



**HAL**  
open science

## De la transformée de Fourier à l'analyse temps-fréquence bivariée

Pierre Chainais

► **To cite this version:**

Pierre Chainais. De la transformée de Fourier à l'analyse temps-fréquence bivariée. Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques, 2018, pp.1-19. hal-01837158

**HAL Id: hal-01837158**

**<https://inria.hal.science/hal-01837158v1>**

Submitted on 12 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# De la transformée de Fourier à l'analyse temps-fréquence bivariée

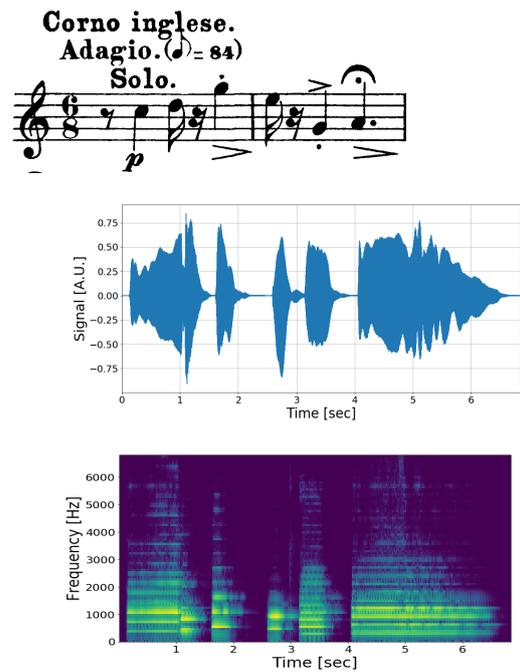
Pierre Chainais\*

Professeur, Ecole Centrale de Lille,  
Université de Lille, Laboratoire CRISAL UMR CNRS 9189  
[pierre.chainais@centralelille.fr](mailto:pierre.chainais@centralelille.fr)

30 avril 2018

## 1 Introduction

Le 250ème anniversaire de la naissance de Joseph Fourier (1768-1830) nous donne l'occasion de présenter l'un des prolongements contemporains essentiels de ses travaux : l'analyse temps-fréquence des signaux instationnaires ou comment définir mathématiquement la "partition musicale" d'un signal. Les figures ci-contre montrent la partition du solo de cor anglais au début de "Scène au champ" dans la Symphonie Fantastique de Berlioz ainsi que le signal issu de l'enregistrement correspondant. L'information temps-fréquence associée est représentée par l'image codant la densité d'énergie temps-fréquence du bleu au jaune, le spectrogramme. L'objectif principal de cet article est d'introduire cet objet. Nous pouvons ainsi comprendre une petite partie de la partition de l'Univers, le spectrogramme d'une onde gravitationnelle issue de deux trous noirs en coalescence. Nous prolongerons cette présentation jusqu'aux résultats de travaux de recherche en cours sur la construction d'une analyse temps-fréquence-polarisation pour les signaux bivariés, c'est-à-dire prenant leurs valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  au fil du temps.



Après un bref point historique, nous rappellerons quelques notions de base quant à la transformée de Fourier vue par le traitement du signal. Nous constaterons que la transformée de Fourier est particulièrement adaptée à l'analyse des signaux stationnaires (ceux dont les propriétés statistiques sont invariantes par translation en temps). Inversement, elle souffre d'une limitation fatale dès lors qu'il s'agit d'analyser des signaux instationnaires. Cette limitation est explicitée par une propriété mathématique de la transformée de Fourier (TF) énoncée par le

\*Les travaux de recherche évoqués ici sont au cœur de la thèse de Julien Flamant, co-encadré par Nicolas Le Bihan, DR CNRS au GIPSA Lab de Grenoble, et Pierre Chainais.

théorème de Gabor. Ce théorème s'avère fatal à la notion pourtant intuitive de "fréquence instantanée" qui reste inatteignable (a-t-elle un sens ? nous verrons...). Ce théorème est le pendant mathématique du principe d'incertitude de Heisenberg en physique quantique. Après une brève incursion dans le monde musical et une analogie avec la structure des partitions musicales, nous introduirons l'analyse temps-fréquence et ses atomes, d'abord pour les signaux unidimensionnels (on dit aussi univariés) notés  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Pour illustrer ces outils, nous prendrons l'exemple des ondes gravitationnelles qui a fait tant de bruit récemment (l'analyse, pas les ondes...). Pour aller plus loin, nous terminerons en évoquant des travaux de recherche en cours qui portent sur une construction d'outils d'analyse temps-fréquence pour les signaux bivariés, à 2 composantes  $x(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Nous passerons ainsi de la notion de spectrogramme classique à celle de spectrogramme de polarisation (en référence au comportement des ondes vectorielles, par exemple en électromagnétisme).

## 1.1 Point historique

Si Fourier n'a pas pratiqué la transformée de Fourier dans son acception moderne, son nom y est définitivement resté attaché. C'est bien lui qui a eu l'idée de rechercher les solutions d'équations aux dérivées partielles parmi les séries d'exponentielles complexes. Mais c'est surtout en physique quantique que les fondements de la transformée de Fourier moderne ont été posés. Le traitement du signal naît plus tard avec l'avènement des télécommunications, l'invention du RADAR et du SONAR, notamment motivés par la Seconde Guerre mondiale. Au sortir de la Seconde Guerre mondiale, c'est l'effervescence. En parallèle, nous retiendrons notamment les travaux de Claude Shannon (1948) sur la théorie de l'information, et les travaux de Laurent Schwarz sur la théorie des distributions (médaille Fields 1950) ou de Andreï Kolmogorov sur la théorie des probabilités, la complexité des algorithmes, la turbulence, etc., sans oublier Paul Lévy, Norbert Wiener et bien d'autres. Parmi les fondateurs de la communauté du traitement du signal en France, nous retiendrons en particulier André Blanc-Lapierre puis Bernard Picinbono.

Si la transformée de Fourier apparaissait déjà dans tous ces travaux, c'est l'algorithme de calcul de la transformée de Fourier rapide ou Fast Fourier Transform (FFT) inventé en 1965<sup>1</sup> par James Cooley et John Tukey qui signe l'acte de naissance de la transformée de Fourier telle qu'elle est pratiquée en traitement du signal aujourd'hui. Cette transformation numériquement bon marché avec une complexité en  $O(N \log N)$  pour  $N$  échantillons temporels est devenu l'outil numérique le plus fréquemment utilisé et implémenté dans les dispositifs électroniques, de notre téléphone portable à notre téléviseur en passant bien sûr par nos consoles de jeux et autres lecteurs MP3.

## 1.2 Fourier et linéarité

La raison première qui a amené Fourier à exploiter la décomposition des fonctions sur une famille d'exponentielles complexes est fondamentalement la linéarité des équations aux dérivées partielles considérées. En effet, les exponentielles complexes sont les fonctions propres des opérateurs différentiels linéaires. Cela signifie simplement que la dérivée d'une exponentielle complexe est encore proportionnelle à une exponentielle complexe, d'où :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n e^{j\omega t} \quad (1)$$

Nous repensons ici à toutes les méthodes enseignées dans les cours de physique des classes préparatoires où l'on recherche des solutions sous la forme d'une exponentielle complexe. En électronique par exemple, on utilise les impédances complexes ( $jL\omega, 1/jC\omega...$ ); en électromagnétisme

---

1. En réalité, Cornelius Lanczos avait déjà proposé cette approche dès 1942.

on s'intéresse aux ondes planes progressives monochromatiques (les fameuses OPPM!) sous une forme  $\propto \exp[j(\omega t - kx)]$ ... Le point commun : dans les 2 cas, nous travaillons avec des modèles linéaires, les caractéristiques des composants *linéaires* ou les équations de Maxwell.

La transformée de Fourier (TF) est bien définie sur différents espaces, dont en particulier  $L^2(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions de carré intégrable ou signaux d'énergie finie, par<sup>2</sup> :

$$X(\nu) = \langle x, e^{j2\pi\nu t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (2)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire entre 2 fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  et  $\nu$  est la fréquence, variable conjuguée du temps  $t$ . Son inverse définit la formule de reconstruction :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, e^{j2\pi\nu t} \rangle e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (3)$$

Observons au passage que la famille des exponentielles complexes  $\{e^{j2\pi\nu t}, \nu \in \mathbb{R}\}$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  : nous pouvons interpréter  $X(\nu)$  comme la "coordonnée" de  $x(t)$  selon (dans la "direction" de) la fonction de base  $e^{j2\pi\nu t}$ .

Nous pourrions maintenant tout aussi bien considérer que nous sommes en train de chercher à résoudre les équations dans le domaine de Fourier : une fois identifiée la transformée de Fourier  $F(\nu, \mathbf{k})$  de  $f(t, \mathbf{x})$ , une transformation inverse (ou reconstruction) nous donne accès à la solution dans le domaine spatio-temporel. Cette approche est couramment utilisée par des schémas numériques de résolution approchée des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires : les opérateurs différentiels sont transformés en des opérateurs algébriques bien moins coûteux à manipuler, l'algorithme FFT se chargeant du retour au domaine spatio-temporel pour un prix modique en  $O(N \log N)$ .

