



**HAL**  
open science

## Simulation d'un ruisseau

Nathalie Praizelin

► **To cite this version:**

Nathalie Praizelin. Simulation d'un ruisseau. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. 2000.  
hal-01692709

**HAL Id: hal-01692709**

**<https://inria.hal.science/hal-01692709>**

Submitted on 25 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

Stage de DESS :

Simulation d'un ruisseau

---

présenté par

Nathalie Praizelin

stage effectué au sein de l'équipe iMAGIS du laboratoire GRAVIR  
sous la direction de Fabrice Neyret  
directeur de l'équipe/du laboratoire Claude Puech



avril-septembre 2000

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Le projet iMAGIS . . . . .	1
1.1.1	Présentation . . . . .	1
1.1.2	Thèmes de recherche . . . . .	1
1.2	But du stage : Simulation d'un ruisseau . . . . .	2
1.2.1	Contexte . . . . .	2
1.2.2	Sujet du stage . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Hypothèses - Ecriture du problème</b>	<b>4</b>
2.1	Hypothèses . . . . .	4
2.2	Conditions aux limites . . . . .	4
2.2.1	Conditions au bord . . . . .	4
2.2.2	Conditions à l'amont et à l'aval . . . . .	5
2.3	Ecriture du problème . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Résolution par un schéma de différences finies à cinq points</b>	<b>6</b>
3.1	Représentation du ruisseau . . . . .	6
3.2	Maillage du domaine . . . . .	7
3.3	Discrétisation du problème . . . . .	10
3.3.1	Ecriture du problème sur $\Omega - \partial\Omega$ . . . . .	10
3.3.2	Conditions à l'amont et à l'aval . . . . .	12
3.3.3	Conditions au bord du ruisseau . . . . .	13
3.3.4	Problème discrétisé . . . . .	17
3.4	Résultats . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Calcul des vecteurs vitesse</b>	<b>20</b>
4.1	Calcul de $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P)$ , $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P)$ , P intérieur au domaine . . . . .	20
4.2	Calcul de $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P)$ , $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P)$ , P appartenant à un bord . . . . .	21
4.3	Résultats . . . . .	22

<b>5</b>	<b>Animation</b>	<b>25</b>
5.1	Principe . . . . .	25
5.2	Flotteurs . . . . .	26
5.3	Perturbations . . . . .	27
5.3.1	Fluctuation du module de la vitesse . . . . .	28
5.3.2	Tourbillon . . . . .	28
5.3.3	Source . . . . .	28
5.4	Perturbations associées à un flotteur . . . . .	29
5.5	Perturbation des ondes . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Ondes de surface</b>	<b>31</b>
6.1	Le nombre de Froude . . . . .	31
6.2	Cas de la formation d'une onde de choc . . . . .	33
6.3	Les différents types d'ondes de surface . . . . .	35
6.3.1	Vitesse de phase et vitesse de groupe . . . . .	35
6.3.2	Les ondes capillaires et gravitationnelles . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Lignes de Mach</b>	<b>40</b>
7.1	Définition . . . . .	40
7.2	Construction géométrique . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Ondes de choc</b>	<b>44</b>
8.1	Construction des lignes iso-Froude . . . . .	46
8.1.1	Recherche des points de départ des lignes iso-Froude Première méthode . . . . .	46
8.1.2	Recherche des points de départ des lignes iso-Froude Seconde méthode . . . . .	49
8.1.3	Construction des lignes iso-Froude . . . . .	53
8.2	Recherche de l'origine de l'onde de choc et construction . . . . .	57
8.3	Rides latérales . . . . .	59
<b>9</b>	<b>Perturbation des ondes</b>	<b>60</b>
9.1	Prise en compte de la vitesse de propagation de l'onde . . . . .	60
9.1.1	Principe . . . . .	60
9.1.2	Implémentation . . . . .	62
9.2	Disparition progressive des ondes . . . . .	63
<b>10</b>	<b>Compléments sur les ondes de choc</b>	<b>64</b>
<b>11</b>	<b>Conclusion et remerciements</b>	<b>68</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Le projet iMAGIS

J'ai effectué mon stage au sein d'iMAGIS, qui est une équipe du laboratoire GRAVIR-IMAG (liant le CNRS, l'INPG, et l'UJF) et un projet de l'INRIA.

Le chef de ce laboratoire et de cette équipe est Monsieur Claude Puech.

### 1.1.1 Présentation

Le projet iMAGIS travaille dans le domaine de l'informatique graphique et de la synthèse d'images.

iMAGIS développe des outils permettant de concevoir, puis d'utiliser dans le cadre d'applications de tailles significatives, et en particulier en vue de simulation, des maquettes numériques 3D. Ces maquettes peuvent être purement géométriques ou posséder des propriétés "physiques" (photométriques ou mécaniques par exemples).

Les applications visées se situent dans des domaines très divers (construction automobile ou aéronautique, urbanisme, éclairagisme, bâtiment, téléphonie mobile, chimie, chirurgie assistée, agronomie, environnement, audio-visuel, etc..).

Dans bien des cas il s'agit de concevoir les techniques (modélisation et algorithmes graphiques) sur lesquels reposent les systèmes de "réalité virtuelle" (ou de "réalité augmentée") qui commencent à voir le jour. Le défi à relever est de leur fournir la puissance nécessaire à l'affichage et à l'interaction "temps réel" qui les caractérisent.

### 1.1.2 Thèmes de recherche

- Visualisation d'environnements complexes
- Rendu réaliste, simulation de l'éclairage (utilisation de modèles complexes de réflectance, éclairage global, techniques de radiosité hiérarchiques, environnements dynamiques)
- Animation, modélisation d'objets déformables et de leur comportement (modèle à base de surfaces implicites, simulation du mouvement, détection et réponse à des collisions, fortes déformations, manipulation interactive)
- Algorithmique de la visibilité; structures de données efficaces pour le rendu de scènes très complexes (prise en compte de la cohérence, cas dynamique)
- Interactivité, réalité augmentée (manipulation et partage d'objets virtuels, intégration image-son)

## 1.2 But du stage : Simulation d'un ruisseau

### 1.2.1 Contexte

J'ai effectué ce stage sous la direction de Fabrice Neyret.

La simulation des phénomènes naturels intéresse depuis longtemps les chercheurs en synthèse d'images.

Leur richesse visuelle découle souvent d'une grande complexité de comportement ou d'apparence. C'est ce qui engendre leur intérêt applicatif, la motivation de ceux qui les étudient, et le défi scientifique que constitue leur simulation.

Parmi eux figurent en bonne place les fluides, et en particulier l'eau.

La synthèse d'image a deux principaux buts :

- La création d'images interactives, utilisées par exemple pour les jeux et les simulateurs
- La création d'images réalistes, pour les effets spéciaux, l'architecture, le design...

Dans le premier cas, les images doivent être "jolies", mais ce qui importe avant tout est de les créer en "temps réel", c'est à dire tous les 25ièmes de seconde.

Dans le second cas, les images doivent être les plus "jolies" possibles, et on accepte couramment une demie heure de calcul par image, voire plusieurs heures pour une image unique.

Bien que l'objectif des techniques de synthèse d'images soit de produire des comportements et aspects plausibles, et non quantitativement précis, une tendance courante est de recourir aux équations de la physique, et aux méthodes de résolution numérique pour les simuler, profitant ainsi des avancées d'autres disciplines en matière de simulation.

Dans le cas des fluides, cette démarche comporte de nombreux inconvénients :

- Résoudre les équations de Navier-Stokes dans le cas général en 3D est particulièrement coûteux, d'autant plus que les scènes naturelles requièrent souvent à la fois des domaines larges (cas des paysages) et une résolution fine (pour avoir un détail perceptible le plus fin possible).
- Pour les nuages comme pour l'eau, on ne voit souvent que l'interface du fluide et du milieu environnant. Dès lors, à quoi bon simuler finement l'intérieur ?
- D'un écoulement d'eau, on ne voit en général que des indices secondaires du mouvement (vagues, ondes de surface, objets dérivant). Dès lors, à quoi bon simuler des grandeurs invisibles ?
- Ces indices secondaires sont des phénomènes émergeant des équations de Navier-Stokes dans son cas le plus général (non linéaire, compressible, grande vitesse, frontière libre). Ils sont donc délicats et coûteux à obtenir.
- Pour la même raison, bien que ces phénomènes détiennent le "sens" de ce que l'on perçoit de l'écoulement, il est extrêmement difficile de contrôler directement leurs caractéristiques, alors

que l'une des propriétés essentielles d'une technique de synthèse d'images est sa contrôlabilité par l'utilisateur graphiste (qui veut par exemple pouvoir contrôler la position d'un tourbillon pour des effets spéciaux).

Afin d'éviter toutes ces difficultés, nous souhaitons adopter une approche phénoménologique, basée sur la modélisation directe des phénomènes émergents.

### 1.2.2 Sujet du stage

Ce stage s'inscrit dans un projet plus vaste, la simulation complète de l'apparence d'un ruisseau sous ses aspects visuels et temporels. On s'intéresse simultanément à la forme de la surface, à son animation, et au rendu visuel qui en découle.

Durant ce stage, on se limite au cadre d'un ruisseau "calme", quasi-statique, faiblement turbulent, typiquement de quelques centimètres à quelques décimètres de fond, d'où de nombreuses pierres émergent.

Les phénomènes qui modulent la surface du ruisseau seront donc essentiellement de nature ondulatoire : ce sont les divers systèmes de ridules produites par les obstacles immergés ou émergés.

Pour simuler la surface de l'eau et notamment ses ridules, nous allons nous baser sur une résolution simplifiée de l'écoulement (fluide 2D parfait irrotationnel), en régime statique, ce que nous exposons dans les sections 2, 3 et 4.

A ce stade, le fluide circule, mais la surface de l'écoulement est stationnaire : tout semble figé.

Cette solution statique peut être perturbée localement par de petits champs de vitesse explicites (régime quasi-statique) représentant des fluctuations locales de vitesse, ou des vortex entrant dans le domaine, puis dérivant avec le courant, ce que nous traitons en section 5.

Ceci nous permet d'obtenir en temps réel un champ de vitesse animé, qui permettra de faire fluctuer les ondes stationnaires que l'on va construire.

Les sections 6 à 8 sont consacrées à la détermination de ces ondes stationnaires, par construction géométrique à partir du champ de vitesse calculé.

Nous commencerons par une section de rappel sur la théorie des ondes de surface, qui nous permettra de mener à bien la localisation des ondes de choc en section 8.

Comme on perturbe l'écoulement, ces ondes stationnaires vont fluctuer. Nous étudions en section 9 la mise à jour progressive de l'onde de choc en tenant compte de la vitesse de propagation. Enfin, nous présenterons en section 10 un bilan de cette étude, des sources sur lesquelles nous nous sommes appuyés, pour conclure sur les directions à explorer à long et à court terme.

## 2 Hypothèses - Ecriture du problème

### 2.1 Hypothèses

On se limitera au cadre d'un ruisseau "calme", faiblement turbulent, ce qui nous permettra de rechercher une solution quasi-statique. Nous admettrons que l'eau est un fluide incompressible. Cette incompressibilité se traduit par la relation :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1)$$

où  $\vec{V}$  désigne le vecteur vitesse du fluide.

Nous nous plaçons d'abord dans le cas  $2D$  (le passage en  $2D^{1/2}$  se fera par la suite en introduisant la hauteur d'eau et le débit à la place de la vitesse).

Nous considérerons également que l'eau est un fluide parfait (c'est à dire que les forces de frottement dues à la viscosité du fluide ont un effet négligeable) et que l'écoulement est irrotationnel (c'est à dire que le champ de vitesse de l'écoulement parfait a un vecteur tourbillon nul). Cette dernière hypothèse se traduit par la relation :

$$\operatorname{rot}(\vec{V}) = \vec{0} \quad (2)$$

Or (2) implique :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\Phi \quad (3)$$

Cela signifie que le vecteur vitesse dérive d'un potentiel  $\Phi$  appelé potentiel des vitesses.

De (1) et de (3), nous déduisons :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\Phi) = 0$$

Soit :

$$\Delta\Phi = 0 \text{ avec } \vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\Phi$$

Il reste maintenant à écrire les conditions aux limites du fluide.

### 2.2 Conditions aux limites

#### 2.2.1 Conditions au bord

Nous désignons par "bord" les berges du ruisseau ainsi que les obstacles qu'il présente. Nous admettrons qu'en tout point, le vecteur vitesse est tangent au bord du ruisseau.



Ainsi, si  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire au bord du ruisseau, nous écrirons comme condition aux limites sur le bord :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$

Soit :

$$\overrightarrow{grad} \Phi \cdot \vec{n} = 0$$

### 2.2.2 Conditions à l'amont et à l'aval

Nous imposerons des valeurs à  $\Phi$  à l'amont et à l'aval du ruisseau.

Comme nous le verrons plus loin, une de ces valeurs pourra être choisie de manière arbitraire. L'autre nous sera imposée par des grandeurs physiques moyennes telles que la hauteur d'eau, l'angle de la pente, la longueur et la largeur du ruisseau.

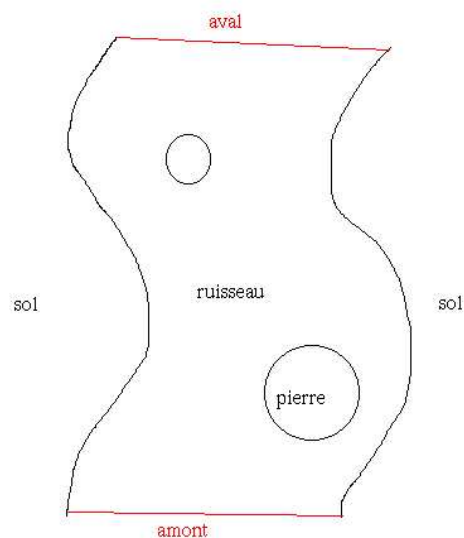
## 2.3 Ecriture du problème

Le problème à résoudre est donc le suivant :

Si on désigne par  $\Omega$  le domaine "ruisseau", que l'on considère comme un fermé, on a :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \Delta\Phi(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega - \partial\Omega \\ \nabla\Phi(x, y) \cdot \vec{n} = 0 & (x, y) \in \partial\Omega|_{\text{parois}} \text{ où } \vec{n} \text{ désigne la normale à } \partial\Omega \\ \Phi(x, y) = \Phi_0 & (x, y) \in \partial\Omega|_{\text{amont}} \\ \Phi(x, y) = \Phi_1 & (x, y) \in \partial\Omega|_{\text{aval}} \end{cases}$$

où :



### 3 Résolution par un schéma de différences finies à cinq points

Nous allons résoudre le problème  $\mathcal{P}$  par un schéma de différences finies.

Nous verrons tout d'abord de quelle manière sera représenté un ruisseau, et de quelle façon nous allons le mailler.

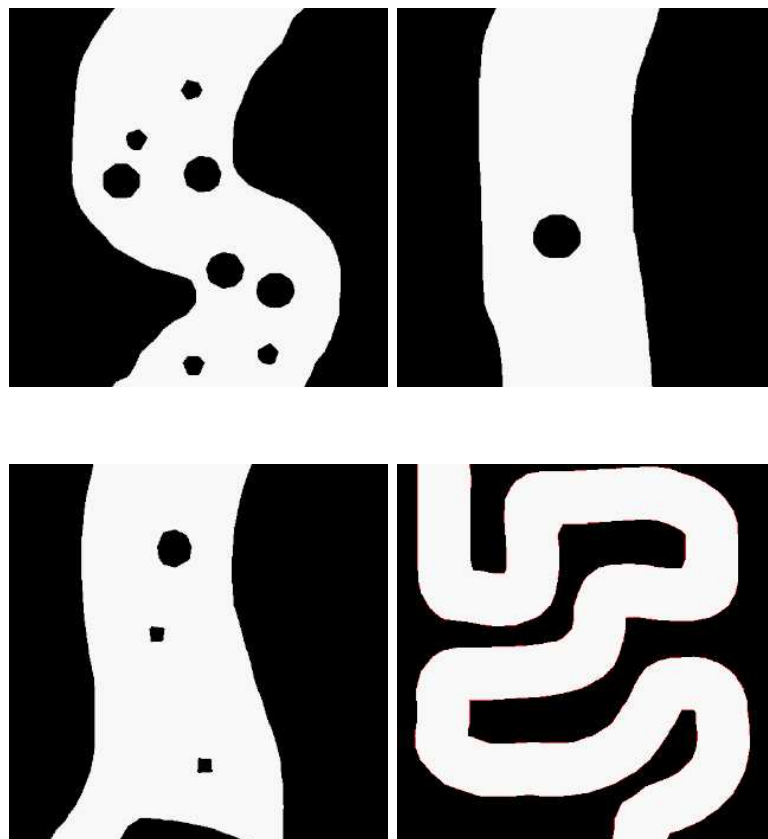
Nous passerons ensuite à l'écriture du schéma proprement dit.

La principale difficulté a été d'écrire les conditions aux bords du ruisseau.

#### 3.1 Représentation du ruisseau

Pour commencer, un ruisseau est dessiné à l'aide d'outils d'édition d'images, comme Xpaint.

A priori, la forme du ruisseau peut varier (ruisseau plus ou moins sinueux, un seul ou plusieurs "bras" d'eau), et les obstacles sont fixes.



L'eau est représentée en blanc et le sol en noir.

Dans la version  $2D^{1/2}$ , les hauteurs d'eau seront représentées par des niveaux de gris différents.

## 3.2 Maillage du domaine

Le domaine sur lequel on doit faire l'étude est le ruisseau dessiné précédemment ( eau et sol compris ).

Nous maillons le domaine par des cellules rectangulaires.

On désigne par  $L$  le nombre de mailles en largeur, et  $H$  le nombre de mailles en hauteur.

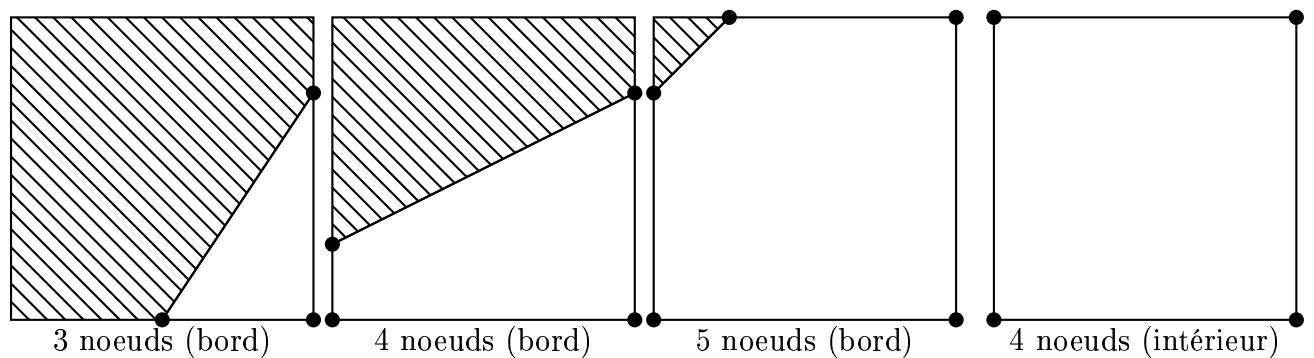
Dans les différents tests que nous avons effectués, nous avons choisi  $H=L=32$  ou  $64$ .

On souhaite résoudre numériquement le problème  $\mathcal{P}$  sur le domaine  $\Omega$  défini précédemment.

Ainsi, la première difficulté est d'isoler les cellules qui appartiennent à  $\Omega$ . Elles peuvent lui appartenir en totalité, ou en partie si elles sont traversées par un bord.

Afin de discrétiser plus finement les parois, nous avons introduit des noeuds supplémentaires (autres que ceux définis par le maillage), sur les bords du ruisseau.

Avec cette approche, une cellule peut contenir de 3 à 5 noeuds selon les cas.



