HAL open science

Contribution à l'étude de la distributivité d'un treillis de concepts

Alain Gély, Miguel Couceiro, Yassine Namir, Amedeo Napoli

To cite this version:

Alain Gély, Miguel Couceiro, Yassine Namir, Amedeo Napoli. Contribution à l'étude de la distributivité d'un treillis de concepts. EGC 2018 - Extraction et Gestion des Connaissances, Jan 2018, Paris, France. pp.478. hal-01889149

HAL Id: hal-01889149

https://inria.hal.science/hal-01889149v1

Submitted on 27 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution à l'étude de la distributivité d'un treillis de concepts

Alain Gély*, Miguel Couceiro*, Yassine Namir**, Amedeo Napoli*

*LORIA (CNRS - Inria Nancy Grand Est - Université de Lorraine),
BP 239, 54506 Vandoeuvre-les-Nancy, France
alain.gely, miguel.couceiro, amedeo.napoli@loria.fr
**Université de Lorraine
namir.yassine@gmail.com

Résumé. Nous nous intéressons aux treillis distributifs dans le cadre de l'analyse formelle de concepts (FCA). La motivation primitive vient de la phylogénie et des graphes médians pour représenter les dérivations biologiques et les arbres parcimonieux. La FCA propose des algorithmes efficaces de construction de treillis de concepts. Cependant, un treillis de concepts n'est pas en correspondance avec un graphe médian sauf s'il est distributif, d'où l'idée d'étudier la transformation d'un treillis de concepts en un treillis distributif. Pour ce faire, nous nous appuyons sur le théorème de représentation de Birkhoff qui nous permet de systématiser la transformation d'un contexte quelconque en un contexte de treillis de concepts distributif. Ainsi, nous pouvons bénéficier de l'algorithmique de FCA pour construire mais aussi visualiser les treillis de concepts distributifs, et enfin étudier les graphes médians associés.

1 Contexte et motivations

Les structures discrètes ont toujours su démontrer leur utilité pour découvrir de l'information. Parmi elles, les arbres ou leurs extensions (Bertrand et Janowitz (2002); Diatta (2005); Bertrand et Diatta (2017)) sont très souvent utilisés, notamment en biologie où les arbres phylogénétiques permettent de capturer les filiations inter-espèces. Le problème est alors de retrouver les évolutions qui ont amené la diversité du vivant actuel, généralement à partir de fragments d'ADN d'espèces contemporaines.

Lorsque plusieurs arbres possibles aboutissent au même résultat, on privilégie les arbres les plus parcimonieux, c'est à dire ceux qui nécessitent le moins de modifications (mutations) pour les espèces considérées. Cependant, même ainsi, plusieurs arbres restent possibles. C'est le cas par exemple si l'on observe des mutations dites inverses (un gène retrouve un état antérieur suite à une nouvelle mutation) ou parallèles (la même mutation se produit chez des espèces sans liens direct). Si on ne souhaite pas privilégier un de ces arbres, la question de la représentation de cette famille se pose. Peut-on trouver une structure encodant l'ensemble des arbres phylogénétiques parcimonieux ?

Pour répondre à cette question, Bandelt a proposé l'utilisation de graphes médians (Bandelt et Hedlíková (1983); Bandelt et al. (1999)). En quelques mots, ces derniers sont des graphes

qui ont la particularité que pour tout triplet de sommets, les plus courts chemins entre paires de sommets s'intersectent en un sommet unique, appelé sommet médian. On retrouve l'idée de parcimonie (le croisement des chemins se faisant en un point unique). Un graphe médian est un moyen de représenter l'ensemble des arbres parcominieux.

Toujours parmi les structures discrètes, les treillis des concepts sont au coeur de l'analyse de concepts formels (FCA pour "*Formal Concept Analysis*", (Ganter et Wille (1999))). Ils sont utilisés dans de nombreux champs applicatifs (Carpineto et Romano (2004)) par une communauté de recherche qui va en s'étoffant, notamment pour des problématiques de classification. Les méthodes de FCA utilisent généralement en entrée une table binaire (appelée contexte), ce qui ne pose pas de véritable problème pour s'intéresser à la filiation inter-espèce et aux problèmes de phylogénie. Il suffira en effet de pré-traiter les données de façon à se ramener à ce cadre. C'est par exemple possible en utilisant un contexte mettant en relation les espèces avec un génome de référence, en indiquant 1 s'il n'y a pas eu mutation sur un gène par rapport à ce génome, et 0 sinon. Il y a des liens forts entre les graphes médians d'un coté et certains treillis de l'autre, ceux ayant la propriété d'être distributifs comme discuté ci-après.