En traitement du signal, cette propriété de la transformée de Fourier est essentielle à l'analyse et la synthèse des filtres à partir de leur réponse fréquentielle ainsi qu'à l'identification des systèmes linéaires invariants par translation (dans le temps), les SLIT.

### 1.3 Analyse fréquentielle des signaux stationnaires

Il est temps de définir la notion de *signal*. Si le signal sera souvent assimilé à une fonction, il prend son origine dans le monde physique. On définit généralement un signal comme une quantité physique mesurable porteuse d'information issue d'un capteur (dont la modalité et l'unité peuvent être quelconques). Le signal abstrait est la fonction qui servira à le modéliser mathématiquement.

L'analyse de Fourier permet alors de définir une notion de densité spectrale d'énergie ou de puissance d'un signal. Il s'agit d'une quantité quadratique, qui renvoie à des quantités bien connues des physiciens telles que  $\frac{1}{2}mv^2$ ,  $\frac{1}{2}kx^2$ ... Ces densités spectrales prennent un sens physique mathématiquement justifié par la propriété de conservation de l'énergie de la transformée de Fourier. Sans entrer plus dans les détails pour les signaux aléatoires, rappelons que, dans le cadre déterministe, la TF est une isométrie de  $L^2(\mathbb{R})$ . Cette affirmation découle du théorème de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y^*(\nu) d\nu \quad (5)$$

---

2. Pour éviter toute discussion autour de la normalisation par des facteurs  $2\pi$ , nous préférons par la suite toujours travailler avec la fréquence  $\nu$  plutôt qu'avec la pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ .

où  $x, y \in L^2(\mathbb{R})$  et  $y^*$  est le conjugué de  $y$ . La deuxième identité s'interprète comme une conservation du produit scalaire : la TF est une isométrie.

La propriété d'invariance par translation dans le temps devient *stationnarité* lorsque l'on parle de signaux (ou processus) aléatoires. Pour ces signaux, les propriétés statistiques (la moyenne, la variance, autocorrélation...) ne changent pas au cours du temps. Dans ce cas, grâce à des résultats sur les mesures aléatoires en probabilité, on peut montrer que des notions de densités spectrales d'énergie ou de puissance peuvent aussi être bien définies pour les signaux aléatoires<sup>3</sup>. La TF fournit ainsi une nouvelle représentation, facile à lire et interpréter, pour décrire le contenu d'un signal stationnaire sans perte d'information ; on parle souvent du *spectre* d'un signal pour le caractériser.

#### 1.4 Fréquence physique, fréquence mathématique

Arrêtons-nous un instant sur le sens donné au mot *fréquence* depuis le début de cet article. Lorsque le physicien ou l'ingénieur emploie le mot *fréquence*, il pense d'abord au comptage de la répétition d'un phénomène au cours du temps : il fait implicitement référence à la notion naturelle de périodicité d'un système en rotation ou du mouvement d'un oscillateur harmonique. Dans ce cas, pourquoi travaillons-nous implicitement depuis le début de cet article avec des signaux à valeurs complexes,  $x(t) \in \mathbb{C}$  tandis que les mesures du physicien sont à valeurs réelles  $x(t) \in \mathbb{R}$  ? Quelle cohérence y-a-t-il entre la fréquence forcément positive (il s'agit du résultat d'un comptage) du physicien et le paramètre  $\nu \in \mathbb{R}$  de la transformée de Fourier du mathématicien ?

Le premier élément de réponse tient à la construction même de la transformée de Fourier qui montre que les fonctions réelles de carré intégrable peuvent être décrites comme une combinaison linéaire infinie d'exponentielles complexes : on peut donc additionner des fonctions à valeurs complexes pour décrire des fonctions à valeurs réelles. Le paramètre de fréquence  $\nu \in \mathbb{R}$  n'est à ce stade rien d'autre que l'indice d'une fonction  $\exp(j2\pi\nu t)$ , un nombre sans unité et sans signification physique a priori. Cependant, l'existence de cette décomposition de  $x(t)$  sur la famille des exponentielles complexes induit une contrainte sur la structure de la fonction  $X(\nu)$ . Il s'agit de la *symétrie hermitienne* de la TF des signaux réelles. Si  $x(t) \in \mathbb{R}$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t)^* = x(t) \iff \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad X(-\nu) = X^*(\nu). \quad (6)$$

Autrement dit, la connaissance de  $X(\nu)$  pour  $\nu \in \mathbb{R}^+$  suffit à reconstruire  $x(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . De plus il apparaît que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} 2|X(\nu)|^2 d\nu \quad (7)$$

d'où les facteurs en  $\sqrt{2}$  devant les "valeurs efficaces" parfois utilisées en électronique. Le contenu fréquentiel du signal  $x(t)$  est complètement décrit par  $\{X(\nu), \nu \in \mathbb{R}^+\}$ . C'est à partir de cette observation que l'on construit le *signal analytique*  $x_+(t) \in \mathbb{C}$  associé au signal réel  $x(t)$ . Il s'agit du signal complexe issu de la TF inverse de  $X_+(\nu)$  valant 0 pour les fréquences négatives ( $\nu < 0$ ) et  $2X(\nu)$  pour les fréquences positives ( $\nu \geq 0$ ). La fonction  $X_+(\nu)$  n'est associée qu'à des fréquences (mathématiques) positives qui correspondent bien à des fréquences physiquement interprétables : le recours à un objet mathématique à valeurs complexes permet l'interprétation physique univoque d'une observation à valeurs réelles. Les deux notions de fréquence, mathématique et physique, sont réconciliées.

---

3. On appelle signal aléatoire tout signal dont le futur ne peut être prédit exactement à partir du passé à l'aide d'un modèle mathématique approprié. Vaste sujet...

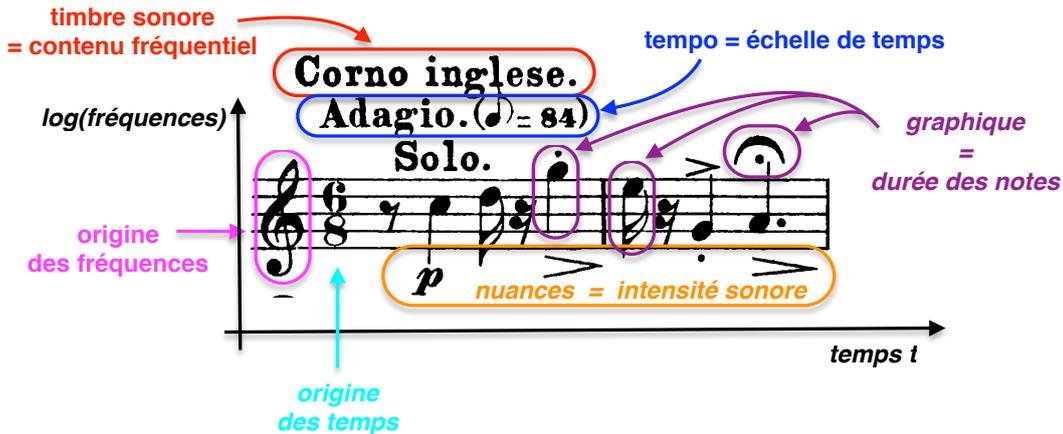


FIGURE 1: Encodage de l'information temps-fréquence au sein d'une partition.

## 2 La partition musicale : vers l'analyse temps-fréquence

La TF donne accès à une nouvelle représentation (isométrique) de l'information portée par un signal en fonction des fréquences plutôt que du temps. Cette enrichissante dualité entre temps et fréquence devient source de frustration lorsqu'il s'agit de prendre simultanément en compte le contenu fréquentiel et la dynamique d'un signal. À l'écoute d'un son, une musique ou une parole par exemple, l'ordre des notes ou des syllabes ainsi que le rythme ont autant d'importance que la mélodie ou le phrasé. Les musiciens disposent depuis longtemps déjà une représentation efficace jointe de la dynamique (le rythme) et du contenu fréquentiel (les notes) : la partition musicale.

### 2.1 La partition, une représentation mathématique

La partition, voir figure 1, est une représentation redoutablement riche du contenu temps-fréquence d'un signal particulier, la musique. Elle regorge d'informations auxquelles nous aimerions pouvoir donner un sens mathématique. Maîtriser la mathématique de la musique ouvrirait de nombreuses applications allant de la compression (le fameux MP3) à l'identification automatique des instruments et des voix. On pourrait extraire automatiquement la partition d'un morceau simplement à partir d'un enregistrement audio par exemple. Aujourd'hui encore, malgré des progrès considérables, cette tâche n'est pas maîtrisée de façon générale. Parmi les thématiques de recherche actuelles, la *séparation de sources* (et donc des différents instruments) reste un problème difficile. Etudions de plus près les informations présentes sur la partition de la figure 1.

**Contenu fréquentiel et timbre.** Tout d'abord l'instrument qui doit jouer est indiqué : il s'agit du cor anglais, le cousin grave du hautbois. Le timbre du son qui doit être produit est prescrit. Le timbre correspond au profil spectral d'un son, autrement dit la répartition de l'énergie sur les fréquences harmoniques<sup>4</sup> ; la façon d'attaquer les notes compte aussi. L'indication "Solo" rappelle au musicien qu'il devra particulièrement s'appliquer puisqu'il portera le thème au-dessus du reste de l'orchestre.