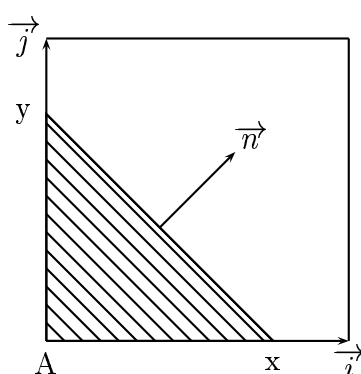
Nous ferons l'hypothèse qu'il ne peut y avoir plus d'un point de bord par côté de cellule. Si cela arrivait, il faudrait changer la résolution (c'est à dire  $H$  ou  $L$ ) afin de se trouver dans un cas favorable.

### Pour l'implémentation

Nous assimilons un bord traversant une cellule à un segment, dont on déduit la géométrie du rectangle d'image correspondant à cette cellule. Toute cellule contenant un bord fait partie de ce qu'on appellera un *contour* ( les berges du ruisseau étant des *contours ouverts*, les obstacles des *contours fermés* ).

Une cellule est représentée par une structure contenant entre autres :

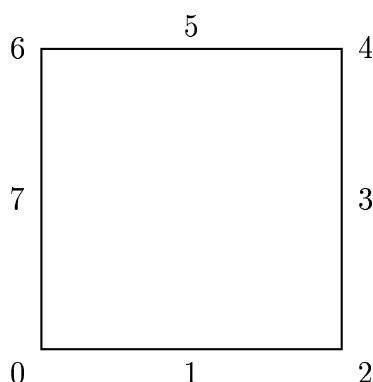
- la position de la paroi dans la cellule si il y en a une.  
Si on munit chaque cellule d'un repère orthonormé  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , cette position est représentée par l'abscisse  $x$  où la paroi franchi l'axe  $\vec{i}$ , et l'ordonnée  $y$  où elle franchi l'axe  $\vec{j}$ , avec  $x, y \in [0, 1]$ . Ces champs ne sont remplis que si les coordonnées des extrémités de la paroi dans  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  sont à abscisse ou à ordonnée nulle, sinon, l'information est stockée dans les champs des cellules voisines;
- la normale à la paroi ( elle est orientée vers l'intérieur du ruisseau ) ;
- la cellule la suivant et la précédant sur le contour auquel elle appartient ;



Toutes les cellules ont été stockées dans une matrice  $CL$  :

$CL[[i_x][i_y]]$  contient la cellule dont le coin en bas à gauche a pour coordonnées  $(i_x, i_y)$ , le repère étant choisi orthonormé, avec pour origine le coin inférieur gauche de la grille, et pour axes ses côtés. Ce repère sera noté  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Afin de pouvoir couvrir tous les cas particuliers, il nous a été nécessaire de pouvoir différencier les noeuds de chaque cellule. A l'intérieur d'une même cellule, nous les avons numéroté ainsi :



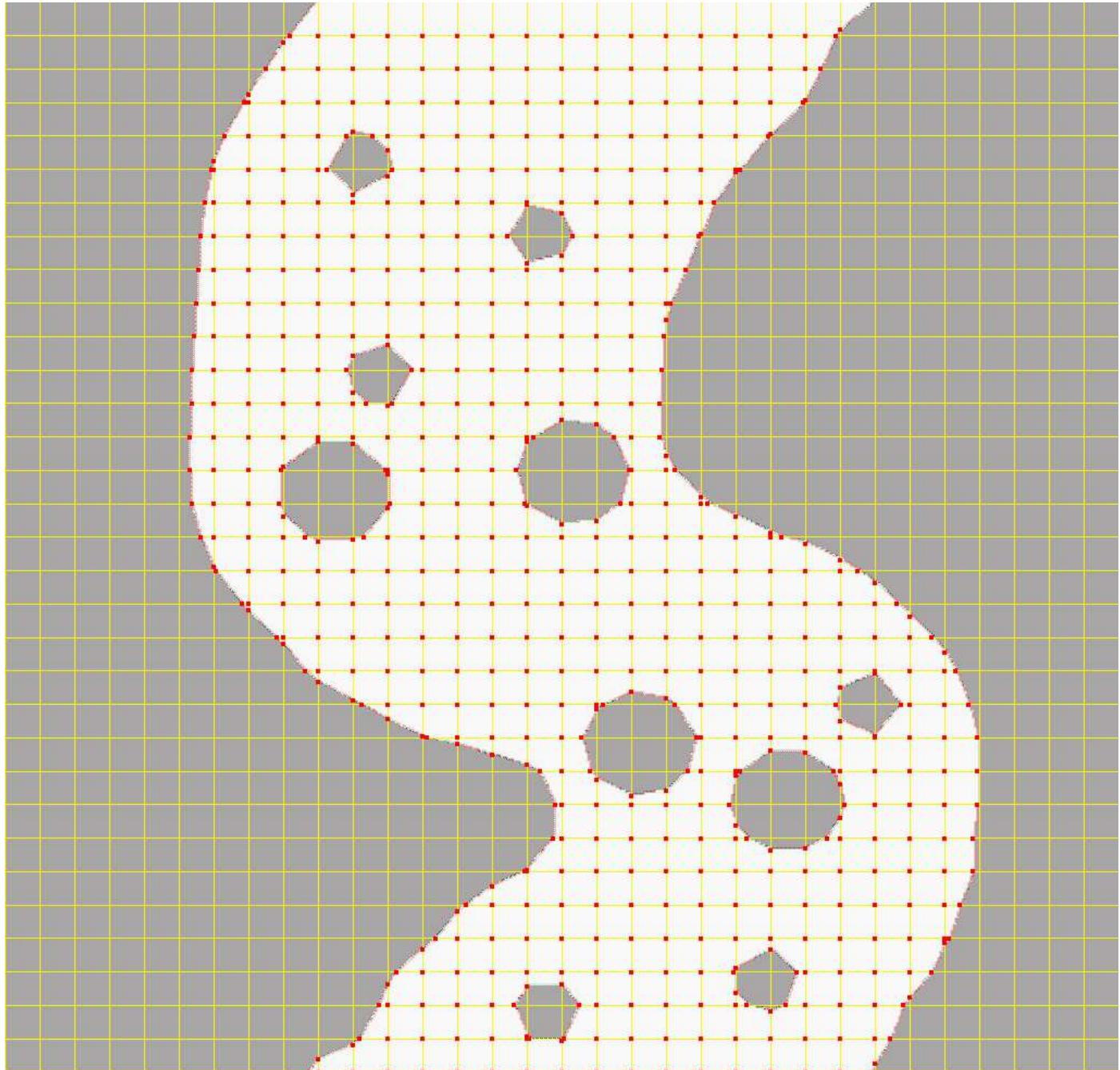
Chaque cellule est numérotée selon sa position dans la grille.

Pour chacune de ces cellules, nous avons identifié et numéroté les noeuds lui appartenant.

Toutes ces informations sont stockées dans un tableau appelé *Mesh*.

$Mesh[numerocellule][i]$  contient le numéro global du noeud local  $i$ , s'il existe, 0 sinon.

Sur la figure suivante, nous avons représenté la grille de discrétisation, ainsi que les noeuds pris en compte.

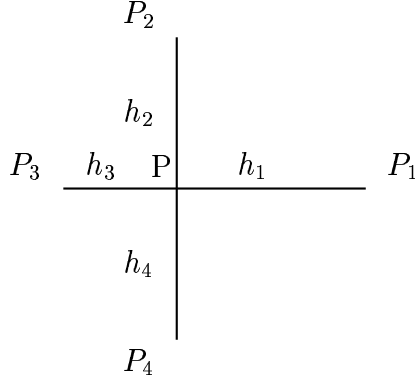


### 3.3 Discrétisation du problème

Nous allons maintenant écrire un schéma aux différences finies afin de résoudre le problème  $\mathcal{P}$ .

#### 3.3.1 Ecriture du problème sur $\Omega - \partial\Omega$

Soit  $P$  un noeud du maillage défini précédemment, et  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  ses noeud voisins représentés sur la figure ci-dessous :



où  $h_i$  désigne la distance du point  $P_i$  au point  $P$ .

L'équation à discrétiser est ;

$$\Delta \Phi(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega - \partial\Omega$$

Pour  $\Phi$  assez régulière, nous pouvons écrire les développements limités :

$$\Phi(P_1) = \Phi(P) + h_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x}(P) + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(P) + \frac{h_1^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}(x_p + sh_1, y_p) ds$$

$$\Phi(P_3) = \Phi(P) - h_3 \frac{\partial\Phi}{\partial x}(P) + \frac{h_3^2}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(P) - \frac{h_3^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}(x_p - sh_3, y_p) ds$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(P) \frac{h_3 h_1^2 + h_1 h_3^2}{2} + (h_1 + h_3)\Phi(P) + \frac{h_3 h_1^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}(x_p + sh_1, y_p) ds \\
 & - \frac{h_1 h_3^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}(x_p - sh_3, y_p) ds = h_3\Phi(P_1) + h_1\Phi(P_3) \quad (E)
 \end{aligned}$$

(E)  $\iff$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(P) \frac{h_3 h_1 (h_1 + h_3)}{2} &= h_3 \Phi(P_1) + h_1 \Phi(P_3) - (h_1 + h_3) \Phi(P) - \frac{h_3 h_1^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}(x_p + s h_1, y_p) ds \\ &\quad + \frac{h_1 h_3^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}(x_p - s h_3, y_p) ds \end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(P) &= \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)} \Phi(P_1) + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} \Phi(P_3) - \frac{2}{h_3 h_1} \Phi(P) \\ &\quad - \frac{h_1^2}{h_1 + h_3} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}(x_p + s h_1, y_p) ds + \frac{h_3^2}{h_1 + h_3} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}(x_p - s h_3, y_p) ds \end{aligned}$$

De même, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(P) &= \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)} \Phi(P_2) + \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)} \Phi(P_4) - \frac{2}{h_2 h_4} \Phi(P) \\ &\quad - \frac{h_2^2}{h_2 + h_4} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}(x_p, y_p + s h_2) ds + \frac{h_4^2}{h_2 + h_4} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}(x_p, y_p - s h_4) ds \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(P) &= \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)} \Phi(P_1) - \frac{2}{h_1 h_3} \Phi(P) + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} \Phi(P_3) + \epsilon_x(P) + \\ &\quad \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)} \Phi(P_2) - \frac{2}{h_2 h_4} \Phi(P) + \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)} \Phi(P_4) + \epsilon_y(P) \end{aligned}$$

avec :

$$\epsilon_x(P) = -\frac{h_1^2}{h_1 + h_3} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}(x_p + s h_1, y_p) ds + \frac{h_3^2}{h_1 + h_3} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}(x_p - s h_3, y_p) ds$$

$$\epsilon_y(P) = -\frac{h_2^2}{h_2 + h_4} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}(x_p, y_p + s h_2) ds + \frac{h_4^2}{h_2 + h_4} \int_0^1 (1-s)^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}(x_p, y_p - s h_4) ds$$

Posons  $\epsilon(P) = \epsilon_x(P) + \epsilon_y(P)$ .

Nous négligeons  $\epsilon(P)$ , ce qui nous conduit à un schéma aux différences à 5 points.

Si on appelle  $\Omega_h$  l'ensemble des points du maillage,

On cherche  $\{\Phi_h(P), P \in (\Omega_h \cap (\Omega - \partial\Omega)) = \Omega_h - \partial\Omega_h\}$  vérifiant :

$$\forall P \in (\Omega_h - \partial\Omega_h)$$

$$\frac{2}{h_1(h_1 + h_3)}\Phi_h(P_1) + \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)}\Phi_h(P_2) + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)}\Phi_h(P_3) + \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)}\Phi_h(P_4) - \left(\frac{2}{h_3h_1} + \frac{2}{h_2h_4}\right)\Phi_h(P) = 0$$

### 3.3.2 Conditions à l'amont et à l'aval

Nous avons vu précédemment que nous imposons les valeurs de  $\Phi$  à l'amont et à l'aval :

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = \Phi_0 & (x, y) \in \partial\Omega|_{amont} \\ \Phi(x, y) = \Phi_1 & (x, y) \in \partial\Omega|_{aval} \end{cases}$$

Le problème est de donner des valeurs "physiques".

Or, d'après la formule de Chézy, qui permet de déterminer la vitesse moyenne d'un écoulement, nous avons :

$$U = C\sqrt{ih}$$

où :

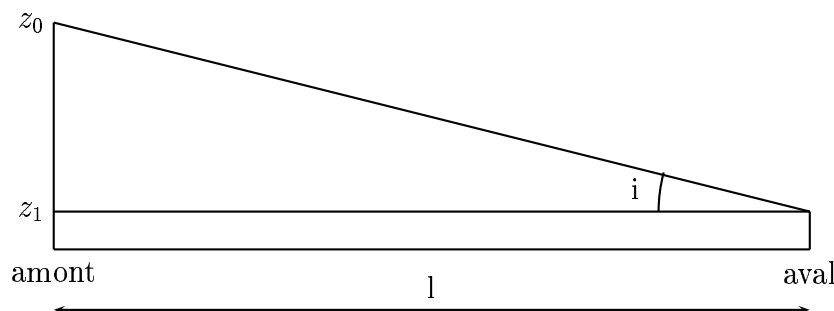
- U désigne la vitesse moyenne de l'écoulement
- i désigne la pente du ruisseau
- h désigne la hauteur d'eau
- C est un coefficient variant en fonction du cours d'eau considéré (nature du fond, largeur, pente).

Dans notre cas, nous choisirons  $C = 40m^{1/2}s^{-1}$ , ce qui correspond à un ruisseau de pente relativement faible, de largeur moyenne, avec un fond de graviers.

Nous remarquons que la valeur de  $\Phi_0$  peut être choisie de manière arbitraire, puisque  $\Phi$  est un potentiel.



Supposons que le ruisseau que l'on considère est de longueur  $l$  (connue).  
On désigne par  $z_0$  et  $z_1$  les cotes respectives à l'amont et à l'aval.



Pour  $i$  faible, nous pouvons écrire :

$$i = \frac{dz}{l} = \frac{z_0 - z_1}{l}$$

Si on impose  $\Phi_0 = 0$ , nous avons alors  $\Phi_1 = l U$ .

Ainsi, connaissant  $l$ ,  $z_0$ ,  $z_1$  et  $h$ , nous pouvons calculer  $U$ , et en déduire  $\Phi_1$ .

Nous avons alors :

$$\begin{cases} \forall P \in \Omega_h \cap \partial\Omega|_{\text{amont}} & \Phi_h(P) = 0 \\ \forall P \in \Omega_h \cap \partial\Omega|_{\text{aval}} & \Phi_h(P) = \Phi_1 \text{ calculé précédemment} \end{cases}$$

### 3.3.3 Conditions au bord du ruisseau

Nous avons exprimé la condition au bord du ruisseau par la relation :

$$\nabla\Phi(x, y) \cdot \vec{n} = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega|_{\text{parois}}$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale à  $\partial\Omega|_{\text{parois}}$

Il s'agit d'exprimer cette relation pour tout  $P$  appartenant à  $\Omega_h \cap \partial\Omega|_{\text{parois}}$ , et ce quelle que soit la configuration dans laquelle on se trouve.

Pour cela, plusieurs méthodes ont été testées, et il a été relativement difficile de trouver un schéma de discrétisation parfaitement satisfaisant.

La première idée a été d'exprimer le gradient de  $\Phi$  en  $P$  en fonction de ses valeurs aux noeuds voisins appartenant au bord. Plusieurs cas se dégageaient alors selon que la paroi était convexe,

concave ou droite au voisinage de P, les interpolations nécessaires s'écrivant de manière différente. Les résultats obtenus n'étant pas satisfaisants (on remarquait un découplage entre le bord et l'intérieur), nous avons donc choisi d'exprimer différemment cette condition au bord.

Le principe est le suivant :

Nous savons que les isovalues de  $\Phi$  sont des lignes parallèles au gradient de  $\Phi$ .

Or, puisque

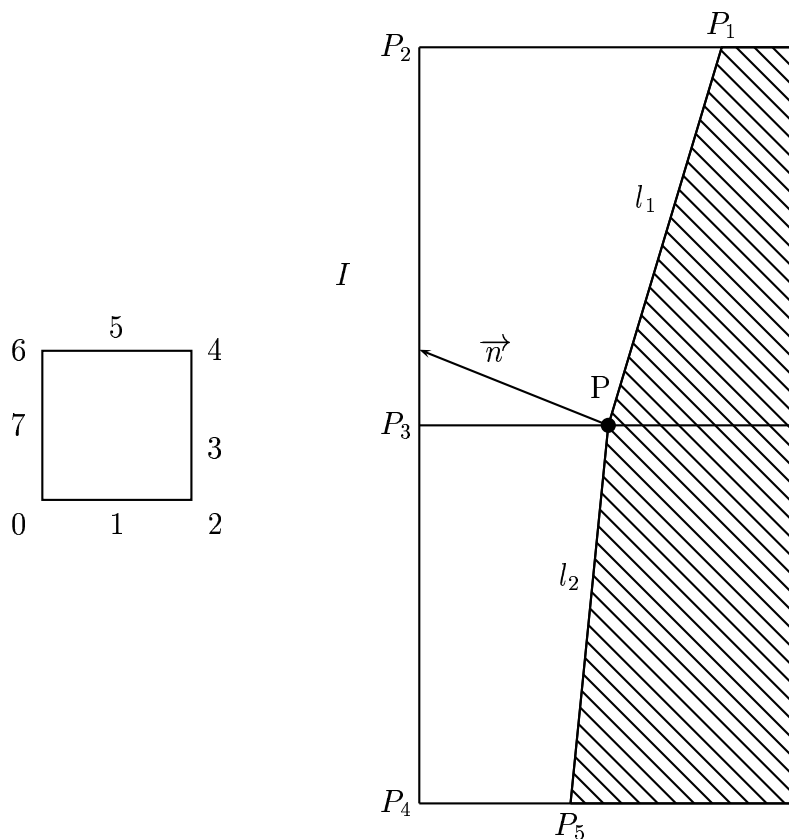
$$\nabla\Phi(x, y) \cdot \vec{n} = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega|_{\text{parois}}$$

cela nous permet d'affirmer que  $\Phi$  garde une valeur constante selon la direction  $\vec{n}$  au voisinage du point de coordonnées (x,y).

Nous allons écrire cette condition pour tous les points P appartenant à  $\Omega_h \cap \partial\Omega|_{\text{parois}}$

Seuls les noeuds d'indice 1 et 7 (cf numérotation) de chaque cellule doivent être traités, car le fait de les balayer toutes nous permet alors de traiter tous les noeuds de bord.

### Cas d'un noeud d'indice 1



D'après ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$\Phi_h(P) \simeq \Phi_h(I)$$

Le problème est d'écrire  $\Phi_h(I)$  en fonction des  $\Phi_h(P_i)$  par interpolation.

Nous nous plaçons dans le repère orthonormé d'origine  $P_3$ , et d'axes parallèles à  $\overrightarrow{P_3P}$  et  $\overrightarrow{P_3P_2}$ .

Dans le cas représenté, nous pouvons écrire :

$$(1) \begin{cases} x = x_p + \alpha n_x \\ y = y_p + \alpha n_y \end{cases}$$

où :

- $(x, y)$  sont les coordonnées de I
- $(x_p, y_p)$  sont les coordonnées de P
- $(n_x, n_y)$  sont les composantes de  $\vec{n}$
- $\alpha$  est un réel positif

Or, nous avons vu précédemment que les normales n'étaient connues que sur le segment représentant la paroi à l'intérieur de chaque cellule.

On obtient donc  $\vec{n}$  en interpolant les normales de chacune des deux cellules.

Si on désigne par  $\vec{n}_1$  la normale de composantes  $(n_{x1}, n_{y1})$  associée à la paroi de longueur  $l_1$  et par  $\vec{n}_2$  la normale de composantes  $(n_{x2}, n_{y2})$  associée à la paroi de longueur  $l_2$ , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{cases} n_x = \frac{l_1 n_{x2} + l_2 n_{x1}}{l_1 + l_2} \\ n_y = \frac{l_1 n_{y2} + l_2 n_{y1}}{l_1 + l_2} \end{cases}$$

Les coordonnées de P et les composantes de  $\vec{n}$  étant connues, nous pouvons déduire de (1) :

$$\alpha = \frac{-x_p}{n_x} \quad (x \text{ étant nul})$$

On en déduit alors :

$$y = y_p - \frac{x_p}{n_x} n_y$$

Suivant le signe de  $y$ , on doit interpoler soit entre  $P_2$  et  $P_3$ , soit entre  $P_3$  et  $P_4$ .