Uta Priss (Priss (2012, 2013)) propose de tirer profit de ces liens pour ré-utiliser l'ensemble des outils à disposition dans la communauté FCA pour traiter les problèmes de phylogénétique utilisant un graphe médian. Cependant, un treillis des concepts n'est pas forcément distributif, et n'est donc pas en correspondance directe avec un graphe médian. Il faut par suite modifier le treillis pour qu'il vérifie la propriété de distributivité. Si un exemple de modification est donné dans les articles d'Uta Priss, il n'y a pas dans ses travaux d'algorithme général permettant de transformer un treillis quelconque en treillis distributif de façon systématique et le travail semble avoir été fait manuellement.

L'apport principal de cet article est de proposer un tel algorithme, qui s'appuie sur le théorème de représentation de Birkhoff (Birkhoff (1933, 1967)). Notre algorithme produit le contexte d'un treillis distributif à partir du contexte d'un treillis quelconque, ce qui évite de devoir construire le treillis de départ pour le modifier par la suite. De plus, notre algorithme assure que le treillis initial peut se plonger (plongement d'ordre) dans le treillis distributif obtenu.

Le reste de l'article est structuré comme suit. Dans la section 2, nous rappelons les définitions et notations nécessaires sur les ensembles ordonnés et treillis. La section 3 est un état de l'art sur les treillis distributifs. Nous y rappelons les résultats sur lesquels nous construirons notre algorithme. L'algorithme est présenté en section 4 et l'article se termine par une discussion en section 5.

2 Définitions et notations

Dans l'ensemble de cette section, on ne considère que le cas fini. Pour la plupart des définitions et résultats de ce chapitre, on pourra se référer aux trois ouvrages de références Ganter et Wille (1999); Davey et Priestley (2002); Caspard et al. (2007).

Un *ensemble ordonné* $(P, \leq)$ est un ensemble d'éléments P muni de la relation d'ordre $\leq$. Dans cet article, les relations d'ordre seront représentées par leur diagramme de Hasse. Il s'agit du graphe ayant pour sommets les éléments de P et pour arêtes les éléments en relation de couverture (par d'arcs de transitivité ni de réflexivité). Le diagramme de Hasse est orienté du bas vers le haut.

Définition 1. *Soit un ensemble ordonné* $(P, \leq)$ *et* $X \subseteq P$*,* X *est un* idéal d'ordre *(resp.* filtre d'ordre*) si* $x \in X$ *et* $y \leq x$ *alors* $y \in X$ *(resp. ssi* $x \in X$ *et* $x \leq y$ *alors* $y \in X$*).*

Pour un ensemble $X \subseteq P$ quelconque, on notera $\downarrow X$ l'idéal (resp. $\uparrow X$ le filtre) construit à partir de X. Pour un élément $x \in P$, $\downarrow x$ est appelé idéal principal (resp. $\uparrow x$ filtre principal).

Sur l'exemple de la figure 2 l'idéal principal de d est $\downarrow d = \{a, b, d\}$, le filtre principal de a est $\uparrow a = \{a, d\}$. L'ensemble $\{c, d\}$ n'est ni un filtre, ni un idéal. On a $\uparrow\{c, d\} = \{c, d, e\}$, $\downarrow\{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

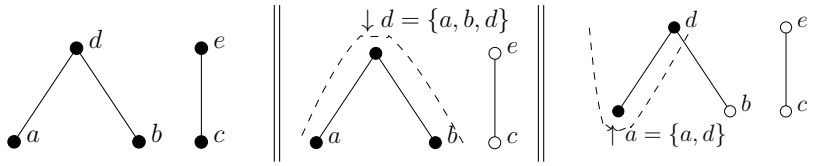


FIG. 1 – *Illustration de filtres et idéaux sur un ensemble ordonné.*

Définition 2. *Un* treillis $(T, \leq, \vee, \wedge)$ *est un ensemble ordonné* $(T, \leq)$ *muni de deux opérations de supremum (borne supérieure,* $\vee$*) et d'infimum (borne inférieure,* $\wedge$*).*

Puisque nous considérons le cas fini, un treillis possède un plus petit élément noté $\perp$ et un plus grand élément noté $\top$. Dans la suite, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, pour simplifier, on utilisera parfois T pour désigner le treillis $(T, \leq, \vee, \wedge)$ et P pour désigner l'ensemble ordonné $(P, \leq)$.

Définition 3. *Soit un treillis* $(T, \leq, \vee, \wedge)$*,*

- $j \in T$ *est un élément* $\vee$-irréductible *ssi* $j \neq \top$ *et* $\forall x, y \in T$*,* $x \vee y = j$ *implique* $x = j$ *ou* $y = j$
- $m \in T$ *est un élément* $\wedge$-irréductible *ssi* $m \neq \perp$ *et* $\forall x, y \in T$*,* $x \wedge y = m$ *implique* $x = m$ *ou* $y = m$

Les éléments $\vee$-irréductibles (resp. $\wedge$-irréductible) sont donc les éléments de T qui ne peuvent être retrouvés comme étant le suprémum (resp. infimum) d'autres éléments. On notera $J(T)$ (resp. $M(T)$) l'ensemble des éléments $\vee$-irréductibles (resp. $\wedge$-irréductibles) de T. Sans ambiguïté sur T, on notera seulement J et M.

