

SUR LES MESURES DIFFERENTIELLES  
DES FONCTIONS VECTORIELLES A VARIATION  
LOCALEMENT BORNEE

J.J. MOREAU

1. INTRODUCTION

1. a MESURES DIFFERENTIELLES

Soit  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  et soit  $X$  un espace de Banach réel. On dira qu'une fonction  $f : I \rightarrow X$  est à variation localement bornée (dans des rapports antérieurs nous disions "à variation finie") si sa restriction à tout sous-intervalle compact de  $I$  possède une variation bornée ; notation :  $f \in \text{vlb}(I, X)$ . Il faut et il suffit pour cela qu'il existe une fonction faiblement croissante  $V_f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (définie à une constante additive près), dite variation indéfinie de  $f$ , telle que

$$\forall [s, t] \subset I : \text{var}(f ; s, t) = V_f(t) - V_f(s) .$$

Il est classique d'associer à toute  $f \in \text{vlb}(I, X)$  une mesure vectorielle sur  $I$ , à valeurs dans  $X$ , notée  $df$ , appelée mesure différentielle de la fonction  $f$  (ou, improprement à notre avis, "mesure dérivée" de  $f$ ). Une propriété caractéristique de cette mesure est que, pour tout sous-intervalle compact  $[s, t]$  de  $I$  on a

$$\int_{[s, t]} df = f^+(t) - f^-(s) ,$$

en notant respectivement  $f^+$  et  $f^-$  les limites de  $f$  à droite ou à gauche de chaque point (sur l'existence et quelques propriétés de ces limites, voir la Section 2). Les intervalles  $]s, t]$ ,  $[s, t[$  ou  $]s, t[$  donnent des résultats analogues ; une convention d'écriture (cf. Parag. 2. c) sauvegarde ces formules dans le cas où  $s$  ou  $t$  se trouve être une extrémité de  $I$ .

On voit par là que la connaissance de la mesure vectorielle  $df$  permet de reconstituer, à une constante additive près, les fonctions  $t \mapsto f^-(t)$  et  $t \mapsto f^+(t)$  (ce sont des fonctions à variation localement bornée ayant la même mesure différentielle que  $f$ ), mais non les valeurs que prend  $f$  en ses éventuels points de discontinuité. On n'en sera pas surpris si l'on observe que, dans le cas particulier où l'intervalle  $I$  est ouvert, la mesure  $df$  sur cet ouvert n'est autre que la distribution (vectorielle) dérivée de la mesure vectorielle  $\mathcal{F}$  qui possède  $f$  pour densité relativement à la mesure de Lebesgue de  $I$  ; cf. Parag. 6. a. L'ensemble des points de discontinuité de  $f$  étant au plus dénombrable, la mesure  $\mathcal{F}$  ne dépend pas des valeurs que prend  $f$  en ces points.

En fait, aucun rôle privilégié ne revient ici à la mesure de Lebesgue. Comme texte de référence concernant les mesures vectorielles, nous adoptons Bourbaki [1], Chap. 6. Il a donc paru utile de consacrer la Section 3 de ce rapport à établir, dans la ligne même de la théorie de l'intégration selon Bourbaki, l'existence et les propriétés élémentaires de la mesure vectorielle  $df$ .

#### 1. b UNE REGLE DE CALCUL

Notre objet principal est d'adapter au cadre présent la formule de différentiation d'une forme bilinéaire.

On considère trois espaces de Banach  $X, Y, Z$  et une forme bilinéaire continue  $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$ . Si deux fonctions  $x : I \rightarrow X$  et  $y : I \rightarrow Y$

sont à variation localement bornée, il en est de même de la fonction  $t \mapsto \Phi(x(t), y(t))$ , à valeurs dans  $Z$ , d'où l'existence de  $d\Phi(x, y)$ , mesure vectorielle sur  $I$ , à valeurs dans  $Z$ .

D'une façon générale, on considère dans la Section 4 un espace  $T$  localement compact (dénombrable à l'infini) et une mesure vectorielle majorable  $dm$  sur  $T$ , à valeurs dans  $Y$ . Alors pour tout  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, X)$  on définit  $\Phi(g, dm)$ , mesure vectorielle majorable sur  $T$ , à valeurs dans  $Z$ . Un certain nombre de règles de calcul et inégalités simples sont établies.

Grâce à cette notation, la formule attendue est

$$d\Phi(x, y) = \Phi(x^+, dy) + \Phi(dx, y^-)$$

(ou l'analogue, en échangeant  $x$  et  $y$ ).

Un cas usuel est celui où  $X = Y$  avec  $\Phi$  symétrique. Alors, en notant  $Q$  la forme quadratique  $u \mapsto \Phi(u, u) \in Z$  la formule devient

$$dQ(x) = \Phi(x^+ + x^-, dx)$$

Au Parag. 5. c on suppose que  $Z = \mathbb{R}$  et que la forme quadratique  $Q$  est  $\geq 0$ . Un nouveau résultat est alors que, pour tout  $x \in \text{vlb}(I, X)$ , la mesure scalaire  $\Phi(x^+ - x^-, dx)$  est une mesure positive, ce qui au sens de l'ordre des mesures scalaires sur  $I$ , entraîne

$$(1.1) \quad 2\Phi(x^-, dx) \leq dQ(x) \leq 2\Phi(x^+, dx)$$

#### 1. c APPLICATIONS

Les Parag. 6. b et 6. c donnent une idée de notre motivation.

On revient sur le processus de rafle qui a déjà fait l'objet de nombreux rapports de ce Séminaire. Etant donné un convexe fermé variable  $t \mapsto C(t)$  dans l'hilbertien  $H$ , on cherche un point mobile, c'est-à-dire une application  $u : I \rightarrow H$  qui, dans la formulation dite forte du problème, vérifie les conditions suivantes :  $u$  est localement absolument continue et sa dérivée  $\dot{u}$  satisfait, Lebesgue presque partout dans  $I$ ,

$$(1.2) \quad - \dot{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t))$$

où  $\psi(t, \cdot)$  désigne la fonction indicatrice de  $C(t)$ . Peut être imposée de plus une condition initiale  $u(t_0) = u_0$ , donné dans  $C(t_0)$ .

Le fait que, pour tout  $t$  et tout  $x$ , l'ensemble  $\partial\psi(t, x)$  est une partie conique de  $H$  a la conséquence que voici, intuitive dans les images mécaniques du processus (cf. [8]) : la chaîne ordonnée des positions successives du point mobile  $u$  est associée à la chaîne ordonnée des configurations successives de l'ensemble  $C$  d'une manière indépendante de l'horaire.

La fonction  $\dot{u}$  est la densité de la mesure du relativement à la mesure de Lebesgue de  $I$  ; l'invariance du processus à l'égard des changements de variable croissants conduit naturellement à déprivilégier la mesure de Lebesgue, d'où une notion plus faible de solution, éventuellement discontinue : on dira que  $u \in \text{vlb}(I, H)$  est solution du processus de rafle par  $C$  au sens des mesures différentielles si  $u$  est continue à droite et s'il existe  $d\mu$ , mesure  $\geq 0$  sur  $I$  par rapport à laquelle  $du$  possède une densité  $u'$  vérifiant  $-u'(t) \in \partial\psi(t, u(t))$  pour tout  $t$ . L'unicité de la solution consécutive à une donnée initiale  $u(t_0)$  ou, plus généralement, la propriété familière des équations d'évolution à second membre monotone : "pour deux solutions quelconques  $u_1$  et  $u_2$  du processus, la fonction  $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$  est décroissante" pourra être déduite de l'inégalité (1.1), grâce à l'exigence de continuité à droite que nous imposons à ces solutions.

Apparemment, des considérations semblables pouvaient être développées en remplaçant, au second membre de (1.2),  $\partial\psi(t, \cdot)$  par un "opérateur" monotone  $A(t, \cdot)$  à valeurs coniques. La Remarque 6. b, établit qu'un tel  $A(t, \cdot)$  est nécessairement contenu dans un  $\partial\psi(t, \cdot)$  et donc lui est égal s'il est monotone maximal.

L'existence des solutions du processus de rafle au sens des mesures différentielles fera l'objet d'un rapport ultérieur (voir aussi, pour une

version aléatoire du problème, [2] [3]). Le Parag. 6. c termine le présent rapport en établissant un fait technique destiné justement à cette démonstration d'existence : Soit  $d\mu$  une mesure scalaire  $\geq 0$  sur l'intervalle compact  $I = [t_0, t_1]$  et soit  $u' \in L^1(I, d\mu ; H)$ . On note  $u$  la primitive suivante de la mesure  $du = u' d\mu$  :

$$u(t) = \int_{]t_0, t[} u' d\mu$$

(continue à droite). On tire de l'inégalité (1.1) que la fonctionnelle

$$u' \mapsto \int_I (u|u') d\mu$$

est une forme quadratique  $\geq 0$  sur  $L^1(I, d\mu ; H)$ . Un contre-exemple montre que cette positivité n'est plus assurée si l'on prend pour  $u(t)$  l'intégrale de  $u' d\mu$  sur  $]t_0, t[$ , primitive continue à gauche de  $du$ . Naturellement, si la mesure  $d\mu$  est diffuse la distinction est sans objet et on retrouve, comme dans le cas familier où  $d\mu$  est la mesure de Lebesgue,  $\int_I (u|u') d\mu = \frac{1}{2}|u(t_1)|^2$ .

Expliciter l'importance de la continuité à droite dans les problèmes d'évolution discontinue de ce type, constitue, du point de vue de l'auteur l'apport principal du présent papier.

## 2. RESULTATS PRELIMINAIRES

### 2. a SUR CERTAINES APPLICATIONS D'UN INTERVALLE REEL DANS UN ESPACE REGULIER

Soit  $E$  un espace topologique régulier c'est-à-dire possédant la propriété suivante : l'ensemble des voisinages fermés d'un point quelconque constitue un système fondamental de voisinages de ce point. Tel est le cas si la topologie de  $E$  est déduite d'une structure uniforme, donc en particulier si  $E$  est un espace métrique ou un e.v.t.

PROPOSITION (2. a). Soit I un intervalle de R et soit f une application de I dans un espace régulier E telle que, pour tout t ∈ I différent de la fin éventuelle de cet intervalle, il existe

$$f^+(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau > t} f(\tau) .$$

Alors

$$(2.1) \quad \lim_{s \rightarrow t, s > t} f^+(s) = f^+(t) .$$

Si, de plus, pour tout t différent du début éventuel de I, il

existe

$$f^{\sim}(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau < t} f(\tau)$$

alors

$$(2.2) \quad \lim_{s \rightarrow t, s < t} f^{\sim}(s) = f^{\sim}(t) .$$

Bref,  $f^{++} = f^+$ ,  $f^{--} = f^{\sim}$  et, par la proposition semblable obtenue

en échangeant les rôles des limites à droite et à gauche,  $f^{--} = f^{\sim}$ ,  $f^{+-} = f^{\sim}$ .

En d'autres termes, en supposant I ouvert, si f possède une limite à droite et une limite à gauche en tout point de I, on se trouve en présence de

deux opérations : la régularisation continue à gauche et la régularisation continue à droite. Ces opérations peuvent être réitérées ou alternées un nombre quelconque de fois : le résultat est le même que si la dernière effectuée avait été appliquée à la fonction f elle-même.