Dans notre cas de figure,  $y$  est positif, donc l'interpolation doit se faire entre  $P_2$  et  $P_3$ , et

nous pouvons écrire :

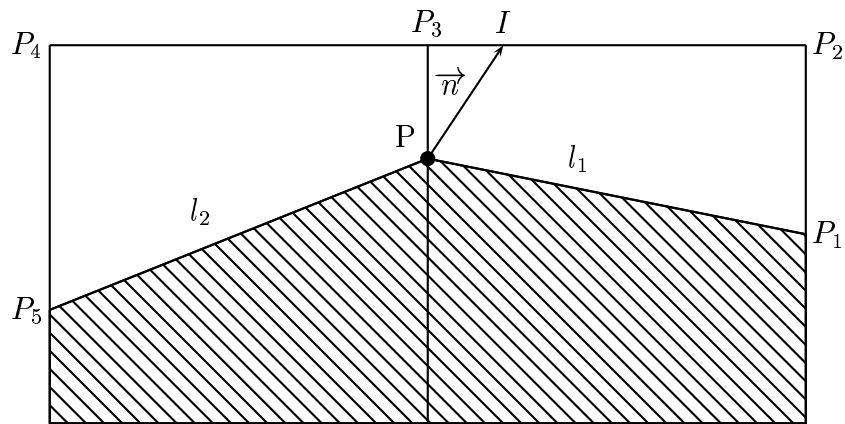
$$\Phi_h(I) = y\Phi_h(P_2) + (1 - y)\Phi_h(P_3)$$

d'où :

$$y\Phi_h(P_2) + (1 - y)\Phi_h(P_3) - \Phi_h(P) = 0$$

Les autres cas de figure se traitent de manière analogue (cas  $y < 0$  ou intersection de  $\vec{n}$  avec un autre côté).

### Cas d'un noeud d'indice 7



De la même manière que pour le cas d'un noeud d'indice 1, nous pouvons écrire :

$$\Phi_h(P) \simeq \Phi_h(I)$$

Nous calculons ensuite les coordonnées du point I, point d'intersection de la normale interpolée en P, et des côtés des cellules.

Suivant la position de I, on interpole la valeur de  $\Phi_h(I)$  de la même manière que précédemment. Comme pour le cas d'un noeud d'indice 1, la condition au bord s'écrit sous la forme d'une équation reliant le noeud du bord sur lequel on écrit la condition, et deux autres noeuds voisins, qui peuvent être intérieurs au ruisseau ou au bord.

### Dans les deux cas

La structure cellule telle qu'elle a été décrite précédemment nous permet d'avoir accès à toutes les données nécessaires à l'écriture des conditions aux bords et du problème sur  $\Omega - \partial\Omega$ .

Le balayage de toutes les cellules se fait en parcourant le tableau  $CL$  défini à la section 3.2.

Nous appellerons  $\{eq\}$  le système formé par les équations traduisant les conditions au bord.

### 3.3.4 Problème discrétisé

On cherche  $\{\Phi_h(P) \mid P \in \Omega_h\}$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall P \in (\Omega_h - \partial\Omega_h) \quad \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)}\Phi_h(P_1) + \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)}\Phi_h(P_2) + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)}\Phi_h(P_3) + \\ \quad \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)}\Phi_h(P_4) - \left(\frac{2}{h_3h_1} + \frac{2}{h_2h_4}\right)\Phi_h(P) = 0 \\ \forall P \in \Omega_h \cap \partial\Omega|_{amont} \quad \Phi_h(P) = 0 \\ \forall P \in \Omega_h \cap \partial\Omega|_{aval} \quad \Phi_h(P) = \Phi_1 \text{ connu} \\ \forall P \in \Omega_h \cap \partial\Omega|_{parois} \quad \{eq\} \end{array} \right.$$

A priori, le problème tel qu'il est posé (résolution d'un laplacien nul avec condition de Dirichlet et de Neumann aux bords) admet une solution unique, sauf cas pathologiques.

On écrit le problème sous forme matricielle en numérotant les points de  $\Omega_h$ .

On aboutit à :

$$A_h \cdot \varphi_h = b_h \quad \text{où } \varphi_h = (\Phi_h(P_i))_{i \in N}$$

#### Numérotation des noeuds

Vu la complexité du domaine introduite par les conditions de bord, cette numération ne peut être faite par ligne ou par colonne de manière simple.

En effet, un obstacle à l'intérieur du ruisseau entraîne la création de points de bord à l'intérieur même du ruisseau. Aussi la numérotation de chacun des noeuds se fait par ligne en incluant ces noeuds de bord au fur et à mesure qu'on les rencontre.

Il devient alors difficile de déterminer avec exactitude les propriétés de la matrice, qui, vu les conditions au bord, n'est pas forcément à structure symétrique (on remarque cependant que pour les points intérieurs non proches d'un bord, elle est symétrique à diagonale dominante).

Démontrer rigoureusement son inversibilité est dès lors un problème.

On peut admettre que, puisque nous simulons un phénomène naturel physique et vu la manière classique dont le problème est posé (diffusion avec conditions de Dirichlet et de Neumann aux bords), la solution du problème existe et est unique.

### 3.4 Résultats

Nous résolvons le problème en inversant la matrice  $A_h$  à l'aide de l'algorithme de Gauss.

Bien qu'étant chère en temps de calcul, cette méthode nous permet de contrôler que la matrice  $A_h$  que l'on obtient est effectivement inversible (ce qui est vrai dans tous les cas que nous avons testés).

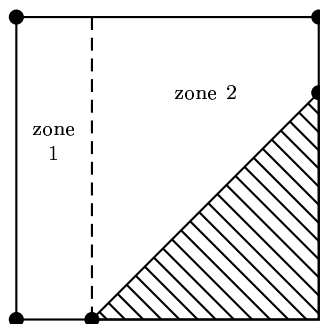
A terme, il pourrait être utile d'écrire une méthode plus rapide (par exemple une méthode itérative type Gauss Seidel).

Voici ci-après les résultats obtenus. Nous avons représenté les iso- $\Phi$ , c'est à dire les "bandes" où  $\Phi$  garde une valeur voisine. Ces lignes sont appelées les équipotentielles. Elles sont orthogonales en tout point aux lignes de courant. D'après les valeurs de  $\Phi$  aux noeuds, nous obtenons les valeurs de  $\Phi$  en tout point du domaine par interpolation.

Cette interpolation n'est pas un problème facile. En effet, suivant la cellule dans laquelle on se trouve, nous pouvons connaître les valeurs de  $\Phi$  en 3, 4 ou 5 noeuds. Il s'agit alors d'interpoler  $\Phi$  sur un polygone, ce qui est un problème non trivial.

Une idée naïve serait de faire une interpolation "barycentrique". Mais la valeur de  $\Phi$  sur un côté du polygone ne dépendrait pas uniquement des valeurs aux deux extrémités du côté, et nous obtiendrions des résultats non continus entre deux cellules.

Nous avons essayé d'écrire une interpolation "barycentrique modifiée", c'est à dire en pondérant par  $\frac{1}{d}$  où  $d$  désigne la distance au côté. Mais cette méthode donnait un "poids" plus important aux noeuds qui étaient rapprochés les uns des autres par rapport à ceux qui étaient plus éloignés à l'intérieur d'une même cellule. Ceci n'étant pas justifié d'un point de vue physique, nous avons choisi une autre méthode, basée sur le découpage du polygone en différentes zones triangulaires ou quadrilatérales, nous ramenant ainsi à des interpolations linéaires ou bilinéaires, par exemple :



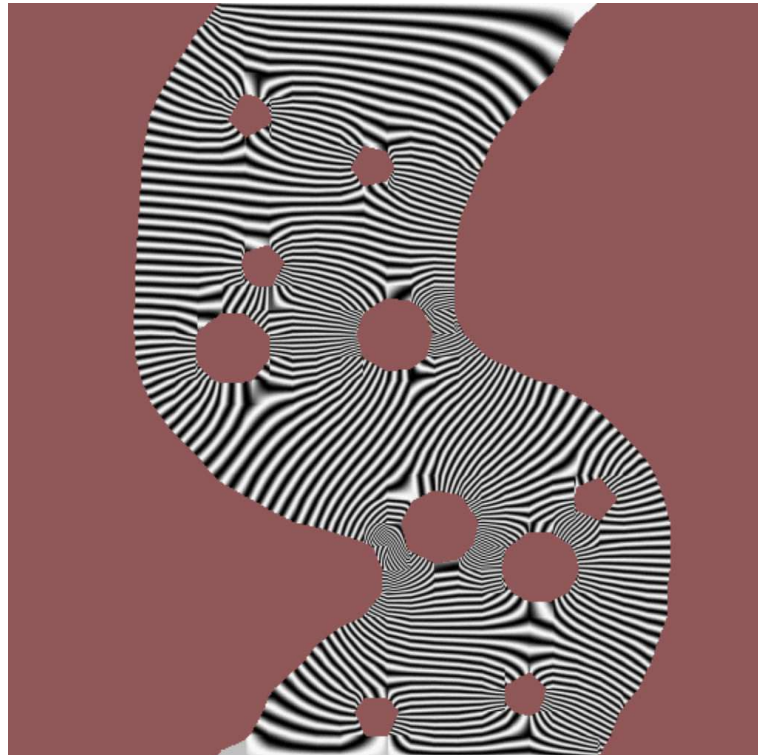
Cette interpolation nous permet le tracé des différentes "bandes".

Les niveaux de gris sont calculés à partir de  $\sin(k\Phi)$ .

32 x 32



En affinant les "bandes" :

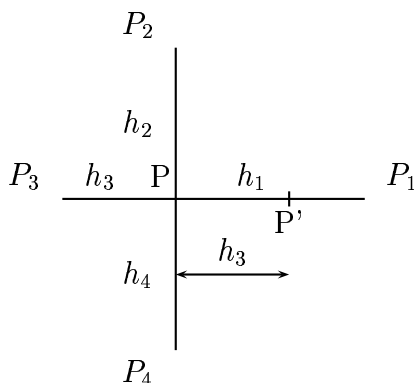


## 4 Calcul des vecteurs vitesse

D'après la section 3, nous avons la relation :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (3)$$

Connaissant la valeur de  $\Phi$  à chaque noeud, nous pouvons en déduire le vecteur vitesse. Plaçons nous dans le cas général, représenté par le schéma suivant :



### 4.1 Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(P)$ , $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(P)$ , P intérieur au domaine

Les valeurs de  $\Phi$  pouvant évoluer fortement d'un noeud à l'autre, et ce surtout près des bords (cas où les  $h_i$  ne sont pas tous égaux), nous avons choisi de centrer le schéma.

Supposons par exemple  $h_3 < h_1$ . Nous introduisons alors un point supplémentaire P', situé entre P et  $P_1$ , et dont la distance à P est égale à  $h_3$ .

Nous écrivons alors :

$$\Phi(P') = \Phi(P) \frac{1 - h_3}{h_1} + \Phi(P_1) \frac{h_3}{h_1}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(P) = \frac{\Phi(P') - \Phi(P_3)}{2h_3} = v_x$$



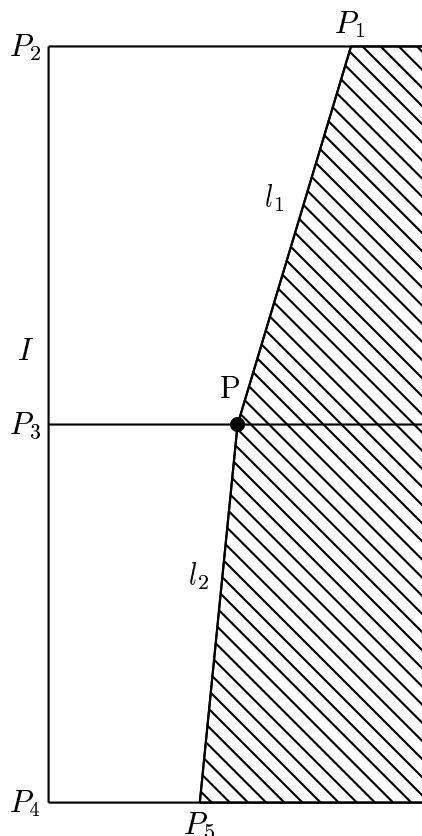
Remarque :

Si  $h_1 = h_3$ , le schéma est naturellement centré.

Le calcul de  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(P)$  se fait de manière analogue.

## 4.2 Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(P)$ , $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(P)$ , $P$ appartenant à un bord

Le schéma d'un noeud de type 1 est le suivant :



On calcule  $l_1$  et  $l_2$ , correspondant à la longueur du bord dans chacune des deux cellules.

Il s'agit d'exprimer  $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{V}$  en  $P$ .

On peut supposer que  $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$  a une direction parallèle à  $\overrightarrow{P_5P_1}$ .

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \overrightarrow{P_5P_1})$ , avec  $O$  et  $\vec{i}$  précédemment définis, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \begin{cases} 0 \\ \alpha \end{cases}$$

avec  $\alpha$  à exprimer en fonction de  $\Phi(P_1)$ ,  $\Phi(P_5)$  et  $\Phi(P)$ .

Là encore, nous avons choisi de centrer le schéma de la manière suivante :

Supposons  $l_1 < l_2$ .

On introduit alors une valeur de  $\Phi$  intermédiaire,  $\Phi_{int}$ , définie par :

$$\Phi_{int} = \frac{l_1 - l_2}{l_2} \Phi(P) + \frac{l_1}{l_2} \Phi(P_5)$$

Ainsi, nous avons :

$$\alpha = \frac{\Phi(P_1) - \Phi_{int}}{2l_1}$$

Un changement de repère nous permet d'exprimer les coordonnées de  $\overrightarrow{grad} \Phi$  dans le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . On obtient :

$$\overrightarrow{grad} \Phi = \begin{cases} \frac{\Phi(P_1) - \Phi_{int}}{2l_1} \cdot \frac{\overrightarrow{P_5 P_1} \cdot \vec{i}}{\|\overrightarrow{P_5 P_1}\|} = v_x \\ \frac{\Phi(P_1) - \Phi_{int}}{2l_1} \cdot \frac{\overrightarrow{P_5 P_1} \cdot \vec{j}}{\|\overrightarrow{P_5 P_1}\|} = v_y \end{cases}$$

Le cas d'un noeud d'indice 7 se traite de manière analogue.

### 4.3 Résultats

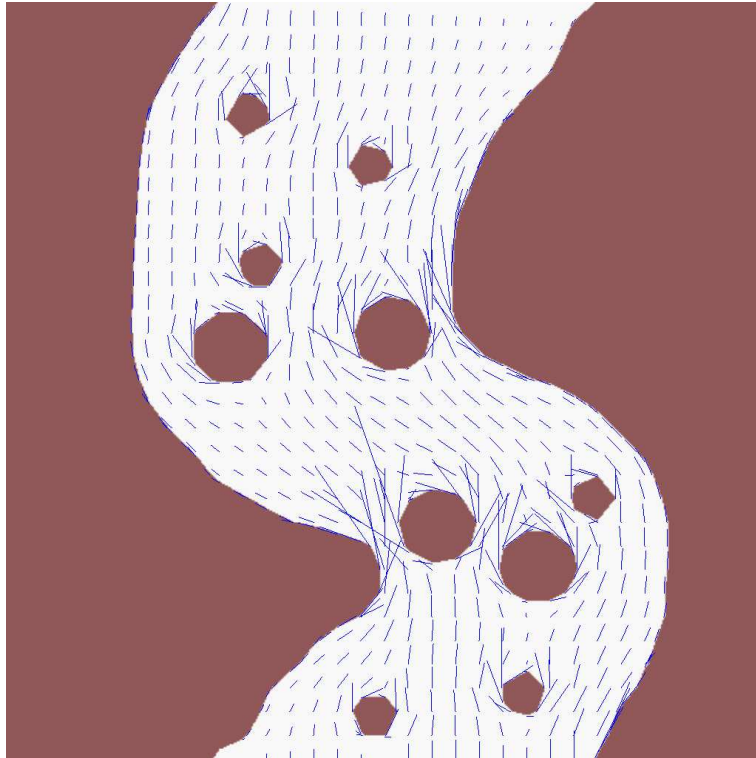
De la même manière que pour  $\Phi$ , la connaissance des vecteurs vitesse aux noeuds nous permet d'interpoler le vecteur vitesse en n'importe quel point du domaine.

Au niveau de l'affichage, nous avons la possibilité de tracer les vecteurs vitesse aux noeuds, ou bien en plusieurs points du domaine, plus ou moins proches les uns des autres.

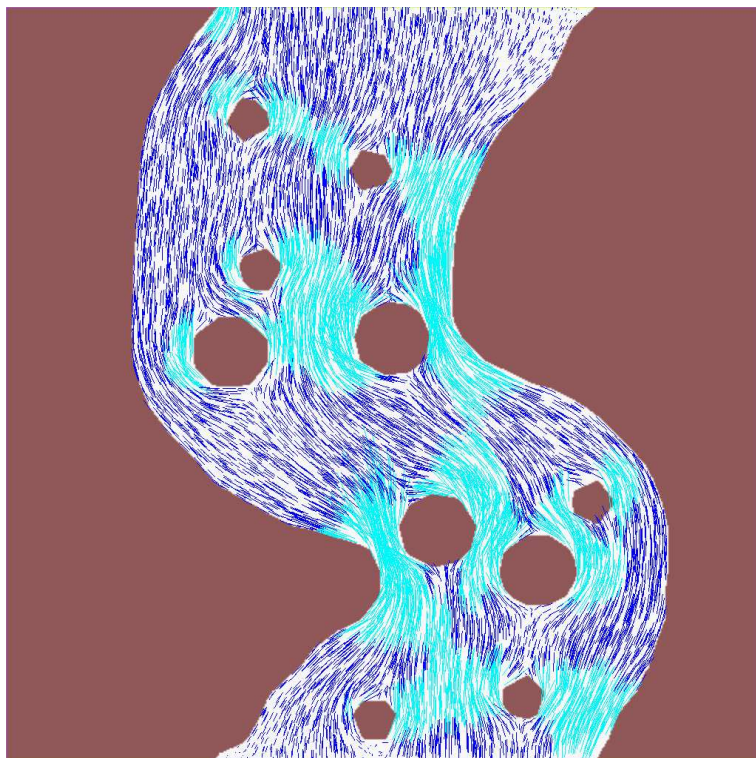
Les vecteurs vitesse étant connus en tout point, il est alors facile de tracer des lignes de courant. Pour construire une ligne de courant à partir d'un point choisi par un clic de souris, il suffit d'évaluer le vecteur vitesse en ce point, de se déplacer dans sa direction d'une distance petite choisie arbitrairement, et de relier les deux points ainsi obtenus. On continue ce tracé itératif jusqu'à ce que le vecteur vitesse ne puisse plus être évalué (sortie du domaine).

On peut également construire des lignes de courant inverse, c'est à dire remontant le courant.