4. Si l'on suppose qu'un cor anglais joue une seule note en continu pendant un temps infini, il produit un signal parfaitement périodique décrit par un ensemble discret dénombrable de fréquences, une série de Fourier, voir l'article d'Olivier Lablée. La fréquence correspondant à la période du signal est associée à la fréquence fondamentale  $\nu_0$ . Les autres fréquences présentes sont appelées *harmoniques* : ce sont tous les multiples entiers  $n\nu_0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  de la fondamentale.

**Temps et rythme.** Une partition se lit de gauche à droite, direction qui représente l'écoulement du temps  $t$ . L'unité de temps est déterminée par le tempo relativement lent *Adagio* (qui signifie "à l'aise") précisé par la mesure qui se lit "84 à la croche" : le musicien devra jouer à la vitesse de 84 croches par minute. Les durées sont encodées par un code graphique incluant les rondes, les blanches, les noires, les croches, doubles-croches, etc... qui s'obtiennent en divisant les durées par 2 de façon récursive. Les puissances de 2 jouent un rôle particulier dans la description du rythme, même si les triolets et les puissances de 3 viennent parfois perturber le jeu. Il existe aussi des indications de silence, telles que les soupirs, ou de prolongation libre du son, telle que le point d'orgue sur la dernière note. L'origine des temps est placée juste après l'indication de la mesure, 6/8 ici. Le choix du 6/8 indique une façon particulière de décomposer le temps : chaque mesure, séparée de ses voisines par des barres, comptera 6 croches associées au chiffre 8 (1 croche = 1/8 de ronde). C'est une indication quant aux accents qui seront plus ou moins systématiquement marqués pour guider les danseurs par exemple : il apparaît déjà une indication quant à l'évolution de l'intensité du signal au cours du temps.

**Fréquences et notes.** La hauteur des notes est indiquée par la position de leur symbole sur une échelle représentée par la portée. L'origine des fréquences  $\nu$  est repérée par la clé. Ici la clé de sol pointe sur la 2ème ligne en partant du bas qui correspondra à la note de Sol 4 ; les autres notes de la gamme, du do au si en passant par les dièses et les bémols, se placent soit sur, soit entre les lignes. La traduction en fréquences précises est établie par le choix d'une référence, par exemple le fameux "La 440" qui associe un La 4 à la fréquence de 440 Hz ; les fréquences des autres notes en sont déduites en fonction de la taille des intervalles notamment. L'échelle logarithmique s'avère adaptée<sup>5</sup>.

**Densité de puissance et nuances.** La partition représente simultanément la dynamique temporelle et le contenu fréquentiel. Reste à inclure le détail de l'évolution de la puissance sonore d'une note à l'autre, les nuances. L'indiction "p" sous la portée signifie "piano", "doucement" en français. Ensuite les soufflets sous la portée suggèrent une décroissance de l'intensité sonore sur la durée de la note jusqu'à son extinction. Toutes ces indications peuvent s'interpréter comme l'amplitude instantanée du signal.

**En résumé.** L'axe horizontal de la portée est l'axe du temps et les durées correspondent à un code graphique. L'axe vertical se lit comme un axe fréquentiel en échelle logarithmique. Le détail de la couleur ou du timbre des notes se résume à l'indication de l'instrument choisi ; notons qu'il dépendra en réalité aussi de l'instrumentiste. Les nuances encodent les variations instantanées d'intensité du son. La partition est une représentation riche, interprétable et efficace d'une information temps-fréquence très complète, parfaitement localisée à la fois en temps et en fréquence.

## 2.2 Temps, fréquence, temps-fréquence ?

**De la musique aux mathématiques.** Peut-on espérer construire une représentation mathématique des signaux (quelconques) qui rassemble toutes les bonnes propriétés de la partition musicale ? La transformée de Fourier d'une fonction  $x(t)$  s'exprime comme une intégrale sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Toute localisation de l'information dans le temps est (au moins en apparence) perdue. Les exponentielles complexes encodent une information essentiellement non-locale. Ce n'est pas gênant tant que l'on parle de signaux stationnaires puisque leurs propriétés et donc leur

---

5. Les puissances de 2 jouent ici encore un rôle essentiel, mais c'est un autre sujet.

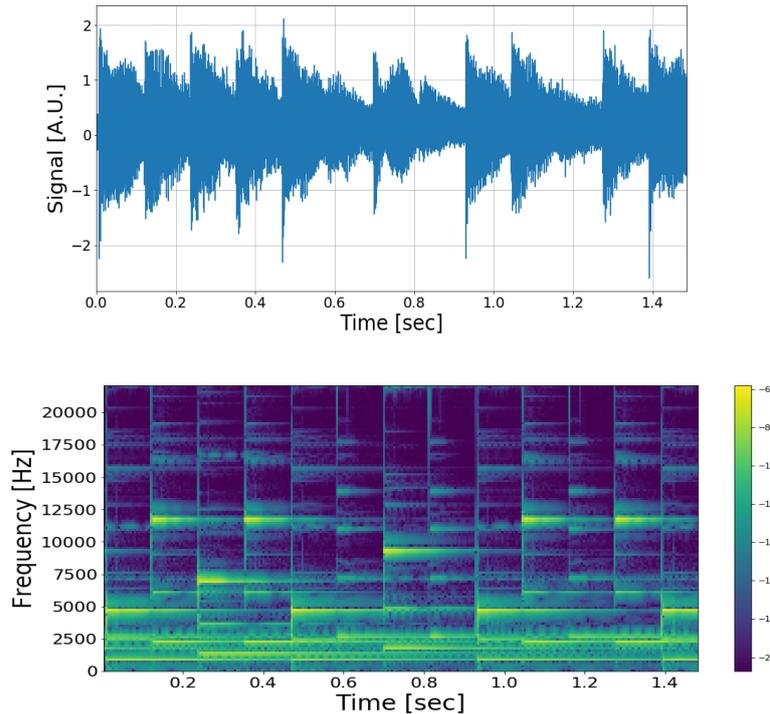


FIGURE 2: Spectrogramme d'un air de glockenspiel (carillon) : (haut) amplitude du signal enregistré au cours du temps ; (bas) spectrogramme du signal : densité d'énergie par unité de temps et de fréquence.

contenu spectral ne dépendent pas du temps. L'analyse spectrale permet d'identifier le contenu fréquentiel d'un signal et d'en déduire le comportement physique du phénomène observé/mesuré.

Par contre, modifier une seule valeur de la fonction  $X(\nu)$  modifiera l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $x(t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En effet,  $X(\nu)$  représente la contribution de la fonction  $\exp(j2\pi\nu t)$ , dont le support est  $\mathbb{R}$  tout entier, au signal  $x(t)$ . Ce n'est pas un problème pour les signaux stationnaires, par exemple un hautbois jouant perpétuellement le même refrain. Quel ennui ! Tout le monde préfère un hautbois jouant des mélodies variées, éventuellement improvisées, amenant un effet de surprise. Si la transformée de Fourier de ce vaste répertoire permettra bien de faire apparaître dans la densité spectrale des pics d'énergie associés aux notes qui ont été jouées, il sera bien difficile de retrouver à quel moment chaque morceau, voire chaque note a été jouée. Cette information est elle-même encodée par l'ensemble des phases (ou arguments) de  $X(\nu)$  et par conséquent peu lisible directement. La transformée de Fourier ne suffit pas à l'analyse des signaux instationnaires.

**Localisation temporelle et fréquentielle.** L'analyse temps-fréquence a pour objectif de produire une représentation mathématique du contenu temps-fréquence d'un signal, à la manière de la partition musicale. Le théorème de Gabor-Heisenberg est une mauvaise nouvelle. Ce théorème interdit la localisation parfaite d'un signal à la fois en temps et en fréquence. On ne peut pas construire de fonction réduite à une fréquence pure qui serait entendue pendant un temps arbitrairement court. Pourtant la partition musicale semble le permettre, par exemple en indiquant de frapper une timbale très brièvement et sèchement ; en théorie du moins. La notion de fréquence instantanée a quelque chose d'intuitif a priori. Peut-on espérer la définir proprement ?

Nous sentons bien qu'il serait difficile de donner un sens à une fréquence vue comme le comptage de la répétition d'un phénomène si ce phénomène devait aussi ne se répéter que pendant un temps arbitrairement court, un paradoxe apparaît. Le théorème de Gabor s'énonce ainsi :

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi} \quad (8)$$

où  $\Delta t$  et  $\Delta \nu$  mesurent respectivement l'encombrement temporel et fréquentiel<sup>6</sup> d'un signal  $x(t)$ , toujours dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Le cas d'égalité est atteint par la fonction gaussienne en  $\exp(-t^2/2\sigma^2)$ . Un signal parfaitement localisé en temps au sens où sa puissance instantanée  $|x(t)|^2$  serait significativement non-nulle pendant une durée  $\Delta t \rightarrow 0$  est nécessairement d'encombrement spectral infini et  $\Delta \nu \rightarrow \infty$ . C'est le cas des phénomènes très brefs comme les percussions (dont il est difficile de décrire la hauteur de note) ou les éclairs qui perturbent tout le spectre radioélectrique. Réciproquement, un signal parfaitement localisé en fréquence est nécessairement de durée infinie et  $\Delta t \rightarrow \infty$ . C'est le cas des signaux monochromatiques et plus généralement des signaux périodiques. La notion de périodicité stricte est inaccessible au monde physique nécessairement limité à une observation de durée finie. La notion de fréquence instantanée est une chimère. Pourtant, il reste possible de construire une analyse temps-fréquence produisant une représentation temps-fréquence interprétable physiquement de façon univoque, mathématiquement bien fondée et encadrée : le *spectrogramme*.