Preuve. Soit  $W \subset E$  un voisinage fermé de  $f^+(t)$  ; il existe  $\eta > 0$  tel que

$$s \in ]t, t + \eta[ \Rightarrow f(s) \in W .$$

Pour tout s dans l'intervalle ouvert  $]t, t + \eta[$  on a

$$f^+(s) = \lim_{\tau \rightarrow s, \tau \in ]s, t + \eta[} f(\tau)$$

$$\in \text{adh } f(]t, t + \eta[) \subset W .$$

Comme les voisinages fermés tels que W forment un système fondamental de voisinages de  $f^+(t)$  cela établit (2.1).

De la même façon, pour tout s dans l'intervalle ouvert  $]t, t + \eta[$ ,

$$f^{\sim}(s) = \lim_{\tau \rightarrow s, \tau \in ]t, s[} f(\tau) \subset W$$

d'où (2.2).

2. b SAUT DE LA FONCTION VARIATION INDEFINIE

PROPOSITION (2. b). Soit I un intervalle de R, soit (E, δ) un espace métrique et soit f ∈ vlb(I, E). Alors pour tout t différent du début éventuel de I il existe

$$(2.3) \quad \lim_{s \rightarrow t, s < t} \delta(f(s), f(t))$$

égal à

$$(2.4) \quad \lim_{s \rightarrow t, s < t} \text{var}(f ; s, t) = V_f(t) - \bar{V}_f(t) .$$

Résultat semblable pour les limites à droite, si t est différent de la fin éventuelle de I.

SCOLIE. Si f<sup>-</sup>(t) existe (ce qui est assuré en particulier lorsque E est complet) l'expression (2.3) est égale à δ(f<sup>-</sup>(t), f(t)).

Preuve. Soit t<sub>0</sub> < t dans I ; soit ε > 0. D'après la définition de la variation, il existe une suite finie strictement croissante

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = t$$

telle que

$$\text{var}(f ; t_0, t) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n \delta(f(\tau_{i-1}), f(\tau_i)) .$$

Soit s ∈ [τ<sub>n-1</sub>, t[ ; il résulte de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \text{var}(f ; t_0, t) &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} \delta(f(\tau_{i-1}), f(\tau_i)) \\ &\quad + \delta(f(\tau_{n-1}), f(s)) + \delta(f(s), f(t)) \\ &\leq \varepsilon + \text{var}(f ; t_0, s) + \delta(f(s), f(t)) . \end{aligned}$$

Bref

$$s \in [\tau_{n-1}, t[ \Rightarrow \delta(f(s), f(t)) + \varepsilon \geq \text{var}(f ; s, t) .$$

Par ailleurs

$$\delta(f(s), f(t)) \leq \text{var}(f ; s, t) .$$

Or

$$\text{var}(f ; s, t) = V_f(t) - V_f(s)$$

possède pour s → t, s < t, une limite égale à V<sub>f</sub>(t) - V<sub>f</sub><sup>-</sup>(t) puisque la

fonction  $V_f$  est croissante. On en conclut l'existence de la limite (2.3), égale à (2.4).

COROLLAIRE (2. b). La fonction  $f \in \text{vlb}(I, E)$  est continue à gauche (resp. à droite) au point  $t$  si et seulement si il en est de même pour la fonction numérique  $V_f$ .

L'ensemble des points de discontinuité de  $f$  dans  $I$  est fini ou dénombrable.

## 2. c VARIATION DES REGULARISEES

Soit  $(E, \delta)$  un espace métrique et soit  $f \in \text{vlb}(I, E)$ .

Supposons d'abord que l'intervalle  $I$  ne contienne pas son début et que, pour tout  $t \in I$  soit définie la limite à gauche  $f^-(t)$  (c'est assuré si  $E$  est complet). Alors quels que soient  $s < t$  dans  $I$  on a

$$\delta(f^-(s), f^-(t)) = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow s \\ \sigma < s}} \lim_{\substack{\tau \rightarrow t \\ \tau < t}} \delta(f(\sigma), f(\tau)) .$$

Comme

$$\delta(f(\sigma), f(\tau)) \leq |V_f(\tau) - V_f(\sigma)|$$

il vient à la limite

$$\delta(f^-(s), f^-(t)) \leq V_f^-(t) - V_f^-(s) .$$

On en conclut  $f^- \in \text{vlb}(I, E)$ . Toutefois les résultats du paragraphe précédent permettent de voir qu'en général la fonction  $V_f^-$  n'est pas variation indéfinie de  $f^-$ .

Même raisonnement pour  $f^+$ , si  $I$  ne contient pas sa fin.

Il sera utile dans toute la suite de poser :

CONVENTION (2. c). Si l'intervalle  $I$  possède un début, soit  $T_1$ , et le contient on écrit  $f^-(T_1) = f(T_1)$  ; si  $I$  possède une fin, soit  $T_2$  et le contient on écrit  $f^+(T_2) = f(T_2)$ .

Moyennant cette convention, pour tout  $t > T_1$ , on a

$$\begin{aligned} \delta(f^-(T_1), f^-(t)) &= \lim_{\substack{\tau \rightarrow t \\ \tau < t}} \delta(f(T_1), f(\tau)) \\ &\leq V_f^-(t) - V_f^-(T_1) . \end{aligned}$$

Calcul semblable pour  $f^+$  ; en conclusion :

PROPOSITION (2. c). Quel que soit l'intervalle  $I$ , si la fonction  $f \in \text{vlb}(I, E)$  possède une régularisée  $f^-$  (resp.  $f^+$ ), définie sur  $I$  entier conformément à la Convention 2. c, cette fonction appartient à  $\text{vlb}(I, E)$ .

AVERTISSEMENT. La Convention 2. c préserve évidemment les identités  $f^{--} = f^-$  et  $f^{++} = f^+$  établies au § 2. a pour un intervalle  $I$  ouvert. Mais elle ne préserve pas les identités  $f^{-+} = f^+$  et  $f^{+-} = f^-$ . On peut présenter cette convention en disant que, si  $I$  contient son début  $T_1$ , toute fonction définie sur  $I$  est systématiquement prolongée à gauche de  $T_1$  avec la valeur constante  $f(T_1)$  (et de même prolongée à droite de  $T_2$  si  $I$  contient sa fin) ; or cette opération de prolongement à gauche ne commute pas avec la régularisation continue à droite.

## 2. d APPROXIMANTES EN ESCALIER

Soit  $I$  un intervalle réel quelconque ; on notera  $\text{plf}(I)$  l'ensemble des partitions de  $I$  en sous-intervalles de forme quelconque (compacts, ouverts ou semi-ouverts, certains d'entre-eux éventuellement réduits à des singletons), partitions qui soient localement finies dans le sens suivant : tout compact de  $I$  est recouvert par un nombre fini d'intervalles d'une telle partition.

Une application  $e$  de  $I$  dans un ensemble quelconque est dite localement en escalier s'il existe une partition  $P \in \text{plf}(I)$  sur chaque intervalle de laquelle cette application est constante (lorsque  $I$  est compact

la partition  $P$  est nécessairement finie et  $e$  est simplement en escalier).

Soient  $P$  et  $P'$  deux éléments de  $\text{plf}(I)$  ; on écrit  $P \prec P'$  si  $P'$  est un raffinement de  $P$ , c'est-à-dire si tout intervalle de  $P'$  est contenu dans un intervalle de  $P$ . Cela définit sur  $\text{plf}(I)$  un ordre filtrant à droite.

Soit  $f : I \rightarrow E$  ; à toute partition  $P \in \text{plf}(I)$  associons une application localement en escalier  $f_P : I \rightarrow E$  construite de la manière suivante : sur chaque intervalle de  $P$ , l'application  $f_P$  prend la valeur constante  $f(\tau)$  où  $\tau$  désigne un point choisi dans l'intervalle en question. Avec cette notation :

PROPOSITION (2. d). Soit  $(E, \delta)$  un espace métrique et soit  $f \in \text{vlb}(I, E)$ . Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P \in \text{plf}(I)$  telle que pour toute partition  $P' \in \text{plf}(I)$  qui soit un raffinement de  $P$ , on ait :

$$(2.5) \quad \forall t \in I : \delta(f(t), f_{P'}(t)) \leq \varepsilon$$

et pour tout  $[a, b] \subset I$

$$(2.6) \quad \text{var}(f_{P'} ; a, b) \leq \text{var}(f ; a, b) + 2\varepsilon .$$

Preuve. La fonction variation indéfinie  $V_f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est (faiblement) croissante. Soit une partition localement finie de  $\mathbb{R}$  en intervalles de longueurs inférieures ou égales à  $\varepsilon$ . Les images réciproques de ces intervalles par  $V_f$  sont des sous-intervalles de  $I$  ; celles de ces images réciproques qui sont non vides forment une partition  $P \in \text{plf}(I)$ . Soit  $P' \in \text{plf}(I)$  un raffinement de  $P$ . Si deux points  $t$  et  $\tau$  appartiennent à un même membre de  $P'$ , ils appartiennent a fortiori à un même membre  $J$  de  $P$  d'où

$$\delta(f(t), f(\tau)) \leq \text{var}(f, J) \leq \varepsilon .$$

En prenant pour  $\tau$  le point où, par construction,  $f_{P'}(\tau) = f(\tau)$  on en conclut l'inégalité (2.5).

Notons  $J_0, J_1, \dots, J_m$  les traces sur  $[a, b]$  des intervalles sur lesquels  $f_{P'}$  est constante ; si on choisit un point  $\tau_i$  dans chaque  $J_i$ ,

on obtient banalement

$$\text{var}(f_{P_i} ; a, b) = \sum_{i=1}^m \delta(f_{P_i}(\tau_{i-1}), f_{P_i}(\tau_i))$$

En particulier prenons  $\tau_0 = a$ ,  $\tau_m = b$  et, si  $0 < i < m$ , prenons pour  $\tau_i$  le point de  $J_i$  où par construction  $f_{P_i}(\tau_i) = f(\tau_i)$ . Vu l'inégalité (2.5) il vient

$$\begin{aligned} \text{var}(f_{P_i} ; a, b) &\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^m \delta(f(\tau_{i-1}), f(\tau_i)) \\ &\leq 2\varepsilon + \text{var}(f ; a, b) \end{aligned}$$

### 3. MESURE DIFFERENTIELLE

#### 3. a DEFINITION ET EXISTENCE

Soit  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  ; soit  $X$  un espace de Banach et soit  $f \in \text{vlb}(I, X)$ .

On notera  $\mathcal{S}$  l'ensemble des parties finies de  $I$  ; tout élément  $S$  de  $\mathcal{S}$  peut s'énoncer de manière unique comme une suite finie strictement croissante

$$(3.1) \quad S : \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$$

A chaque  $S \in \mathcal{S}$ , écrit sous la forme (3.1), s'associent des inter-caleurs : nous appelons ainsi une loi, notons-la  $\theta_S$ , faisant correspondre à chaque  $i = 1, 2, \dots, n$  un élément, noté  $\theta_S^i$ , de l'intervalle fermé  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ .

Soit  $\phi \in \mathcal{K}(I)$ , i.e. une fonction numérique continue dont le support relativement à  $I$  est compact ; posons

$$(3.2) \quad M(S, \theta_S, \phi) = \sum_{i=1}^n \phi(\theta_S^i)(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \in X$$

(chaque terme de cette somme correspond donc à un des  $n$  intervalles consécutifs déterminés par la suite  $S$ ).

L'ensemble  $\mathcal{S}$ , ordonné par l'inclusion, est filtrant à droite ; on peut donc invoquer la notion classique de limite d'une application de  $(\mathcal{S}, \subset)$  dans un espace topologique ou suite généralisée indexée dans  $\mathcal{S}$  ; dans la

terminologie de Bourbaki, c'est la limite de cette fonction selon la base de filtre constituée par les sections commençantes de  $(S, \mathcal{C})$ .

PROPOSITION (3. a). Pour chaque  $\phi \in \mathcal{K}(I)$ , l'application  $S \mapsto M(S, \theta_S, \phi)$  de l'ordonné filtrant  $(S, \mathcal{C})$  dans l'espace de Banach  $X$  tend vers une limite qu'on notera

$$\int \phi \, df \quad .$$

Cette convergence est uniforme à l'égard du choix des intercaleurs  $\theta_S$ .

Si  $[a, b]$  est un sous-intervalle compact de  $I$  contenant le support de  $\phi$  on a l'inégalité

$$(3.3) \quad \left| \int \phi \, df \right| \leq \max |\phi| \operatorname{var}(f ; a, b)$$

montrant que l'application linéaire  $\phi \mapsto \int \phi \, df$  de  $\mathcal{K}(I)$  dans  $X$  constitue, au sens de Bourbaki, une mesure vectorielle sur  $I$ .

DEFINITION (3. a). Cette mesure, notée  $df$ , sera appelée mesure différentielle de  $f$ .

Preuve de la Proposition. L'ensemble des  $S \in \mathcal{S}$  qui contiennent les deux points  $a$  et  $b$  étant une section commençante de l'ordonné filtrant  $(S, \mathcal{C})$ , on peut se restreindre à des  $S$  de cette sorte. Et comme hors de  $[a, b]$  la fonction  $\phi$  est nulle, on peut, pour la construction de  $M(S, \theta_S, \phi)$  négliger les points de  $S$  hors de  $[a, b]$ , ce qui revient à se restreindre à des  $S$  de la forme

$$(3.4) \quad S : a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b \quad .$$

Considérons d'abord, pour chaque  $S$ , l'intercaleur particulier  $\bar{\theta}_S$  consistant dans le choix

$$\bar{\theta}_S^i = \tau_i$$

et montrons la convergence de  $S \mapsto M(S, \bar{\theta}_S, \phi)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  ; la fonction  $\phi$  étant uniformément continue sur  $[a, b]$  on peut construire la partie finie  $S$  assez peuplée pour que :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } i, \text{ quels que soient } \tau \text{ et } \tau' \text{ dans } [\tau_{i-1}, \tau_i] \\ |\phi(\tau) - \phi(\tau')| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Soit  $S' \in \mathcal{S}$  tel que  $S \subset S'$ ; ayant écrit  $S$  comme en (3.4), indexons sous la forme  $\tau_i^j$  les points de  $S'$  appartenant à l'intervalle  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ , ce qui fait que

$$\tau_{i-1} = \tau_i^0 < \tau_i^1 < \dots < \tau_i^p = \tau_i$$

(donc  $p = 1$  si  $S'$  ne comporte pas de points dans  $]\tau_{i-1}, \tau_i[$ ).

Les intervalles de  $S'$  contenus dans  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$  contribuent à  $M(S', \bar{\theta}_{S'}, \phi)$  par des termes dont la somme s'écrit

$$(3.6) \quad \sum_{j=1}^p \phi(\tau_i^j) (f(\tau_i^j) - f(\tau_i^{j-1})) ,$$

alors que l'intervalle  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$  contribue à  $M(S, \bar{\theta}_S, \phi)$  par le terme

$$\phi(\tau_i) (f(\tau_i) - f(\tau_{i-1}))$$

qui se développe en

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^p \phi(\tau_i) (f(\tau_i^j) - f(\tau_i^{j-1})) .$$

Si  $S$  satisfait (3.5), la différence entre les expressions (3.6) et (3.7) donne lieu à la majoration suivante

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^p (\phi(\tau_i) - \phi(\tau_i^j)) (f(\tau_i^j) - f(\tau_i^{j-1})) \right| \\ & \leq \varepsilon \sum_{j=1}^p |f(\tau_i^j) - f(\tau_i^{j-1})| \\ & \leq \varepsilon \text{var}(f ; \tau_{i-1}, \tau_i) . \end{aligned}$$

Par sommation en  $i$  (rappelons que les points de  $S'$  non contenus dans  $[\tau_0, \tau_n] = [a, b]$  contribuent à  $M(S', \bar{\theta}_{S'}, \phi)$  par des termes nuls), cela donne

$$|M(S, \bar{\theta}_S, \phi) - M(S', \bar{\theta}_{S'}, \phi)| \leq \varepsilon \text{var}(f ; a, b) .$$

Donc si  $S''$  est un autre élément de  $\mathcal{S}$ , on a l'implication

$$S \subset S', S \subset S'' \Rightarrow |M(S', \bar{\theta}_{S'}, \phi) - M(S'', \bar{\theta}_{S''}, \phi)| \leq 2\varepsilon \text{var}(f ; a, b) .$$

Cela signifie que l'application (ou suite généralisée)  $S \mapsto M(S, \bar{\theta}_S, \phi)$  de l'ordonné filtrant  $(\mathcal{S}, \subset)$  dans  $X$  possède la propriété de Cauchy, d'où la convergence annoncée.

Pour ce qui est maintenant de l'usage d'intercalaires  $\theta_S$  quelconques, il suffit de remarquer que, si  $S$  vérifie (3.5), on aura, pour tout  $S' \in \mathcal{S}$  tel que  $S \subset S'$ ,

$$|M(S', \theta_{S'}, \phi) - M(S', \bar{\theta}_{S'}, \phi)| \leq \varepsilon \text{ var}(f ; a, b)$$

d'où convergence vers la même limite.

Comme  $\phi \mapsto M(S, \theta_S, \phi)$  est, pour  $S$  et  $\theta_S$  fixés, une application linéaire de  $\mathcal{K}(I)$  dans  $X$ , il en est de même à la limite de  $\phi \mapsto \int \phi df$ .

Par ailleurs (3.2) entraîne

$$|M(S, \theta_S, \phi)| \leq \max |\phi| \text{ var}(f ; a, b)$$

d'où, à la limite, l'inégalité (3.3).

On en conclut que  $\phi \mapsto \int \phi df$  est, au sens de Bourbaki, une mesure sur  $I$  à valeurs dans  $X$ . En effet, tout compact  $K$  de  $I$  est contenu dans un intervalle tel que  $[a, b]$ . L'inégalité (3.3) prouve que la restriction de l'application ci-dessus au sous-espace de  $\mathcal{K}(I)$  constitué par les fonctions continues à support contenu dans  $K$  est continue pour la norme  $\phi \mapsto \max |\phi|$ .

REMARQUE 1. Le même type d'inégalités montre que, si  $S$  vérifie (3.5), alors pour tout  $S' \in \mathcal{S}$  tel que  $S \subset S'$  on a

$$|M(S', \theta_{S'}, \phi) - M(S, \theta_S, \phi)| \leq \varepsilon \text{ var}(f ; a, b) .$$

Puisque l'ensemble de ces  $S'$  est une section commençante de  $(\mathcal{S}, \subset)$ , on obtient, en prenant la limite relativement à  $S'$

$$| \int \phi df - M(S, \theta_S, \phi) | \leq \varepsilon \text{ var}(f ; a, b) .$$

C'est la continuité uniforme de  $\phi$  qui permet d'exhiber les  $S$  vérifiant (3.5). Il vient donc une approche de  $\int \phi df$  dans le style "intégrale de Riemann" :

La fonction  $\phi \in \mathcal{K}(I)$  et un réel  $\alpha > 0$  étant donnés, il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $S$  qui, écrit sous la forme (3.1), vérifie

$$(3.8) \quad \sup_i (\tau_i - \tau_{i-1}) \leq \eta ,$$

on ait

$$(3.9) \quad \left| \int \phi \, df - M(S, \theta_S, \phi) \right| \leq \alpha .$$

REMARQUE 2. Il est clair que, si  $f_1$  et  $f_2$  appartiennent à  $v\text{lb}(I, X)$  et si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux constantes réelles, on a

$$d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \, df_1 + \lambda_2 \, df_2 .$$

Par ailleurs, si la fonction  $f$  est constante, la mesure  $df$  est nulle. On va voir que la réciproque n'est pas exacte.

### 3. b CAS D'UNE FONCTION LOCALEMENT EN ESCALIER

On suppose que  $f : I \rightarrow X$  est localement en escalier : il existe une partition localement finie  $P$  de  $I$  en sous-intervalles sur chacun desquels  $f$  prend une valeur constante ; visiblement  $f \in v\text{lb}(I, X)$ . Pour  $\phi \in \mathcal{K}(I)$  nous allons calculer  $\int \phi \, df$ .

Supposons d'abord l'intervalle  $I$  ouvert dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $[a, b] \subset I$  contenant le support de  $\phi$  ; on peut choisir  $a$  et  $b$  distincts de tous les noeuds de la partition  $P$ . La trace de  $P$  sur  $[a, b]$  est une partition finie  $\Pi$  dont les noeuds seront notés

$$a < t_1 < t_2 < \dots < t_p < b$$

(il n'est pas exclu que l'un des intervalles de  $\Pi$  se réduise à un singleton  $\{t_k\}$ ). L'intégrale  $\int \phi \, df$  est limite d'expressions telles que  $M(S, \theta_S, \phi)$  où  $S$  désigne une suite

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b .$$

D'après la remarque du § 3. a, pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que (3.8) assure (3.9) : cette condition (3.8) peut être satisfaite avec des  $\tau_i$  tous distincts des  $t_k$ . Comme la fonction  $f$  est constante entre chacun des  $t_k$ , les seuls termes non nuls de la somme (3.2) correspondent à des valeurs de  $i$  telles que  $]\tau_{i-1}, \tau_i[$  contienne un des  $t_k$ . Lorsque  $\eta$  tend vers zéro, un tel terme a pour limite  $\phi(t_k)(f^+(t_k) - f^-(t_k))$ . Donc

$$(3.10) \quad \int \phi \, df = \sum_{k=1}^p \phi(t_k)(f^+(t_k) - f^-(t_k)) .$$

Bref, si  $I$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$ , on voit que la mesure différentielle de la fonction localement en escalier  $f$  est somme d'une famille (au plus dénombrable) de mesures ponctuelles, à valeurs dans  $X$ , portées par les points de discontinuité de  $f$  et dont les valeurs respectives sont les sauts correspondants  $f^+ - f^-$ . Noter que si l'un des intervalles sur chacun desquels la fonction  $f$  est constante se réduit à un singleton  $\{t_k\}$  la valeur  $f(t_k)$  est indépendante des deux limites  $f^-(t_k)$  et  $f^+(t_k)$  : cette valeur est donc sans influence sur la mesure  $df$ . On en tire immédiatement des exemples de fonctions non constantes dont la mesure différentielle est nulle.