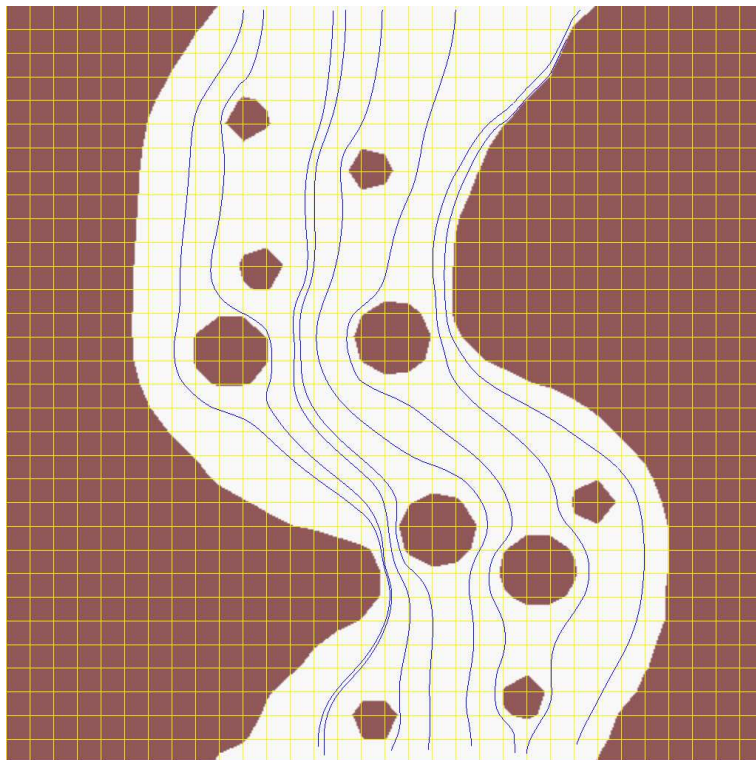
Tracé aux noeuds :



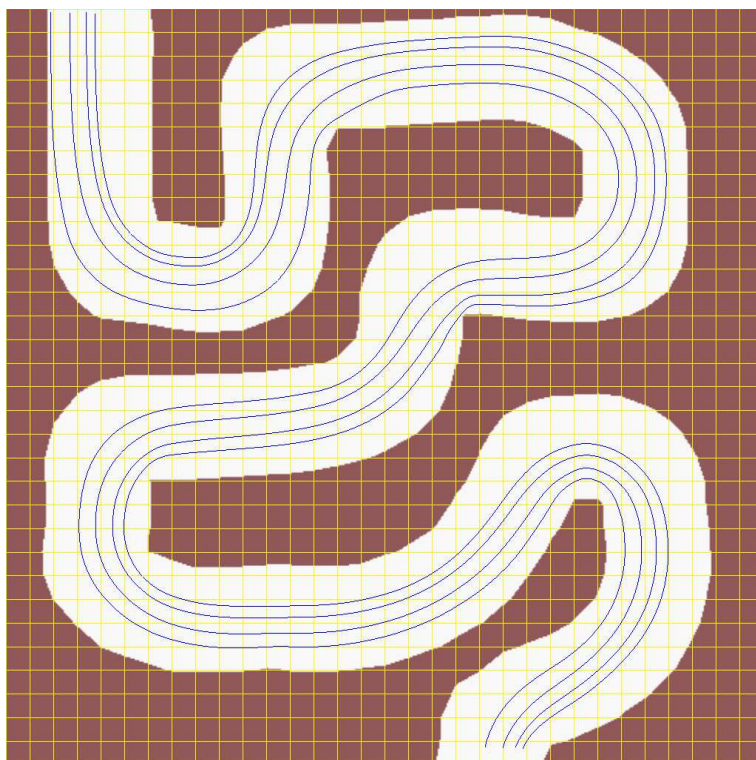
Tracé général :



Tracé de lignes de courant :



Autre exemple :



## 5 Animation

Pour les applications de synthèse d'images, qui souhaitent visualiser des scènes "vivantes", il faut pouvoir animer le fluide.

Tout d'abord, il faut pouvoir matérialiser le mouvement de l'écoulement correspondant au champ de vitesse statique que l'on a déterminé à la section 4. Ceci pourra se faire en suivant la trajectoire de particules fluides particulières, c'est à dire en déposant des "flotteurs" dérivant dans le champ de vitesse.

Mais les particules d'eau sont transparentes, aussi ce n'est que très minoritairement les trajectoires qui donnent l'impression de mouvement (e.g transport d'impuretés, de bulles..), car un ruisseau calme présente une surface qui paraît totalement immobile si le champ de vitesse ne fluctue pas.

Donc, dans un deuxième temps, on va s'intéresser à perturber l'écoulement, pour passer d'un régime statique à un régime quasi-statique.

Toutes les constructions d'ondes que l'on sera amené à faire par la suite seront ainsi modulées dans le temps, et c'est ce mouvement là que l'on pense le plus conforme à l'image que l'on peut se faire d'un fluide.

### 5.1 Principe

Le mouvement est obtenu par calcul itératif de nouvelles positions à partir du champ de vitesse :

$$P(t + dt) = P(t) + V dt$$

On fixe donc un pas de temps  $dt$  correspondant à l'avancée du temps de simulation entre deux itérations, qu'il faut choisir de telle sorte que le mouvement ne soit ni trop lent, ni trop saccadé, et que la simulation reste fiable (c'est à dire que  $P$  doit se déplacer de moins qu'une cellule).

A partir de là, il y a deux options selon l'application visée :

- Pour du calcul d'image réalistes, le temps de calcul ne compte pas, et on se contente de sauver l'image dans un fichier à chaque itération. Il suffira ensuite de visualiser la série d'images à la vitesse convenable, ou de les écrire sur bande vidéo.
- Pour de la visualisation interactive, on veut voir les résultats au fur et à mesure, avec de préférence une image tous les 25èmes de seconde pour ne pas subir de saccades. On constate qu'il existe alors deux temps : le temps dans la simulation, et le temps réel écoulé pour l'utilisateur. Pour que le mouvement de la simulation interactive paraisse réaliste, il faut qu'il y ait identité entre ces deux temps : le pas de temps de simulation  $dt$  doit coïncider avec le temps qu'il faut pour calculer une itération. Il y a donc un asservissement à faire, car la charge de calcul peut être variable, avec tous les problèmes qu'on imagine.

## 5.2 Flotteurs

La simulation des flotteurs est basée sur le même principe que celui de la création d'une ligne de courant.

On positionne un flotteur, par exemple par un clic de souris en un point du ruisseau. Pour chacun des flotteurs, on évalue le vecteur vitesse à sa position, et on calcule alors sa position au pas de temps suivant (à  $t + dt$ , où  $dt$  désigne le temps entre deux réaffichages).

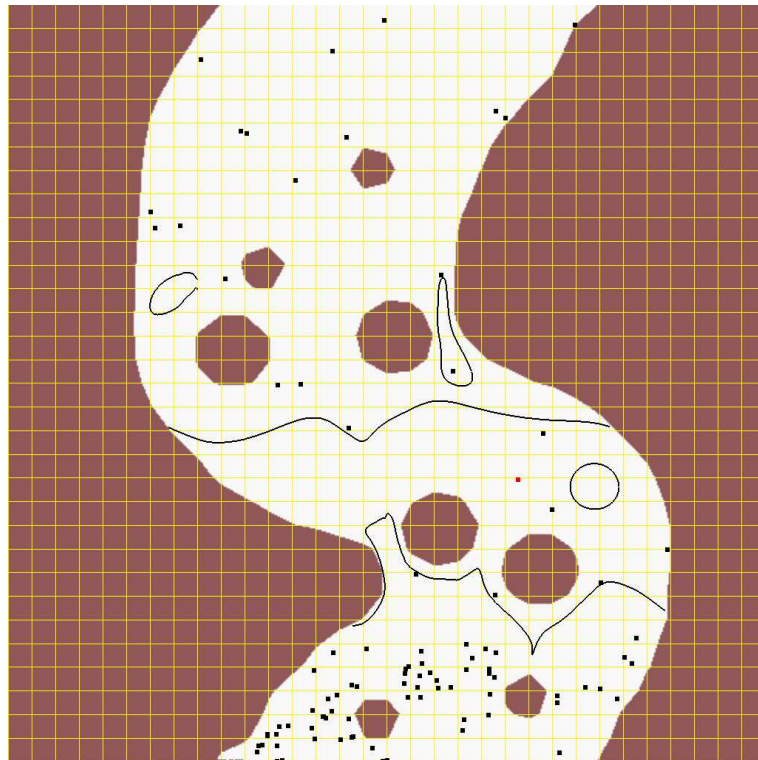
On fait un réaffichage des flotteurs après chaque nouveau calcul de leurs positions (ce qui donne l'impression de mouvement), et ce tant qu'il reste des flotteurs à afficher.

Afin d'expérimenter et de mettre en évidence le comportement de l'écoulement, nous avons implémenté plusieurs modes de création de flotteurs possibles :

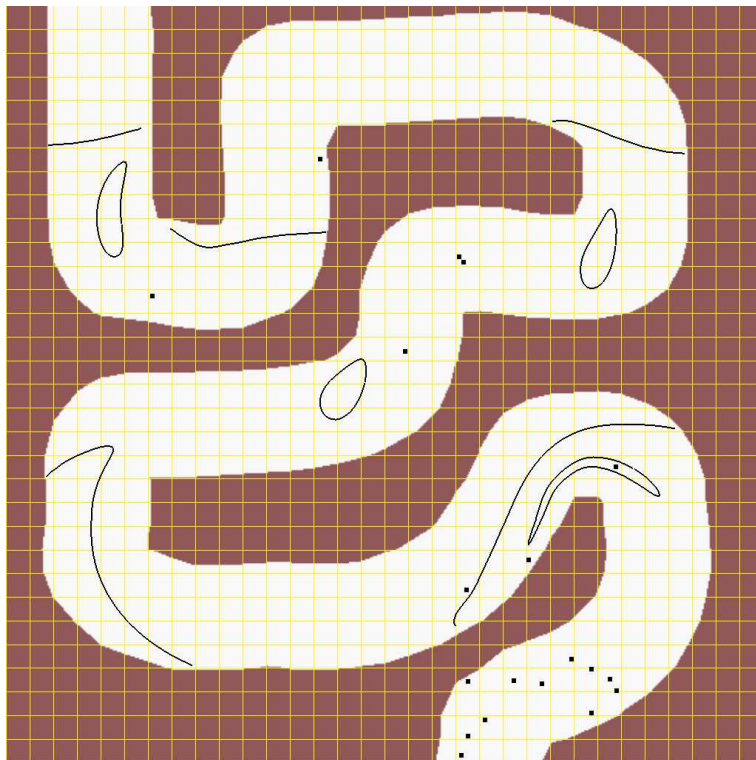
- de manière isolée : un par un
- en ligne : un clic de souris crée une ligne de flotteurs reliés entre eux
- en rond : un clic de souris crée un cercle de flotteurs reliés entre eux

Les images suivantes représentent l'évolution de flotteurs de différents types. On remarquera les déformations des lignes et des cercles de flotteurs à proximité des obstacles.

Evolution de flotteurs :



Autre exemple :



### 5.3 Perturbations

On veut introduire au sein de l'écoulement des perturbations locales du champ de vitesse. Le nouveau champ de vitesse que l'on obtient doit à priori lui aussi vérifier l'équation du mouvement, si l'on veut qu'il paraisse crédible.

Si les perturbations que l'on construit sont locales, on peut les supposer à support restreint, et donc ne touchant jamais un bord. Alors, il suffit de construire des perturbations qui créent localement un champ de vitesse à divergence nulle : l'équation du mouvement étant linéaire, la somme de la solution de départ et d'une solution locale est encore solution.

Cette contrainte nous touche en fait très peu, dans la mesure où la troisième dimension (hauteur d'eau) peut être adaptée pour la satisfaire.

Nous avons créé trois types de perturbations selon ce principe : fluctuation du module de la vitesse, tourbillon, et sources.

Dans les trois cas, la zone d'influence de la perturbation est réduite à un disque de rayon  $r$ , que l'on choisira suffisamment petit (le centre sera choisi par un clic de souris pendant les tests). Pour une simulation "naturelle", on générera automatiquement des perturbations aléatoires à l'entrée du domaine.

Afin d'obtenir un champ de vitesse continu, les perturbations que nous avons défini ont un effet nul sur le cercle de rayon  $r$ , et un effet maximum au centre du disque, l'effet variant selon une Gaussienne.

### 5.3.1 Fluctuation du module de la vitesse

Pour un point se situant dans le disque d'influence de la perturbation, et en lequel le vecteur vitesse a pour coordonnées  $(v_x, v_y)$ , la perturbation agit de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_x = v_x (1 + a * d) \\ v_y = v_y (1 + a * d) \end{cases}$$

$a$  désignant l'amplitude de la perturbation, et  $d$  représentant l'intensité de la perturbation ( $d$  vaut 0 sur le cercle d'influence, 1 au centre, et varie de l'un à l'autre selon une Gaussienne).

### 5.3.2 Tourbillon

Pour un point se situant dans le disque d'influence de la perturbation, et en lequel le vecteur vitesse a pour coordonnées  $(v_x, v_y)$ , la perturbation agit de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_x = v_x + (d * a * V * \frac{-d_y}{D}) \\ v_y = v_y + (d * a * V * \frac{d_x}{D}) \end{cases}$$

$a$  désignant l'amplitude,  $d$  l'intensité,  $D$  la distance du point considéré au centre du disque,  $V$  le module de la vitesse au point considéré, et  $(d_x, d_y)$  les coordonnées du vecteur reliant le centre du disque au point considéré.

### 5.3.3 Source

Pour un point se situant dans le disque d'influence de la perturbation, et en lequel le vecteur vitesse a pour coordonnées  $(v_x, v_y)$ , la perturbation agit de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_x = v_x + (d * a * V * \frac{d_x}{D}) \\ v_y = v_y + (d * a * V * \frac{d_y}{D}) \end{cases}$$

avec les notations précédentes.

Les perturbations qui apparaissent en surface comme des sources correspondent à une remontée d'eau, associée à un anneau de vorticité horizontale, ceci pour illustrer comment la troisième dimension vient assurer  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$    un écoulement qui, vu de dessus, ne semble pas respecter cette contrainte.



Afin d'obtenir un champ de vitesse animé, il est intéressant de faire dériver au sein de l'écoulement les différentes perturbations, en utilisant les flotteurs précédemment créés.

## 5.4 Perturbations associées à un flotteur

On désire faire dériver les perturbations créées. Pour cela, on crée des flotteurs particuliers, qui seront porteurs de ces perturbations.

Le principe est le suivant :

Un flotteur est un objet ponctuel, défini par sa position à l'instant  $t$ . Cette position sera choisie comme centre d'une perturbation. Chaque position du flotteur définit une zone d'influence de la perturbation, qui évolue au cours du temps. En faisant des réaffichages du champ de vitesse pour chaque nouvelle position du flotteur perturbé, ce dernier s'anime.

Le déplacement du flotteur est commandé par le champ de vitesse non perturbé (la perturbation qu'il porte ne l'influence pas). En revanche, il perturbe les flotteurs "normaux" qui l'entourent.

Nous avons représenté sur les images de la page suivante l'évolution de différentes perturbations.

Les flotteurs perturbateurs sont représentés par des carrés rouges.

Nous avons placé dans l'écoulement des lignes de flotteurs, afin de visualiser l'effet que les perturbations avaient sur elles. Ainsi, on peut voir la ligne s'enrouler sur elle-même en présence d'un tourbillon, ou bien s'incurver en présence d'une source.

Les perturbations créées vont permettre à terme de faire fluctuer les ondes stationnaires que l'on va construire, ce qui fera l'objet des sections suivantes.

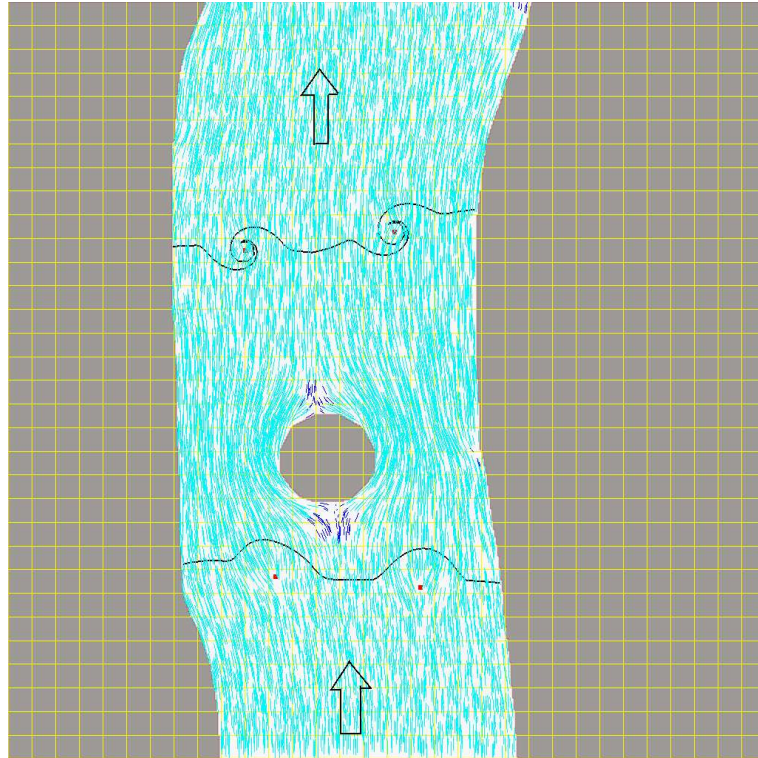
## 5.5 Perturbation des ondes

Les fluctuations locales de vitesse vont également modifier les ondes stationnaires à la surface du ruisseau, et cette altération va ensuite se propager le long des ondes ; mais le mouvement des ondes est différent de celui des particules fluides.

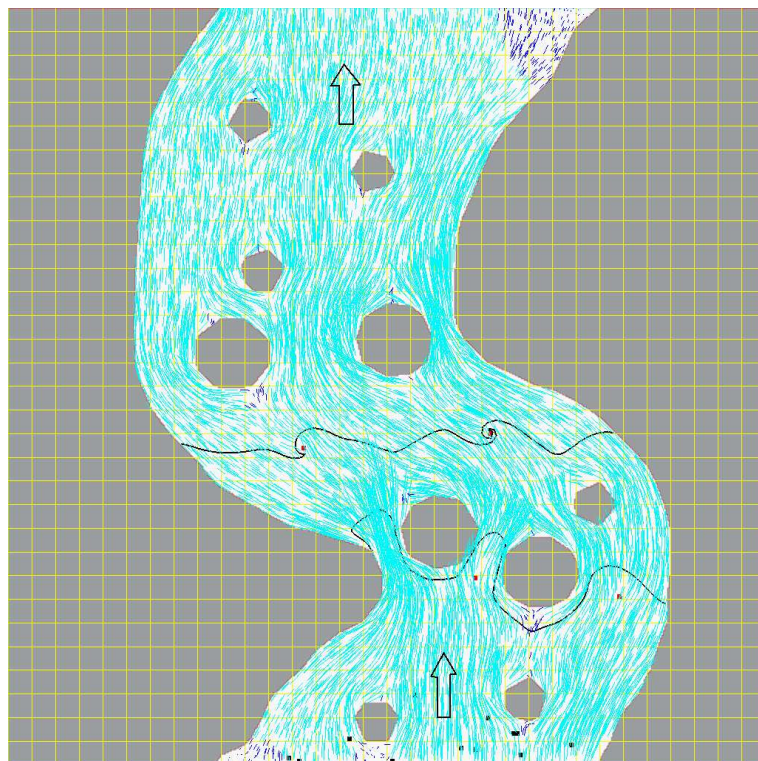
Aussi, le traitement de cette propagation des perturbations est plus complexe que celui d'un flotteur.

Nous traiterons ce sujet à la section 9.

Evolution de perturbations :



Autre exemple :



## 6 Ondes de surface

Le principal phénomène que l'on désire simuler est la formation des différents types d'ondes stationnaires se créant à la surface du ruisseau, produites principalement par les obstacles immergés ou émergés.

L'objet de ce chapitre est de faire un résumé des connaissances qui nous sont utiles à leur sujet (quels différents types d'ondes existent ? quel est leur mode de création ? leur mode d'évolution ?)

Nous parlerons tout d'abord d'une grandeur physique primordiale, le nombre de Froude, qui permet de déterminer si la formation d'ondes de choc est possible.

Nous verrons ensuite les différents types d'onde et leurs particularités.

### 6.1 Le nombre de Froude

Pour commencer, plaçons nous dans le cas d'une étendue d'eau immobile, à l'intérieur de laquelle nous faisons évoluer un objet à la vitesse  $V$ .

Cet objet va créer des ondes à la surface de l'eau en se déplaçant.

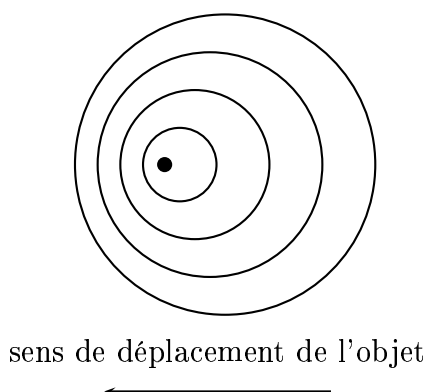
Les ondes créées par l'objet ont elles-mêmes une vitesse propre, que l'on notera  $c$ .

