0, z) = X_j^u(z), & v_j(0, z) = X_j^v(z) \end{cases}$$

Conditions naturelles de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} u_1(t, 0) = u_2(t, 0) \\ \nu_1(0) u_1(t, 0) = \nu_2(0) u_2(t, 0) \end{cases}$$

Difficultés de ce cas d'étude :

- Couplage des variables  $u$  et  $v$ .
- Coefficients de diffusions variables

## État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Zhang (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	<b>Lions (1990)</b> : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	<b>Dubois (2007)</b> : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D <b>Gander, Xu (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Halpern (2002)</b> : algo. Schwarz opt. , heat eq. <b>Blayo, Rousseau, Tayashi (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Shallow water	<b>Lemarié (2013)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	<b>Martin (2003)</b> : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant <b>Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

## État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Zhang (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	<b>Lions (1990)</b> : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	<b>Dubois (2007)</b> : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D <b>Gander, Xu (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Halpern (2002)</b> : algo. Schwarz opt. , heat eq. <b>Blayo, Rousseau, Tayashi ( )</b> : algo. Schwarz opt. Shallow water	<b>Lemarié (2013)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	<b>Martin (2003)</b> : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant <b>Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

# Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis → couplage des composante u et v

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_j - f v_j - \nu_j \partial_{zz}(u_j) = F_j^u \\ \partial_t v_j + f u_j - \nu_j \partial_{zz}(v_j) = F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

# Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis  $\rightarrow$  couplage des composante  $u$  et  $v$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_j - f v_j - \nu_j \partial_{zz}(u_j) = F_j^u \\ \partial_t v_j + f u_j - \nu_j \partial_{zz}(v_j) = F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

## Solution

On montre que le facteur de convergence est le même avec le changement de variable  $\varphi = u + iv$ .

# Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis  $\rightarrow$  couplage des composante  $u$  et  $v$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (v_j \partial_z \varphi_j) = F_j^u + i F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

## Solution

On montre que le facteur de convergence est le même avec le changement de variable  $\varphi = u + iv$ .

# Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis  $\rightarrow$  couplage des composante  $u$  et  $v$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (v_j \partial_z \varphi_j) = F_j^u + i F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

## Solution

On montre que le facteur de convergence est le même avec le changement de variable  $\varphi = u + iv$ .

- Coefficients de diffusions constant pour étudier seulement l'impacte de l'effet de Coriolis.

## Avec des conditions d'interfaces Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} e_1^n(\omega, 0) = e_2^{n-1}(\omega, 0) \\ \nu_2 \partial_z e_2^n(\omega, 0) = \nu_1 \partial_z e_1^n(\omega, 0) \end{cases}$$

Facteur de convergence

- Domaines infinis :

$$\eta_{DN}^{cst}(\omega) = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}$$

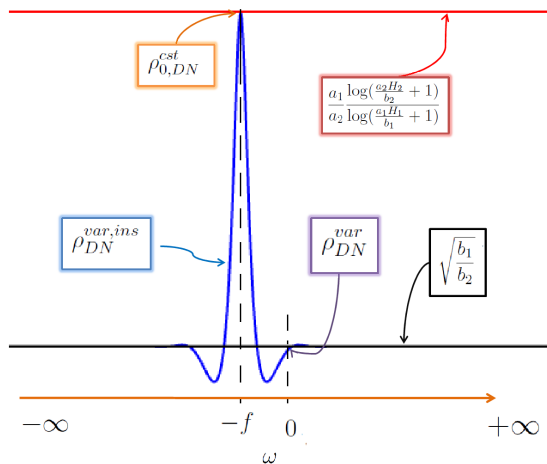
Indépendant de la fréquence temporelle

- Domaines finis :

