HAL
open science

Stabilisation d'une population halieutique

Abderrahim Ouahbi, Abderrahman Iggidr, Mohamed El Bagdouri

To cite this version:

Abderrahim Ouahbi, Abderrahman Iggidr, Mohamed El Bagdouri. Stabilisation d'une population halieutique. Confrence International Francophone d'Automatique, (CIFA'2002), 2002, Nantes, France. hal-01862864

HAL Id: hal-01862864

https://inria.hal.science/hal-01862864

Submitted on 29 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation d'une population halieutique

Abderrahim OUAHBI[1], Abderrahman IGGIDR[2], Mohammed EL BAGDOURI [1]

[1]Laboratoire d'Automatique et d'Etude des Procédés
Faculté des Sciences-Semlalia, Université Cadi Ayyad
B.P. 2390, Marrakesh, MOROCCO.

[2]Projet CONGE
INRIA Lorraine & CNRS UPRESA 7035
I.S.G.M.P. Bat. A, Ile du Saulcy
57045 Metz cedex 01, FRANCE.

wahbi2@hotmail.com, elbagdouri@ucam.ac.ma, iggidr@loria.fr

Résumé— **Dans ce papier on montre comment on peut contrôler une population de poisson exploité en agissant sur la vitesse de variation de l'effort de pêche.**

Mots-clés— **stabilisation, feedback, fonction de Lyapunov, intégrateur.**

I. Introduction

Les modèles de la dynamique de population présentent un intérêt certain dans l'étude d'une population de poisson exploitée. Ces modèles permettent de décrire qualitativement et quantitativement divers événements de pêcherie. Ils permettent aussi de prédire l'évolution future d'une population donnée et d'explorer diverses stratégies de pêche.

Dans ce papier, nous considérons un modèle structuré en stade introduit dans [1]. Ce modèle distingue $(n+1)$ stades sur le stock représentés par leurs effectifs $X_i(t)$. Le premier stade X_0 représente le stade des pré-recrutés (oeufs, larves, alevins, juvéniles). Chaque stade est caractérisé par ses coefficients de fécondité, mortalité et prédation. Il est aussi possible d'intégrer la pêche en introduisant au niveau des termes de mortalité l'effort de pêche $E(t)$.

On considère alors le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = -\alpha_0 X_0 + \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i - \sum_{i=0}^n p_i X_i X_0 \\ \dot{X}_1 = \alpha X_0 - (\alpha + M_1 + q_1 E) X_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = \alpha X_{n-1} - (\alpha + M_n + q_n E) X_n \end{cases} \tag{1}$$

où

- p_0 : paramètre de compétition des juvéniles .
- p_i : coefficient de prédation de la classe i sur la classe 0.
- f_i : coefficient de fécondité de la classe i.
- l_i : efficacité de la reproduction de la classe i.
- q_i : capturabilité de la classe i.
- M_i : mortalité naturelle.
- α : coefficient de passage.
- E : effort de pêche.

Le but de notre travail dans ce papier est de maintenir l'état du système (1) autour d'un point de fonctionnement (point d'équilibre) donné, en agissant sur l'effort de pêche ou sur sa vitesse de variation. Plus précisément, nous allons construire un feedback qui stabilise le système autour d'un point d'équilibre non trivial.

On introduit les notations suivantes :
$I\!R_+^{n+1} = \{X = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in I\!R^{n+1} \mid X_i \geq 0 \ , \ i = 0 \ldots n+1\}$.
$\Omega = Int(I\!R_+^{n+1})$ est l'intérieur de $I\!R_+^{n+1}$, i.e $\Omega = \{X \in I\!R^{n+1} \mid X_i > 0 \ , \ i = 0 \ldots n+1\}$.
$X(t, X^0)$ est la solution de (1) issue de l'état initial X^0.

