

Décomposition de domaine pour des équations de type Boussinesq linéarisées

Joao Guilherme Caldas Steinstraesser^{*}, Gaspard Kemlin[†], Antoine Rousseau[‡]

Mai 2018

Objectifs

L'objectif principal de ce travail est la recherche de conditions aux interfaces entre différents sous-domaines, dans l'optique d'améliorer les méthodes de décomposition de domaine ou de couplage en océanographie côtière. Pour cela, nous avons commencé par dériver des conditions aux limites transparentes (TBC) pour des équations de type Boussinesq linéarisées, puis nous avons adapté les conditions obtenues en conditions aux interfaces dans une méthode de décomposition de domaine basée sur les méthodes de Schwarz.

Méthodes utilisées

On considère les équations de Boussinesq introduites par Nwogu [5], dans leur version 1D linéarisée autour d'un profil $(\bar{\eta}, \bar{u}) = (0, 0)$, η étant l'élévation de l'eau par rapport au repos et u la vitesse :

$$\begin{cases} \eta_t + h_0 u_x + \tilde{h} u_{xxx} = 0, \\ u_t + g \eta_x + \bar{h} u_{xxt} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$h_0 > 0$, $g > 0$, $\bar{h} < 0$ et $\tilde{h} < 0$ étant des paramètres.

Comme dans [1, 2, 4], on s'intéresse aux conditions transparentes à partir du modèle discret, et on considère les équations discrétisées sur une *staggered grid* et avec des schémas semi-implicites de type Crank-Nicholson. On applique une transformée de Laplace discrète \mathcal{Z} aux équations discrétisées pour éliminer la dépendance en temps. Après découplage, il est possible de résoudre les équations en espace obtenues en $\mathcal{Z}\{u_j^n\}$. Une fois dérivées les conditions aux limites associées, il est possible d'appliquer la transformée inverse pour finalement obtenir des conditions aux limites non-locales en temps, s'exprimant sous la forme de convolutions :

$$\text{Gauche} \quad \begin{cases} u_0^n - (Y_5 * u_1)^n + (Y_7 * u_2)^n = 0, \\ u_0^n - (Y_6 * u_2)^n + 2(Y_9 * u_3)^n - (Y_8 * u_4)^n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Droite} \quad \begin{cases} u_j^n - (Y_1 * u_{j-1})^n + (Y_3 * u_{j-2})^n = 0, \\ u_j^n - 2(Y_1 * u_{j-1})^n + (Y_2 * u_{j-2})^n - (Y_4 * u_{j-4})^n = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où

$$(Y_i * u_j)^n = \sum_{k=0}^n Y_i^k u_j^{n-k}, \quad (4)$$

et où les $(Y_i^k)_{k \geq 0}$ sont des suites indépendantes de l'instant n , déterminées à partir des paramètres et de la discrétisation utilisée et qui convergent vers 0 en $O(k^{-3/2})$.

Nous avons poursuivi ce travail en adaptant les conditions (2) et (3) pour les utiliser à l'interface entre deux domaines dans une méthode de Schwarz additive. Les conditions deviennent alors locales en temps.

^{*}MERIC, Avenida Apoquindo 2827, Las Condes, Santiago, Chile, joao.caldas@meric.cl.

[†]Inria Chile, Avenida Apoquindo 2827, Las Condes, Santiago, Chile, gaspard.kemlin@inria.cl.

[‡]Inria, Team LEMON, Montpellier, France, antoine.rousseau@inria.fr, auteur à contacter.

Résultats obtenus

Les résultats obtenus sont très satisfaisants, à la fois en termes de conditions aux limites extérieures mais aussi quand elles sont utilisées en tant que conditions aux interfaces.