Plusieurs cas sont alors possibles :

cas 1 :  $V < c$

La source se déplace plus lentement que les ondes qu'elle crée.

Nous avons alors une configuration du type "cercles emboîtés", illustrée par le schéma suivant :

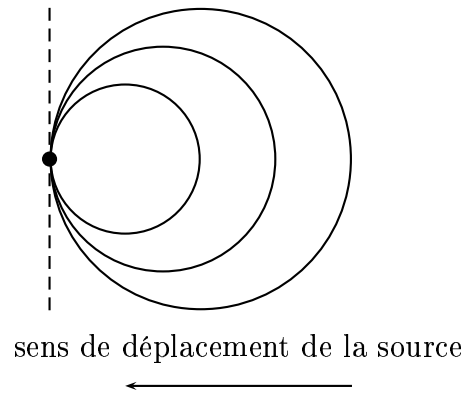


Les ondes de surface peuvent remonter vers l'amont et transmettre de l'énergie au fluide.

Ainsi "informé" de la venue d'un objet, le fluide a le temps de prendre ses dispositions pour se préparer à l'accueillir : il s'écarte avant que l'objet ne soit sur lui.

cas 2 :  $V = c$

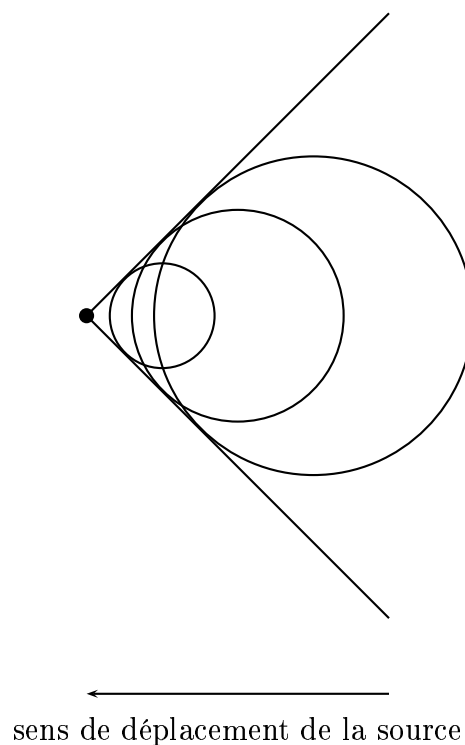
La source et les ondes qu'elle génère se déplacent à la même vitesse.  
Nous avons alors la configuration illustrée par le schéma suivant :



cas 3 :  $V > c$

Les ondes de surface ne peuvent pas se prolonger vers l'amont. Il y a formation d'ondes de choc.

Nous avons alors la configuration illustrée par le schéma suivant :



Nous remarquons que les ondes créées par la source restent à tout instant contenues à l'intérieur d'un cône ayant pour sommet l'objet.

Si l'objet est petit, par exemple un bâton, on observe alors un sillage léger. En revanche, dans le cas d'un gros objet (par exemple une pierre ou une pile de pont), on observe un sillage plus prononcé, qu'on appelle *onde de choc*.

L'onde de choc modifie localement l'écoulement :

A l'avant de l'objet, l'eau est brusquement ralentie, et le niveau d'eau s'élève.

A l'arrière de l'objet, le niveau d'eau est réajusté pour retrouver sa valeur amont.

L'étude des ondes se formant aux abords des obstacles à l'intérieur d'un ruisseau peut se ramener à l'étude des trois cas précédents. En effet, que l'eau soit immobile et que l'objet bouge, ou que l'eau soit animée d'un mouvement et que l'objet soit fixe (comme cela est le cas pour un ruisseau), le problème est le même.

Nous remarquons que pour déterminer dans lequel des trois cas précédents on se trouve, il suffit de s'intéresser au rapport :

$$Fr = \frac{V}{c}$$

C'est ce rapport que l'on appelle le *nombre de Froude*, et qui est l'analogue du nombre de Mach dans la théorie de la mécanique des gaz (pour l'eau, ce sont des ondes de déplacement, alors que pour les gaz, ce sont des ondes de pression).

En résumé :

- $Fr < 1$  : le régime est lent, fluvial. Les ondes peuvent se propager vers l'amont.
- $Fr > 1$  : l'écoulement est qualifié de rapide, ou torrentiel. Les ondes ne peuvent pas se prolonger vers l'amont.
- $Fr = 1$  : on parle de régime critique.

Nous en déduisons que la formation d'ondes de choc n'est possible que lorsque le nombre de Froude est supérieur à 1, c'est à dire dans le cas d'un régime torrentiel.

## 6.2 Cas de la formation d'une onde de choc

Petits, nous nous sommes tous amusés à déplacer un bâton dans l'eau. Nous avons tous observé alors que plus le bâton se déplace rapidement, plus les ondes formées par son sillage se resserrent.

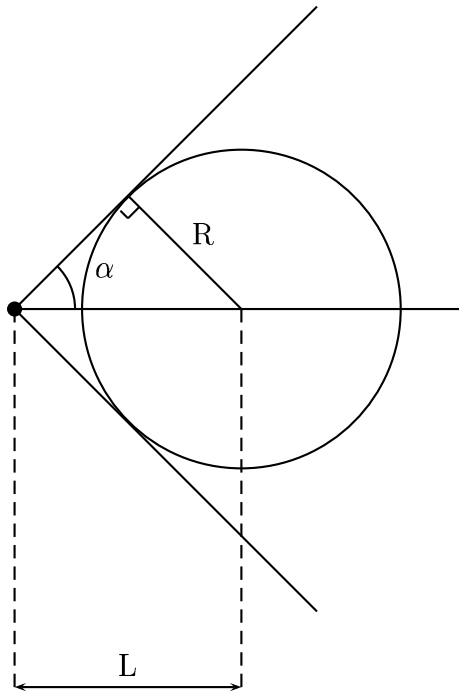
C'est ce que nous allons expliquer maintenant.

Nous nous plaçons dans le cas où le nombre de Froude est supérieur à 1, soit  $V > c$  avec les notations précédentes.

Nous avons vu qu'alors, les ondes émises par la source restent à tout instant contenues dans un cône, que l'on appelle *cône de Froude*.

Nous allons exprimer l'angle de ce cône, qui correspond à l'angle qui se forme entre les deux fronts d'onde.

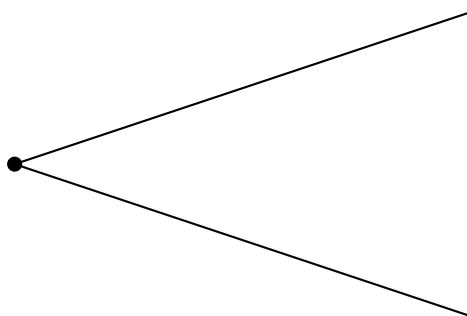
Nous appelons front d'onde chacune des deux droites entre lesquelles nous pouvons observer les ondes sur la figure du cas 3.



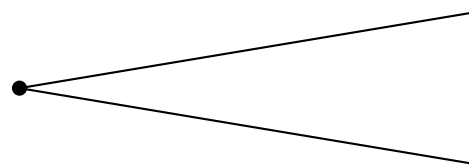
D'après la figure ci-dessus, on a :

$$\sin \alpha = \frac{R}{L} = \frac{c}{V}$$

Nous pouvons en déduire que plus  $V$  est grande, plus  $\alpha$  est petit, donc plus les fronts d'onde sont couchés sur la trajectoire.



$V > c$



$V \gg c$

## 6.3 Les différents types d'ondes de surface

Nous avons vu précédemment que la connaissance du nombre de Froude nous permettait de savoir dans quel régime on se trouve. Or, son calcul nécessite la connaissance de la vitesse des ondes, qu'on a implicitement considérée constante, par analogie avec la vitesse du son.

Nous allons voir dans ce paragraphe que la vitesse des ondes dépend fortement de leur longueur d'onde. Heureusement, ce comportement disparaît pour les longueurs d'onde supérieures à la profondeur du ruisseau, ce qui maintient la validité des constructions exposées pour ce qui concerne la formation des ondes de choc.

Par contre, diverses ondes vont évoluer autour de l'onde de choc à des vitesses différentes, et interférer pour former des ridules.

### 6.3.1 Vitesse de phase et vitesse de groupe

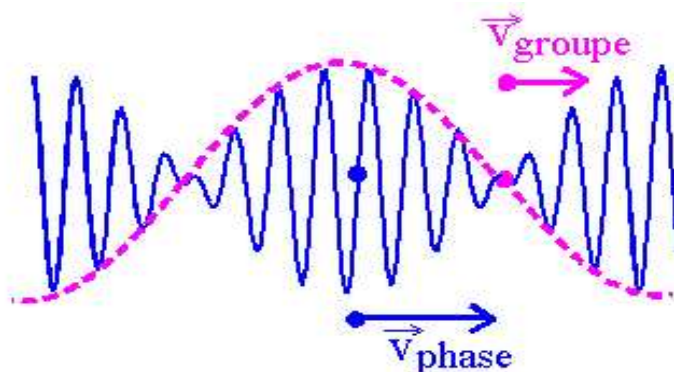
On excite la surface de l'eau, à l'aide d'un bâton par exemple.

En variant la fréquence d'excitation, on peut créer des ondes progressives différentes ayant chacune leur propre longueur d'onde.

Chaque onde a une vitesse, appelée vitesse de phase. La vitesse de phase varie avec la fréquence d'excitation. Pour cette raison, le milieu est dit dispersif, car les paquets d'ondes tendent à se décomposer avec le temps.

La dispersion crée un phénomène nouveau lors de la propagation d'un paquet d'ondes de fréquences rapprochées.

Sur la figure ci-dessous est représentée l'évolution d'un battement formé par deux ondes progressives dans un milieu dispersif, lequel se déplace à sa vitesse propre, appelée vitesse de groupe.



#### Rappel

On considère une onde progressive de longueur d'onde  $\lambda$  et de période  $T$ .

Par définition, on a un vecteur d'onde de module  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et une pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Sur la figure précédente, un maximum ou un zéro du signal se déplace à la vitesse moyenne de phase :

$$V_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

où

- $\bar{\omega}$  désigne la pulsation d'onde moyenne
- $\bar{k}$  désigne le vecteur d'onde moyen

Un maximum ou un zéro de l'enveloppe se déplace à une vitesse :

$$\begin{aligned} V_g &= \frac{\omega_{env}}{k_{env}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \\ &= \frac{\partial\omega}{\partial k} \text{ pour un paquet d'ondes.} \end{aligned}$$

$V_g$  est la vitesse de groupe.

Une remarque capitale est que l'énergie se déplace avec la vitesse de groupe, et non avec la vitesse de phase : quand un train d'ondes ayant une vitesse de groupe inférieure à sa vitesse de phase se déplace, des vagues naissent à l'arrière du paquet, le traversent, puis meurent à l'avant.

Une des conséquences est qu'après émission du train d'ondes, il ne faut pas chercher les ondes à une distance  $d = c t$ , mais à  $d = V_g t$ .

De ceci découle directement la forme du sillage des navires, relativement plus complexe que pour le cas des avions.

### 6.3.2 Les ondes capillaires et gravitationnelles

Pour étudier la propagation d'ondes, on essaie de déterminer leur vitesse, et plus généralement leur relation de dispersion, c'est à dire la relation liant la pulsation des ondes au vecteur d'onde.



Cette relation de dispersion est donnée par la formule suivante :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) th(kh)$$

où :

- $\omega$  désigne la pulsation des ondes
- $k$  désigne le vecteur d'onde
- $\gamma$  désigne la tension interfaciale, i.e la tension superficielle ( $= 0.074 \text{ N/m}^2$ )
- $\rho$  désigne la densité volumique de l'eau ( $= 1000 \text{ kg/m}^3$ )
- $h$  désigne la hauteur d'eau
- $g$  désigne l'accélération de la pesanteur

Lorsque la profondeur  $h$  est grande devant la longueur d'onde  $\lambda$  (régime en eau profonde)

On a :

$$h \gg \lambda \implies th(kh) \simeq 1$$

La courbe  $\omega(k)$  n'est pas une droite (pour laquelle on aurait bien  $c$  constante) : voir courbes à la page suivante.

La vitesse de l'onde ( $V = \frac{\omega}{k}$  d'après ce qui précède), n'est pas une constante : elle varie avec le vecteur d'onde.

On constate deux régimes distincts :

- Dans le régime des grandes longueurs d'onde, le comportement des ondes est donné par le premier terme de la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \implies V = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

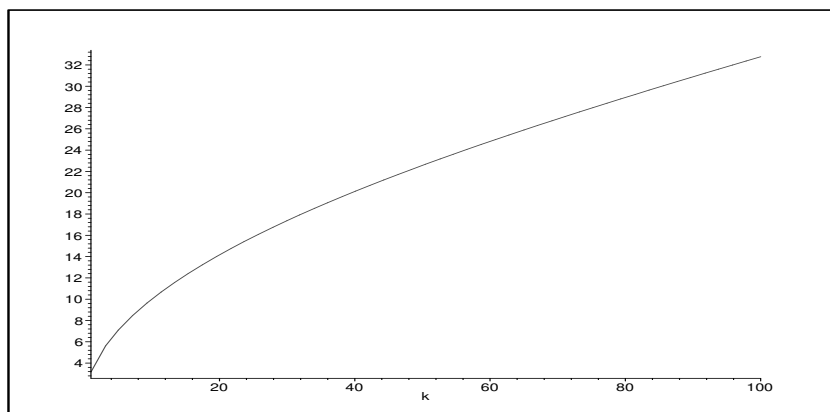
où  $V$  désigne la vitesse de phase  $V_\varphi$ .

La vitesse de groupe  $V_g$  est telle que  $V_g = \frac{V_\varphi}{2}$ .

Dans ce régime, la force de rappel est la force de gravité.

On parle d'ondes gravitationnelles.

La représentation graphique de  $\omega(k)$  est alors :



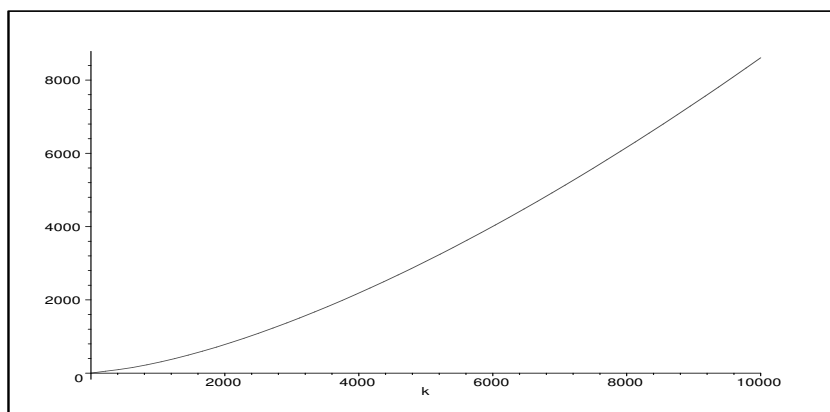
- Dans le régime des petites longueurs d'onde, la courbure de la surface est importante, et la force de rappel sera la force capillaire (de tension de surface).

On parle alors d'ondes capillaires, pour lesquelles on a :

$$\omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\rho} \implies V = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}}$$

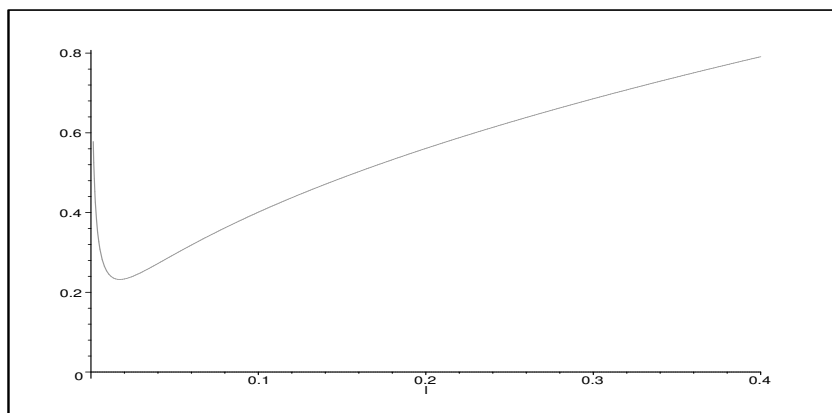
où  $V$  désigne la vitesse de phase  $V_\varphi$ .

La représentation graphique de  $\omega(k)$  est alors :



La vitesse de groupe  $V_g$  est telle que  $V_g = \frac{3}{2} V_\varphi$ .

D'après ce qui précède, la courbe  $V(\lambda)$  a pour représentation graphique :



Le changement de régime correspond au minimum de vitesse  $V_m$ , obtenu pour le vecteur d'onde

$$k_m = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}.$$

Les vitesses obtenues dans les deux cas limites sont alors égales, et la longueur d'onde correspondante est appelée longueur d'onde capillaire  $\lambda_c$ . Elle représente l'échelle de longueur au-delà de laquelle les forces interfaciales deviennent petites devant les forces de gravité.

Pour l'interface entre l'air et l'eau,  $\lambda_c$  est égale à 1,7 cm, correspondant à  $c_c = 23 \text{ cm/s}$ .  $c_c$  est la valeur de propagation minimale sur l'eau.

#### Lorsque $h$ est faible devant $\lambda$

Les ondes gravitationnelles de grandes longueur d'onde ont une vitesse  $V_0 = \sqrt{gh}$ .

Quand  $\lambda$  approche  $h$ , cette vitesse limite vient peu à peu saturer celle donnée par l'équation précédente. On parle de régime en eau peu profonde, qui a la particularité de ne pas être dispersif.

On a alors  $V_g = V_\varphi = V_0 = c$  constant.

C'est dans ce dernier cas que nous nous placerons dans la suite du problème pour déterminer les ondes de choc.

En revanche, les ridules présentes autour de l'onde de choc ont une longueur d'onde allant de quelques millimètres à 1 ou 2 centimètres : la détermination de leurs caractéristiques doit prendre en compte les remarques précédentes.

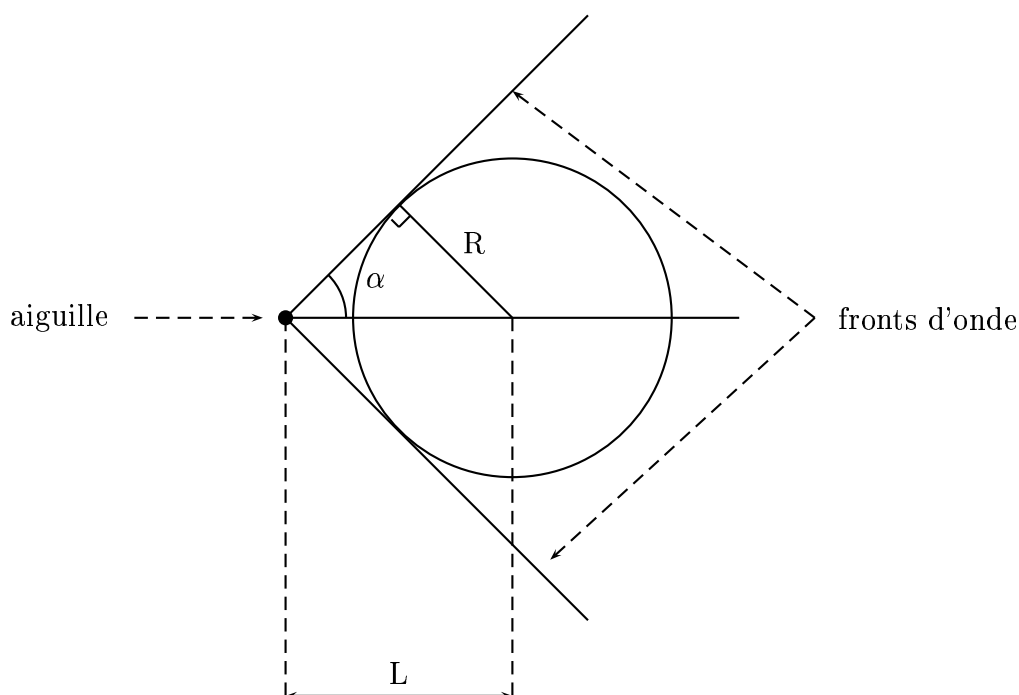
## 7 Lignes de Mach

La section 6 nous a décrit dans quels cas on pouvait observer la formation d'un cône de Froude, correspondant au sillage de l'objet qui le crée. L'objectif de cette section est de construire les sillages créés par des objets de petite taille à l'intérieur du ruisseau, en se servant des rappels précédents.