Ces deux ensembles ne sont pas forcément disjoints, un même élément pouvant être à la fois $\vee$-irréductible et $\wedge$-irréductible (on parle de doublement irréductible). Par convention, dans cet article, les éléments de J seront étiquetés par des lettres, et les éléments de M par des chiffres. Un même élément pourra donc être désigné par deux étiquettes s'il est doublement irréductible. C'est le cas en figure 2, par exemple pour l'élément doublement irréductible qui a pour label b lorsqu'il est considéré comme un élément $\vee$-irréductible et 1 lorsqu'il est considéré comme élément $\wedge$-irréductible. Cela nous permettra de clarifier le rôle joué par un élément dans le cadre des relations flèches définies ci-après.

Des éléments peuvent bien sûr ne pas être irréductibles. C'est le cas de l'élément au centre du treillis, qui peut être décrit comme $a \vee c$ ou encore $2 \wedge 4$.

Chaque élément x d'un treillis peut en effet être représenté par l'ensemble des éléments $\wedge$-irréductibles qui lui sont supérieurs (représentation $\wedge$-dense, $x = \{\bigwedge M \cap \uparrow x\}$) ou bien, de

façon équivalente, par l'ensemble des éléments $\vee$-irréductibles qui lui sont inférieurs (représentation $\vee$-dense, $x = \{\bigvee J \cap \downarrow x\}$).

Définition 4. *La* table *d'un treillis T est la relation binaire $R \subseteq J \times M$ définie par jRm (relation d'incidence) si $j \leq m$.*

Une fois la table définie, on peut introduire les connections de Galois qui permettent de reconstruire le treillis à partir de cette table.

Définition 5. *Soit $(J, M, \leq)$ la table d'un treillis T, on peut définir les connections de Galois entre J et M comme suit :*
— $' : 2^J \to 2^M$, $O' = m \mid \forall j \in O, j \leq m$
— $' : 2^M \to 2^J$, $A' = j \mid \forall m \in A, j \leq m$

La composition $''$ est un opérateur de fermeture et permet de définir deux systèmes de fermeture sur J et M ainsi que le treillis de Galois (treillis des concepts) à partir de la table de T.

La table d'un treillis correspond au contexte réduit d'un treillis des concepts en FCA (Ganter et Wille (1999)). Un contexte réduit est un contexte (O, A, I) (une relation binaire I entre objets O et attributs A) pour lequel il n'y a pas deux lignes (resp. colonnes) identiques, et tel que chaque ligne (resp. colonne) ne soit pas l'intersection d'autres lignes (resp. colonnes). Autrement dit, un contexte réduit est réduit aux *éléments irréductibles*.

On notera $C(J, M, \leq)$ la table *(le contexte réduit)* d'un treillis. La table est souvent représenté par un tableau à double entrée avec J en colonnes, M en lignes et une croix ($\times$) dans la cellule (j, m) ssi $j \leq m$. Cette table peut d'autre part être complétée pour servir à présenter d'autres informations, comme les relations flèches définies ci-après.

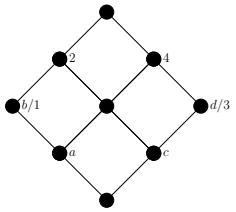
Définition 6. *Soit un treillis T, $j \in J$ et $m \in M$, on note :*
— $j \nearrow m$ *ssi* $m \in max(T \setminus \uparrow j)$
— $j \searrow m$ *ssi* $j \in min(T \setminus \downarrow m)$
— $j \nearrowtriangle m$ *ssi* $j \nearrow m$ *et* $j \searrow m$
où $min(X)$ et $max(X)$ désignent les éléments minimaux et maximaux de X.

Ainsi, on a $j \nearrow m$ si m est maximal dans l'ordre induit par le treillis, moins les éléments du filtre de j. De même, on a $j \searrow m$ si j est minimal dans l'ordre induit par le treillis, moins les éléments de l'idéal de m. Une illustration d'éléments en relation double flèche est donnée figure 2

On notera $C(J, M, \leq, \searrow, \nearrow)$ la table fléchée *(le contexte réduit avec l'information supplémentaire des relations flèches)*. Par définition, si deux éléments j, m sont en relation flèche (flèche haut, flèche bas ou double flèche), alors $j \not\leq m$. Par suite, la table fléchée est un tableau à deux dimensions où la valeur d'une cellule (j, m) indique la relation entre j et m, celle ci pouvant être (de façon exclusive) $\times$ (si $j \leq m$), $\searrow$, $\nearrow$, $\nearrowtriangle$ ou aucune d'entres elles (la cellule est alors laissée vide).

La figure 2 montre à droite la table fléchée du treillis de gauche. Remarquons que l'ensemble $(T \setminus \uparrow a) \cap M = \{3\}$, on a donc $a \nearrow 3$. De même, $(T \setminus \downarrow 3) \cap J = \{a, b\}$ et seul a est minimal dans cet ensemble. on a donc $a \searrow 3$. Puisque $a \nearrow 3$ et $a \searrow 3$, on notera $a \nearrowtriangle 3$.