La figure 2 représente l'enregistrement d'une mélodie jouée au glockenspiel (une sorte de carillon) et son spectrogramme. On reconnaît bien en jaune les zones à forte densité d'énergie temps-fréquence. Le rythme est facilement identifié par les lignes et ruptures verticales caractéristiques des attaques du marteau sur les cloches. La hauteur des notes se repère facilement par les lignes jaunes horizontales ; les fréquences sont réparties de façon discrètes, selon la gamme. Remarquons les harmoniques qui apparaissent de façon moins marquées mais bien visibles comme une réplique aux fréquences multiples de la fréquence fondamentale du motif principal.

### 3 Analyse temps-fréquence

#### 3.1 La transformée de Fourier à court terme

L'analyse temps-fréquence s'appuie sur une idée très naturelle et très simple. Puisque la TF n'est pas localisée en temps du fait de l'intégration sur  $\mathbb{R}$ , il suffit d'y introduire une fonction bien localisée en temps, une *fenêtre d'analyse*. Pour une fenêtre notée  $w(t)$  ci-dessous, on définit la *transformée de Fourier à court terme*, dite aussi transformée de Fourier *fenêtrée* par

$$\mathcal{S}_w[x](s, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w(t-s) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (9)$$

Cette fenêtre d'analyse étant centrée sur l'instant  $s$ , l'intégrande prend des valeurs significatives essentiellement dans l'intervalle  $[s - \Delta t/2, s + \Delta t/2]$  seulement ; le résultat est une fonction qui dépend de la fréquence  $\nu$  mais aussi conjointement de l'instant  $s$  considéré. Parmi les fenêtres  $w(t)$  habituelles, on trouve la fenêtre rectangulaire (indicatrice d'un intervalle de durée finie), les fenêtres de Hamming, Hann, Blackman, etc. Toutes ces fonctions sont unimodales et rapidement décroissantes vers  $\pm\infty$ , par exemple une arche de fonction sinusoïdale, une gaussienne... En pratique, les fenêtres à support compact en temps sont privilégiées.

Le choix de la forme de la fenêtre d'analyse  $w(t)$  est surtout guidé par ses propriétés de localisation fréquentielle. La transformée de Fourier  $W(\nu)$  de la fenêtre rectangulaire présente

---

6. Plus précisément, on définit  $\Delta t$  et  $\Delta \nu$  comme les écarts-types des distributions de probabilités construites à partir de  $|x(t)|^2$  et  $|X(\nu)|^2$  renormalisées par l'énergie du signal. La démonstration repose essentiellement sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

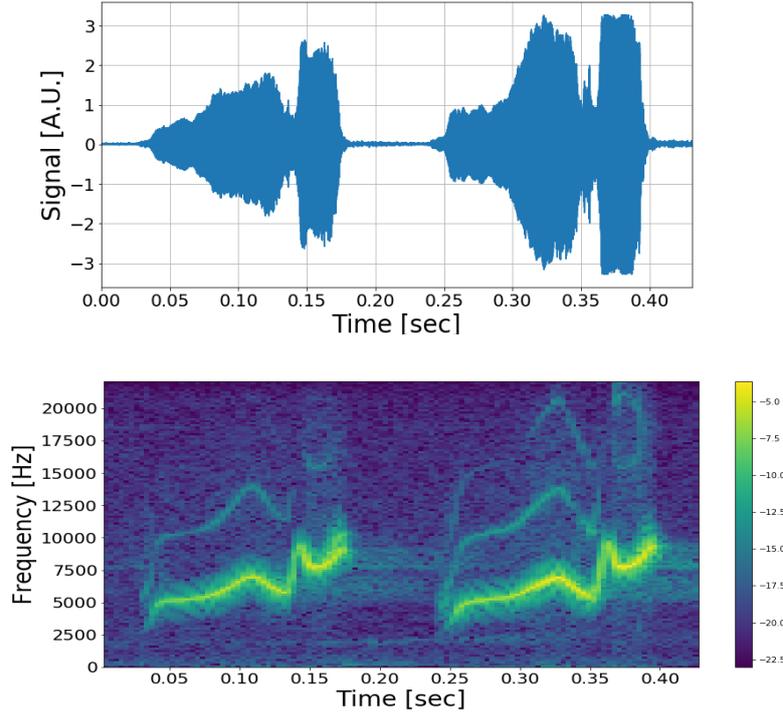


FIGURE 3: Encodage de l'information temps-fréquence du chant ("cui-cui") d'un oiseau par un spectrogramme : (haut) amplitude du signal enregistré au cours du temps ; (bas) spectrogramme du signal : densité d'énergie par unité de temps et de fréquence.

un lobe principal très étroit, a priori bien localisé en fréquence : c'est la fonction sinus cardinal (bien connue des opticiens, cf. diffraction par une fente d'Young). Par contre elle présente de nombreux lobes secondaires qui risquent de parasiter l'analyse. On choisira plutôt une fenêtre présentant un lobe principal légèrement élargi mais associé à des lobes d'amplitude très faible décroissant très rapidement lorsque  $\nu \rightarrow \pm\infty$ . Finalement, la fenêtre optimale est en général le résultat d'un bon compromis temps-fréquence, si possible proche du cas d'égalité dans l'inégalité de Gabor (8).

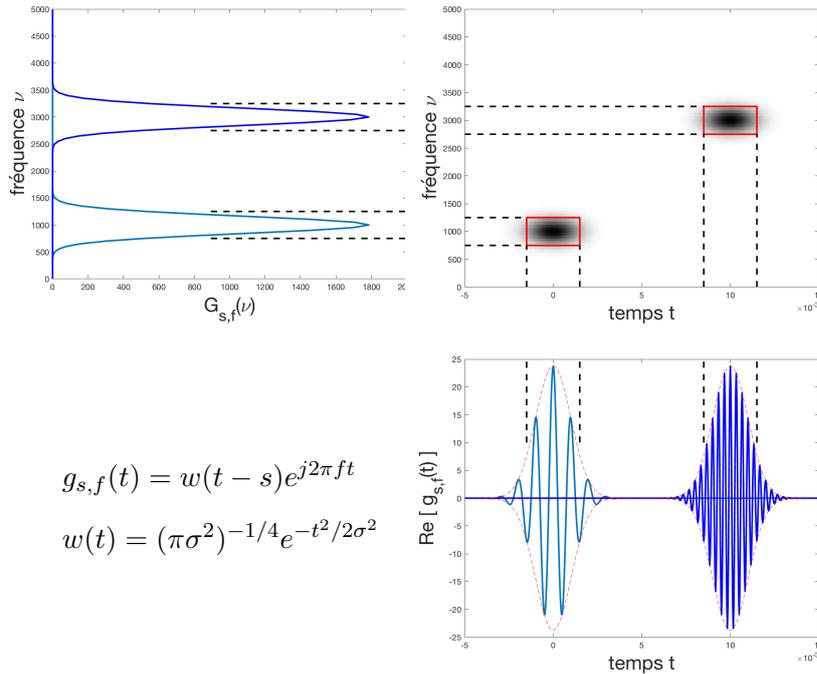
### 3.2 Atomes temps-fréquence et spectrogramme

Au-delà d'une idée simple et naturelle, la TF à court terme s'avère être un bel objet d'analyse fonctionnelle avec de bonnes propriétés [1]. Elle est notamment associée à la famille des *atomes temps-fréquence*  $\{g_{s,\nu} = w(t-s)e^{j2\pi\nu t}, (s,\nu) \in \mathbb{R}^2\}$  qui permettent de sonder le plan temps-fréquence ( $\mathbb{R}^2$ ) à la résolution  $\Delta t \Delta \nu$  associée à la fenêtre  $w(t) \leftrightarrow W(\nu)$  choisie, voir fig. 4. On peut alors réécrire la définition (9) comme un produit scalaire :

$$\mathcal{S}_w[x](s, \nu) = \langle x, g_{s,\nu} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w(t-s) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (10)$$

L'égalité ci-dessous assure la conservation de l'énergie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{S}_w[x](s, \nu)|^2 ds d\nu \quad (11)$$



$$g_{s,f}(t) = w(t - s)e^{j2\pi ft}$$

$$w(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}e^{-t^2/2\sigma^2}$$

FIGURE 4: Exemples d'atomes temps-fréquences pour 2 couples instant-fréquence  $(s_1, f_1)$  et  $(s_2, f_2)$  associés à  $g_{s,f}(t)$  dans le domaine temporel,  $G_{s,f}(\nu)$  dans le domaine fréquentiel, et représentation de leurs étendues dans la plan temps-fréquence. Les rectangles rouges de côtés  $(\Delta t, \Delta\nu)$  sont appelés *boîtes de Gabor*.