### 7.1 Définition

Nous désirons représenter le sillage que l'on obtiendrait si on mettait une aiguille, ou un bâton très fin, au sein de l'écoulement dans une zone où le nombre de Froude est supérieur à un. D'après la section précédente, nous aurions la formation d'un cône de Froude (ou cône de Mach), dont le demi-angle au sommet est déterminé par la relation suivante :

$$\sin \alpha = \frac{R}{L} = \frac{c}{V}$$



Nous observerions alors le sillage de cette aiguille, qui serait formé des deux fronts d'onde indiqués sur la figure. C'est ce sillage que l'on appelle *ligne de Mach*.

Or, le schéma représenté ci-dessus est celui d'une situation idéale, où la vitesse de l'écoulement serait la même en tout point du ruisseau, ce qui n'est pas le cas dans la réalité.

Nous allons donc écrire une méthode de construction géométrique d'une ligne de Mach prenant

en compte le fait que l'écoulement n'est pas uniforme.

## 7.2 Construction géométrique

Le fait que la vitesse de l'écoulement ne soit pas constante entraîne que le sillage de l'aiguille n'est pas formé de deux fronts d'onde rectilignes, mais de deux lignes courbes. En effet, le changement de vitesse au sein de l'écoulement entraîne localement une variation de l'angle  $\alpha$ , demi-angle au sommet du cône de Mach.

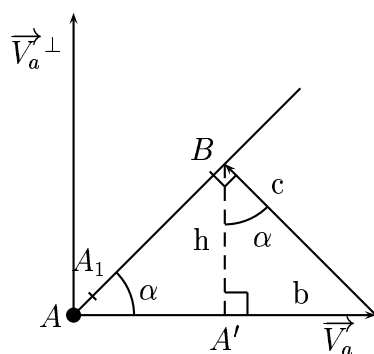
Pour prendre en compte le fait que l'écoulement soit non uniforme dans la construction d'une ligne de Mach, nous procédons de la manière suivante :

On appelle  $A (x_a, y_a)$  l'origine de la ligne de Mach, c'est à dire le point où on place l'aiguille dans le courant (on suppose que ce point se situe dans une zone où le nombre de Froude est supérieur à un, ce qui garantit l'existence de la ligne de Mach d'après la section 6).

Le vecteur vitesse en  $A$  est noté  $\vec{V}_a$ , et a pour composantes  $(v_x, v_y)$ .

On désigne par  $c$  la célérité des ondes ( avec  $c = \sqrt{gh}$ ).

On construit localement le cône de Mach :



On cherche les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  défini sur la figure.

Avec les notations de la figure, nous avons :

$$\vec{AA'} = \vec{V}_a - b \frac{\vec{V}_a}{\|\vec{V}_a\|} \quad \text{avec } b = c \sin \alpha$$

$$\vec{A'B} = h \frac{\vec{V}_a^\perp}{\|\vec{V}_a\|} \quad \text{avec } h = c \cos \alpha$$

Nous en déduisons alors :

$$\overrightarrow{AB} = \left(1 - \frac{c}{\|\overrightarrow{V_a}\|} \sin \alpha\right) \overrightarrow{V_a} + \left(\frac{c}{\|\overrightarrow{V_a}\|} \cos \alpha\right) \overrightarrow{V_a}^\perp$$

Or :

$$\sin \alpha = \frac{c}{\|\overrightarrow{V_a}\|}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1 - \sin^2 \alpha) \overrightarrow{V_a} + (\sin \alpha \cos \alpha) \overrightarrow{V_a}^\perp \\ &= \cos \alpha (\cos \alpha \overrightarrow{V_a} + \sin \alpha \overrightarrow{V_a}^\perp) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  étant défini, nous construisons le point  $A_1$  tel que  $\overrightarrow{AA_1} = l \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

avec  $l$  une valeur positive et petite choisie arbitrairement (nous avons choisi  $l = 0.1$ ).

Nous traçons alors la droite  $(AA_1)$ .

Si  $A_1$  se situe dans une zone où le nombre de Froude est supérieur à un, on recommence la construction précédente avec  $A_1$  à la place de  $A$  (on est donc amené à considérer la vitesse en  $A_1$ , qui peut être différente de celle en  $A$ ). On continue jusqu'à ne plus pouvoir tracer la ligne (entrée dans une zone où le nombre de Froude est inférieur à un, ou sortie du domaine).

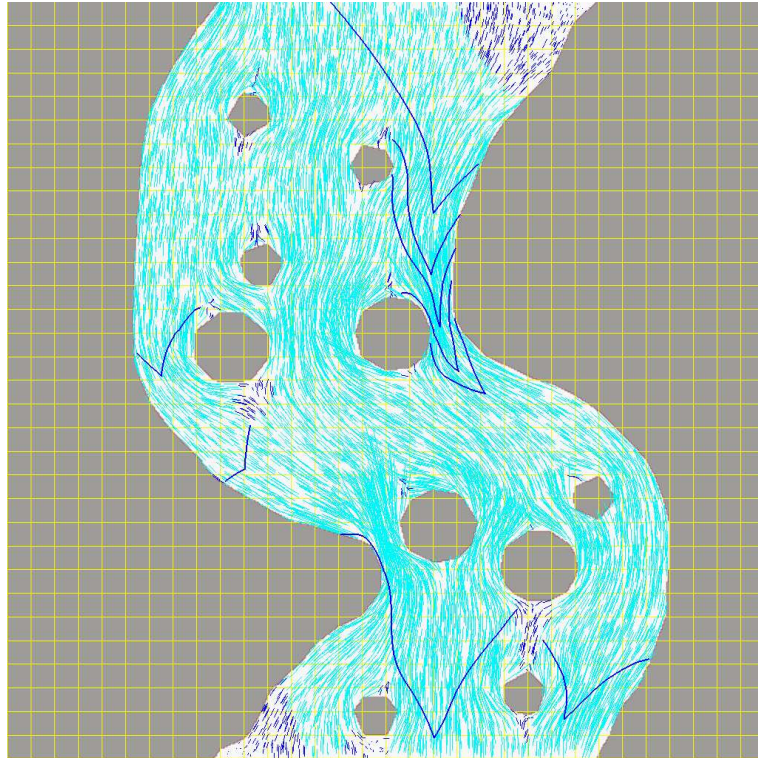
A ce stade, une seule des "branches" de la ligne de Mach est construite. On construit l'autre de manière analogue, en utilisant l'autre  $\overrightarrow{V_a}^\perp$ .

La fonction qui effectue cette construction a pour nom *Aiguille*.

Nous avons représenté sur les figures suivantes des tracés de ligne de Mach en des points différents du ruisseau. On remarque que là où le fluide est plus rapide, les cônes se resserrent. Au niveau de l'affichage, on positionne lors des tests une aiguille par un clic de souris. On peut également "faire bouger" l'aiguille à l'intérieur du ruisseau en faisant glisser la souris.

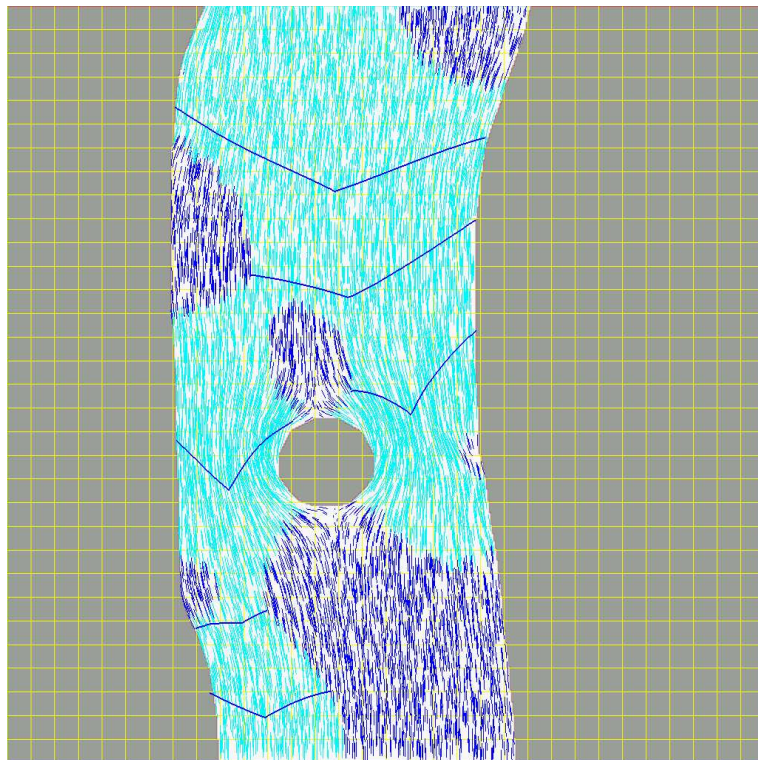
Premier exemple :

sens de l'écoulement



Second exemple :

sens de l'écoulement

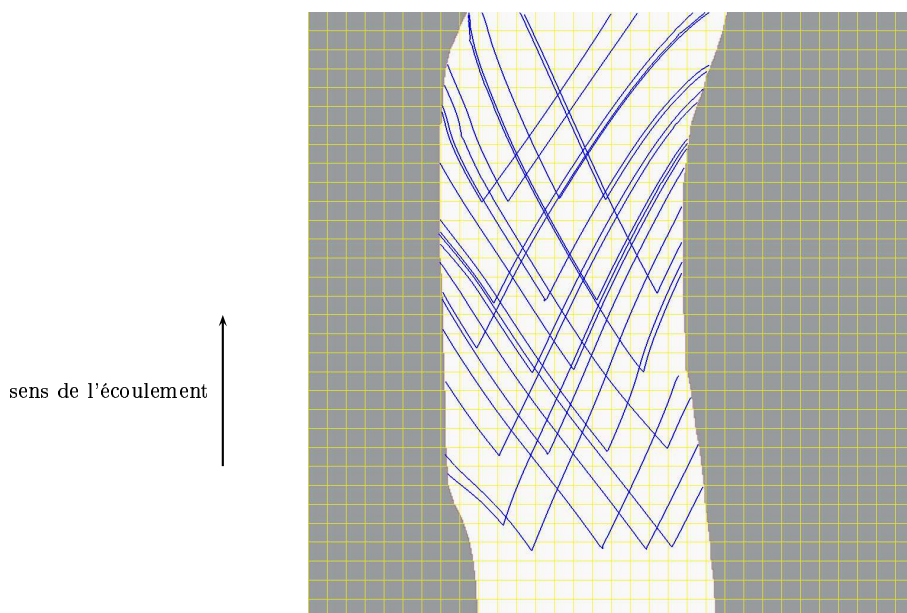


## 8 Ondes de choc

Nous allons nous intéresser à l'étude des ondes de choc créées à la surface du ruisseau.

D'après ce qui précède, nous avons vu qu'elles ne pouvaient se former qu'aux endroits où le nombre de Froude  $Fr$  est supérieur à un.

A la surface du ruisseau, il y a en permanence une superposition de lignes de Mach, qui sont en fait des "sillages" issus de toutes les perturbations de l'écoulement, comme on peut l'illustrer par la figure suivante :



D'après la section 5.2, nous pouvons dire que pour  $Fr \sim 1$ , les lignes de Mach sont quasi-perpendiculaires à l'écoulement, et lorsque  $Fr$  devient suffisamment grand (de l'ordre de deux), alors elles lui sont presque parallèles.

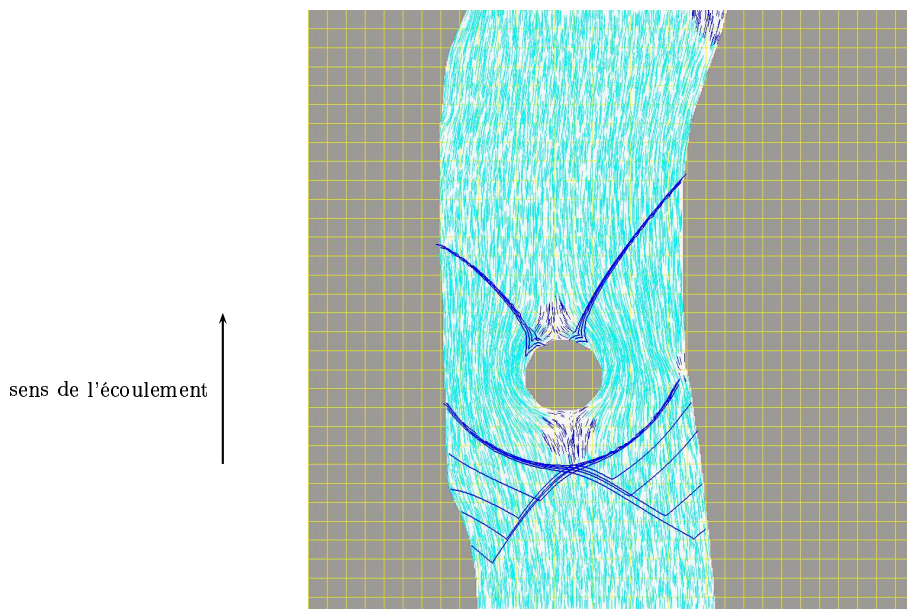
Les ondes de choc naissent là où les différentes lignes de Mach "s'agglutinent" :

- Le lieu le plus typique où cela se produit est à l'amont d'une zone où  $Fr$  est inférieur à un. Les lignes de Mach se redressent, et viennent se coller les unes aux autres : on peut observer la forme caractéristique de l'onde de choc qui se produit à l'amont d'un obstacle émergé.

Il s'agit de trouver le point de départ de l'onde de choc formée, et de construire ensuite le sillage correspondant. Ce point de départ se situe à la limite de la zone où le nombre de Froude est inférieur à un.

Cela est mis en évidence sur la figure suivante, où les zones en bleu clair représentent les lieux où  $Fr$  est supérieur à un, et celles en bleu foncé ceux où il lui est inférieur.





Nous devons donc commencer par construire les lignes séparant les zones où  $Fr$  est inférieur à un et celles où il est supérieur à un. Nous appellerons ces lignes *lignes iso-Froude*, elles correspondent aux lignes où le nombre de Froude est égal à un.

Le point de départ de l'onde de choc que l'on cherche à construire se situe donc sur la ligne iso-Froude, à l'endroit précis où le vecteur vitesse traverse la ligne orthogonalement. En effet, l'onde ayant pour origine ce point "fait barrage" à toutes les lignes de Mach ayant leur origine à l'amont (car les lignes de Mach ne peuvent en aucun cas se croiser).

- A l'aval de la pierre, c'est le même principe, mais comme l'amont de la zone où  $Fr$  est inférieur à un est contre la pierre, zone où l'écoulement est fortement dévié, on observe une allure très différente des ondes de choc (voir figure).

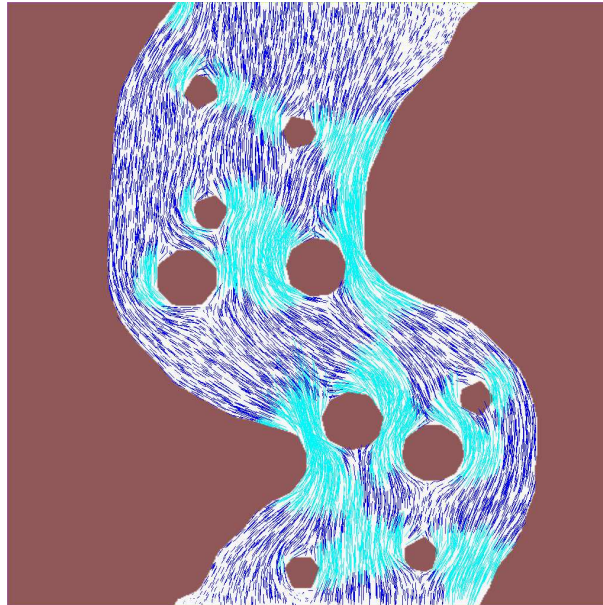
- Un autre cas où nous observons la naissance d'ondes de choc est le cas où les sillages sont parallèles aux iso-V. Cela se produit essentiellement sur les bords (ce sont les ondes que l'on observe typiquement dans un caniveau), mais aussi parfois au milieu du ruisseau (on observe des sortes de "chevrons" qui paraissent provenir de cette situation).

Nous avons commencé à développer une méthode pour détecter et construire ces sillages. Elle n'a pas encore pu être implémentée de manière satisfaisante, mais son amélioration est en cours. Nous en donnerons les détails à la section 10.

Pour générer graphiquement les ondes de choc, nous allons donc maintenant montrer comment construire les lignes iso-Froude, et déterminer les lieux de départ des ondes de choc sur ces lignes.

## 8.1 Construction des lignes iso-Froude

Voici pour mémoire les résultats que nous avons obtenus concernant les vecteurs vitesse.



Les zones de couleur bleu clair et de couleur bleu foncé correspondent respectivement aux zones où  $Fr$  est supérieur à 1 et où il est inférieur à 1, avec :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

Nous allons construire les lignes séparant ces deux zones, les lignes iso-Froude, dans la mesure où ces frontières sont impliquées dans la formation des ondes de choc.

Nous allons d'abord tracer les lignes iso-Froude partant de points de bord du ruisseau.

La première difficulté est de déterminer les points de départ de ces lignes.

Ensuite, une fois ces points déterminés, il s'agira de suivre effectivement la ligne et d'y déterminer les points d'origine des ondes de choc.

### 8.1.1 Recherche des points de départ des lignes iso-Froude

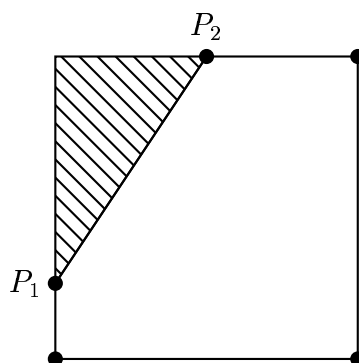
#### Première méthode

Nous cherchons à tracer les lignes iso-Froude ayant leur point de départ sur un contour, qu'il soit ouvert (berges) ou fermé (pierres).

Le principe est le suivant :

Un contour est représenté par une liste de cellules, traversées par une paroi.

Représentons une cellule appartenant à un contour :



Pour déterminer si une ligne iso-Froude a un départ dans cette cellule, il suffit de calculer la valeur du nombre de Froude en  $P_1$  et en  $P_2$ .

Si la valeur 1 est comprise entre les deux valeurs calculées, alors la cellule contient un point de départ de ligne iso-Froude, que l'on détermine par interpolation de la manière suivante :

Si  $P_1$  a pour coordonnées  $(x_1, y_1)$  et  $P_2 (x_2, y_2)$  dans  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  et si on désigne par  $(x_{dep}, y_{dep})$  les coordonnées du point de départ de la ligne iso-Froude, on a :

$$\begin{cases} x_{dep} = l x_2 + (1 - l)x_1 \\ y_{dep} = l y_2 + (1 - l)y_1 \end{cases}$$

où :

$$l = \frac{1 - Fr_1}{Fr_2 - Fr_1}$$

$Fr_1$  et  $Fr_2$  désignant la valeur du nombre de Froude respectivement en  $P_1$  et  $P_2$ .

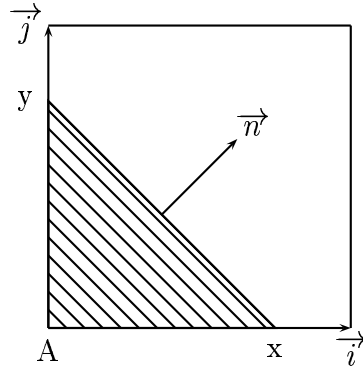
Pour l'implémentation :

Un contour est représenté par une liste chaînée de cellules.

Cette liste chaînée peut être parcourue dans les deux sens, c'est à dire qu'une cellule appartenant à un contour a accès à la fois à la cellule la suivant et à celle la précédant.

Le fait de parler de cellules suivante et précédente sous-entend le fait qu'un contour a un sens de parcours privilégié. En effet, nous avons choisi de parcourir chaque contour en ayant le domaine "ruisseau" à gauche.