Définition 7. *Un* sous-treillis $(S, \leq_S, \vee_S, \wedge_S)$ *de* $(T, \leq_T, \vee_S, \wedge_S)$ *est un treillis tel que*



	1	2	3	4
a	$\times$	$\times$	$\nearrow\!\!\!\swarrow$	$\times$
b	$\times$	$\times$		$\nearrow\!\!\!\swarrow$
c	$\nearrow\!\!\!\swarrow$	$\times$	$\times$	$\times$
d		$\nearrow\!\!\!\swarrow$	$\times$	$\times$

FIG. 2 – *Exemple de treillis (distributif) avec sa table fléchée.*

— $S \subseteq T$
— $\forall x, y \in S$, $x \vee_T y \in S$
— $\forall x, y \in S$, $x \wedge_T y \in S$

Autrement dit, un sous-treillis est fermé pour les opérations $\vee$ et $\wedge$ du treillis dont il est issu. Certaines classes de treillis, dont les treillis distributif définis ci-après, peuvent être caractérisés par des sous-treillis interdits. La prochaine section donne plusieurs résultats sur les treillis distributifs.

3 Treillis distributifs

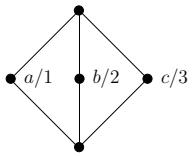
Un treillis est *distributif* ssi il vérifie la distributivité des opérations $\vee$ et $\wedge$, c'est à dire, $\forall x, y, z \in T : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Birkhoff s'est énormément intéressé aux treillis distributifs dès les années 30 avec un article dont est issu un des résultats utilisé ici (Birkhoff (1933)). Cette classe particulière de treillis dispose d'un chapitre à part entière dans son ouvrage de référence sur les treillis (Birkhoff (1967)). Les deux théorèmes repris ici sont aussi détaillés dans l'ouvrage Caspard et al. (2007) qui apporte de plus les caractérisations par relations flèches.

3.1 Caractérisations d'un treillis distributif

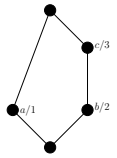
Caractérisations. Un treillis distributif est un treillis pour lequel les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont distributives entre elles. Il découle de cette définition plusieurs caractérisations équivalentes que nous allons réutiliser par la suite :

Théorème 1. *Un treillis $(T, \leq, \vee, \wedge)$ est distributif ssi l'une (toutes) des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
3. $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$
4. *T ne contient ni N_5 ni M_3 comme sous-treillis*
5. *la table fléchée de T contient exactement une double-flèche $\nearrow\!\!\!\swarrow$ par ligne et par colonne, à l'exclusion de toute autre relation flèche.*



	1	2	3
a	$\times$	$\nearrow\swarrow$	$\nearrow\swarrow$
b	$\nearrow\swarrow$	$\times$	$\nearrow\swarrow$
c	$\nearrow\swarrow$	$\nearrow\swarrow$	$\times$



	1	2	3
a	$\times$	$\searrow$	$\nearrow\swarrow$
b	$\nearrow\swarrow$	$\times$	$\times$
c	$\nearrow$	$\nearrow\swarrow$	$\times$

FIG. 3 – *Treillis M_3 et N_5 avec leur table fléchée.*

En particulier, la troisième caractérisation fait un lien direct entre les treillis distributifs d'un coté, et les graphes médians de l'autre. En effet, on peut définir une opération de médiane sur un ensemble M comme une fonction :

$$m : M^3 \to M$$

vérifiant

$$m(a, a, b) = a \text{ et } m(m(a, b, c), d, c) = m(a, m(b, c, d), c)$$

Or, $m(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$ défini une opération de médiane sur un treillis distributif. Ce résultat est utilisé par Bandelt (Bandelt et al. (1999)) pour rapprocher les treillis distributifs des graphes médians.

Les treillis M_3 et N_5 apparaissant dans la caractérisation sont les deux plus petits treillis non distributifs. Ils sont illustrés en figures 3 avec leur table fléchée. Contrairement à la table fléchée du treillis de la figure 2, celles-ci ne contiennent pas exclusivement une double-flèche par ligne et par colonne. Pour M_3, on peut voir deux doubles-flèches par ligne et par colonne. Pour N_5, il n'y a qu'une seule double flèche par ligne et par colonne, mais aussi des flèches simples.

3.2 Treillis distributif et treillis des idéaux

Soit l'ensemble ordonné $(P, \leq)$, on note $\mathcal{O}(P)$ l'ensemble des idéaux d'ordre de $(P, \leq)$. $\mathcal{O}(P)$ muni de la relation d'inclusion est lui-même un ensemble ordonné $(\mathcal{O}(P), \subseteq)$. C'est de plus un treillis, appelé *treillis des idéaux*. L'opération de borne inférieure est l'intersection. L'opération de borne supérieure est l'union.