II. Stabilité avec un effort de pêche constant

Considérons le système (1) avec un effort de pêche constant $\bar{E}$:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = -\alpha_0 X_0 + \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i - \sum_{i=0}^n p_i X_i X_0 \\ \dot{X}_1 = \alpha X_0 - (\alpha_1 + q_1 \bar{E}) X_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = \alpha X_{n-1} - (\alpha_n + q_n \bar{E}) X_n \end{cases} \tag{2}$$

où $\alpha_i = \alpha + M_i$

L'origine est un point d'équilibre correspondant à une population épuisé et de ce fait ne présente pas un grand intérêt. Sous les hypothèses de non linéarité et de survie suivantes [2] :

(H1) $\sum_{i=0}^n p_i \neq 0$

(H2) $\sum_{i=1}^n f_i l_i \pi_i > \alpha_0$

où $\pi_i = \dfrac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^i (\alpha_j + q_j \bar{E})}$

le système (2) admet le point d'équilibre non trivial X^* suivant :

$$\begin{cases} X_0^* = \dfrac{\sum_{i=1}^n f_i l_i \pi_i - \alpha_0}{p_0 + \sum_{i=1}^n p_i \pi_i} \\ X_i^* = \pi_i X_0^*. \end{cases} \tag{3}$$

Dans ([2], pp. 65-74), il a été montré que l'orthant positif Ω est invariant et que sous les hypothèses **H1**, **H2** et si en plus on a :

(H3) $f_n l_n \neq 0$

(H4) $X_0^* < \mu = \min_{i=1,\ldots,n} \left(\dfrac{f_i l_i}{p_i} \right)$ pour $f_i l_i p_i \neq 0$

alors l'origine est instable et il existe un domaine invariant $\mathcal{D} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, avec $0 < a_i < b_i$, tel que $X^* \in \mathcal{D}$ est asymptotiquement stable et son domaine d'attraction contient $\mathcal{D}$.

Nous allons montrer ici que le domaine d'attraction est l'orthant positif Ω. Notre démonstration est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov. Cette méthode

présente l'intérêt de donner un résultat global, en plus la fonction de Lyapunov considérée permet de stabiliser le système par la vitesse de variation de l'effort de pêche.

Proposition II.1: Soit $\bar{E}$ un effort de pêche positif constant. Si les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4** sont satisfaites alors X^* est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (2).

Preuve II.1: Faisons le changement de variable suivant :

$$x_i = X_i - X_i^*$$

Le système (2) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \sum_{i=0}^{n} k_i x_i - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i x_0 \\ \dot{x}_1 = \alpha x_0 - (\alpha_1 + q_1 \bar{E}) x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \alpha x_{n-1} - (\alpha_n + q_n \bar{E}) x_n \end{cases} \tag{4}$$

où

$$\begin{array}{l} k_0 = -(\alpha_0 + 2p_0 X_0^* + \sum_{i=1}^{n} p_i X_i^*) \\ k_i = l_i f_i - p_i X_0^* \;\; i = 1, ..., n \end{array} \tag{5}$$

Pour démontrer la proposition il suffit de montrer que l'origine est asymptotiquement stable pour le système (4). Pour cela, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \right) \tag{6}$$

où

$$\gamma_i = \frac{\sum_{j=i}^{n} k_j \pi_j}{\alpha_i + q_i \bar{E}} \tag{7}$$

La dérivé de V le long des solutions du système (4) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=0}^{n} k_i x_i x_0 - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i x_0^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\frac{x_i}{\pi_i}) \Big(\frac{\alpha x_{i-1} - (\alpha_i + q_i \bar{E}) x_i}{\pi_i} \Big) \\ &= (k_0 - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i) x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i x_i x_0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha (\frac{x_i}{\pi_i})(\frac{x_{i-1}}{\pi_i}) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\alpha_i + q_i \bar{E})(\frac{x_i}{\pi_i})^2 \end{aligned}$$

On pose, par convention $\pi_0 = 1$. En tenant compte du fait que $\frac{\alpha}{\pi_i} = \frac{\alpha_i + q_i \bar{E}}{\pi_{i-1}}$ et en remarquant que

$$k_0 - \sum_{i=0}^{n} p_i (X_i - X_i^*) \leq -\alpha_0 - p_0 X_0^*,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq (-\alpha_0 - p_0 X_0^*) x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i x_i x_0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\alpha_i + q_i \bar{E}) \Big((\frac{x_{i-1}}{\pi_{i-1}})(\frac{x_i}{\pi_i}) - (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \Big) \end{aligned}$$

L'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ qui est valable pour tout couple de réels (a, b), permet d'écrire

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq (-\alpha_0 - p_0 X_0^*) x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i (\frac{x_i}{\pi_i}) x_0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\alpha_i + q_i \bar{E}) \Big(\frac{1}{2} (\frac{x_{i-1}}{\pi_{i-1}})^2 - \frac{1}{2} (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \Big) \end{aligned}$$