Le raisonnement précédent supposait  $I$  ouvert dans  $\mathbb{R}$ . Si, par contre,  $I$  possède un début  $T_1$  et le contient, le support de  $\phi$  dans  $I$  peut inclure ce point qui dans ce cas coïncidera nécessairement avec  $a$ . On note encore  $t_1 < t_2 < \dots$  les noeuds de  $P$  contenus dans  $[a, b]$ , mais il peut arriver cette fois que  $t_1 = a = T_1$ . Alors le terme  $i = 1$  de la somme (3.2), soit  $\phi(\theta_S^1)(f(\tau_1) - f(\tau_0))$  avec  $\tau_0 = a = T_1$ , a pour limite, lorsque  $\eta$  tend vers zéro,  $\phi(T_1)(f^+(T_1) - f(T_1))$ . Or, selon la Convention 2. c,  $f(T_1)$  peut s'écrire  $f^-(T_1)$ . Raisonnement semblable si  $I$  possède une fin et la contient et on conclut :

PROPOSITION (3. b). Quel que soit l'intervalle  $I$ , si  $f$  est localement en escalier et  $\phi \in \mathcal{X}(I)$ , on a, moyennant la Convention 2. c,

$$\int \phi df = \sum_{k=1}^p \phi(t_k)(f^+(t_k) - f^-(t_k)) ,$$

où  $t_1, t_2, \dots, t_p$  désignent les noeuds de  $f$  contenus dans le support de  $\phi$ .

### 3. c MAJORATION DE $df$

Soit  $f \in \text{vlb}(I, X)$  et soit  $V_f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction variation indéfinie (définie au choix près d'une constante additive). Cette fonction numérique étant faiblement croissante appartient à  $\text{vlb}(I, \mathbb{R})$ , d'où l'existence de la mesure scalaire  $dV_f$ , positive et indépendante du choix de la

constante additive de  $V_f$ .

Soit  $\phi \in \mathcal{K}_+(I)$ , i.e.  $\phi \in \mathcal{K}(I)$ , à valeurs  $\geq 0$ . Alors, avec la notation de (3.2),

$$\begin{aligned} |M(S, \theta_S, \phi)| &\leq \sum_{i=1}^n \phi(\theta_S^i) |f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \phi(\theta_S^i) (V_f(\tau_i) - V_f(\tau_{i-1})) \end{aligned}$$

Si l'on passe à la limite pour  $S \in \mathcal{S}$ , cela prouve que

$$(3.11) \quad \forall \phi \in \mathcal{K}_+(I) : \quad \left| \int \phi df \right| \leq \int \phi dV_f .$$

Soit par ailleurs  $x'$  un élément du dual topologique  $X'$  de  $X$ .

L'application

$$\phi \mapsto \langle x', \int \phi df \rangle$$

de  $\mathcal{K}(I)$  dans  $\mathbb{R}$  est une mesure scalaire sur  $I$  ; en accord avec la notation générale qui sera présentée dans la section 4, on peut écrire  $\langle x', df \rangle$  cette mesure (c'est d'ailleurs la mesure différentielle de la fonction numérique  $t \mapsto \langle x', f(t) \rangle$ ). L'inégalité (3.11) donne

$$\forall \phi \in \mathcal{K}_+(I) : \quad \left| \int \phi \langle x', df \rangle \right| \leq |x'| \int \phi dV_f .$$

Il en résulte que, au sens de Bourbaki, la mesure vectorielle  $df$  est majorable, d'où l'existence de la mesure scalaire positive  $|df|$ , valeur absolue de  $df$  ; cette mesure positive est majorée par la mesure positive  $dV_f$ , mais ne lui est pas égale en général, comme le montre l'exemple suivant :

Soit  $t_0$  un point intérieur de  $I$  ; soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $X$  ; définissons  $f$  (en escalier) par

$$f(t) = \begin{cases} u & \text{si } t \neq t_0 \\ v & \text{si } t = t_0 \end{cases}$$

Il résulte du § 3. b que la mesure  $df$  est nulle donc aussi  $|df|$ . Par contre

$$V_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ |v-u| & \text{si } t = t_0 \\ 2|v-u| & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

de sorte que  $dV_f$  consiste dans la mesure ponctuelle, de valeur  $2|v-u|$ , portée par  $t_0$ .

Les propriétés usuelles des mesures vectorielles majorables (cf. Bourbaki [1], Chap. 6, § 2, n° 3, Propositions 5 et 6) fournissent :

PROPOSITION (3. c). Toute fonction numérique  $g$  appartenant à  $\mathcal{L}^1(I, |df|; \mathbb{R})$  est intégrable pour la mesure vectorielle  $df$  ; l'intégrale appartient à  $X$  et on a

$$(3.12) \quad \left| \int gdf \right| \leq \int |g| |df| \leq \int |g| dV_f .$$

C'est là d'ailleurs un cas particulier de la situation qui fera l'objet de la section 4.

REMARQUE (3. c). Il sera utile plus loin d'observer que le théorème de convergence dominée s'étend de la manière suivante :

Soit  $dm$  une mesure vectorielle majorable sur l'espace localement compact  $T$ , à valeurs dans l'espace de Banach  $X$ . Soit  $h_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{L}^1(T, |dm|; \mathbb{R})$  vérifiant

- 1° il existe  $H \in \mathcal{L}^1(T, |dm|; \mathbb{R}_+)$  telle que,  $|dm|$ -presque partout,  $h_n \leq H$  ;
- 2° la suite des  $h_n(t)$  tend vers une limite  $h(t)$  sauf éventuellement pour un ensemble  $|dm|$ -négligeable de valeurs de  $t$  ;

alors  $h$  est intégrable pour  $dm$  et on a dans  $X$  fort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n dm = \int h dm .$$

En effet  $h \in \mathcal{L}^1(T, |dm|; \mathbb{R})$  d'après le théorème de convergence dominée, d'où l'existence de  $\int h dm \in X$ . La suite  $h_n$  converge vers  $h$  dans  $\mathcal{L}^1(T, |dm|; \mathbb{R})$  d'où, quels que soient les entiers  $n$  et  $p$

$$\left| \int h_n dm - \int h_p dm \right| \leq \int |h_n - h_p| |dm| ;$$

on en tire la convergence de la suite  $\int h_n dm$  dans l'espace de Banach  $X$  vers une limite qui est nécessairement  $\int h dm$ .

3. d MESURE D'UN INTERVALLE

LEMME (3. d). Soit  $[a, b]$  un intervalle compact contenu dans l'intérieur de  $I$  ; sa fonction caractéristique  $\chi_{[a, b]}$  est intégrable pour la mesure vectorielle  $df$  et on a

$$(3.13) \quad \int \chi_{[a, b]} df = f^+(b) - f^-(a) .$$

Preuve. Approchons la fonction  $\chi_{[a, b]}$  par une suite de fonctions  $\phi_n \in \mathcal{X}(I)$  respectant les conditions suivantes : Soient  $(s_n)$  et  $(a_n)$ ,  $s_n < a_n < a$ , deux suites de points de  $I$  tendant vers  $a$  ; soient  $(t_n)$  et  $(b_n)$ ,  $b < b_n < t_n$ , deux suites de points tendant vers  $b$ . La fonction  $\phi_n$  a son support dans  $[s_n, t_n]$  et vaut 1 sur  $[a_n, b_n]$  ; on impose de plus  $|\phi_n| \leq 1$ . Montrons que, dans  $X$  fort,

$$(3.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n df = f^+(b) - f^-(a) .$$

En effet, avec la notation (3.2),

$$\int \phi_n df = \lim M(S, \theta_S, \phi_n) .$$

Pour  $n$  fixé, l'ensemble des  $S \in \mathcal{S}$  contenant les quatre points  $s_n, a_n, b_n, t_n$  est une section commençante de  $(\mathcal{S}, \subset)$  ; on peut donc construire la limite en se restreignant à des  $S$  de cette sorte. Les intervalles de  $S$  contenus dans  $[a_n, b_n]$  ont une contribution totale dans la somme  $M$  égale à  $f(b_n) - f(a_n)$ , puisque les  $\phi(\theta_S^j)$  correspondants sont tous égaux à 1. Les intervalles non contenus dans  $[s_n, t_n]$  ont une contribution nulle. Puisque  $|\phi_n| \leq 1$ , les intervalles contenus dans  $[s_n, a_n]$  et  $[b_n, t_n]$  ont des contributions respectivement majorées en norme par

$$\begin{aligned} \text{var}(f ; s_n, a_n) &= V_f(a_n) - V_f(s_n) \\ \text{var}(f ; b_n, t_n) &= V_f(t_n) - V_f(b_n) . \end{aligned}$$

Par suite l'expression

$$f(b_n) - f(a_n) - \int \phi_n df$$

a pour limite zéro, d'où (3.14).

Les  $\phi_n$  sont majorées par la fonction caractéristique d'un intervalle compact contenant tous les  $[s_n, t_n]$ . Alors (3.13) résulte du théorème de convergence dominée, conformément à la Remarque 3. c.

On raisonne de façon semblable lorsque  $[a, b]$  n'est pas contenu dans l'intérieur de  $I$ . Supposons par exemple que  $I$  possède un début  $T_1$ , le contient, que  $a = T_1$ , mais que  $b$  n'est pas la fin de  $I$ ; alors on introduit seulement les deux suites  $(t_n)$  et  $(b_n)$ ; on impose à la fonction  $\phi_n$  d'avoir son support dans  $[T_1, t_n]$  et de valoir 1 sur  $[T_1, b_n]$ ; il vient dans ce cas

$$\int \chi_{[T_1, b]} df = f^+(b) - f(T_1).$$

Si l'on invoque la Convention 2. c, ce résultat est encore en accord avec l'écriture (3.13).

Par addition et soustraction de fonctions caractéristiques, on obtient de façon générale :

PROPOSITION (3. d). Moyennant la Convention 2. c, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments quelconques de  $I$ , avec  $a \leq b$ , on a (3.13) et

$$\int \chi_{]a, b]} df = f^+(b) - f^+(a)$$

$$\int \chi_{[a, b[} df = f^-(b) - f^-(a).$$

En outre, si  $a < b$

$$\int \chi_{]a, b[} df = f^-(b) - f^+(a).$$

REMARQUE. Par la Proposition 2. b, il en résulte que les trois fonctions  $f$ ,  $f^+$  et  $f^-$  ont la même mesure différentielle.

COROLLAIRE (3. d). Si  $f$  possède une dérivée  $\dot{f}$  continue dans  $I$ , la mesure  $df$  admet  $\dot{f}$  pour densité relativement à la mesure de Lebesgue de  $I$ .

### 3. e MESURE INDUITE SUR UN SOUS-INTERVALLE

Soit  $J$  un sous-intervalle de  $I$  ; pour toute  $\phi \in \mathcal{K}(J)$  notons  $\bar{\phi}$  la fonction prolongeant  $\phi$  à  $I$  avec la valeur 0 hors de  $J$ . Cette fonction  $\bar{\phi}$  est universellement intégrable (elle est bornée et égale à la différence de deux fonctions  $\geq 0$  s.c.s.) et l'application

$$\phi \mapsto \int \bar{\phi} df$$

de  $\mathcal{K}(J)$  dans  $X$  est une mesure vectorielle sur  $J$ . On notera  $(df)_J$  cette mesure, classiquement appelée mesure induite par  $df$  sur  $J$ .