Le théorème 2 du à Birkhoff (Birkhoff (1933)) permet de mettre en évidence que les éléments $\vee$-irréductibles du treillis des idéaux $(\mathcal{O}(P), \subseteq, \cap, \cup)$ sont les idéaux principaux de l'ensemble ordonné $(P, \leq)$.

Théorème 2. *Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné et $x \in P$, la fonction $\epsilon : x \to \downarrow x$ est un isomorphisme d'ordre de P vers $J(\mathcal{O}(P))$.*

Une illustration de ce théorème est proposée figure 4 ou l'on voit, à gauche, un ensemble ordonné et à droite le treillis des idéaux correspondant, avec les idéaux principaux en noir, et les autres idéaux en blancs.

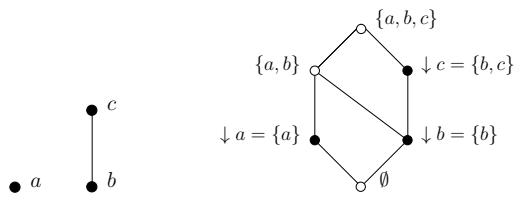


FIG. 4 – *Illustration du théorème de représentation de Birkhoff.*

Le théorème 2 indique qu'il y a isomorphisme entre les ensembles ordonnés d'un coté, et les éléments sup-irréductibles des treillis des idéaux de l'autre. Ce résultat ne donne aucune information sur les propriétés de ces derniers. Cependant, le résultat du théorème 3, toujours du à Birkhoff, permet de remarquer qu'il s'agit de la famille des *treillis distributifs*.

Théorème 3. Théorème de représentation de Birkhoff.*(Birkhoff (1933))*
Soit T un treillis distributif, alors la fonction $\eta : T \to \mathcal{O}(J(T))$ définie par

$$\eta(a) = \{x \in J(T) \mid x \leq a\} = \{J(T) \cap \downarrow a\}$$

est un isomorphisme de T dans $\mathcal{O}(J(T))$.

On déduit de ce théorème que pour tout treillis $(T, \leq, \vee, \wedge)$, on peut trouver un treillis distributif $(T_d, \leq_d, \vee_d, \wedge_d)$ tel que $(J(T), \leq) = (J(T_d), \leq_d)$. Autrement dit, on peut toujours, à partir d'un treillis, obtenir un treillis distributif ayant le même ordre induit sur J. C'est ce résultat que nous allons utiliser pour proposer un algorithme construisant la table d'un treillis distributif à partir de la table d'un treillis quelconque.

4 Résultats

Le problème consiste à transformer un treillis quelconque en un treillis distributif. A moins que le treillis initial ne soit déjà lui-même distributif, il y aura donc forcément modification des données, et par suite de la table fléchée. L'idée est de calculer la table correspondant au treillis distributif à partir de la table du treillis initial quelconque, sans avoir à construire ce dernier, et dans un principe d'économie.

D'autre part, on peut se poser la question de savoir dans quelle mesure le treillis distributif obtenu est "proche" du treillis initial et quelles modifications sont autorisées sur la table de départ. Ici, en considérant $(T, \leq_T, \vee_T, \wedge_T)$ le treillis de départ et $(T_d, \leq_{T_d}, \vee_{T_d}, \wedge_{T_d})$ le treillis distributif construit, nous avons considéré les hypothèses suivantes :

— $(J(T_d), \leq) = (J(T), \leq)$ ou bien $(M(T_d), \leq) = (M(T), \leq)$ (un des deux ordres induits par les éléments irréductibles est isomorphe entre le treillis initial et le treillis distributif).

— soit $(J, M, \leq)$ et $(J, M_d, \leq_d)$ les tables des deux treillis, alors la relation $\leq$ est incluse dans la relation $\leq_d$. Autrement dit, on ne s'autorise qu'à ajouter des croix dans la table, et jamais à en retirer. L'intuition de cette deuxième hypothèse se retrouve dans la maxime "*l'absence de preuve n'est pas la preuve de l'absence* [1]". S'il y a une croix,

1. ce qu'on pourrait interpréter comme une variante de l'hypothèse de monde ouvert

c'est que l'existence de la mutation a été montrée pour une espèce, et on ne peut le remettre en question. S'il n'y a pas de croix, cette mutation n'a pas été repérée, mais ce n'est pas pour autant qu'elle n'existe pas.

Comme nous travaillons avec le théorème de représentation de Birkhoff, la première condition nous assure que le treillis construit a bien une structure commune avec le treillis initial. Comme un passage au treillis dual inverse les éléments $\vee$-irréductibles et $\wedge$-irréductible, nous pouvons nous appuyer sur l'une comme sur l'autre.