Par conséquent, on peut considérer  $|\mathcal{S}_w[x](s, \nu)|^2 ds d\nu$  comme la quantité d'énergie élémentaire portée par le signal dans l'élément temps-fréquence  $[s, s + ds] \times [\nu, \nu + d\nu]$ . Ce résultat garantit l'interprétabilité univoque d'un outil d'analyse plus souple que la transformée de Fourier, le *spectrogramme* d'un signal, c'est-à-dire sa densité d'énergie temps-fréquence  $|\mathcal{S}_w[x](s, \nu)|^2$ . De plus, on peut montrer analytiquement pour que, pour des modulations de fréquence simples, le maximum de cette densité est bien localisé sur la "fréquence locale" attendue, la dérivée de la phase. Par exemple, si  $x(t) \propto \exp(j\varphi(t))$  avec  $\varphi(t) = \pi at^2$ , le spectrogramme fera apparaître une ligne de maxima autour de la droite d'équation  $\nu(t) = \varphi'(t)/2\pi = at$  (ce signal est appelé *chirp linéaire*). La notion intuitive de "fréquence instantanée" prend ainsi un sens bien défini. Si la représentation fréquentielle est utile pour identifier les fréquences caractéristiques d'un signal stationnaire, la TF à court terme donne accès à une représentation temps-fréquence plus lisible, en particulier grâce à la redondance de l'image (2D) produite à partir du signal (1D).

La figure 3 représente l'enregistrement du chant "cui-cui" d'un oiseau ainsi que son spectrogramme. On reconnaît bien en jaune les zones à forte densité d'énergie temps-fréquence caractéristiques d'un son qui part du grave pour fluctuer vers l'aigu, répété 2 fois : "cu-i / cu-i" (sic). Remarquons encore une fois les harmoniques qui apparaissent de façon moins marquées mais bien visibles comme une réplique aux fréquences double et triple de la fréquence fondamentale du motif principal. Le chant de l'oiseau s'approche de celui d'une flûte traversière.

De plus, la transformée de Fourier à court-terme est associée à une formule de reconstruction :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_w[x](s, \nu) w(t - s) e^{j2\pi\nu t} ds d\nu \quad (12)$$

Ce résultat permet d'envisager des procédures de traitement du signal dans le domaine temps-

fréquence. La "chirurgie" temps-fréquence du signal est possible. L'ouvrage de référence sur ce sujet est certainement celui de Patrick Flandrin [1].

Les atomes temps-fréquence décrivent le plan temps-fréquence par translation en temps et en fréquence. Il est aussi possible de proposer des familles de fonctions qui recouvrent le plan par translation en temps et dilatation en échelle : les *ondelettes* [2–4]. Les ondelettes s'avèrent mieux adaptées pour les signaux large bande et ont eu beaucoup de succès en traitement d'image. Elles sont utilisées dans le standard de compression JPEG2000 par exemple. Il existe des théorèmes similaires à ceux que nous venons de décrire pour l'analyse temps-fréquence. On définit alors la notion de *scalogramme*, etc. Encore au-delà des ondelettes (*wavelets* en anglais), les années 1990-2000 ont vu naître tout une ribambelle de nouvelles familles de fonctions appelées *starlets* en référence aux ridgelets, curvelets, bandlet, snakelet... résumées par l'abréviation "\*-lets" qui se lit "star-lets" en anglais.

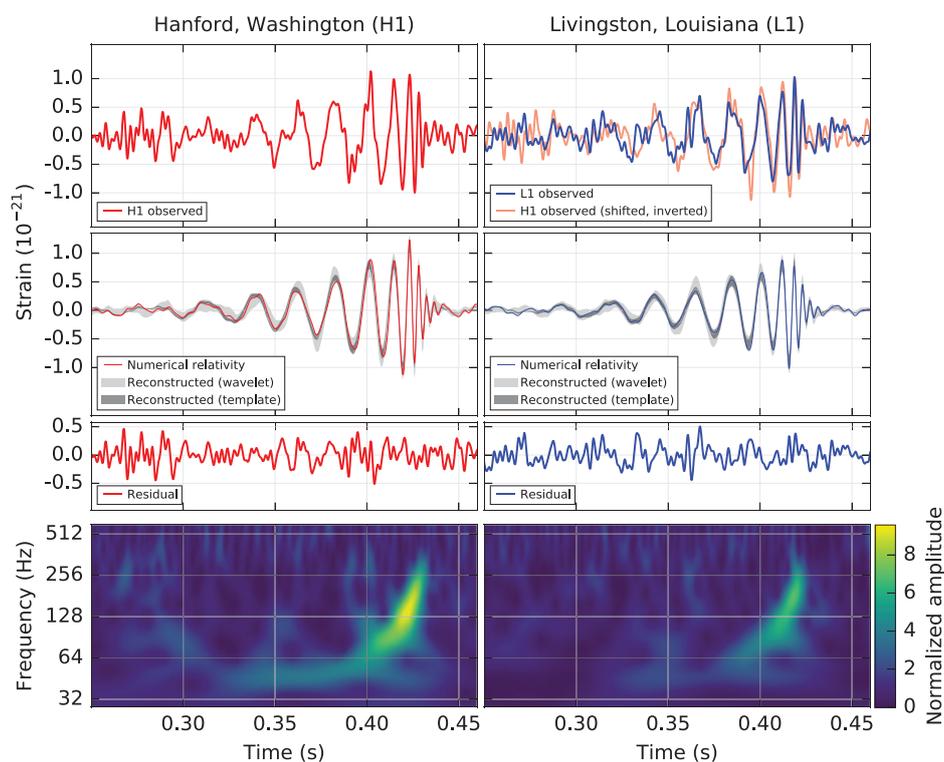


FIGURE 5: Signaux et représentations temps-fréquence mesurés par LIGO lors du passage de la première onde gravitationnelle jamais détectée.

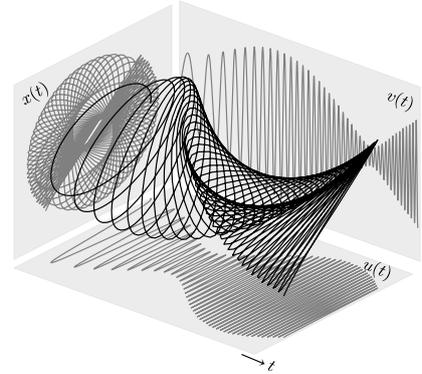
### 3.3 Ondes gravitationnelles

La première détection d'une onde gravitationnelle par le capteur LIGO en 2016 [5] a fait beaucoup de bruit. Les fréquences mises en jeu appartiennent d'ailleurs au domaine audible si l'on envoie le signal sur un haut-parleur, même si les phénomènes physiques n'ont rien à voir. La figure 5 est extraite de l'article [5] publié en 2016 pour annoncer cette fantastique découverte. Le lecteur reconnaîtra en bas les représentations temps-fréquence des signaux mesurés à Hanford et Livingston. Il s'agit en réalité d'une version légèrement modifiée de la transformée de Fourier fenêtrée présentée plus haut qui permet de visiter une large gamme de fréquences avec une résolution fréquentielle adaptée au signal étudié. On y reconnaît clairement (surtout sur le signal de Hanford) un chirp hyperbolique, c'est-à-dire une évolution explosive de la fréquence du signal

de 50 à 500Hz en 0,1 seconde environ. Cette observation est caractéristique de la coalescence d'une binaire de trous noirs : elle était prédite par la théorie astrophysique.

## 4 Analyse temps-fréquence des signaux bivariés

Toutes les notions présentées jusqu'ici sont bien établies depuis les années 1980-90 et font désormais partie de la culture générale en traitement du signal. De nombreux prolongements ont été étudiés et proposés dans la littérature depuis. Rappelons par exemple qu'Yves Meyer, mathématicien français, a obtenu le prestigieux Prix Abel en 2017 "pour son rôle majeur dans le développement de la théorie mathématique des ondelettes" dans les années 1980. Cette dernière partie a pour objectif de présenter brièvement nos travaux en cours sur la construction d'une analyse temps-fréquence pour les signaux bivariés, autrement dit à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{C}$ ) et non dans  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas, le signal est de nature vectorielle : la vitesse (horizontale) du vent mesurée par un anémomètre, une onde sismique transverse mesurée par un accéléromètre, un champ radio-électrique polarisé (radar)... La figure ci-dessus représente la trajectoire de l'extrémité d'un vecteur  $\mathbf{x}(t) = (u(t), v(t))$  au cours du temps ; les plans latéraux représentent ses 2 composantes.



### 4.1 Signaux bivariés

Bien sûr, il est toujours possible d'imaginer travailler en l'algèbre linéaire avec un vecteur à 2 composantes  $\mathbf{x}(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ , les opérateurs linéaires étant représentés par des matrices  $2 \times 2$ . L'analyse des auto- et inter-corrélations, des spectres et inter-spectres fourniront des informations dans le domaine fréquentiel. Pourtant une telle approche ne permet pas de produire l'équivalent du spectrogramme défini plus haut pour les signaux univariés. L'un des objectifs de nos travaux est de définir un spectrogramme justifié mathématiquement, portant une information sur la géométrie (l'état de polarisation) du signal bivarié, interprétable de façon univoque, la correspondance entre fréquences mathématique et physique étant garantie. Plus généralement, nous souhaitons construire une approche complète et algébrique du traitement des signaux bivariés, de leur analyse à leur traitement (filtrage linéaire par exemple). L'approche proposée décrit les signaux bivariés par un signal à valeur complexe  $x(t) = u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}$ .