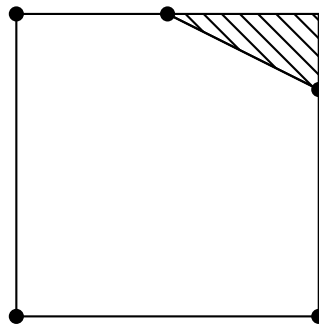
Nous rappelons qu'une cellule est représentée par une structure contenant entre autres les coordonnées de la paroi.



Ces champs ne sont remplis que si les coordonnées de la paroi sont à abscisse nulle ou à ordonnée nulle dans le repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ .

Or, des cellules peuvent appartenir à un contour en ayant le champ des coordonnées non remplis.

Par exemple :



Dès lors, le fait de parcourir un contour n'est pas une chose triviale, et là encore, beaucoup de cas particuliers sont à traiter.

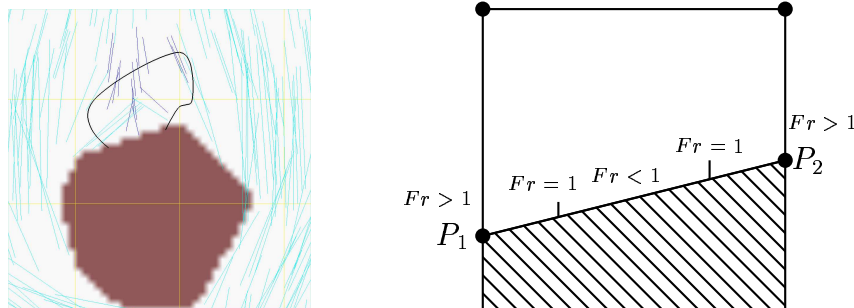
#### Inconvénient de la méthode utilisée :

Cette méthode comporte une lacune notable :

En ne testant à l'intérieur de chaque cellule que les valeurs du nombre de Froude aux noeuds de bord  $P_1$  et  $P_2$ , on suppose implicitement que le nombre de Froude varie de façon convexe dans l'intervalle, ce qui est faux, et des points de départ de lignes iso-Froude sont oubliés.

En effet, il se peut que les valeurs en  $P_1$  et  $P_2$  de  $Fr$  soient toutes deux supérieures à 1, mais qu'une zone où il soit inférieur soit contenue dans la cellule.

Cela est illustré par la figure suivante :



Pour remédier à cela, nous avons écrit une deuxième méthode, complémentaire de la première.

### 8.1.2 Recherche des points de départ des lignes iso-Froude Seconde méthode

Après plusieurs tests, nous avons remarqué la chose suivante :

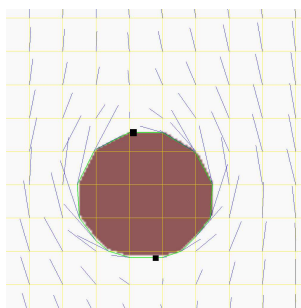
La situation décrite précédemment ne se produisait pas fréquemment. En revanche, nous avons pu caractériser les lieux du ruisseau où cela se produisait : sur les contours fermés, à l'amont ou à l'aval de l'obstacle.

Aux fortes vitesses, la "poche" où le nombre de Froude est inférieur à un devient très petite, mais le fait qu'elle existe est capital pour la formation des ondes de choc.

Un contour fermé contient généralement quatre départs de lignes iso-Froude.

Physiquement, quand la viscosité est négligeable, lorsque l'eau arrive sur un obstacle et le contourne, il existe deux points appartenant au contour de cet obstacle où la vitesse est nulle. Nous appellerons ces points particuliers *points d'arrêt*.

Ils sont représentés par des carrés noirs sur la figure suivante :



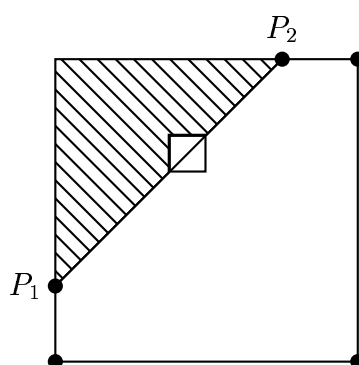
Par construction, un point d'arrêt désigne un lieu où le nombre de Froude est inférieur à un (puisque nul), et va donc nous aider à trouver les lignes de façon sûre.

Un point d'arrêt est entouré de deux lignes iso-Froude. C'est aux abords de ces points que des départs de lignes n'étaient parfois pas déterminés avec la méthode précédente. D'où l'idée de la deuxième méthode :

Sur un contour fermé, nous devons d'abord chercher la position des points d'arrêt (les contours ouverts seront eux traités avec la méthode précédente).

Une fois ces points isolés, on procède de la manière suivante :

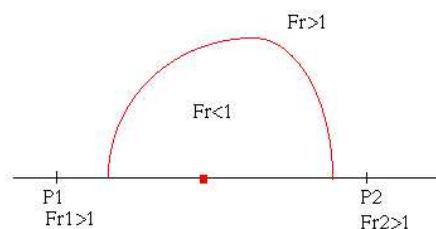
On parcourt le contour à partir de la cellule contenant le point d'arrêt, représenté par un carré blanc sur la figure suivante :



Puisque la vitesse au point d'arrêt est nulle, si la valeur du nombre de Froude en  $P_1$  ou  $P_2$  est supérieure à 1, c'est qu'un départ de ligne iso-Froude est contenu dans cette cellule.

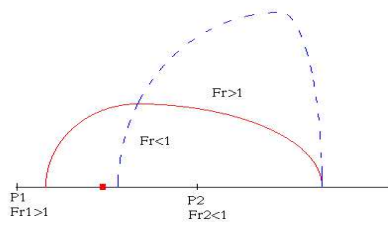
Il se peut qu'on trouve deux départs de ligne à l'intérieur d'une même cellule dans certains cas, même si c'est cela est plutôt rare (ce sont les cas que la méthode précédente ne détectait pas).

Par exemple :



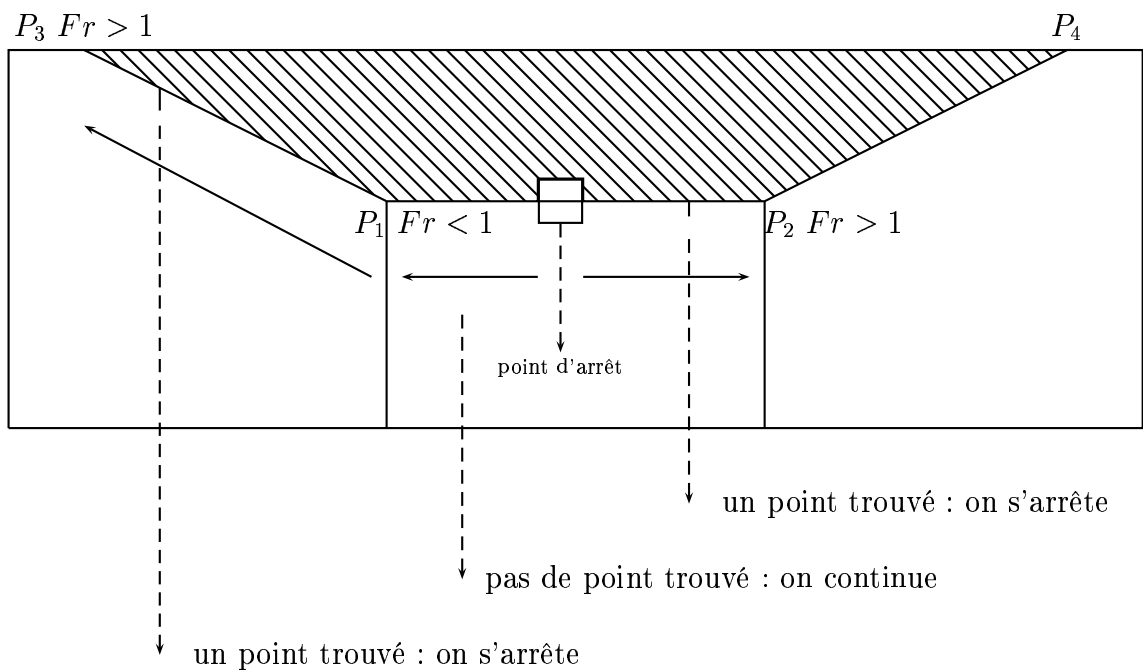
En revanche, si la valeur du nombre de Froude en  $P_1$  ou  $P_2$  est inférieure à 1, alors on utilise la méthode précédente, mais en parcourant le contour du point d'arrêt vers  $P_1$  (ou  $P_2$  selon le cas), et en s'arrêtant dès qu'un point de départ a été trouvé, ce qui améliore la précision.

Par exemple :



où on a représenté en pointillés le contour qui était précédemment trouvé.

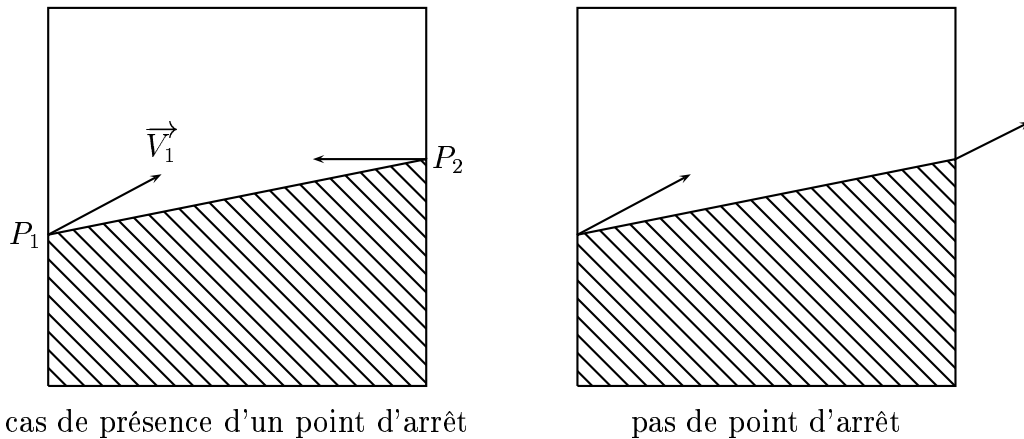
Exemple de recherche de points de départ :



## Recherche des points d'arrêt :

Pour déterminer la position des points d'arrêt, on procède de la manière suivante :

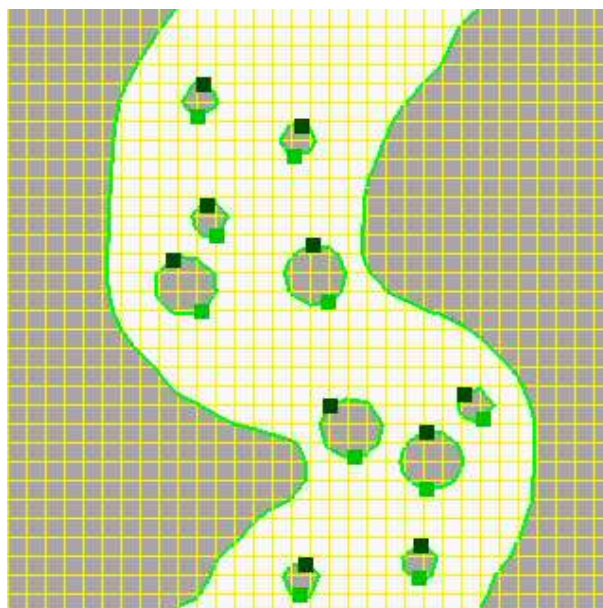
- On parcourt le contour fermé sur lequel on cherche les points d'arrêt cellule par cellule.
- Pour chaque cellule, on évalue le produit scalaire entre les vecteurs vitesse aux noeuds délimitant la paroi à l'intérieur de la cellule.



Si ce produit est négatif, la cellule contient un point d'arrêt, qu'on obtient par interpolation. Sinon, la cellule ne contient pas de point d'arrêt.

On distingue un point d'arrêt amont d'un point d'arrêt aval en faisant le produit scalaire  $\vec{V}_1 \cdot \vec{P_1P_2}$  avec les notations de la figure. Si ce produit est positif (convergence des vecteurs vitesse au point d'arrêt), nous sommes dans le cas d'un point aval, sinon (divergence) d'un point amont.

On représente sur la figure ci-dessous les points d'arrêt sur chaque contour par des carrés (gris clair : amont, gris foncé : aval).





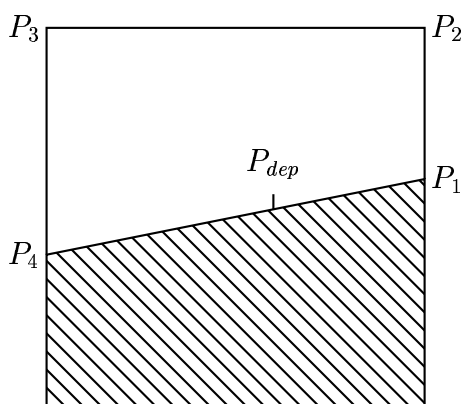
Nous avons déterminé tous les points de départ des lignes iso-Froude, reste maintenant à tracer ces lignes.

### 8.1.3 Construction des lignes iso-Froude

Connaissant un point de départ de ligne iso-Froude, obtenu par la méthode précédente, le problème est de tracer effectivement cette ligne, et d'y chercher les points d'origine des ondes de choc.

Pour cela, nous procédons de la manière suivante :

Plaçons nous dans une cellule contenant un point de départ de ligne iso-Froude, et appelons ce point  $P_{dep}$ .



Nous admettrons que si une ligne iso-Froude “arrive” dans une cellule, elle en ressort forcément. Alors, dans la cellule considérée ci-dessus, nous devons déterminer par quel côté la ligne commencée en  $P_{dep}$  va sortir.

Pour cela, on évalue le nombre de Froude en  $P_1$  et  $P_2$ . Si la valeur un est comprise entre ces deux valeurs, alors la ligne iso-Froude peut sortir de la cellule par le segment  $[P_1P_2]$ , en un point que l'on obtient par interpolation de la même manière qu'en 8.1.1.

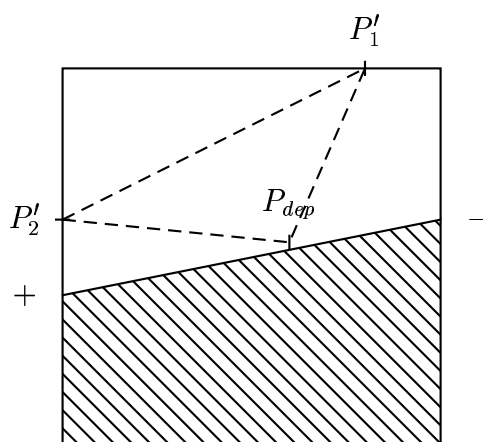
Nous faisons ensuite de même entre  $P_2$  et  $P_3$ , puis  $P_3$  et  $P_4$ , et ainsi de suite jusqu'à avoir testé tous les côtés de la cellule considérée.

Deux cas sont alors possibles :

- Ou bien on obtient un seul point de sortie possible, auquel cas on le relie à  $P_{dep}$ , et la ligne est tracée dans cette cellule.
  - Ou bien on a plusieurs “candidats” possibles comme points de sortie de la cellule.
- Or, nous devons en choisir un seul pour tracer la ligne.

Le critère de sélection est le suivant :

Supposons que l'on trouve deux points de sortie possibles :  $P'_1$  et  $P'_2$  (en fait, il y en a vraisemblablement un troisième, puisqu'il ne peut pas y avoir de point "orphelin").

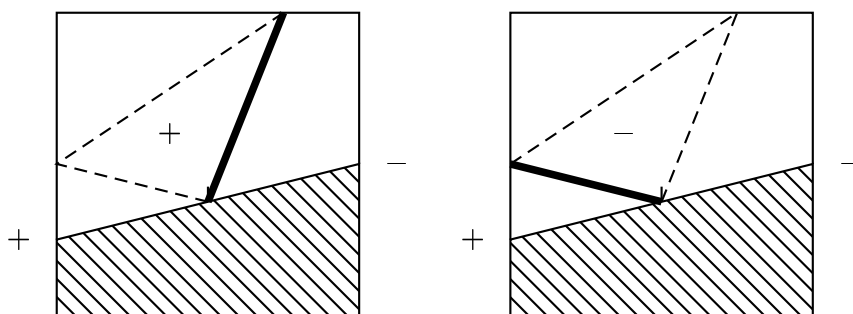


Sur cette figure, on a noté "+" si le nombre de Froude calculé au noeud voisin de  $P_{dep}$  est supérieur à un, "-" s'il lui est inférieur.

Supposons que l'on soit dans la configuration ci-dessus.

On introduit l'isobarycentre de  $P_{dep}, P'_1$  et  $P'_2$ , et on y évalue le nombre de Froude.

Si le nombre de Froude au barycentre est supérieur à un, on choisit comme sortie  $P'_1$ , sinon, on choisit  $P'_2$ .



Le cas de figure où les signes "+" et "-" sont inversés se traitent de manière analogue.

On utilise ce critère dès que plus d'une sortie possible est détectée. Ce test nous permet de trouver la bonne par éliminations successives.

Le point de sortie de la ligne iso-Froude nous donne accès à une autre cellule, dans laquelle on va effectuer le même travail. On s'arrête dès que la ligne iso-Froude rencontre un bord (berge du ruisseau ou obstacle).

## Remarque

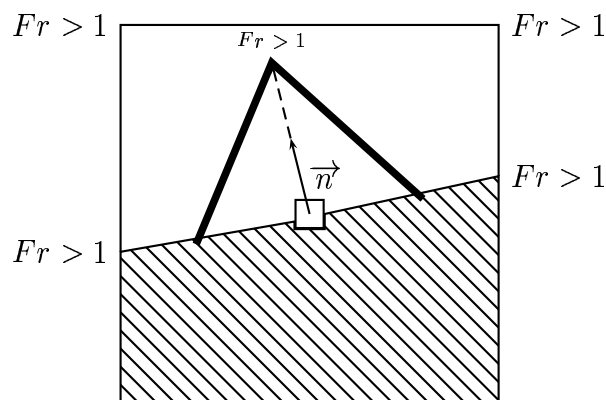
Si l'on construisait les lignes iso-Froude à partir de tous les points de départ calculés précédemment, elles seraient toutes tracées en double, puisqu'un point de départ est aussi un point d'arrivée.

Aussi, pour l'implémentation, nous avons ajouté un champ dans les cellules contenant un point de départ, pour indiquer si elles ont déjà été traversées par une ligne iso-Froude. Si c'est le cas, on ne reconstruit pas la ligne partant de cette cellule.