Dans un treillis distributif, les ordres $(J(T_d), \leq)$ et $(M(T_d), \leq)$ sont isomorphes. On a donc $|J(T_d)| = |M(T_d)|$. Dans le treillis initial, trois cas peuvent se produire :

1. $|J(T)| = |M(T)|$
2. $|J(T)| > |M(T)|$
3. $|J(T)| < |M(T)|$

Si on utilise systématiquement l'ensemble des éléments $\vee$-irréductibles (lignes de la table), alors la table modifiée aura autant (cas 1), plus (cas 2) ou moins (cas 3) de colonnes que la table initiale.

Conserver la relation d'incidence du contexte (conserver les croix existantes) n'est possible que dans les deux premiers cas. En effet, dans le troisième, certains éléments $\wedge$-irréductibles sont amenés à disparaître. On pourra cependant toujours se ramener à l'un des deux premiers cas en raisonnant sur le dual, c'est à dire en échangeant le rôle de $J(T)$ et $M(T)$.

Nous montrerons dans la suite que pour les deux premiers cas, la relation d'incidence initiale est bien conservée (plongée dans la relation d'incidence du treillis distributif.

Il serait aussi possible de raisonner sur le troisième cas en conservant $J(T)$. Dans ce cas, la table du treillis distributif ayant moins de colonnes, il y aura disparition de croix de la relation d'incidence.

Notons que dans tous les cas, de par l'utilisation du théorème de représentation de Birkhoff, y il aura un plongement du treillis de départ dans le treillis distributif, ce qui nous assure que les ensembles fermés (concepts) initiaux apparaissent toujours dans les données transformées.

L'algorithme proposé suit les deux grandes étapes suivantes :

1. Construction de $(J, \leq)$ à partir de $C(J, M, \leq)$
2. Construction de $C(J, M_{T_d}, \leq_{T_d})$ à partir de $(J, \leq)$

La méthode proposée n'a techniquement pas besoin de la table fléchée $C(J, M, \leq, \nearrow, \searrow)$ pour fonctionner. Cependant la connaissance de ces relations permet de savoir plus facilement quelles modifications sont faites sur la table initiale.

Si besoin, le calcul des relations flèches se fait en temps polynomial en la taille du contexte : $(J(T), \leq)$ et $(M(T), \leq)$ peuvent être calculés en temps polynomial (algorithme 1). Pour trouver les éléments en relation $\nearrow$ avec un élément de $j \in J$, on retire le filtre de j (c'est à dire j') de $(M(T), \leq)$ et on cherche les éléments maximaux de $(M(T) \backslash j', \leq)$. Dualement, pour trouver les éléments en relation $\searrow$ avec un élément $m \in M$, on retire l'idéal de m (c'est à dire m') de $(J(T), \leq)$ et on cherche les éléments minimaux de $(J(T) \backslash m', \leq)$.

Dans la suite, nous utiliserons la transformation du treillis N_5 en treillis distributif pour illustrer les différentes parties de l'algorithme, y compris le calcul des relations flèches.

Algorithme 1 : ordreInduitJdepuisTable.

Données : La table d'un treillis $C(J, M, \leq_C)$
Résultat : l'ensemble ordonné $(J, \leq_J)$
$\leq_J \leftarrow \emptyset$
pour chaque $j_1 \in J$ **faire**
  pour chaque $j_2 \in J$ **faire**
    si $(j'_1 \subseteq j'_2)$ **alors**
      $\leq_J \leftarrow \leq_J \cup (j_2, j_1)$

4.1 Construction de $(J, \leq)$ à partir d'un contexte

L'algorithme calcule d'abord $(J(T), \leq)$ à partir d'un contexte. L'algorithme 1 est basé sur le fait que tout élément d'un treillis peut être identifié par les éléments $\wedge$-irréductibles qui sont dans son filtre. Ainsi un élément j_1 est inférieur à j_2 si les éléments $\wedge$-irréductibles du filtre de j_2 (c'est à dire j'_2) sont inclus dans ceux du filtre de j_1 (c'est à dire j'_1). Notons que l'algorithme peut être adapté sans mal pour obtenir $(M(T), \leq)$

La complexité de cet algorithme est de $O(|J|^2 * |M|)$ puisque pour chaque couple $j_1, j_2 \in J$, on va faire des comparaisons ensemblistes sur j'_1 et j'_2 ($O(|M|)$).

Illustration. On considère la table du treillis N_5 illustrée en figure 5 *(gauche)*. A partir de cette table et de l'algorithme 1, on calcule $(J, \leq)$ (*centre*) et $(M, \leq)$ (*droite*). Pour $(J, \leq)$, puisque $c' \subset b'$ alors $b < c$. Pour $(M, \leq)$, puisque $2' \subset 3'$ alors $2 < 3$.

Calcul des relations flèches. Pour calculer les relations flèches, on cherche les éléments de M en relation $\nearrow$ avec un élément de J. Pour cela on s'appui sur l'ordre $(M, \leq)$

— Pour a, on calcule $(M \backslash a', \leq)$. En effet, $a' = \uparrow a \cap M$. Ici $a' = \{1\}$. Seul 3 est maximal dans l'ordre induit. On a $a \nearrow 3$
— Pour b, on calcule $(M \backslash b', \leq)$. $b' = \{2, 3\}$. 1 est maximal : $b \nearrow 1$
— Pour c, on calcule $(M \backslash c', \leq)$. $c' = \{3\}$. 1 et 2 sont minimaux : $c \nearrow 1$, $c \nearrow 2$

On cherche maintenant les éléments de J qui sont en relation $\searrow$ avec un élément de M.