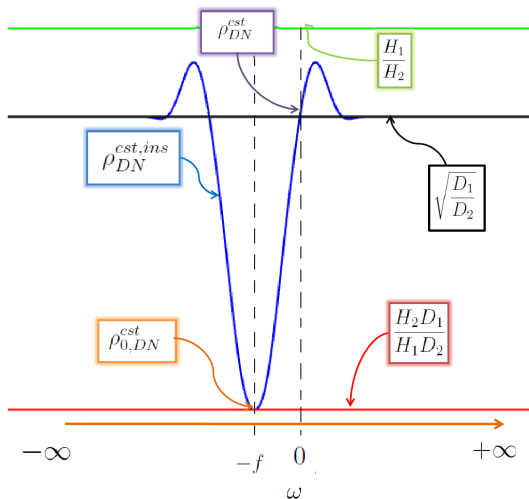
$$\rho_{DN}^{cst}(\omega) = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \left| \frac{\tanh\left(H_2 \sqrt{i \frac{\omega + f}{D_2}}\right)}{\tanh\left(H_1 \sqrt{i \frac{\omega + f}{D_1}}\right)} \right|$$



## Facteur de convergence instationnaire



## Facteur de convergence instationnaire



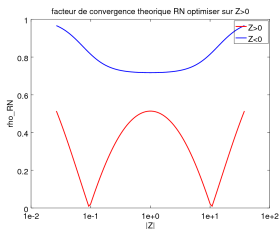
## Conditions d'interfaces Robin-Robin

$$\begin{cases} \nu_1 \partial_z e_1^n(\omega, 0) + p_1 e_1^n(\omega, 0) = \nu_2 \partial_z e_2^{n-1}(\omega, 0) + p_2 e_2^{n-1}(\omega, 0) \\ \nu_2 \partial_z e_2^n(\omega, 0) + p_2 e_2^n(\omega, 0) = \nu_1 \partial_z e_1^n(\omega, 0) + p_1 e_1^n(\omega, 0) \end{cases}$$

- Domaines infinis :

$$\frac{|-\sqrt{i(f+\omega)D_2} + p_1|}{|-\sqrt{i(f+\omega)D_1} + p_1|} \frac{|\sqrt{i(f+\omega)D_1} + p_2|}{|-\sqrt{i(f+\omega)D_2} + p_2|}$$

les  $p_j$  optimaux sont en général résultats de l'équioscillation



Sur l'équioscillation : **Gander, Halpern (2006)**, Sur l'optimisation sans effet de Coriolis **Lemarié(2013)**, **Dubois Gander (2015)**

- Le facteur de convergence domaines finis est très proche,

# Étude de l'effet de la turbulence

$$\partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (\nu_j \partial_z \varphi_j) = F_j^u + i F_j^v$$

## Équation de Bessel

$$z \partial_{zz}^2 u + (2\alpha - 2\beta\nu + 1) z \partial_z u + (\beta^2 \gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu)) u = 0$$

Solutions générale :  $\phi_j = C_I I_0(\mu_j(\omega, z)) + C_K K_0(\mu_j(\omega, z))$  avec

$$\mu_j(\omega, z) = 2 \sqrt{i \frac{\omega + f}{a_j^2}} (a_j z + b_j)$$

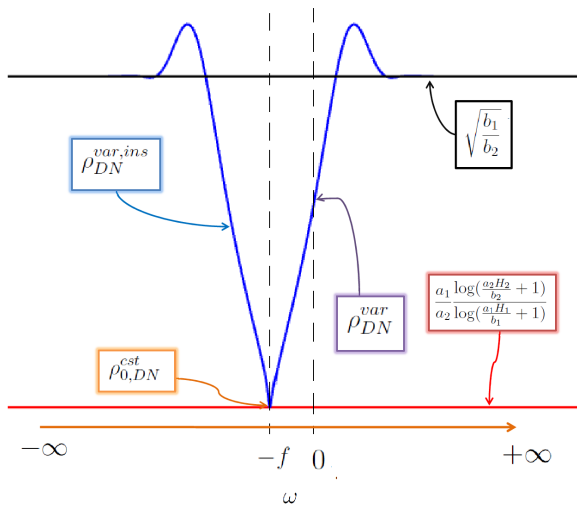
Facteur de convergence avec des conditions d'interfaces

Dirichlet-Neumann :