Notons d'autre part  $f_J$  la restriction de  $f$  à  $J$  ; évidemment  $f_J \in \text{vlb}(J, X)$ . La mesure vectorielle  $d(f_J)$  n'est pas égale en général à  $(df)_J$ .

En notant  $x \delta_t$  la mesure ponctuelle sur  $J$ , de valeur  $x \in X$ , portée par le point  $t \in J$  et en utilisant, si  $a$  ou  $b$  se trouve être une extrémité de  $I$ , la Convention 2.c, on a :

PROPOSITION (3. e). La mesure  $(df)_J$  est la somme de  $d(f_J)$  et des mesures suivantes :

- 1° la mesure  $(f(a) - f^-(a)) \delta_a$  si  $J$  possède un début  $a$  et le contient
- 2° la mesure  $(f^+(b) - f(b)) \delta_b$  si  $J$  possède une fin  $b$  et la contient.

En particulier si  $J$  est ouvert relativement à  $I$  on a  
 $(df)_J = df_J$ .

Preuve. Montrons que  $(df)_J$ , d'une part, et la somme de mesures en question, d'autre part, donnent la même intégrale pour toute fonction caractéristique d'intervalle compact  $[s, t] \subset J$ . Soit  $h$  la fonction caractéristique de  $[s, t]$  dans  $J$  ; la fonction  $\bar{h}$  prolongeant  $h$  à  $I$  avec la valeur 0 hors de  $J$  est la fonction caractéristique de  $[s, t]$  dans  $I$ .

Comme  $h$  est s. c. s. bornée  $\geq 0$  à support compact dans  $J$ , elle est la limite (ou enveloppe inférieure) d'une suite décroissante de fonctions

$\phi_n \in \mathcal{K}_+(J)$ . Les fonctions  $\bar{\phi}_n$  correspondantes convergent vers  $\bar{h}$ . Par le théorème de convergence dominée (cf. Remarque 3. c) on conclut

$$(3.15) \quad \int h (df)_J = \int \bar{h} df .$$

Supposons par exemple que  $J$  possède un début  $a$  et le contienne, mais ne contienne pas de fin et supposons  $s = a$  (sans quoi l'égalité est banale). Alors (3.15) donne, vu la Proposition 3. d,

$$\int h (df)_J = f^+(t) - f^-(a)$$

tandis que

$$\int h(df)_J = f^+(t) - f(a) = \int h(df)_J + f^-(a) - f(a) .$$

Or  $f(a) - f^-(a)$  est bien l'intégrale de  $h$  par rapport à la mesure  $(f(a) - f^-(a)) \delta_a$ .

Raisonnement semblable si  $J$  contient une fin  $b$ .

Noter que si  $J$  est réduit à un singleton on a  $a = b$  et

$$(f(a) - f^-(a)) \delta_a + (f^+(b) - f(b)) \delta_b = (f^+(a) - f^-(a)) \delta_a .$$

Telle est, dans ce cas spécial, la mesure  $(df)_J$  alors que, évidemment,  $(df)_J = 0$ .

Enfin dire que  $J$  est ouvert relativement à  $I$  signifie que, si  $J$  contient une extrémité, par exemple un début  $a$ , ce point est aussi une extrémité de  $I$ . Dans ce cas, la Convention 2. c donne  $f^-(a) = f(a)$  et résultat semblable, éventuellement, pour la fin  $b$ .

#### 4. LA MESURE $\Phi(u, dm)$

##### 4. a DEFINITION

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces de Banach et soit  $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$  une application bilinéaire continue. Dans  $X, Y$ , ou  $Z$ , tout comme dans  $\mathbb{R}$ , on note  $|\cdot|$  la norme ; on note  $\|\Phi\|$  la norme de  $\Phi$ , c'est-à-dire

$$\|\Phi\| = \sup \{ |\Phi(x, y)| : x \in X, y \in Y, |x| \leq 1, |y| \leq 1 \} .$$

Soit  $T$  un espace localement compact et soit  $dm$  une mesure vectorielle sur  $T$ , à valeurs dans  $Y$ , majorable. Pour éviter des complications formelles, on se limitera au cas usuel où  $T$  est dénombrable à l'infini ; c'est ce qui a lieu notamment si  $T$ , comme dans le reste de ce rapport, est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Avec les notations présentes un énoncé de Bourbaki ([1], Chap. 6, § 2, n° 7) se formule comme suit : Il existe une application linéaire continue et une seule  $I_{\Phi, dm}$  de  $\mathcal{L}^1(|dm|, X)$  dans  $Z$  telle que, pour tout  $a \in X$  et pour toute fonction numérique  $h \in \mathcal{L}^1(|dm|, \mathbb{R})$  on ait

$$(4.1) \quad I_{\Phi, dm}(h a) = \Phi(a, \int h dm) .$$

En outre, pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}^1(|dm|, X)$ , on a

$$(4.2) \quad |I_{\Phi, dm}(f)| \leq \|\Phi\| \int |f| |dm| .$$

Il nous paraît plus commode d'adopter la notation

$$I_{\Phi, dm}(f) = \int \Phi(f, dm)$$

acceptée par Bourbaki lui-même dans le cas où la forme bilinéaire  $\Phi(x, y)$  serait simplement notée  $xy$ .

On va donner à cette écriture toute sa cohérence en observant que le symbole  $\Phi(f, dm)$  peut être interprété comme une mesure sur  $T$ , à valeurs dans  $Z$ .

Plus généralement, soit  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, X)$  et soit  $\gamma \in \mathcal{K}(T, \mathbb{R})$ . Alors  $\gamma g \in \mathcal{L}^1(|dm|, X)$ , ce qui permet de considérer l'application linéaire de  $\mathcal{K}(T, \mathbb{R})$  dans  $Z$

$$(4.3) \quad \gamma \mapsto I_{\Phi, dm}(\gamma g) .$$

Pour établir que cette application est, au sens de Bourbaki, une mesure vectorielle sur  $T$ , il suffit de montrer que, pour tout compact  $K \subset T$ , la restriction de l'application à l'ensemble des  $\gamma$  dont le support est contenu dans  $K$  est continue pour la norme  $\sup |\gamma|$ . De fait, si  $\text{supp } \gamma \subset K$ , on a

$$\int |\gamma g| |dm| \leq \sup |\gamma| \int |\chi_K g| |dm|$$

d'où la continuité attendue, d'après l'inégalité (4.2).

L'application (4.3) sera désormais notée

$$\gamma \mapsto \int \gamma \Phi(g, dm) .$$

PROPOSITION (4. a). Si  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, X)$  (ce qui fait que la fonction numérique positive  $|g|$  appartient à  $\mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, \mathbb{R})$ ) la mesure vectorielle  $\Phi(g, dm)$ , à valeurs dans  $Z$ , est majorable et sa valeur absolue est majorée par la mesure positive  $\|\Phi\| |g| |dm|$ .

Preuve. L'assertion signifie que, pour tout  $z' \in Z'$  (dual topologique de  $Z$ ), tel que  $|z'| \leq 1$ , la mesure valeur absolue de la mesure scalaire

$$\gamma \mapsto \langle z', \int \gamma \Phi(g, dm) \rangle$$

est majorée par la mesure positive  $\|\Phi\| |g| |dm|$ . Cela équivaut à l'implication suivante, pour  $\gamma \in \mathcal{K}(T)$  et  $\phi \in \mathcal{K}_+(T)$  :

$$|\gamma| \leq \phi \Rightarrow \langle z', \int \gamma \Phi(g, dm) \rangle \leq \|\Phi\| \int \phi |g| |dm| .$$

De fait, si  $|\gamma| \leq \phi$ , on a par (4.2)

$$\begin{aligned} \langle z', \int \gamma \Phi(g, dm) \rangle &\leq \left| \int \gamma \Phi(g, dm) \right| \\ &\leq \|\Phi\| \int |\gamma g| |dm| \\ &\leq \|\Phi\| \int \phi |g| |dm| . \end{aligned}$$

#### 4. b PREMIERE ASSOCIATIVITE

PROPOSITION (4. b). On suppose toujours  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, X)$ , d'où l'existence de  $|g| |dm|$  mesure scalaire positive sur  $T$ . Toute fonction  $h$  telle que  $h \in \mathcal{L}^1(|g| |dm|, \mathbb{R})$  (ce qui équivaut à  $h |g| \in \mathcal{L}^1(|dm|, \mathbb{R})$ ) est intégrable pour la mesure vectorielle  $\Phi(g, dm)$  et on a

$$(4.4) \quad \int h \Phi(g, dm) = \int \Phi(hg, dm) \in Z .$$

Preuve. Observons d'abord que le second membre est un élément de  $Z$  bien défini parce que  $hg \in \mathcal{L}^1(|dm|, X)$ . Convenons en effet d'entendre l'écriture  $1/|g|$  avec le sens usuel si  $|g| \neq 0$  et de prendre  $1/|g| = 0$  si  $|g| = 0$  ; de la sorte la fonction  $t \mapsto 1/|g(t)|$  est mesurable de  $(T, |dm|)$  dans  $\mathbb{R}$ .

En écrivant

$$hg = h |g| \frac{1}{|g|} g$$

on obtient la mesurabilité de  $hg : (T, |dm|) \rightarrow X$ , d'où son intégrabilité puisque  $|hg| = |h| |g|$  appartient à  $\mathcal{L}^1(|dm|, \mathbb{R})$ .

Pour montrer que  $h$ , appartenant à  $\mathcal{L}^1(|g| |dm|, \mathbb{R})$ , est intégrable pour la mesure vectorielle  $\Phi(g, dm)$  on observe que cette fonction numérique est intégrable pour la mesure positive  $|\Phi(g, dm)|$  puisque cette dernière, au facteur numérique  $\|\Phi\|$  près, est majorée par  $|g| |dm|$  d'après la Proposition 4. a. Comme  $Z$  est un espace de Banach cela entraîne l'intégrabilité pour la mesure vectorielle (cf. Bourbaki [1], Chap. 6, § 2, n° 3, Prop. 6).

Enfin l'égalité des deux membres de (4.4) est assurée par définition si  $h$  appartient à  $\mathcal{K}(T, \mathbb{R})$ , lequel est un sous-espace dense de  $\mathcal{L}^1(|g| |dm|, \mathbb{R})$ . La Proposition 4. a entraîne que le premier membre dépend de  $h$  d'une manière linéaire continue sur  $\mathcal{L}^1(|g| |dm|, \mathbb{R})$ ; l'inégalité (4.2) entraîne la même propriété pour le second membre, d'où l'égalité.

La Proposition précédente exprime en quelque sorte une propriété d'associativité qui admet le pendant naturel suivant.

#### 4. c SECONDE ASSOCIATIVITE

PROPOSITION (4. c). Si  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{L}^1(|h| |dm|, X)$  on a

$$(4.5) \quad \int \Phi(hg, dm) = \int \Phi(g, h dm)$$

égalité dont les deux membres sont bien définis.