Or $\gamma_i (\alpha_i + q_i \bar{E}) = \sum_{j=i}^{n} k_j \pi_j$ donc

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq (-\alpha_0 - p_0 X_0^*) x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i (\frac{x_i}{\pi_i}) x_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} k_j \pi_j (\frac{x_{i-1}}{\pi_{i-1}})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} k_j \pi_j (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \\ &\leq (-\alpha_0 - p_0 X_0^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} k_j \pi_j) x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i (\frac{x_i}{\pi_i}) x_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} k_j \pi_j (\frac{x_i}{\pi_i})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} k_j \pi_j (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \end{aligned}$$

A partir de l'expression (3) on a

$$-\alpha_0 - p_0 X_0^* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i. \tag{8}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i (\frac{x_i}{\pi_i}) x_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i \Big(x_0 - \frac{x_i}{\pi_i} \Big)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent $\dot{V}(x) \leq 0$. L'équilibre X^* est donc stable au sens de Lyapunov. Comme V est propre et sa dérivé est négative alors toutes les trajectoires du système sont bornées. On doit montrer, pour terminer, que l'équilibre X^* est attractif. Soit

$$\bar{\Omega} = \{ x \in I\!R^{n+1} \;\; | \; x_i > -X_i^* \}$$

et

$$\Lambda = \{ x \in \bar{\Omega} \mid \dot{V}(x) = 0 \}$$

D'après le principe d'invariance de Lasalle, toutes les solutions du système convergent vers L le plus grand sous ensemble invariant contenu dans Λ. Soit $x \in L$, on a

$$\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1}{\pi_1} = ... = \frac{x_n}{\pi_n}$$

Donc pour tout $i = 1 \ldots, n$ on a

$$x_i = \pi_i x_0 \quad \text{et} \quad x_i = \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} x_{i-1} \tag{9}$$

ce qui implique, d'après la définition des π_i, que

$$\alpha x_{i-1} - (\alpha_i + q_i \bar{E}) x_i = 0 \quad \text{pour tout} \;\; i = 1 \ldots, n$$

et par suite on a

$$\dot{x}_i = 0 \quad \text{pour tout} \quad i = 1 \ldots, n$$

Comme L est invariant on doit avoir aussi

$$\dot{x}_0 = \sum_{i=0}^{n} k_i x_i - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i x_0 = 0$$

En utilisant l'égalité (9) on déduit que

$$x_0 = 0 \ \text{ ou } \ x_0 = \frac{k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i \pi_i}{p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i}$$

A partir de l'expression (5) de k_0 et la formule (8) on obtient

$$x_0 = 0 \ \text{ ou } \ x_0 = -X_0^*$$

et avec (9) on conclut donc que $L \subset \{0, -X^*\}$.
Mais $-X^*$ ne peut pas être un point omega-limite, en effet si on suppose qu'il existe $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ telle que la solution $x(t, \bar{x})$ issue de $\bar{x}$ converge vers $-X^*$ quand t tend vers $+\infty$, alors par continuité de V, $V(x(t, \bar{x}))$ converge vers $V(-X^*)$ quand t tend vers $+\infty$. Et comme V décroît le long des solutions du système, alors on a

$$V(\bar{x}) \geq V(x(t, \bar{x})) \geq V(-X^*) \quad \forall t \geq 0. \tag{10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} V(-X^*) - V(x) &= \frac{1}{2}\left(X_0^{*2} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Big(\frac{X_i^*}{\pi_i}\Big)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\frac{x_i}{\pi_i})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(X_0^{*2} - x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\pi_i^2} (X_i^{*2} - x_i^2) \right) \end{aligned}$$

donc $V(-X^*) > V(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ vérifiant $-X_i^* < x_i < X_i^*$, $i = 0, ..., n$. Ce qui contredit (10).
On conclut alors que V est une fonction de type LaSalle pour le système (12) et que toutes les solutions convergent vers l'origine.

III. Stabilisation par addition d'un intégrateur

En général, un contrôle constant n'a pas la possibilité de combattre l'effet des perturbations sauf si celles-ci restent constantes. Or le stock est soumis, de par l'environnement, à des fluctuations et des perturbations non constantes. Il peut donc être intéressant d'élaborer une commande en boucle fermée (feedback) non constante tendant à stabiliser le système.

Dans un travail précédent [3], nous avons construit un feedback $E = u(X)$ qui stabilise le système (1). Cependant l'effort de pêche ne peut pas physiquement ou matériellement varier selon une loi quelconque. En particulier une certaine inertie fait que l'effort de pêche ne peut pas varier trop vite. Il devient alors intéressant de contrôler par la vitesse $\dot{E}$ de variation de l'effort de pêche. C'est plus réaliste, car dans ce cas l'effort varie continûment et on peut éviter les grandes variations.