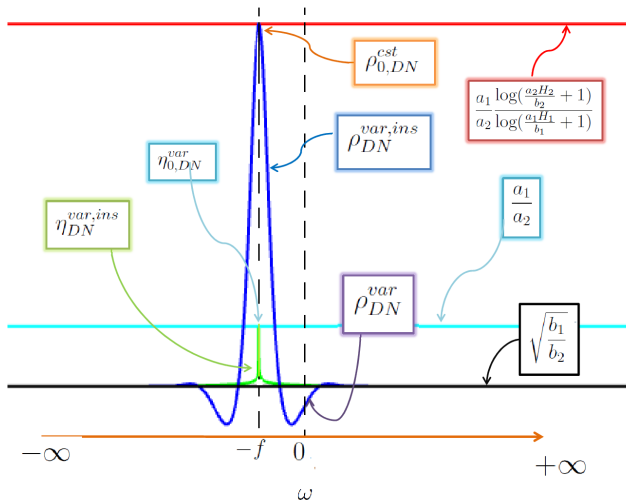
$$\rho_{DN}^{aff}(\omega) = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \tilde{\rho}(\omega)$$

avec  $\tilde{\rho}$  en terme de fonctions de Bessel :  $I_0(\mu_j(\omega, z)), I_1(\mu_j(\omega, z)), K_0(\mu_j(\omega, z)), K_1(\mu_j(\omega, z))$

## Facteur de convergence instationnaire



## Facteur de convergence instationnaire



# Conditions d'interface Robin-Robin

- Fonctions de Bessel  $\Rightarrow$  difficulté de faire la méthode "min-max" .

## Conditions d'interface Robin-Robin

- Fonctions de Bessel  $\Rightarrow$  difficulté de faire la méthode "min-max" .
- Conditions de transmission exacte :

$$\begin{cases} \sigma_1(\omega) = \frac{b_2 \mu_2'(0) [K_1(\mu_2(0)) + B_2 I_1(\mu_2(0))]}{[K_0(\mu_2(0)) - B_2 I_0(\mu_2(0))]} \\ \sigma_2(\omega) = \frac{b_1 \mu_1'(0) [K_1(\mu_1(0)) + B_1 I_1(\mu_1(0))]}{[K_0(\mu_2(0)) - B_2 I_0(\mu_2(0))]} \end{cases} \quad (1)$$

avec :

- ▶  $\mu_j^\pm(z) = 2\sqrt{\frac{i(\omega \pm f)}{a_j} \left(z + \frac{b_j}{a_j}\right)}$
- ▶  $\mu_j'(z) = \text{sign}(a_j) \sqrt{\frac{i(\omega \pm f)}{a_j z + b_j}}$

- hypothèse basse fréquence d'ordre zéro ( $p_j = \sigma(\omega = 0)$ ) déjà satisfaisant.



# État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Statio- nnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Zhang (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	<b>Lions (1990)</b> : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	<b>Dubois (2007)</b> : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D <b>Gander, Xu (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instatio- nnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Halpern (2002)</b> : algo. Schwarz opt. , heat eq. <b>Blayo, Rousseau, Tayashi</b> ( ): algo. Schwarz opt. Shallow water	<b>Lemarié (2013)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	<b>Martin (2003)</b> : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant <b>Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

# État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Zhang (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	<b>Lions (1990)</b> : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	<b>Dubois (2007)</b> : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D <b>Gander, Xu (2016)</b> : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	<b>Gander, Halpern (2002)</b> : algo. Schwarz opt. , heat eq. <b>Blayo, Rousseau, Tayashi</b> ( ): algo. Schwarz opt. Shallow water	<b>Lemarié (2013)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	<b>Martin (2003)</b> : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant <b>Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004)</b> : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

# Objectifs futurs

- Des conditions d'interfaces plus réalistes:  
**faire apparaître  $u^*$  ?**  
Difficulté d'intégrer ce modèle dans un algorithme efficace.
- Réduire le coût de calcul :
  - ▶ Utilisation de modèle réduit ?
  - ▶ Essayer de passer outre les itérations de Schwarz.

*Merci*