— Pour 1, on calcule $(J \backslash 1', \leq)$. En effet, $1' = \downarrow 1 \cap J$. Ici $1' = \{a\}$. Seul b est minimal dans l'ordre induit. On a $b \searrow 1$
— Pour 2, on calcule $(J \backslash 2', \leq)$. $2' = \{b\}$. a et c sont minimaux : $a \searrow 2$, $c \searrow 2$
— Pour 3, on calcule $(J \backslash 3', \leq)$. $3' = \{b, c\}$. a est minimal : $c \searrow 3$.

A partir des éléments en relation $\nearrow$ et $\searrow$, on déduit les éléments en relation $\swarrow\!\!\!\nearrow$: $b \swarrow\!\!\!\nearrow 1$, $c \swarrow\!\!\!\nearrow 2$, $a \swarrow\!\!\!\nearrow 3$.

4.2 Construction de la table d'un treillis distributif isomorphe au treillis des idéaux

Nous avons vu précédemment qu'un treillis distributif était entièrement déterminé par l'ensemble de ses éléments $\vee$-irréductibles. Il faut alors calculer la table correspondant au treillis

	1	2	3
a	$\times$		
b		$\times$	$\times$
c			$\times$

table de N_5

FIG. 5 – *Représentation de* $(J, \leq)$*,* $(M, \leq)$ *extraits de la table*

distributif $(\mathcal{O}(J(T)), \subseteq, \cup, \cap)$ à partir de $(J, \leq)$. Ainsi, le treillis de départ et le treillis distributif obtenus auront le même ordre induit par les éléments $\vee$-irréductibles. L'algorithme 2 décrit la façon de faire.

Algorithme 2 : Production du contexte d'un treillis distributif.

Données : La table $C(J, M, \leq_C)$
Résultat : La table $C_d(J, M_d, \leq_{C_d})$ correspondant à $(\mathcal{O}(J), \subseteq, \cap, \cup)$
$M_d \leftarrow \emptyset$
$\leq_{C_d} \leftarrow \emptyset$
$(J, \leq_j) \leftarrow ordreInduitJdepuisTable(C(J, M, <_C))$
pour chaque $j \in J$ **faire**
  $M_d \leftarrow M_d \cup m_j$ // m_j est l'élément $\wedge$-irréductible tel que $j \swarrow\!\!\!\nearrow m_j$
  $X \leftarrow J \setminus \uparrow j_{\leq_j}$
  pour chaque $x \in X$ **faire**
    $\leq_{C_d} \leftarrow \leq_{C_d} \cup (x, m_j)$

Propriété 1. *L'algorithme 2 produit la table du treillis des idéaux associé à l'ordre* $J(T)$*.*

Démonstration. Le treillis des idéaux d'un ordre est un treillis distributif ayant pour élément $\vee$-irréductible les idéaux principaux de cet ordre. Par construction, l'algorithme produit un unique élément m pour chaque j tel que $j \swarrow\!\!\!\nearrow m$.

Puisque $j \swarrow\!\!\!\nearrow m$, alors $\downarrow m \subseteq T \setminus \uparrow j$. Comme il n'y a pas d'autres relations flèches pour m (théorème 1, caractérisation 5), alors $\downarrow m = T \setminus \uparrow j$. L'ordre induit par J n'est pas modifié par l'algorithme et la table produite est alors par construction celle d'un treillis distributif ayant le même ordre induit par J, c'est à dire le treillis des idéaux de l'ordre $(J, \leq)$. □

Illustration. A l'issue de l'étape précédente, nous disposons de l'ordre $(J, \leq)$ et des relations flèches. Puisque nous connaissons les éléments en relation double flèche, et qu'il n'y en a qu'une par ligne et par colonne (malgré des flèches simples), nous allons les utiliser de façon à ce que la table produite conserve ses doubles flèches. Autrement dit :

$$\begin{array}{lcl} m_b = & 1' & = & J \setminus \uparrow b = \{a\} \\ m_c = & 2' & = & J \setminus \uparrow c = \{a, b\} \\ m_a = & 3' & = & J \setminus \uparrow a = \{b, c\} \end{array}$$

	1	2	3
a	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$
b	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
c		$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\times$

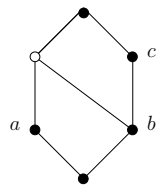


FIG. 6 – *Table modifiée et treillis distributif obtenu.*

La figure 6 montre la table modifiée (*gauche*) et le treillis distributif correspondant (*droite*) ; les nouveaux éléments apparaissent en blanc, les éléments du treillis initial en noir.

complexité. Après une étape en $O(|J|^2 * |M|)$ (calcul de $(J, \leq)$), la complexité de cet algorithme est de l'ordre de $O(|J|^2)$ (pour chaque élément $\vee$-irréductible, on calcule un filtre ($O(|J|)$) puis on fait une opération d'intersection ensembliste ($O(|J|)$). La complexité totale de l'algorithme est alors en $O(|J|^2 * |M|)$.