Preuve. Si  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, \mathbb{R})$  l'existence de la mesure vectorielle  $h dm$ , à valeurs dans  $Y$ , consiste en un cas particulier de la théorie du Parag. 4. a : prendre  $X = \mathbb{R}$ ,  $Z = Y$  et pour  $\Phi$  l'application bilinéaire  $(r, y) \mapsto ry$  de  $\mathbb{R} \times Y$  dans  $Y$ . D'après la Proposition 4. a, la mesure vectorielle  $h dm$  a sa valeur absolue majorée par la mesure positive  $|h| |dm|$ . L'hypothèse assure donc  $g \in \mathcal{L}^1(|h dm|, X)$ , d'où l'existence du second membre de (4.5).

Pour ce qui est du premier membre on observe que si  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, \mathbb{R})$  la fonction  $\sigma_h$  définie par

$$\sigma_h(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } h(t) > 0 \\ 0 & \text{si } h(t) = 0 \\ -1 & \text{si } h(t) < 0 \end{cases}$$

appartient à  $\mathcal{L}^\infty(|dm|, \mathbb{R})$ . Comme  $g \in \mathcal{L}^1(|h| |dm|, X)$  on a  $|h| g \in \mathcal{L}^1(|dm|, X)$ ; donc  $hg = \sigma_h |h| g$  appartient à  $\mathcal{L}^1(|dm|, X)$  ce qui assure l'existence de  $\int \Phi(hg, dm)$ .

Pour  $h$  fixé, les deux membres de (4.5) dépendent de  $g \in \mathcal{L}^1(|h| |dm|, X)$  d'une manière linéaire et par ailleurs continue pour la norme de  $\mathcal{L}^1(|h| |dm|, X)$ . De fait, en invoquant la Proposition (4. a) on obtient

$$\left| \int \Phi(hg, dm) \right| \leq \| \Phi \| \int |g| |dm|$$

et

$$\left| \int \Phi(g, h dm) \right| \leq \| \Phi \| \int |g| |h dm| ;$$

or la mesure  $|h dm|$  est majorée par la mesure  $|h| |dm|$ .

Soit  $a$  un élément de  $X$  et soit  $f \in \mathcal{L}^1(|h| |dm|, \mathbb{R})$ . Si on prend  $g = f a$ , on a bien  $g \in \mathcal{L}^1(|h| |dm|, X)$  et d'après (4.1) les deux membres de (4.5) ont la même valeur  $\Phi(a, \int fh dm)$ . Or l'espace vectoriel engendré par les  $g$  de cette forme est dense dans  $\mathcal{L}^1(|h| |dm|, X)$ .

On en tire

COROLLAIRE (4. c). Si  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|h| |dm|, X)$  les mesures vectorielles  $\Phi(hg, dm)$  et  $\Phi(g, h dm)$  sont égales.

De plus :

COROLLAIRE 2 (4. c). Si  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, X)$ ,  $h \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, \mathbb{R})$  et  $|h| |g| \in \mathcal{L}^1(|dm|, \mathbb{R})$  les expressions écrites en (4.4) et (4.5) sont toutes les trois définies et égales.

Preuve. Il s'agit d'établir que les hypothèses des Propositions (4. b) et (4. c) sont toutes deux remplies. De fait les hypothèses présentes font que

$h$  et  $|g|$  sont mesurables de  $(T, |\text{dm}|)$  dans  $\mathbb{R}$ , donc aussi  $h|g|$ ; comme  $|h||g| \in \mathcal{L}^1(|\text{dm}|, \mathbb{R})$  cela donne  $h|g| \in \mathcal{L}^1(|\text{dm}|, \mathbb{R})$ . De même  $|h|$  et  $g$  sont  $|\text{dm}|$ -mesurables, donc aussi  $|h|g$ , d'où  $|h|g \in \mathcal{L}^1(|\text{dm}|, \mathbb{X})$  ce qui équivaut à  $g \in \mathcal{L}^1(|h||\text{dm}|, \mathbb{X})$ .

4. d CAS OU  $\text{dm}$  ADMET UNE DENSITE FORTE

PROPOSITION (4. d). On suppose qu'il existe une mesure scalaire positive  $d\mu$  sur  $T$  et une fonction  $y \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(d\mu, Y)$  telle que  $\text{dm} = y d\mu$  (on peut dire que  $y$  est densité forte de  $\text{dm}$  par rapport à  $d\mu$ ). Alors  $|\text{dm}| = |y| d\mu$  et pour tout  $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(|\text{dm}|, \mathbb{X})$  (ce qui équivaut à  $g|y| \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(d\mu, \mathbb{X})$ ) la mesure vectorielle  $\Phi(g, \text{dm})$  est égale à  $\Phi(g, y) d\mu$ .

Preuve. L'existence de la mesure notée  $y d\mu$  entre, si l'on veut, comme cas particulier dans la théorie précédente (le premier espace de Banach est, cette fois  $Y$  et le second est  $\mathbb{R}$ ) : cela montre que cette mesure est majorée et que sa valeur absolue est majorée par  $|y| d\mu$ . En fait il résulte de [1], chap. 6, § 2, n° 4, Prop. 8 (concernant une notion plus faible de densité d'une mesure vectorielle par rapport à une mesure scalaire) que la valeur absolue de  $\text{dm} = y d\mu$  est exactement  $|y| d\mu$ . Et pour tout  $f \in \mathcal{L}^1(|y| d\mu, \mathbb{R})$  on a

$$\int f \text{dm} = \int fy d\mu .$$

Alors, si  $a$  est un élément fixé de  $\mathbb{X}$ , et si  $\gamma \in \mathcal{K}(T)$  on a par (4.1)

$$\int \gamma \Phi(fa, \text{dm}) = \int \Phi(\gamma fa, \text{dm}) = \Phi(a, \int \gamma f \text{dm}) = \Phi(a, \int \gamma fy d\mu).$$

Comme l'application  $\Phi(a, \cdot)$  de  $Y$  dans  $Z$  est linéaire continue cela vaut aussi

$$\int \Phi(a, \gamma fy) d\mu = \int \gamma \Phi(fa, y) d\mu .$$

Bref,

$$\int \gamma \Phi(h, \text{dm}) = \int \gamma \Phi(h, y) d\mu$$

pour tout  $h$  de la forme  $h = fa$ ,  $f \in \mathcal{L}^1(|dm|, \mathbb{R})$ . Comme l'espace vectoriel engendré par les  $h$  de cette forme est dense dans  $\mathcal{L}^1(|dm|, X)$ , on conclut que l'égalité est vraie encore pour tout  $h \in \mathcal{L}^1(|dm|, X)$ , en particulier pour  $h = g\chi_K$ ,  $K$  désignant le support de  $\gamma$ .

### 5. CALCUL DE $d\Phi(x, y)$

#### 5. a PROPRIÉTÉ D'APPROXIMATION

Comme dans la section précédente,  $X, Y, Z$  sont trois espaces de Banach,  $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$  une application bilinéaire continue,  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ .

PROPOSITION (5. a). Soit  $y \in \text{vlb}(I, Y)$  et soit  $u : I \rightarrow X$  une fonction réglée. Quel que soit  $[a, b] \subset I$ , quel que soit  $\eta > 0$ , il existe  $P \in \text{plf}(I)$  tel que, pour tout  $P' \in \text{plf}(I)$  raffinement de  $P$ , la fonction localement en escalier  $y_{P'}$  (notation du Parag. 2. d) satisfait l'inégalité

$$(5.1) \quad \left| \int_{[a,b]} \Phi(u, dy) - \int_{[a,b]} \Phi(u, dy_{P'}) \right| < \eta .$$

Preuve. Quel que soit  $\alpha > 0$ , puisque  $u$  est réglée, il existe une fonction localement en escalier  $u_e : I \rightarrow X$  telle que  $|u - u_e| \leq \alpha$  partout dans  $[a, b]$ . Le premier membre de (5.1) est majoré par

$$(5.2) \quad \left| \int_{[a,b]} \Phi(u - u_e, dy) \right| + \left| \int_{[a,b]} \Phi(u_e - u, dy_{P'}) \right| + \left| \int_{[a,b]} \Phi(u_e, dy - dy_{P'}) \right| .$$

Vu les Parag. 3. c et 4. a, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} \Phi(u - u_e, dy) \right| &\leq \|\Phi\| \alpha \int_{[a,b]} dV_y \\ \left| \int_{[a,b]} \Phi(u_e - u, dy_{P'}) \right| &\leq \|\Phi\| \alpha \int_{[a,b]} dV_{y_{P'}} . \end{aligned}$$

Or, moyennant la Convention 2. c, s'il y a lieu,

$$\int_{[a,b]} dV_{y_{P'}} = V_{y_{P'}}^+(b) - V_{y_{P'}}^-(a) .$$

Vu la Proposition 2,  $d$  cela est uniformément majoré pour tout  $P' \in \text{plf}(I)$  raffinement d'un  $P$  fixé. Donc si  $\alpha$  est choisi assez petit, la somme des deux premiers termes de (5.2) sera majorée par  $\eta/2$ . Ayant fixé la fonction en escalier  $u_e$  conformément à ce choix de  $\alpha$ , on se trouve en présence d'une partition de  $[a, b]$  en un nombre fini  $m$  de sous-intervalles sur chacun desquels  $u_e$  est constante ; notons  $J$  l'un d'entre eux. En appelant  $M$  un majorant de  $|u_e|$  sur  $[a, b]$  on a

$$\begin{aligned} \left| \int_J \Phi(u_e, dy - dy_{P'}) \right| &= \left| \Phi(u_e(J), \int_J dy - dy_{P'}) \right| \\ &\leq \|\Phi\| M \left| \int_J dy - dy_{P'} \right|. \end{aligned}$$

L'expression donnée par la Proposition 3,  $d$  pour l'intégrale d'une mesure différentielle sur un intervalle, jointe à l'inégalité (2.5) (laquelle vaut évidemment aussi pour les limites à droite ou à gauche des fonctions considérées) font qu'on peut trouver  $P \in \text{plf}[a, b]$  tel que, pour tout  $P' \in \text{plf}[a, b]$  raffinement de  $P$ , l'expression ci-dessus sera majorée par  $\eta/2m$ . Cela établit la Proposition.

#### 5. b FORMULE FONDAMENTALE

Soient  $x \in \text{vlb}(I, X)$  et  $y \in \text{vlb}(I, Y)$ . La fonction  $t \mapsto \Phi(x(t), y(t))$  appartient à  $\text{vlb}(I, Z)$  ; cela résulte de ce que si  $[a, b]$  est un sous-intervalle compact de  $I$ , les fonctions  $t \mapsto |x(t)|$  et  $t \mapsto |y(t)|$  admettent respectivement des majorants  $M$  et  $N$  sur ce sous-intervalle, par exemple

$$M = |x(a)| + V_x(b) - V_x(a).$$

On écrit alors pour  $s \leq t$  dans  $[a, b]$ ,

$$\begin{aligned} &|\Phi(x(t), y(t)) - \Phi(x(s), y(s))| \\ &\leq |\Phi(x(t) - x(s), y(t))| + |\Phi(x(s), y(t) - y(s))| \\ &\leq \|\Phi\| [N(V_x(t) - V_x(s)) + M(V_y(t) - V_y(s))] \end{aligned}$$

d'où une majoration de  $\text{var}(\Phi(x, y) ; a, b)$ .