Ces signaux bidimensionnels sont ensuite plongés dans un espace de dimension deux fois plus grande, le corps des *quaternions*  $\mathbb{H}$ . Ce plongement (plongeon ?;-) dans un espace de dimension plus grande joue un rôle similaire à celui des signaux à valeurs réelles dans  $\mathbb{C}$  : il permettra la définition d'un *plongement quaternionique* ayant une forme polaire faisant apparaître amplitude, phase temporelle et état de polarisation instantané du signal.

Par la suite, nous ferons souvent référence aux ondes vectorielles telles qu'une onde plane électromagnétique décrite par ses 2 composantes dans le plan d'onde,  $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$  par exemple. Cet exemple est particulièrement utile car la notion de *polarisation* s'avère très pertinente pour décrire la géométrie d'un signal bivarié  $x(t)$ . Sur l'exemple de l'introduction, on observe clairement une trajectoire quasi-circulaire au début (on parlera de polarisation circulaire) et une évolution progressive vers une trajectoire rectiligne à la fin (on parlera de polarisation rectiligne ou linéaire).

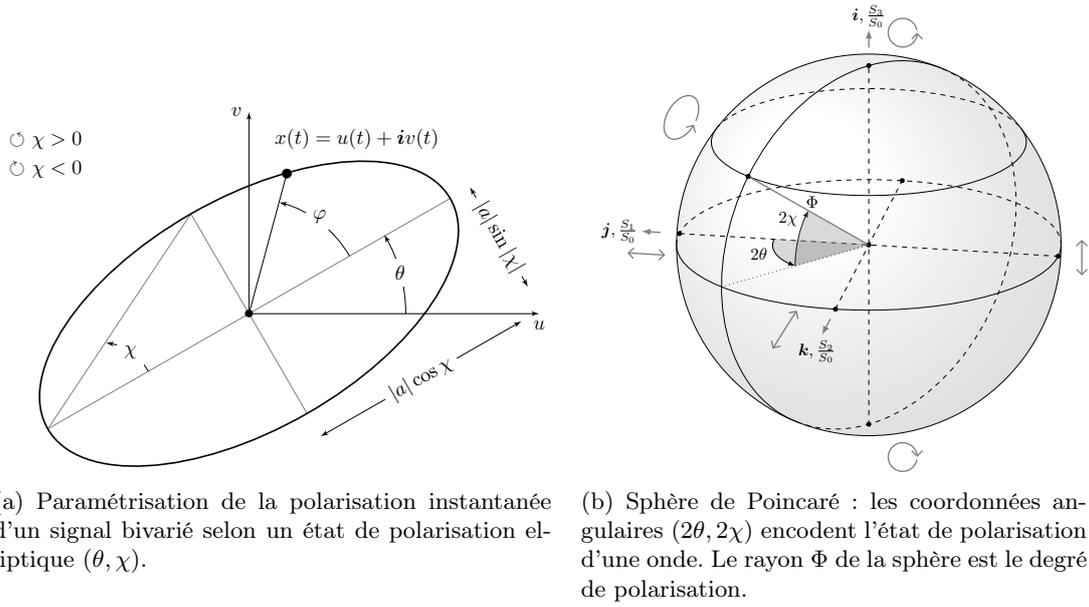


FIGURE 6

## 4.2 Polarisation et sphère de Poincaré

**Etats de polarisation.** La polarisation elliptique, qui inclut comme cas extrêmes les polarisations circulaires et linéaires, joue un rôle central dans la définition d'un état de polarisation instantané du signal. La figure 6a représente la paramétrisation de la polarisation instantanée d'un signal bivarié selon un état de polarisation elliptique. Deux paramètres caractérisent cette ellipse :  $\theta$  est l'orientation de l'axe principal de l'ellipse,  $\chi$  est l'ouverture angulaire du triangle rectangle défini par les axes de l'ellipse ;  $\text{sign}(\chi)$  indique le sens de parcours de l'ellipse. Remarquons en passant que, à l'instant  $t$ , le signal bivarié suit une évolution tangente à cette ellipse au point de position angulaire  $\varphi$ . Par exemple,  $\chi = 0$  correspond à une polarisation rectiligne dans la direction  $\theta$  tandis que  $\chi = \pm\pi/4$  correspond à une polarisation circulaire gauche ou droite selon le signe de  $\chi$ . La valeur du grand axe est proportionnelle à l'amplitude du signal.

**Sphère de Poincaré** Les opticiens et les radaristes ont l'habitude de décrire l'état de polarisation d'une onde en utilisant la sphère de Poincaré, voir fig. 6b. Un état de polarisation est résumé par 3 paramètres  $(\Phi, \theta, \chi)$  correspondant au degré de polarisation  $\Phi$  de l'onde et aux paramètres d'un état de polarisation elliptique  $(\theta, \chi)$ . Par exemple, les points de l'équateur où  $\chi = 0$  correspondent à une polarisation rectiligne dans la direction  $\theta$  tandis que les pôles où  $\chi = \pm\pi/4 \Leftrightarrow 2\chi = \pm\pi/2$  correspondent à une polarisation circulaire. Un état de polarisation est associé à un point sur la sphère de Poincaré et l'évolution de cet état au cours du temps correspond à une trajectoire sur la sphère. On effleure ici la notion de phase géométrique.

## 4.3 Transformée de Fourier quaternionique

Pour représenter en même temps le contenu temps-fréquence d'un signal biavrié  $\mathbf{x}(t)$  et sa géométrie, donc l'évolution de son état de polarisation, nous allons avoir besoin d'une nouvelle version adaptée de la transformée de Fourier, la transformée de Fourier quaternionique. La raison pour laquelle nous allons faire appel aux quaternions, des objets de dimension 4, est

similaire à la raison pour laquelle nous avons plongé les signaux réels ( $\in \mathbb{R}$ ) dans les signaux à valeurs complexes ( $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ ). Les fonctions exponentielles complexes s'écrivent sous forme polaire  $ae^{j\varphi}$  en fonction d'un module, qui encode leur amplitude, et d'une phase, dont la dérivée est la fréquence. La phase  $\varphi$  d'un signal réel  $x(t)$  est l'argument du signal analytique (complexe) associé  $x_+(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$ . Pour les signaux bivariés, nous avons besoin d'une forme polaire plus riche qui encode aussi l'état de polarisation instantané. Les quaternions, dont l'ensemble est noté  $\mathbb{H}$  ci-dessous permettent précisément d'obtenir une telle forme polaire en adjoignant à la phase usuelle  $\varphi$ , deux autres arguments  $\chi$  et  $\theta$  associés à l'état de polarisation décrit plus haut.

#### 4.3.1 Les quaternions, en bref.

Les quaternions ont été imaginés par Sir William Rowan Hamilton en 1843. Hamilton avait compris les liens qui unissent les nombres complexes à la géométrie plane et chercha un équivalent pour la géométrie tri-dimensionnelle.

De même qu'un signal réel est classiquement associé à un signal complexe, il est possible de plonger un signal complexe dans un espace de plus grande dimension, le corps des quaternions  $\mathbb{H}$ . Il s'agit d'un corps à 4 dimensions de base canonique  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , où  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sont des imaginaires purs  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ . Ils sont reliés par

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i}, \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1. \quad (13)$$

Le produit est non-commutatif, *i.e.* pour  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $pq \neq qp$  en général. Tout quaternion  $q$  s'écrit sous forme cartésienne

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad (14)$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Le conjugué de  $q$  est  $\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ . Son module est  $|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . On introduit aussi la conjugaison d'axe  $\mathbf{j}$  :

$$q^{*\mathbf{j}} \triangleq a + b\mathbf{i} - c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \quad (15)$$

Les quaternions englobent les nombres complexes, ce qui permet d'extraire des *sous-corps complexes* de  $\mathbb{H}$  isomorphes à  $\mathbb{C}$ , par exemple  $\mathbb{C}_\mathbf{i} = \text{vect}\{1, \mathbf{i}\} = \mathbb{R} + \mathbf{i}\mathbb{R}$  où  $\mathbb{C}_\mathbf{j} = \text{vect}\{1, \mathbf{j}\}$ . Les quaternions peuvent aussi s'écrire sous forme polaire. Notons en particulier la forme polaire d'Euler [6]

$$q = |q| \exp(\mathbf{i}\theta) \exp(-\mathbf{k}\chi) \exp(\mathbf{j}\varphi), \quad (16)$$

pour  $q \in \mathbb{H}$  et  $(\theta, \chi, \varphi) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/4, \pi/4] \times [-\pi, \pi]$ . La décomposition explicite est donnée dans [6, 7]. Pour plus de détails sur les quaternions, on se référera à [8].