Propriété 2. *Soit T un treillis et T_d le treillis distributif obtenu par le théorème de représentation de Birkhoff. Pour tout $m \in M(T)$, il existe $m_{T_d} \in M(T_d)$ tel que $j <_T m$ implique $j <_{T_d} m_{T_d}$.*

Démonstration. Soit $j \in J(T)$ et $m \in M(T)$ tels que $j \swarrow\!\!\!\nearrow m$. Alors par définition, $\uparrow j \cap \downarrow m = \emptyset$, Or, par construction, dans T_d, il existe un unique m_{T_d} tel que $m'_{T_d} = (T \setminus \uparrow j) \cap J$. Comme $m' = \downarrow m \cap J$ On a donc $m' \subseteq m'_{T_d}$ et quel que soit $j_i \in m'$, $j_i \in m'_{T_d}$. $\square$

Dans le cas ou $|J(T)| > |M(T)|$, cette propriété implique que la relation d'incidence initiale est toujours présente (rajout de croix seulement). De plus, cette preuve nous permet de constater que pour un élément, peut importe la double-flèche considérée dans la ligne ou la colonne. Il suffit alors de choisir les doubles flèches de façon à en avoir une seule par ligne et colonne dans la table du treillis distributif.

5 Discussion et Conclusion

En nous appuyant sur le théorème de représentation de Birkhoff, nous avons proposé un algorithme polynomial produisant la table d'un treillis distributif à partir de la table d'un treillis des concepts. La relation d'ordre entre éléments $\vee$-irréductibles est identique dans les deux treillis et le treillis initial peut être plongé dans le treillis distributif obtenu. On pourra aussi s'intéresser aux contextes non binaires, par exemple issus d'extension de l'analyse de concepts formel, comme les treillis de patrons (pattern stucture lattices)

Une expérimentation sur données réelles devra permettre de vérifier que la sémantique des données est bien préservée par les transformations proposées par cet algorithme. Enfin, l'algorithme proposé, actuellement en $O(|J|^2 * |M|)$ a été mis en place pour montrer la possibilité d'application en temps polynomial en la taille du contexte. Une étude plus approfondie pouvant abaisser la complexité théorique de cet algorithme devra être menée.

Références

Bandelt, H.-J., P. Forster, et A. Röhl (1999). Median-joining networks for inferring intraspecific phylogenies. *Molecular biology and evolution 16*(1), 37–48.

Bandelt, H.-J. et J. Hedlíková (1983). Median algebras. *Discrete mathematics 45*(1), 1–30.

Bertrand, P. et J. Diatta (2017). Multilevel clustering models and interval convexities. *Discrete Applied Mathematics 222*, 54–66.

Bertrand, P. et M. F. Janowitz (2002). Pyramids and weak hierarchies in the ordinal model for clustering. *Discrete Applied Mathematics 122*(1), 55–81.

Birkhoff, G. (1933). On the combination of subalgebras. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Volume 29, pp. 441–464. Cambridge University Press.

Birkhoff, G. (1967). Lattice theory. In *Colloquium Publications* (3. ed.), Volume 25. Amer. Math. Soc.

Carpineto, C. et G. Romano (2004). *Concept data analysis : Theory and applications*. John Wiley & Sons.

Caspard, N., B. Leclerc, B. Monjardet, et al. (2007). *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, Volume 60. Springer.

Davey, B. A. et H. A. Priestley (2002). *Introduction to lattices and order*. Cambridge university press.

Diatta, J. (2005). Galois weak hierarchies : Theoretical and computational issues. In *UK Workshop on Computational Intelligence*, pp. 3.

Ganter, B. et R. Wille (1999). *Formal concept analysis : mathematical foundations*. Springer.

Priss, U. (2012). Concept lattices and median networks. In *CLA*, pp. 351–354.

Priss, U. (2013). Representing median networks with concept lattices. In *ICCS*, pp. 311–321. Springer.

Summary

In this paper, we study distributive lattices for use in Formal Concept Analysis (FCA). Principal motivation comes from phylogeny and median graphs, to represent biological derivations and parcimonious trees. FCA proposes efficient algorithms to build concept lattices. Nevertheless, a concept lattice is not in correspondence with a median graph, except if it is a distributive one, hence comes the idea to study how to transform a concept lattice in a distributive one. In goal to achieve it, we use Birkhoff representation theorem, which allows to compute the transformation of any context in the context of a distributive lattice. So, we can use all the FCA algorithmic to build but also visualise distributive concept lattices, and to study associated median graphs.