Comme précédemment, les régularisées continues à gauche ou continues à droite de fonctions appartenant à  $v\text{lb}(I, \cdot)$  seront définies jusqu'aux extrémités éventuelles de  $I$ , conformément à la Convention 2. c. Ainsi  $x^+$  et  $x^-$  appartiennent à  $v\text{lb}(I, X)$  donc à  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(d\mu, X)$  quelle que soit la mesure scalaire positive  $d\mu$  sur  $I$ ; de même  $y^+$  et  $y^-$  appartiennent à  $v\text{lb}(I, Y)$ , donc à  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(d\mu, Y)$ .

PROPOSITION (5. b). Si  $x \in v\text{lb}(I, X)$  et  $y \in v\text{lb}(I, Y)$ , la fonction  $\Phi(x, y)$  appartient à  $v\text{lb}(I, Z)$  et on a

$$(5.3) \quad d\Phi(x, y) = \Phi(dx, y^-) + \Phi(x^+, dy) ,$$

et symétriquement

$$(5.4) \quad d\Phi(x, y) = \Phi(dx, y^+) + \Phi(x^-, dy)$$

ou, aussi bien,

$$(5.5) \quad d\Phi(x, y) = \Phi(dx, \frac{y^+ + y^-}{2}) + \Phi(\frac{x^+ + x^-}{2}, dy) .$$

LEMME (5. b). L'égalité (5. 3) est vraie si les fonctions  $x$  et  $y$  sont localement en escalier.

Preuve. Il existe dans ce cas deux partitions localement finies de  $I$  en sous-intervalles sur lesquels les fonctions  $x$  et  $y$ , respectivement, sont constantes. Soit  $P$  un raffinement commun de ces deux partitions, construit de manière que, pour tout noeud  $\tau$  de  $P$ , le singleton  $\{\tau\}$  soit un des membres de  $P$  (autrement dit les membres de  $P$  sont soit des singletons, soit des intervalles ouverts relativement à  $I$ ).

Pour établir l'égalité (5.3) il suffit de montrer que les mesures vectorielles écrites respectivement aux deux membres donnent la même intégrale sur tout sous-intervalle compact  $[a, b]$  de  $I$ . Cet intervalle contient une famille finie  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  de noeuds de la partition  $P$ . D'après la Proposition 3. b,

$$(5.6) \quad \int_{[a, b]} d\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n [\Phi(x^+(t_i), y^+(t_i)) - \Phi(x^-(t_i), y^-(t_i))]$$

(moyennant la Convention 2. c, si l'un des  $t_i$  se trouve être une extrémité de I).

Pour tout membre J de P qui est un intervalle ouvert dans I, la mesure  $\chi_J \Phi(x^+, dy)$  a sa valeur absolue majorée par  $\|\Phi\| |x^+| \chi_J |dy|$ , mesure nulle (cf. Proposition 3. c, 4. a, 4. c). Il reste donc

$$\int \chi_{[a,b]} \Phi(x^+, dy) = \sum_{i=1}^n \int \chi_{\{t_i\}} \Phi(x^+, dy)$$

avec

$$\begin{aligned} \int \chi_{\{t_i\}} \Phi(x^+, dy) &= \int \Phi \chi_{\{t_i\}}^{x^+, dy} \\ &= \Phi(x^+(t_i), \int \chi_{\{t_i\}} dy) \\ &= \Phi(x^+(t_i), y^+(t_i) - y^-(t_i)) \end{aligned}$$

Calcul analogue pour la mesure  $\Phi(dx, y^-)$  d'où

$$\begin{aligned} \int \chi_{[a,b]} [\Phi(dx, y^-) + \Phi(x^+, dy)] &= \\ &= \sum_{i=1}^n [\Phi(x^+(t_i) - x^-(t_i), y^-(t_i)) + \Phi(x^+(t_i), y^+(t_i) - y^-(t_i))] \end{aligned}$$

à rapprocher de (5.6).

Preuve de la Proposition. Etablissons (5.3) en montrant l'égalité des intégrales des deux membres sur tout sous-intervalle compact  $[a, b]$  de I. Soit  $\varepsilon > 0$ ; la Proposition 5. a implique l'existence de  $P \in \text{plf}(I)$  tel que pour tout  $P' \in \text{plf}(I)$  raffinement de P on ait

$$\left| \int_{[a,b]} \Phi(dx, y^-) - \int_{[a,b]} \Phi(dx_{P'}, y^-) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left| \int_{[a,b]} \Phi(x^+, dy) - \int_{[a,b]} \Phi(x^+, dy_{P'}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Par ailleurs en notant  $\zeta(P')$  et  $\eta(P')$  des majorants de  $|x - x_{P'}|$  et  $|y - y_{P'}|$  sur I, on a

$$\left| \int_{[a,b]} \Phi(dx_{P'}, y^- - y_{P'}^-) \right| \leq \|\Phi\| \eta(P') \int_{[a,b]} dv_{x_{P'}}$$

$$\left| \int_{[a,b]} \Phi(x^+ - x_{P'}^+, dy_{P'}) \right| \leq \|\Phi\| \zeta(P') \int_{[a,b]} dv_{y_{P'}}$$

Comme au paragraphe précédent on voit que ces expressions peuvent être rendues moindres que  $\varepsilon/4$  en prenant la partition  $P$  assez fine. Ainsi, à moins de  $\varepsilon$  près, au sens de la norme de  $Z$ , l'intégrale sur  $[a,b]$  du second membre de (5.3) peut être approchée par une expression semblable où  $x$  et  $y$  sont remplacées par  $x_p$  et  $y_p$ , fonctions localement en escalier. Banalement l'intégrale du premier membre de (5.3) peut être approchée de la même manière ; on est ainsi ramené au Lemme.

### 5. c FORME QUADRATIQUE POSITIVE

Si  $X = Y$  et si la forme bilinéaire continue  $\Phi : X \times X \rightarrow Z$  est symétrique, on définit une forme quadratique  $Q : X \rightarrow Z$  par

$$\forall \xi \in X : Q(\xi) = \Phi(\xi, \xi) .$$

Pour  $x \in \text{vlb}(I, X)$ , la Proposition 5. b donne alors la mesure différentielle de la fonction  $t \mapsto Q(x(t))$  :

$$(5.7) \quad dQ(x) = \Phi(x^+ + x^-, dx) .$$

Supposons par ailleurs que  $Z = \mathbb{R}$  et que la forme quadratique réelle  $Q$  soit positive :

PROPOSITION (5. c). Soit  $\Phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique continue telle que la forme quadratique réelle  $Q : \xi \mapsto \Phi(\xi, \xi)$  soit  $\geq 0$  pour tout  $\xi \in X$ . Alors, pour tout  $x \in \text{vlb}(I, X)$ , la mesure scalaire  $\Phi(x^+ - x^-, dx)$  est  $\geq 0$ .

Preuve. On va montrer que la mesure en question donne une intégrale  $\geq 0$  pour tout sous-intervalle compact  $[a,b]$  de  $I$ .

Cela est vrai si  $x$  est localement en escalier. Dans ce cas en effet il existe une partition  $P \in \text{plf}(I)$  sur chaque membre de laquelle  $x$  est constante et, quitte à remplacer  $P$  par un raffinement, on peut supposer que les membres de  $P$  sont soit des singletons, soit des intervalles ouverts dans  $I$ . L'intervalle  $[a,b]$  contient une famille finie  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  de

noeuds de  $P$  et (moyennant la Convention 2. c s'il y a lieu) on a,

$$\int_{[a,b]} \Phi(x^+ - x^-, dx) = \sum_{i=1}^n \Phi(x^+(t_i) - x^-(t_i), x^+(t_i) - x^-(t_i)) \\ = \sum_{i=1}^n Q(x^+(t_i) - x^-(t_i)) \geq 0 .$$

Pour  $x$  quelconque dans  $v\text{lb}(I, X)$  on voit, comme dans la démonstration de la Proposition 5. b, que l'intégrale de  $\Phi(x^+ - x^-, dx)$  peut être approchée d'aussi près qu'on veut par l'intégrale associée à une fonction localement en escalier.

COROLLAIRE (5. c). Dans les conditions de la Proposition précédente, on a, au sens de l'ordre des mesures scalaires

$$(5.8) \quad 2 \Phi(x^-, dx) \leq d \Phi(x, x) \leq 2 \Phi(x^+, dx) .$$

En effet, (5.3) donne

$$d \Phi(x, x) = \Phi(x^+ + x^-, dx),$$

d'où

$$2 \Phi(x^+, dx) - \Phi(x^+ + x^-, dx) = \Phi(x^+ - x^-, dx) \geq 0$$

et calcul semblable pour établir la première des inégalités (5.8).

## 6. EXEMPLES

### 6. a INTEGRATION PAR PARTIES ET DERIVEE DISTRIBUTION

PROPOSITION (6. a). Soit  $f \in v\text{lb}(I, X)$  et soit  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  possédant une dérivée  $\dot{\phi}$  continue sur  $I$ . Alors quel que soit  $[a, b] \subset I$ , en notant  $dt$  la mesure de Lebesgue, on a

$$\int_{[a,b]} \phi df + \int_{[a,b]} f \dot{\phi} dt = f^+(b) \phi(b) - f^-(a) \phi(a)$$

moyennant la Convention 2. c si  $a$  ou  $b$  se trouve être une extrémité de  $I$  ; formules analogues pour des intervalles du type  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  et si  $a < b$ , du type  $]a, b[$ .

Preuve. D'après le Corollaire 3,  $d, \dot{\phi} dt$  est la mesure différentielle de  $\phi \in \text{vlb}(I, \mathbb{R})$ . On applique la Proposition 5. b en prenant  $Y = \mathbb{R}$  avec pour forme bilinéaire  $\otimes$  le produit des éléments de  $X$  par les scalaires. On a

$$\int_{[a,b]} f^+ \dot{\phi} dt = \int_{[a,b]} f \dot{\phi} dt$$

parce que  $\dot{\phi} dt$  est une mesure diffuse et que l'ensemble des points où  $f^+ \neq f$  est au plus dénombrable.

COROLLAIRE (6. a). Si  $I$  est un intervalle ouvert et  $f \in \text{vlb}(I, X)$ , la mesure  $df$  est la dérivée de  $f$  au sens des distributions, c'est-à-dire que pour toute fonction  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment différentiable à support compact,

on a

$$\int \phi df = - \int f \dot{\phi} dt .$$

#### 6. b APPLICATION AU PROCESSUS DE RAFLE

Soit  $H$  un hilbertien réel et soit  $t \mapsto C(t)$  une multifonction de l'intervalle  $I$  dans  $H$ , à valeurs convexes fermées non vides. On considère le problème d'évolution ( $I$  est interprété comme un intervalle de temps): trouver  $u : I \rightarrow H$  telle que

$$(6.1) \quad - \frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u(t))$$

où  $\psi(t, \cdot)$  est la fonction indicatrice de  $C(t)$ .