On considère alors le système avec intégrateur.

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = -\alpha_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i l_i X_i - \sum_{i=0}^{n} p_i X_i X_0 \\ \dot{X}_1 = \alpha X_0 - (\alpha_1 + q_1 E) X_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = \alpha X_{n-1} - (\alpha_n + q_n E) X_n \\ \dot{E} = v \end{cases} \tag{11}$$

L'effort E devient ainsi une autre variable d'état.

Le point d'équilibre $(0, \bar{E})$ est trivial et correspond à un stock épuisé. Sous les hypothèses **H1** et **H2** le système (11) admet $(X^*, \bar{E})$ comme point d'équilibre non trivial.
Pour ramener l'étude à l'origine Faisons le changement de variable suivant :

$$x_i = X_i - X_i \ \text{ et } \ u = E - \bar{E}$$

Dans les nouvelles coordonnées le système (11) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \sum_{i=0}^{n} k_i x_i - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i x_0 \\ \dot{x}_1 = \alpha x_0 - (\alpha_1 + q_1 (u + \bar{E})) x_1 - q_1 u X_1^* \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \alpha x_{n-1} - (\alpha_n + q_n (u + \bar{E})) x_n - q_n u X_n^* \\ \dot{u} = v \end{cases} \tag{12}$$

Le problème auquel on s'intéresse consiste à construire un feedback $v(x, u)$ tel que

(i) $v(0, 0) = 0$

(ii) $(0, 0)$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (11) bouclé par $v(x, u)$.

Proposition III.1: Sous les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4** le système (12) bouclé par le feedback

$$v(x, u) = -u + \sum_{i=1}^{n} q_i \Big(\frac{\gamma_i}{\pi_i^2}\Big) x_i (x_i + X_i^*), \tag{13}$$

est globalement asymptotiquement stable.

Preuve III.1: Soit

$$X(x) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} k_i x_i - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i x_0 \\ \alpha x_0 - (\alpha_1 + q_1 \bar{E}) x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_{n-1} - (\alpha_n + q_n \bar{E}) x_n \end{pmatrix}$$

On a montré que le système

$$\dot{x} = X(x)$$

est asymptotiquement stable. Donc si on considère la fonction de Lyapunov :

$$W(x, u) \quad = \quad V(x) + \frac{1}{2} u^2$$

où V est la fonction donnée par l'expression (6), alors on est dans les conditions d'application du résultat donné dans A. Iggidr et G. Sallet [4]. ■

Bien que le feedback qu'on a construit stabilise le système, rien ne garantie que l'effort de pêche reste positif. Pourqu'il en soit ainsi, on doit avoir :

Proposition III.2: Sous la condition suivante :

$$\bar{E} > \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i q_i \mu^2, \tag{14}$$

l'effort de pêche reste toujours positif.

Preuve III.2: si l'on prend $\bar{E}$ vérifiant la condition (14), le champ $\dot{u}$ devient strictement positif sur l'axe $\{u = -\bar{E}\}$, en effet, sur $\{u = -\bar{E}\}$, on a

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \bar{E} + \sum_{i=1}^{n} q_i(\frac{\gamma_i}{\pi_i^2})x_i(x_i + X_i^*) \\
&> \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} q_i\gamma_i\mu^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i(\frac{\gamma_i}{\pi_i^2})(x_i^2 + x_i X_i^*) \\
&> \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} q_i(\frac{\gamma_i}{\pi_i^2})(4x_i^2 + 4x_i X_i^* + \pi_i^2\mu^2)
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse **(H4)**, on a

$$X_i^* < \pi_i\mu, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\dot{u} &> \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} q_i(\frac{\gamma_i}{\pi_i^2})(4x_i^2 + 4x_i X_i^* + X_i^{*2}) \\
&> \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} q_i(\frac{\gamma_i}{\pi_i^2})(x_i + 2X_i^*)^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

■

Remarque III.1: Une condition suffisante pour que (14) soit vérifier est de prendre $\bar{E}$ tel que

$$\bar{E} > \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\left(\mu^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{q_i}\sum_{j=i}^{n} f_j l_j\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{1-\alpha_i}{q_i}\right\} \tag{15}$$