#### 4.3.2 Définition de la transformée de Fourier quaternionique.

La transformée de Fourier quaternionique (TFQ) d'un signal  $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$  est définie par

$$X(\nu) = \int x(t) \exp(-\mathbf{j}2\pi\nu t) dt \in \mathbb{H} \quad (17)$$

et son inverse par

$$x(t) = \int X(\nu) \exp(\mathbf{j}2\pi\nu t) d\nu. \quad (18)$$

De même que la TF d'un signal réel est à valeurs complexes, la TFQ d'un signal complexe est à valeurs quaternioniques. La TFQ diffère de la TF classique en deux points. Par convention, l'exponentielle est positionnée à droite du signal à analyser. Ce choix est important car le produit dans  $\mathbb{H}$  est non-commutatif. Les axes  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$  prennent des sens très différents : l'axe  $\mathbf{i}$  encode une

information géométrique (la direction de la composante  $v(t)$  d'un signal  $x(t) = u(t) + \mathbf{i}v(t) \in \mathbb{C}_i$ ) tandis que l'axe  $\mathbf{j}$  encode une information de phase temporelle (en argument de  $\exp(\mathbf{j}2\pi\nu t)$ ). Cette définition de la TFQ hérite des propriétés de la TF usuelle [7], à la différence des autres définitions de TFQ dans la littérature. Un théorème de Parseval-Plancherel généralisé montre que la TFQ est une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ . Un théorème de Gabor-Heisenberg peut également être formulé, démontrant que la TFQ obéit aux mêmes limitations de localisation temps-fréquence que la TF usuelle. Enfin, notons qu'une version discrète peut aussi être proprement définie : le calcul de la TFQ est rapide puisqu'il se résume au calcul de 2 FFT (transformées de Fourier rapides).

Les signaux bivariés  $(u(t), v(t))$  peuvent être vus comme des signaux complexes  $x(t) = u(t) + \mathbf{i}v(t) \in \mathbb{C}_i$ . Dans ce cas, la TFQ présente deux propriétés supplémentaires importantes. A tout signal complexe  $x(t) \in \mathbb{C}_i$  est associée une représentation spectrale  $X(\nu) \in \mathbb{H}$ . Celle-ci vérifie de plus une symétrie  $\mathbf{i}$ -hermitienne<sup>7</sup> :

$$X(-\nu) = -\mathbf{i}X(\nu)\mathbf{i} \quad (19)$$

Ainsi, les fréquences négatives ne portent aucune information complémentaire aux fréquences positives dans cette représentation. Nous allons pouvoir établir une correspondance univoque entre fréquence mathématique et fréquence physique.

## 4.4 Plongement quaternionique

### 4.4.1 Définition

La symétrie  $\mathbf{i}$ -hermitienne (19) de la TFQ des signaux complexes montre que le spectre des fréquences négatives n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport au spectre des fréquences positives. Dès lors il est possible de construire un analogue bivarié du signal analytique, voir paragraphe 1.4, par suppression des fréquences négatives. On appelle ce nouvel objet le *plongement quaternionique d'un signal complexe*, défini explicitement par

$$x_+(t) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} X(\nu) \exp(\mathbf{j}2\pi\nu t) d\nu, \quad (20)$$

où le facteur 2 traduit le repliement des fréquences négatives sur les fréquences positives. Le plongement quaternionique  $x_+(t)$  est par construction à valeurs sur  $\mathbb{H}$ . Ceci va permettre d'extraire directement des attributs physiques instantanés pertinents. Notons qu'une construction similaire de  $x_+(t)$  est décrite dans [9], mais diffère dans l'interprétation physique qui suit.

### 4.4.2 Attributs physiques instantanés

La forme polaire d'Euler (16) permet d'interpréter  $x_+(t)$  sous la forme :

$$x_+(t) = a(t)e^{\mathbf{i}\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)} \quad (21)$$

avec  $a(t) \geq 0$ ,  $\theta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\chi(t) \in [-\pi/4, \pi/4]$  et  $\varphi(t) \in [-\pi, \pi]$ . Cette décomposition est unique. On retrouve le signal original  $x(t)$  par projection de  $x_+(t)$  sur  $\mathbb{C}_i$  :

$$x(t) = a(t) [\cos \varphi(t) \cos \chi(t) + \mathbf{i} \sin \varphi(t) \sin \chi(t)]. \quad (22)$$

L'équation (22) est un analogue bivarié direct du modèle univarié  $x(t) = a(t) \cos[\varphi(t)]$ . Le plongement quaternionique associe un *quadruplet canonique*  $[a(t), \theta(t), \chi(t), \varphi(t)]$  à tout signal complexe. Son interprétation physique peut se faire sous des conditions usuelles [10] adaptées au cas

<sup>7</sup>. Ces propriétés sont détaillées dans [7].

bivarié *i.e.* dès lors que  $\varphi(t)$  varie bien plus rapidement que le triplet  $[a(t), \theta(t), \chi(t)]$  et que  $x(t)$  est localement monochromatique.

Les quantités  $a(t), \varphi(t)$  sont standards : il s'agit respectivement de l'amplitude instantanée et de la phase instantanée du signal. Les autres quantités sont spécifiques au cas bivarié : il s'agit de l'orientation instantanée  $\theta(t)$  et de l'ellipticité instantanée  $\chi(t)$ . Ensemble, elle montrent qu'un signal bivarié à bande étroite a une trajectoire localement elliptique.

La figure 6a montre la trajectoire elliptique tracée par le modèle (22) avec  $a(t) = a, \theta(t) = \theta$  et  $\chi(t) = \chi$  constants. La valeur de  $a$  contrôle la taille de l'ellipse. Son orientation est donnée par  $\theta$ , tandis que sa forme est contrôlée par  $\chi$ . Pour  $\chi = 0$ , l'ellipse devient un segment, alors qu'à l'extrême pour  $\chi = \pm\pi/4$  on obtient un cercle. La phase  $\varphi(t)$  donne la position instantanée de  $x(t)$  dans l'ellipse, et enfin le signe de  $\chi$  donne le sens de rotation. La description en ellipse instantanée peut être vue comme une description de l'état de polarisation instantané du signal bivarié, par analogie avec la polarisation des ondes électromagnétiques.

L'extraction de paramètres physiques instantanés à partir du plongement quaternionique d'un signal complexe se heurte aux mêmes limitations que dans le cas du signal analytique. L'approche ne fonctionne plus dès lors que le signal est multicomposante, ce qui motive l'introduction de la Transformée de Fourier à Court Terme Quaternionique.

#### 4.5 Spectrogramme de polarisation

Soit  $w(t)$  une fenêtre réelle, symétrique et normalisée  $\|w\|_2 = 1$ . La Transformée de Fourier à Court Terme Quaternionique (TFCT-Q) est définie par [7]

$$\mathcal{S}_w x(s, \nu) = \int x(t) w(t-s) e^{-j2\pi\nu t} dt. \quad (23)$$

La TFCT-Q est caractérisée par un théorème fondamental que nous avons démontré dans [7].

**Théorème 1** (inversion, conservation). *Soit  $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ . La formule de reconstruction donne*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \iint \mathcal{S}_w x(s, \nu) w(t-s) e^{j2\pi\nu t} ds d\nu. \quad (24)$$

Deux quantités sont conservées : l'énergie

$$\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \iint |\mathcal{S}_w x(s, \nu)|^2 ds d\nu, \quad (25)$$

et les propriétés de polarisation :

$$\int x(t) x(t)^{*j} dt = \frac{1}{2\pi} \iint \mathcal{S}_w x(s, \nu) \mathcal{S}_w x(s, \nu)^{*j} ds d\nu. \quad (26)$$

Non seulement ce théorème étend les résultats usuels (24) et (25) à la TFCT-Q mais il montre aussi la conservation (26) d'une quantité liée aux propriétés géométriques (ou de polarisation) du signal bivarié. La quantité  $\mathcal{S}_w x(t, \nu) \mathcal{S}_w x(t, \nu)^{*j}$  est appelée *spectrogramme de polarisation* de  $x$ . De façon remarquable, cette quantité quaternionique s'exprime directement en fonction des *paramètres de Stokes*, utilisés par les physiciens dans la description de l'état de polarisation des ondes électromagnétiques [11]. Plus précisément,

$$\mathcal{S}_w x(t, \nu) \mathcal{S}_w x(t, \nu)^{*j} = S_1(t, \nu) + \mathbf{i} S_2(t, \nu) - \mathbf{k} S_3(t, \nu), \quad (27)$$

où  $S_1, S_2, S_3$  sont des paramètres de Stokes *temps-fréquence* et  $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$  :  $S_0$  correspond au spectrogramme usuel de  $x$ . Ces paramètres décrivent de manière équivalente l'information contenue par le triplet  $(a, \theta, \chi)$ .