Une solution forte de ce problème est, par définition, une  $u : I \rightarrow H$  localement absolument continue, ce qui fait que la dérivée  $\frac{du}{dt}$ , notée aussi  $\dot{u}$ , existe, sauf éventuellement sur un ensemble Lebesgue-négligeable : on impose à cette dérivée de vérifier (6.1) Lebesgue-presque partout. Le fait que les ensembles  $\partial\psi$  sont des parties coniques de  $H$  a la conséquence suivante : Soit  $J$  un autre intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $\theta : J \rightarrow I$  localement absolument continue croissante et soit  $v = u \circ \theta : J \rightarrow H$ . Alors la dérivée  $\dot{v}(s) = \dot{u}(\theta(s)) \dot{\theta}(s)$  existe Lebesgue-presque partout dans  $J$ . Si  $u$  est

solution forte de (6.1), le fait que  $\hat{\theta}$  est presque partout positive entraîne que, pour presque tout  $s$  dans  $J$ ,

$$(6.2) \quad - \dot{v}(s) \in \partial\psi(\hat{\theta}(s), v(s)) \quad .$$

En d'autres termes (c'est intuitif lorsqu'on se reporte aux images mécaniques de la condition (6.1) ; cf. [8]) le processus régi par (6.1) intitulé processus de rafle, associe la chaîne ordonnée des positions successives du point mobile  $u$  dans  $H$  à la chaîne ordonnée des configurations successives de l'ensemble convexe mobile  $C$  d'une manière indépendante de l'horraire. Ce changement de variable permet notamment de ramener l'étude du problème initial, pour lequel on demandait  $\dot{u} \in \mathcal{L}_{loc}^1(I, H)$  à des problèmes plus réguliers : les informations qu'on aura sur la dépendance de  $C$  à l'égard de  $t$  (cf. [5], [9]) permettront éventuellement de construire  $J$  et  $\hat{\theta}$  de manière que les solutions de (6.2) vérifient  $\dot{v} \in \mathcal{L}_{loc}^2(J, H)$  (ce qui est le cadre usuel permettant l'usage de la régularisation du type de Yosida) ou même  $\dot{v} \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(J, H)$  (cas localement lipschitzien qui est le plus favorable pour l'usage de techniques de discrétisation du temps). Le changement de variable ouvre également une voie pour la définition de solutions faibles, éventuellement discontinues : cf. [7].

Nous dirons que  $u \in \text{vlb}(I, H)$  est solution du problème de rafle pour  $C$  au sens des mesures différentielles, s'il existe une mesure scalaire positive  $d\mu$  sur  $I$  par rapport à laquelle la mesure vectorielle du posède une densité  $u' \in \mathcal{L}_{loc}^1(I, d\mu ; H)$  vérifiant, partout dans  $I$ ,

$$(6.3) \quad - u'(t) \in \partial\psi(t, u(t)) \quad .$$

Il revient au même de dire que  $u(t) \in C(t)$  pour tout  $t$  et que (6.3) est vérifiée  $d\mu$ -presque partout : s'il en est ainsi, en effet, il suffira de remplacer par zéro les valeurs de  $u'(t)$  en chaque point où (6.3) ne serait pas vérifiée.

Bref, cet affaiblissement de la condition (6.1) consiste à remplacer la mesure de Lebesgue de  $I$  par une mesure positive non spécifiée a priori. L'existence de solutions peut alors être obtenue sous des hypothèses plus faibles quant à la donnée  $t \mapsto C(t)$  (convexe variable, éventuellement discontinu, mais à rétraction localement bornée : cf. [5], [9]).

La monotonie de la multifonction  $x \mapsto \partial\psi(t, x)$  se reflète dans le fait fondamental suivant :

PROPOSITION (6. b). Si  $u_1$  et  $u_2$  sont continues à droite et solutions du processus de rafle au sens des mesures différentielles, la fonction numérique  $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$  est (faiblement) décroissante. En particulier, si  $u_1$  et  $u_2$ , continues à droite, s'accordent à une même donnée "initiale"  $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ , elles sont identiques pour tout  $t \geq t_0$ .

Preuve. Par hypothèse, il existe deux mesures positives  $d\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ , telles que  $du_i = u_i^! d\mu_i$  avec  $u_i^! \in \mathcal{L}_{loc}^1(I, d\mu_i; H)$  vérifiant partout

$$(6.4) \quad -u_i^!(t) \in \partial\psi(t, u_i(t)) .$$

Par rapport à la mesure positive  $d\mu = d\mu_1 + d\mu_2$ , chaque mesure  $d\mu_i$  possède une densité  $t \mapsto \mu_i^!(t) \geq 0$  appartenant à  $\mathcal{L}^\infty(I, d\mu; \mathbb{R})$ . La fonction  $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$  appartient à  $v\text{lb}(I, \mathbb{R})$  ; la Proposition 5. b, en prenant pour  $\Phi$  le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  de  $H = X$  donne, puisque  $u_1$  et  $u_2$  sont continues à droite

$$(6.5) \quad d(|u_1 - u_2|^2) \leq 2(u_1 - u_2 | du_1 - du_2) .$$

D'après la Proposition 4. d, la mesure écrite au second membre vaut

$(u_1 - u_2 | u_1^! \mu_1^! - u_2^! \mu_2^!) d\mu$ . Comme (6.4) entraîne  $-u_i^! \mu_i^! \in \partial\psi(t, u_i(t))$ , la monotonie de  $\partial\psi(t, \cdot)$  fait que cette mesure scalaire est négative, donc a fortiori la mesure écrite au premier membre de (6.5). La Proposition en découle, si l'on observe que, la fonction  $t \mapsto |u_1 - u_2|^2$  étant continue à droite, son accroissement entre deux valeurs  $t < t'$  est égal à l'intégrale de sa mesure différentielle sur  $]t, t']$ .

REMARQUE (6. b). Tout ce qui vient d'être dit sur le problème d'évolution (6.1) et la définition de solutions "au sens des mesures différentielles" reste valable dans le cas, à première vue plus général, d'une condition de la forme

$$-\frac{du}{dt} \in A(t, u(t))$$

où, pour chaque  $t \in I$ , la multifonction  $x \mapsto A(t, x)$  est monotone de  $H$  dans  $H$ , à valeurs coniques. Mais cette généralisation est illusoire :

Si la multifonction  $A : H \rightarrow H$  est monotone et telle que, pour chaque  $x \in H$ , l'ensemble  $A(x)$  soit une partie conique (éventuellement vide) de  $H$ , il existe  $C \subset H$ , convexe fermé, tel que  $A \subset \partial\psi_C$  (donc  $A = \partial\psi_C$  si  $A$  est monotone maximale).

En effet, soit

$$C = \bigcap_{\substack{a \in H, b \in H \\ b \in A(a)}} \{x \in H : (x - a | b) \leq 0\} .$$

Si  $v \in A(u)$  et  $b \in A(a)$ , on a aussi  $\lambda b \in A(a)$  pour tout  $\lambda > 0$ , donc l'inégalité de monotonie  $(u - a | v - \lambda b) \geq 0$  donne

$$\forall \lambda > 0 : (u - a | b) \leq \frac{1}{\lambda} (u - a | v)$$

c'est-à-dire

$$(u - a | b) \leq 0 .$$

Donc  $u \in C$  et la définition de  $C$  fait que

$$\forall x \in C : (x - u | v) \leq 0$$

c'est-à-dire  $v \in \partial\psi_C(u)$ .

## 6. c UNE FORME QUADRATIQUE POSITIVE

Les considérations qui suivent sont utiles dans l'étude de l'existence des solutions pour certains problèmes d'évolution du genre invoqué au paragraphe précédent.

Soit  $I = [t_0, t_1]$  un intervalle compact et soit  $H$  un espace hilbertien réel. On note  $\mathcal{Y}$  l'espace vectoriel des  $u \in \text{vlb}(I, H)$  qui sont continues à droite et nulles au point  $t_0$ .

PROPOSITION (6. c). Sur l'espace vectoriel  $\mathcal{Y}$  la forme quadratique

$$u \mapsto \int_I (u \mid du)$$

est  $\geq 0$ .

Preuve. Le Corollaire 5. c entraîne que

$$(u \mid du) \geq d\left(\frac{1}{2} |u|^2\right)$$

d'où

$$\int_I (u \mid du) \geq \frac{1}{2} |u(t_1)|^2 \geq 0 .$$

Ce résultat généralise le cas banal d'une fonction  $u$  continûment différentiable qui donnerait  $\int_I (u \mid du) = \frac{1}{2} |u(t_1)|^2$ ; vu (5.8) cette égalité a lieu plus généralement dès que  $u^+ = u^-$  partout, c'est-à-dire lorsque la mesure  $du$  est diffuse. L'importance de l'hypothèse de continuité à droite est mise en évidence par le contre-exemple suivant :

On prend  $I = [0, 3]$ ,  $H = \mathbb{R}$  et on prend pour  $u$  la fonction en escalier (continue à gauche)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{pour } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{pour } 2 < t \leq 3 \end{cases} .$$

La mesure  $du$  consiste en deux mesures ponctuelles de masses respectives  $-1$  et  $+1$  portées par les points  $1$  et  $2$ . Comme  $u(1) = 0$  et  $u(2) = -1$ , on a  $\int_I u \, du = -1$ .

COROLLAIRE (6. c). Soit  $d\mu$  une mesure positive sur l'intervalle compact  $I$ .

A tout  $u' \in L^1(I, d\mu; H)$  associons l'élément  $u \in \mathcal{Y}$  défini pour tout  $t \in I$  par

$$u(t) = \int_{]t_0, t]} u' \, d\mu .$$

Alors l'application  $u \mapsto \int_I (u|u') d\mu$  est une forme quadratique positive sur  $L^1(I, d\mu ; H)$ .

En effet  $u : I \rightarrow H$  est une fonction à variation bornée continue à droite et  $u' d\mu = du$ . Si la mesure  $d\mu$  est diffuse on a d'ailleurs

$$\int_I (u|u') d\mu = \frac{1}{2} |u(t_1)|^2 .$$

## 7. REFERENCES

- [1] BOURBAKI, N. Intégration, Hermann, Paris
- [2] CASTAING, C. Rafle par un convexe aléatoire à variation continue à droite, Séminaire d'Analyse Convexe, 1975, Exp. n° 15 (21 p.).
- [3] CASTAING, C. Même titre, C.R.Acad. Sci. Ser. A 282 (1976).
- [4] MOREAU, J.J. Rafle par un convexe variable, 2ème partie, Séminaire d'Analyse Convexe, 1972, Exp. n° 3 (36 p.).
- [5] MOREAU, J.J. Rétraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe, 1972, Exp. n° 13 (90 p.).
- [6] MOREAU, J.J. Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien, C.R.Acad. Sci., Ser. A 276 (1973), 791-794.
- [7] MOREAU, J.J. Factorisation d'un processus de rafle discontinu, Séminaire d'Analyse Convexe, 1974, Exp. n° 15 (16 p.).
- [8] MOREAU, J.J. On unilateral constraints, friction and plasticity, in : New variational techniques in mathematical physics, C.I.M.E., II ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma (1974), p. 171-322.
- [9] MOREAU, J.J. Multiapplication à rétraction finie, Ann. Scuola Normale Superiore Pisa, Ser. IV, 1 (1974), 169-203.