En effet, on a

$$\gamma_i \leq \frac{\pi_i \sum_{j=i}^{n} f_j l_j}{\alpha_i + q_i\bar{E}} \quad \text{car } \pi_i \geq \pi_j \ \forall j \geq i \text{ et } k_j \leq f_j l_j \ \forall j \geq 1$$

Or d'après l'expression des π_i et le fait que

$$\bar{E} > \frac{1-\alpha_i}{q_i}, \quad \forall i = 1, ..., n$$

on a

$$\gamma_i \leq \frac{\alpha^i \sum_{j=i}^{n} f_j l_j}{(\alpha_i + q_i\bar{E})^2} \leq \frac{\alpha^i \sum_{j=i}^{n} f_j l_j}{(q_i\bar{E})^2}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i q_i \mu^2 \leq \left(\frac{\mu}{\bar{E}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{q_i}\sum_{j=i}^{n} f_j l_j$$

D'autre part, (15) implique que

$$\bar{E}^3 > \left(\mu^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{q_i}\sum_{j=i}^{n} f_j l_j\right)$$

On qui permet donc de conclure que

$$\bar{E} \geq \left(\frac{\mu}{\bar{E}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{q_i}\sum_{j=i}^{n} f_j l_j \geq \sum_{i=1}^{n}\gamma_i q_i \mu^2$$

IV. Simulations

Considérons une population de poisson exploitée caractérisée par des paramètres dont les valeurs sont données dans le tableau1 [1].

Stade i :	0	1	2	3	4
p_i	0.2	0	0.1	0.1	0.1
f_i		0	0.5	0.5	0.5
l_i		0	10	20	15
m_i	0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
q_i	0	0	0	0.1	0.15
M_i	0.5	0.2	0.2	0.1	0.05
α	0.8				
α_i	1.3	1	1	0.9	0.85

Tableau1 : Valeurs des paramètres d'une population de poisson exploitée.

On peut vérifier que avec ces valeurs des paramètres les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** et **(H4)** sont satisfaites. On fait une simulation avec un effort de pêche constant $\bar{E} = 8$,un état initial $X_{init} = (10,\ 8,\ 4,\ 5,\ 9)$ et $E_{init} = 3.5$. Les résultats obtenus sont visualisés sur les courbes de la figure1.