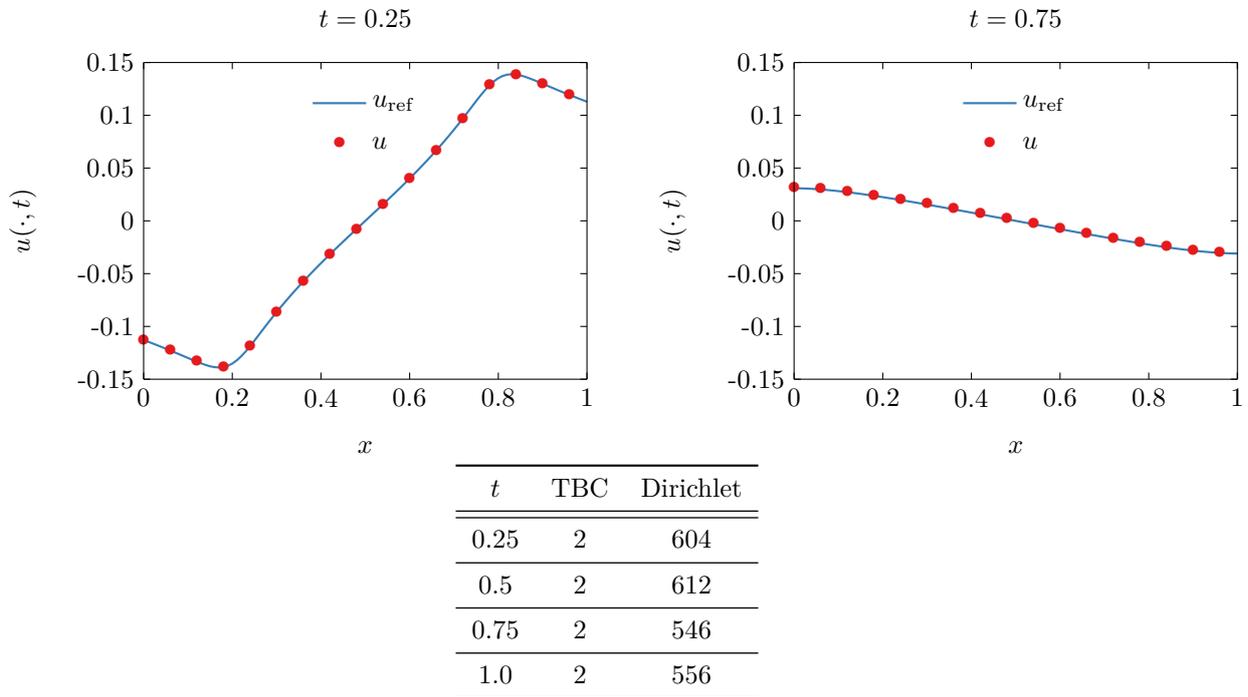


FIGURE 1 – Haut : Superposition de la solution u sur $[0, 1]$ avec des TBC et de la solution u_{ref} , calculée sur un domaine plus grand, avec les mêmes TBC. On peut voir qu’il n’y a pas de réflexion lorsque les ondes atteignent le bord du petit domaine. **Bas :** Nombre d’itérations à l’instant t pour atteindre la convergence de l’algorithme de Schwarz, pour différentes conditions à l’interface.

État d’avancement

Le cas linéaire autour du profil $(\bar{\eta}, \bar{u}) = (0, 0)$ a été entièrement traité et nous avons pu voir que l’utilisation de telles conditions aux interfaces dans des algorithmes de Schwarz accélèrait grandement leur convergence. Lors de la linéarisation autour d’un profil avec \bar{u} quelconque, on perd l’efficacité des TBC (2) – (3) quand utilisées aux limites mais la convergence de l’algorithme de Schwarz est toujours aussi rapide (~ 3 itérations) quand on les utilise à l’interface dans leur version locale en temps. La prochaine étape est d’utiliser les conditions dérivées des équations linéaires dans des méthodes de décomposition de domaine pour les équations dans leur forme non-linéaire. Même si les conditions sont moins adaptées en tant que TBC, elles devraient tout de même améliorer de façon substantielle la convergence des algorithmes de Schwarz. Une autre étape sera d’étendre également ces résultats au cas 2D.

Références

- [1] A. Arnold and M. Ehrhardt. Discrete Transparent Boundary Conditions for the Schrödinger Equation. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 6, 2001.
- [2] C. Besse, M. Ehrhardt, and I. Lacroix-Violet. Discrete Artificial Boundary Conditions for the Korteweg-de Vries Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2015.
- [3] J. G. Caldas Steintraesser, G. Kemlin, and A. Rousseau. A domain decomposition method for linearized Boussinesq-type equations. 2018. Preprint, available at <https://hal.inria.fr/hal-01797823>.
- [4] M. Kazakova and P. Noble. Discrete transparent boundary conditions for the linearized Green-Naghdi system of equations. 2017. <https://arxiv.org/pdf/1710.04016.pdf>.
- [5] O. Nwogu. Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 119(6) :618–638, 1993.