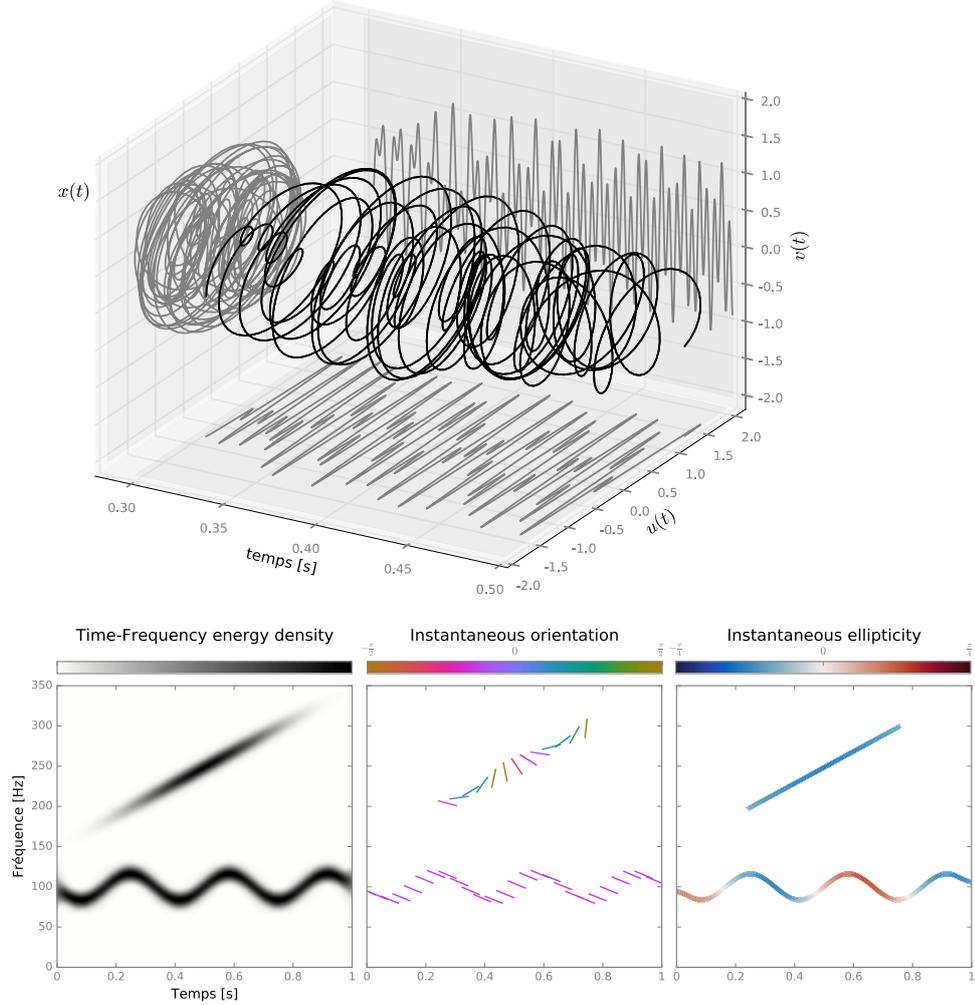


FIGURE 7: Contenu temps-fréquence d'un signal bivarié  $\mathbf{x}(t) = u(t) + iv(t)$  : (haut) amplitude du signal enregistré au cours du temps ; (bas) spectrogramme de polarisation du signal : densité d'énergie par unité de temps et de fréquence et évolution de l'état de polarisation  $(\theta(t, \nu), \chi(t, \nu))$  temps-fréquence.

Deux représentations temps-fréquence-polarisation équivalentes et donnant lieu à une interprétation mathématiquement fondée et physiquement significatives sont ainsi possibles. La première consiste en la densité d'énergie temps-fréquence  $S_0(t, \nu)$  et les valeurs de  $\theta(t, \nu)$  et  $\chi(t, \nu)$ . La deuxième représentation, moins facile à interpréter et non illustrée ici, consiste à représenter directement  $S_1(u, \xi), S_2(u, \xi), S_3(u, \xi)$  obtenus via (27). Dans tous les cas, il faut considérer simultanément 3 figures, voir figure 7. Par concision, toutes deux seront appelées spectrogramme de polarisation de  $x(t)$ . Ainsi nous disposons d'une description complète du contenu temps-fréquence-polarisation d'un signal bivarié.

#### 4.6 Exemple

Pour illustrer la pertinence de l'outil, nous considérons un signal synthétique  $x(t)$  à 2 composantes : un chirp linéaire d'ellipticité constante et d'orientation variable et un signal modulé en fréquence et en ellipticité dont l'orientation est constante. Le signal est défini pour  $t \in [0, 1]$  par  $N = 1024$  échantillons. La TFCT-Q est calculée en utilisant une fenêtre de Hanning de longueur 101 échantillons de façon à avoir une bonne résolution temps-fréquence. La figure 7(haut)

présente un extrait de ce signal  $x(t)$ .

La figure 7(bas) montre les 3 figures du spectrogramme de polarisation de  $x(t)$  :  $S_0(t, \nu)$  et les valeurs de  $\theta(t, \nu)$  et  $\chi(t, \nu)$  extraites des *ridges* (lignes de maxima) de la TFCT-Q, *i.e.* les maxima locaux de  $S_0(t, \nu)$ . Les figures 7(bas) donnent respectivement la densité d'énergie temps-fréquence  $S_0(t, \nu)$ , ainsi que les valeurs de l'orientation  $\theta(t, \nu)$  et de l'ellipticité  $\chi(t, \nu)$  le long des lignes de maxima de  $S_0(t, \nu)$ . On identifie alors de façon très lisible les 2 composantes dans le plan temps-fréquence et leurs propriétés géométriques. Sur la figure en bas à droite, nous pouvons lire directement l'évolution instantanée de l'ellipticité de chaque composante. Par exemple, l'alternance des couleurs sur la composante modulée montre une oscillation basse-fréquence entre polarisations circulaires droite et gauche. De façon similaire, nous observons que la composante de chirp linéaire a une polarisation elliptique avec  $\chi \simeq -\pi/8$ ; l'alternance des couleurs sur la figure centrale indique que l'orientation  $\theta$  de l'ellipse tourne au cours du temps.

## 5 Conclusion

Nous avons mis en lumière une partie du chemin parcouru quant à l'analyse du contenu fréquentiel des signaux depuis la construction de la transformée de Fourier. Nous avons notamment présenté la notion de spectrogramme, un outil bien établi mathématiquement et interprétable physiquement, analogue mathématique de la partition musicale. Les applications sont nombreuses pour l'analyse des chants d'animaux marins, de la parole, pour la séparation de sources (locuteurs ou instruments dans le problème de la cocktail party), des signaux sismiques en géologie, ou encore pour la détection et l'identification des ondes gravitationnelles. L'analyse temps-fréquence est très liée à des questions d'analyse fonctionnelle, et nous avons évoqué la famille des *starlets*, dont les ondelettes, qui ont enrichi la famille des atomes temps-fréquence. Par exemple, le format de compression JPEG2000 utilise une transformée en ondelettes.

Au-delà des outils déjà connus, la dernière partie a permis d'introduire des méthodes et outils en cours de gestation au cœur de nos travaux de recherche actuels sur l'analyse et le traitement des signaux bivariés. Ces signaux apparaissent notamment dans les ondes vectorielles, électromagnétiques ou élastiques (sismiques). Nous proposons une méthode très générale basée sur la transformée de Fourier quaternionique permettant de définir une analyse temps-fréquence-géométrie des signaux bivariés. La généralisation de cette approche se fait grâce à la transformée de Fourier quaternionique à court-terme, ce qui conduit à la définition du spectrogramme de polarisation d'un signal bivarié. La validité de l'approche est assurée par des théorèmes qui garantissent par exemple l'existence d'une formule de reconstruction ainsi que la conservation des propriétés énergétiques et géométriques. Dans le même cadre, nous pouvons aussi écrire une analyse spectrale des signaux aléatoires et une théorie du filtrage linéaire élégantes qui rendent le traitement des signaux bivariés plus naturels et interprétables qu'une approche s'appuyant simplement sur l'algèbre linéaire classique. Une implémentation numérique des outils proposés est mise à disposition grâce à une toolbox Python<sup>8</sup>. Ces nouveaux outils ouvrent de nombreuses perspectives telles que l'identification et la séparation de sources en traitement du signal bivarié. Parmi elles, les ondes gravitationnelles, qui sont elles-aussi polarisées.

## Références

- [1] P. Flandrin, *Temps-Fréquence (2ème éd., revue et corrigée)*. Paris : Hermès, 1998.
- [2] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, Pennsylvania : SIAM, 1992.

---

8. BiSPy toolbox, <https://github.com/jflamant/bispy>

- [3] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [4] —, *A Wavelet Tour of Signal Processing - The sparse way*. Academic Press - 3rd ed., 2009, with contrib. of G. Peyré.
- [5] “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical Review Letters*, vol. 116, no. 6, 2016.
- [6] T. Bulow and G. Sommer, “Hypercomplex signals—a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 11, pp. 2844–2852, 2001.
- [7] J. Flamant, N. Le Bihan, and P. Chainais, “Time–frequency analysis of bivariate signals,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520317300507>
- [8] J. H. Conway and D. A. Smith, *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry*. AK Peters, 2003.
- [9] N. Le Bihan, S. J. Sangwine, and T. A. Ell, “Instantaneous frequency and amplitude of orthocomplex modulated signals based on quaternion fourier transform,” *Signal Processing*, vol. 94, pp. 308–318, 2014.
- [10] B. Picinbono, “On instantaneous amplitude and phase of signals,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 3, pp. 552–560, 1997.
- [11] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*. CUP Archive, 2000.