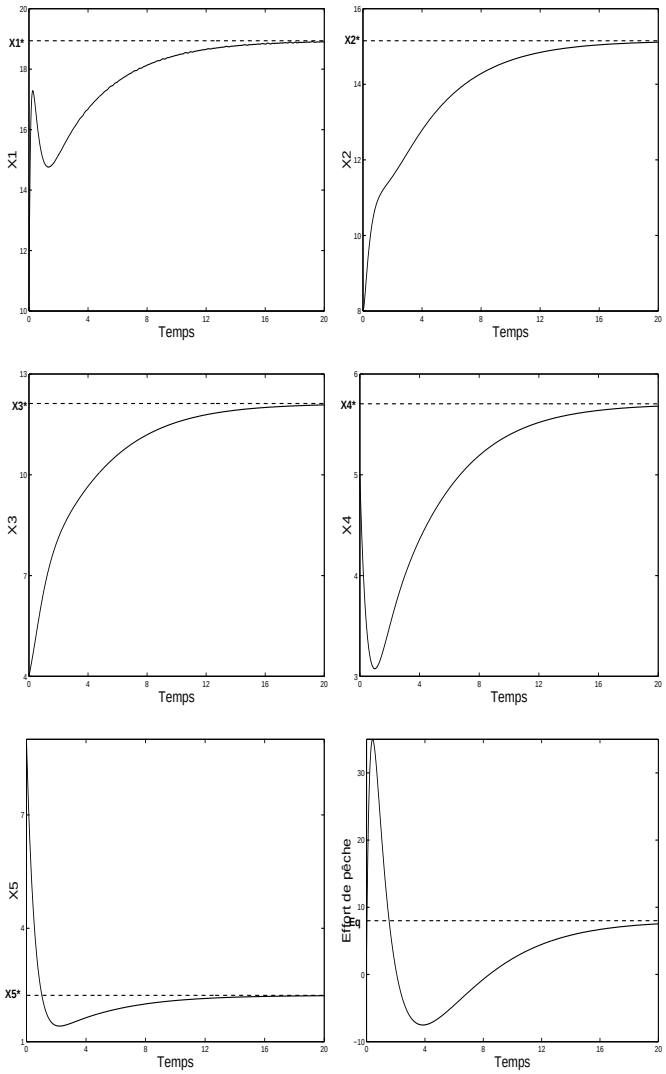

Figure1 : Évolution des cinq stades et l'effort de pêche lorsque $\bar{E} = 8$

On constate sur cet exemple que toutes les différents stades convergent vers l'équilibre, mais que l'effort de pêche devient négatif avant de converger vers $\bar{E}$.
On calcule maintenant la condition sur l'effort de pêche et on trouve $\bar{E}$ que doit être supérieur 17.9. On fait une simulation avec $\bar{E} = 20$ et les conditions initiales précédentes. Les résultats obtenus sont visualisés sur les courbes de la figure2. On constate que l'effort de pêche reste toujours positif.

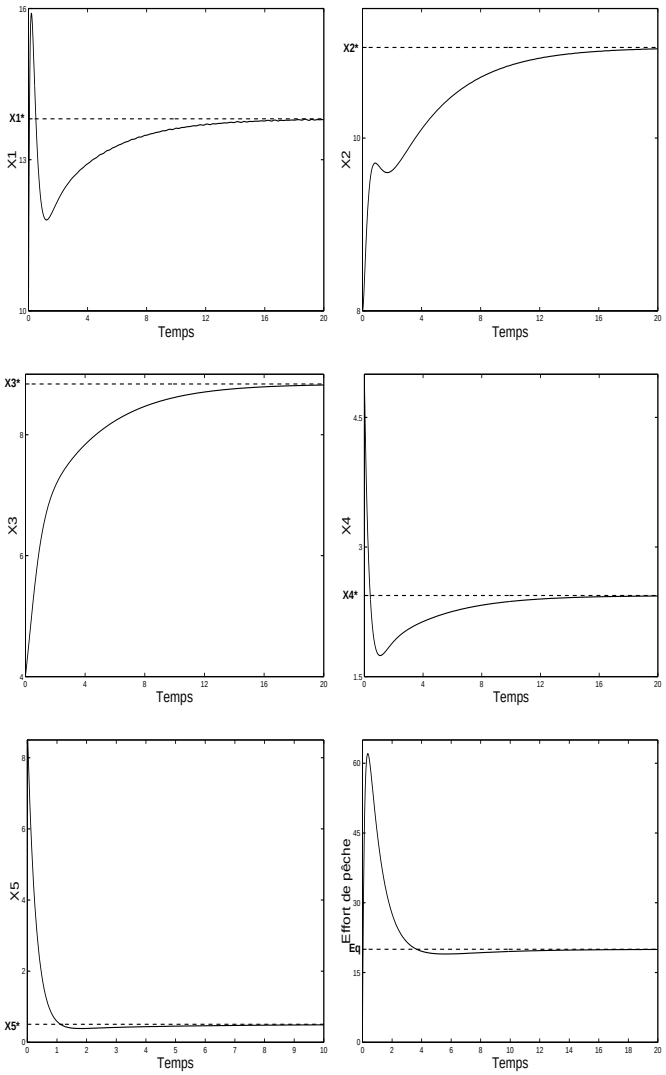

Figure2 : Évolution des cinq stades et de l'effort de pêche lorsque $\bar{E} > 17.9$

V. Conclusion

Sous quelques hypothèses, on a montré la stabilité d'une population de poisson exploité avec un effort de pêche constant, autour d'un point d'équilibre strictement positif.

Le système intégrant une dynamique de l'effort de pêche est plus intéressant, car il a la possibilité de combattre l'effet des fortes perturbations et permet d'éviter les grands sauts de l'effort de pêche. En choisissant de contrôler par la vitesse de variation de l'effort de pêche on a construit un feedback qui stabilise le système augmenté de la dynamique de l'effort. Mais il faut borner ce feedback pour éviter des variations négatives de l'effort pêche.

Références

[1] S. Touzeau, and J. L. Gouzé « On the stock-recruitement relationships in fish population models, » *Environmental modelling and assesment*, vol. 3, pp. 87–93, 1998.

[2] S. Touzeau « Modèles de contrôle en gestion des pêches, » *Doctorate thesis, University of Nice-Sophia Antipolis*, France, 1997.

[3] A. Ouahbi, A.Iggidr and M. El Bagdouri « Stabilization of an exploited fish population, » *Systems analysis modelling simulations*, à paraître.

[4] A. Iggidr and G. Sallet « Nonlinear stabilization by adding integrators, » *Kybernetika*, vol. 30, N. 5, pp. 499–506, 1994.