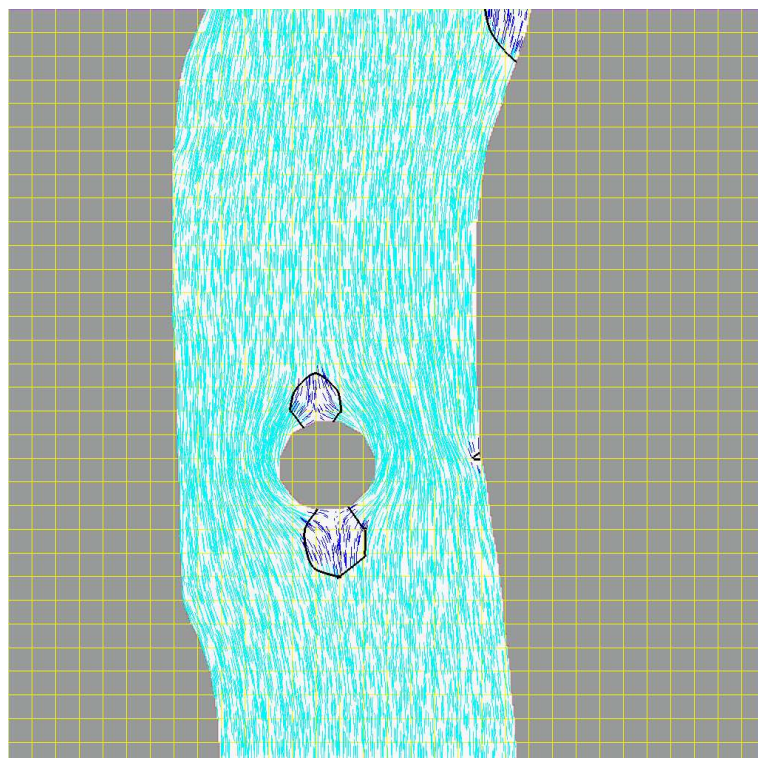
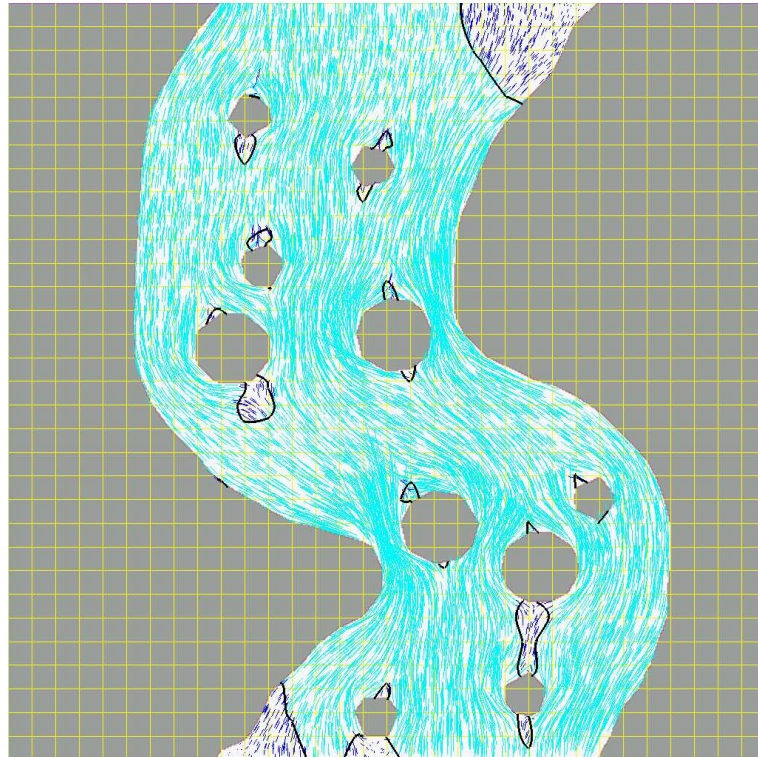
### cas particulier :

Pour les contours fermés, il arrive parfois, lorsque la vitesse de l'écoulement est importante, que la zone où  $Fr$  est inférieur à un soit très petite, et entièrement contenue dans une seule cellule. Dans ce cas, lors de la construction de la ligne iso-Froude, on ne trouve pas de points de sortie. Nous la construisons alors de la manière suivante :

Partant du point d'arrêt, on "avance" dans la direction de la normale à la paroi dans la cellule d'une longueur arbitraire petite. On teste si le point en lequel on se trouve est contenu dans la zone où  $Fr$  est supérieur à un. Si c'est le cas, on joint le point trouvé aux deux points de départ de la ligne iso-Froude dans la cellule. Sinon, on se déplace à nouveau dans la même direction que précédemment et on recommence.



## Exemples de résultats



Nous avons accéléré les écoulements par rapport aux figures précédentes pour étendre les zones où le nombre de Froude est supérieur à un, afin de pouvoir obtenir des ondes de choc.

## 8.2 Recherche de l'origine de l'onde de choc et construction

Comme nous l'avons vu au tout début de cette section, le point d'origine de l'onde de choc que l'on peut observer à l'amont de la pierre (et de celles que l'on peut observer à l'aval) se situe sur une ligne iso-Froude, à l'endroit où le vecteur vitesse est orthogonal à la ligne iso-Froude. En effet, la ligne de Mach qui naît en ce point a un angle à son origine presque plat, et le sillage que l'on obtient est donc tangent à la ligne iso-Froude.

Toutes les autres lignes de Mach qui naissent à proximité à l'amont viennent se coller à l'onde précédente, qui fait en quelque sorte "barrage".

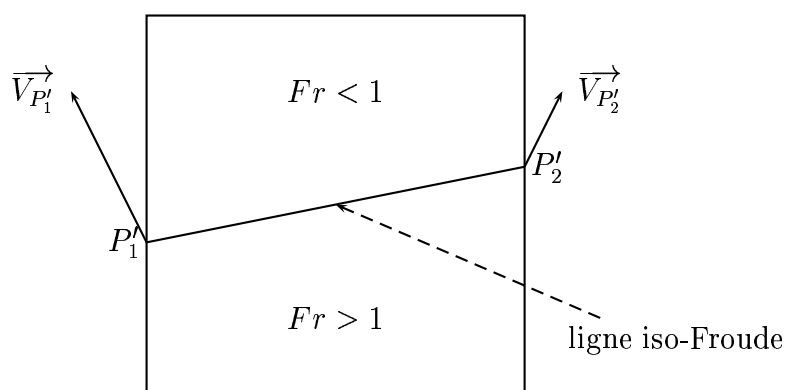
On remarquera que les cônes de Mach ayant un angle au sommet proche de  $\pi$  sont assez rares. En effet, dans une zone où le nombre de Froude est égal à 1.08, l'angle à l'origine d'une ligne de Mach créée en ce milieu serait déjà de  $\frac{3\pi}{4}$ , soit une évolution considérable par rapport aux zones proches où le nombre de Froude est égal à un !

Cela nous permet d'affirmer qu'au sein de l'écoulement, il est improbable de trouver des lignes de Mach de faible pente, sauf à l'amont immédiat d'une zone où le nombre de Froude est inférieur à un, c'est à dire à proximité d'un point d'arrêt, ce qui justifie notre méthode de recherche.

La recherche d'une origine d'onde de choc se fait au fur et à mesure que l'on construit la ligne iso-Froude. On cherche si à l'intérieur de la cellule, le vecteur vitesse traverse la ligne iso-Froude orthogonalement, en passant d'une zone où le nombre de Froude est supérieur à un à une zone où il lui est inférieur.

Le principe est le suivant :

Soit une cellule dans laquelle on a détecté, avec la méthode précédente, deux points de passage d'une ligne iso-Froude. Appelons les  $P'_1$  et  $P'_2$ .



$\vec{V}_{P'_1}$  et  $\vec{V}_{P'_2}$  désignent les vecteurs vitesse respectivement en  $P'_1$  et  $P'_2$ .

Si  $\vec{V}_{P'_1} \cdot \vec{P'_1P'_2}$  et  $\vec{V}_{P'_2} \cdot \vec{P'_2P'_1}$  sont tous les deux négatifs, alors il existe un point sur la ligne

iso-Froude contenue dans cette cellule où le vecteur vitesse est perpendiculaire à la ligne. C'est le cas sur la figure représentée.

En réalité, le fait que les deux produits scalaires soient de même signe nous garantit qu'il y a un point où le vecteur vitesse traverse orthogonalement la ligne iso-Froude. Le fait qu'ils soient négatifs nous apporte l'information que le vecteur vitesse orthogonal à la ligne la traverse bien dans le "bon sens", c'est à dire d'une zone où  $Fr$  est supérieur à un à une zone où il est inférieur (on est bien à l'amont de la zone de ralentissement).

Dans le cas particulier où la zone où le nombre de Froude est inférieur à un est contenue dans une même cellule, nous choisissons comme origine de l'onde de choc le point trouvé pour la construction de la ligne iso-Froude (voir paragraphe précédent).

Pour l'implémentation :

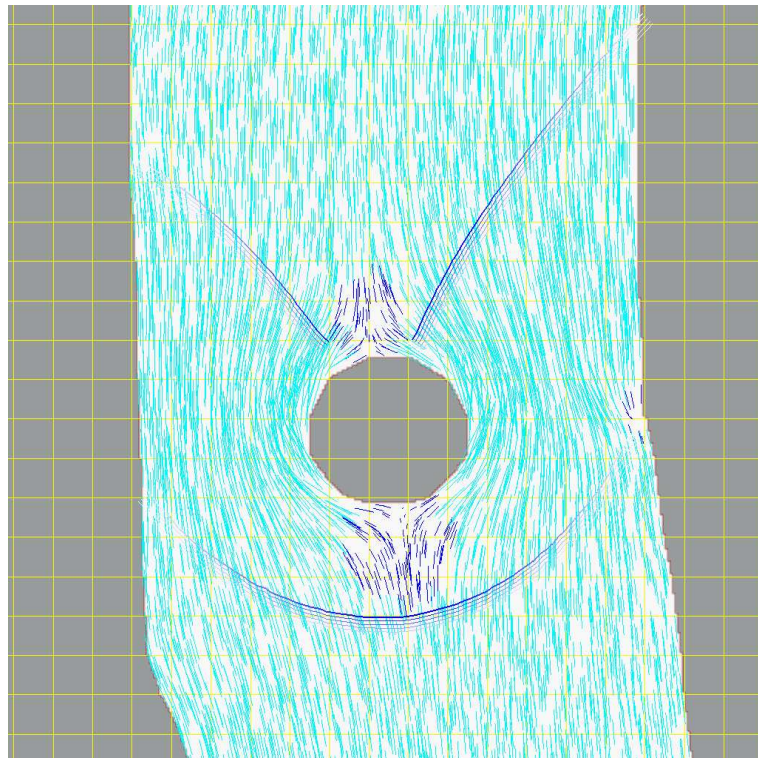
Tous ces départs d'ondes de choc sont stockés dans un tableau.

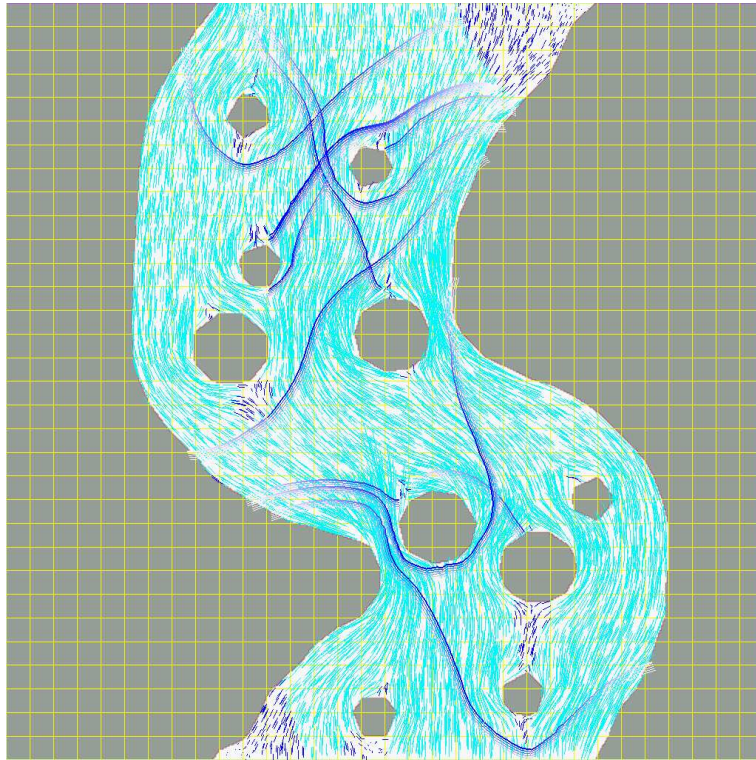
Un appel en chacun des points de départ de la fonction *Aiguille*, qui permet de tracer des lignes de Mach d'origine donnée, suffit à tracer les ondes de choc que l'on observe aux abords des obstacles.

Nous avons amélioré le tracé en ajoutant un système de petites ridules à l'amont de l'onde de choc. La détermination précise des caractéristiques de ces ridules (longueur d'onde, amortissement) est en cours d'étude.

Il reste également à trouver un critère d'amortissement des ondes de choc, car elles ne devraient pas avoir une telle persistance dans l'écoulement.

## Exemples de résultats

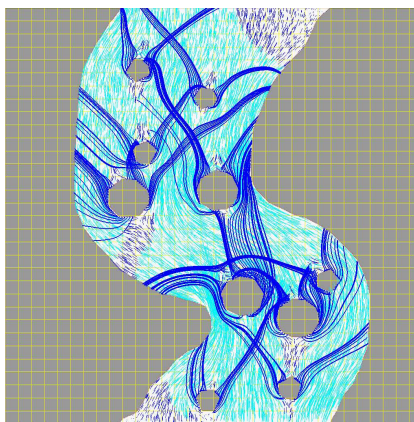




### 8.3 Rides latérales

Sur les côtés des obstacles on peut observer des rides latérales (très visibles par exemple sur les berges des caniveaux), que nous avons également voulu simuler. Nous construisons ces rides avec la fonction *Aiguille*, et donc elles ne sont tracées que dans les zones où le nombre de Froude est supérieur à un.

Dans l'état actuel de notre programme, par défaut on ne les trace pas, faute d'un critère d'arrêt (le tracé de toutes les lignes fait qu'on ne voit plus rien!). De plus, l'espacement entre les rides est probablement dû au même phénomène que celui des ridules, et donc être lié aux ondes capillaires, mais notre compréhension des constructions qui en découlent est pour l'instant insuffisante.



## 9 Perturbation des ondes

Comme nous l'avons vu à la section 5, les perturbations que nous avons créées vont modifier les ondes à la surface du ruisseau (lignes de Mach et ondes de choc). Mais le mouvement des ondes qui va découler de ces perturbations est plus complexe que celui d'une particule d'eau fluide. La fluctuation va évoluer le long de la ligne de Mach avec sa propre vitesse de propagation, et la ligne va "onduler".

Une autre observation est que si une onde de Mach existe au sein de l'écoulement, et qu'une perturbation vient "empêcher" son existence, par exemple en rendant le nombre de Froude localement inférieur à un, l'onde ne disparaît pas instantanément mais progressivement.

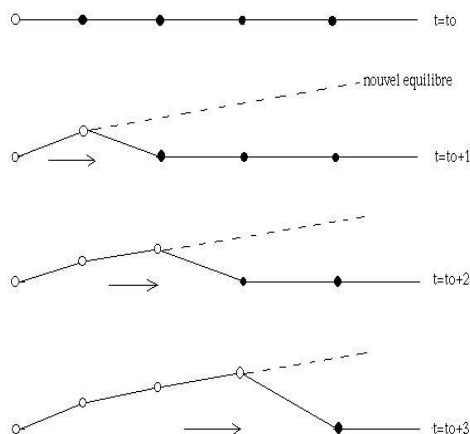
Ce sont tous ces phénomènes que nous prendrons en compte dans cette section.

### 9.1 Prise en compte de la vitesse de propagation de l'onde

Nous avons vu dans les sections précédentes que toutes les créations d'ondes faisaient appel à la fonction *Aiguille*, définie à la section 7. Or, cette fonction trace une ligne de Mach d'un seul jet, et ne prend donc pas en compte le fait qu'une fluctuation se propage le long de l'onde. Si une perturbation approchait une ligne de Mach, cette dernière s'arquait brusquement dans tout le domaine pour atteindre sa nouvelle position d'équilibre, ce qui n'était pas du tout réaliste. Il a donc fallu adapter la construction des lignes de Mach.

#### 9.1.1 Principe

Si l'on considère qu'une ligne de Mach est une succession de points, et que l'on perturbe la vitesse en un de ces points à  $t = t_0$ , alors on s'attend à obtenir la configuration suivante (un point non noir désigne un point perturbé ; le sens de propagation de la fluctuation est de la gauche vers la droite) :



Au moment où le premier point est perturbé, ceux qui le suivent dans la construction n'en sont



pas encore “informés”.

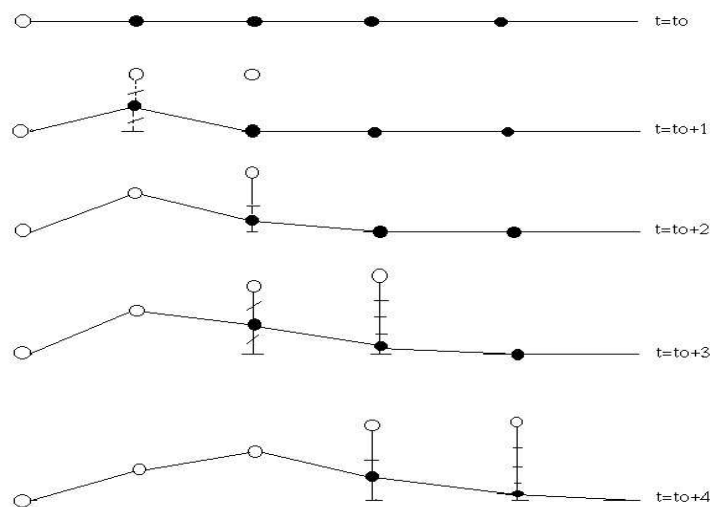
A  $t = t_0 + 1$ , la fluctuation a évolué le long de l’onde, avec une vitesse suffisante pour atteindre le second point, qui voit sa position modifiée, mais pas encore ceux qui le suivent, et ainsi de suite, jusqu’à reconstruire complètement la ligne.

Remarque :

Parallèlement à la propagation de cette fluctuation, le point où l’on fait le calcul peut en plus être localement perturbé par une modification de sa vitesse.

Mais dans le cas général, la distance entre deux points est indépendante de la vitesse de propagation, ce qui induit les deux cas suivants :

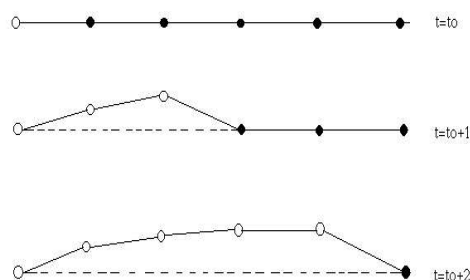
- La vitesse de propagation de l’onde est telle que à  $t_0 + 1$ , elle n’a pas encore perturbé le second point (c’est à dire que les points sont trop distants). Pour avoir la même physique, on va alors faire de la relaxation :



Dans le cas représenté, la vitesse de la perturbation est telle que deux intervalles de temps lui sont nécessaires pour joindre deux points consécutifs sur la ligne de Mach.

On peut avoir un raisonnement identique pour  $n$  intervalles de temps.

- La vitesse de propagation de l'onde est telle que en un intervalle de temps, plusieurs points ont le temps de fluctuer. On a alors :



### 9.1.2 Implémentation

Alors que la fonction *Aiguille* précédemment décrite n'avait qu'une fonction de traçage à la volée, il faut maintenant stocker tous les points formant la ligne, puisque ceux-ci doivent évoluer progressivement.

Pour chaque point, on stocke ses coordonnées au temps  $t - 1$  et celles au temps  $t$ .

Pour le calcul au temps  $t$  de la position du point  $P_i$  suivant un point  $P_{i-1}$  sur le sillage, on se sert des coordonnées de  $P_{i-1}$  au temps  $t - 1$ , bien qu'on vienne de calculer  $P_{i-1}(t)$ , car cette information doit mettre un pas de temps à se propager.

Si on désigne par  $n$  le nombre d'intervalles de temps nécessaires à la perturbation pour joindre deux points consécutifs sur la ligne de Mach, le calcul d'une nouvelle position se fait de la manière suivante :

On cherche à calculer la nouvelle position  $(x_i(t), y_i(t))$  d'un point  $P_i$ . Il est précédé sur la ligne par le point  $P_{i-1}$ . On évalue la vitesse en  $P_{i-1}(t - 1)$ , et nous effectuons la construction locale du cône de Mach (comme décrite à la section 7.2). Cette construction nous donne un point  $P_{fin}$ , qui correspond à la position de  $P$  s'il était complètement influencé par la perturbation, c'est à dire comme si l'équilibre était atteint instantanément (à  $P_{i-1}$  fixé).

La nouvelle position de  $P$  se calcule alors de la manière suivante :

$$P_i(t) = P_i(t - 1) + \frac{P_{fin} - P_i(t - 1)}{n}$$

En  $n$  étapes, le point aura bien atteint sa position finale.

## 9.2 Disparition progressive des ondes

Lorsqu'une perturbation module une onde, il se peut que l'influence soit telle que l'onde disparaisse en partie, voire même en totalité. Pourtant, cette disparition ne peut pas être instantanée, puisque toute information circule à la vitesse  $c$  à la surface.

Aussi, si une onde doit disparaître, cela doit se faire progressivement.

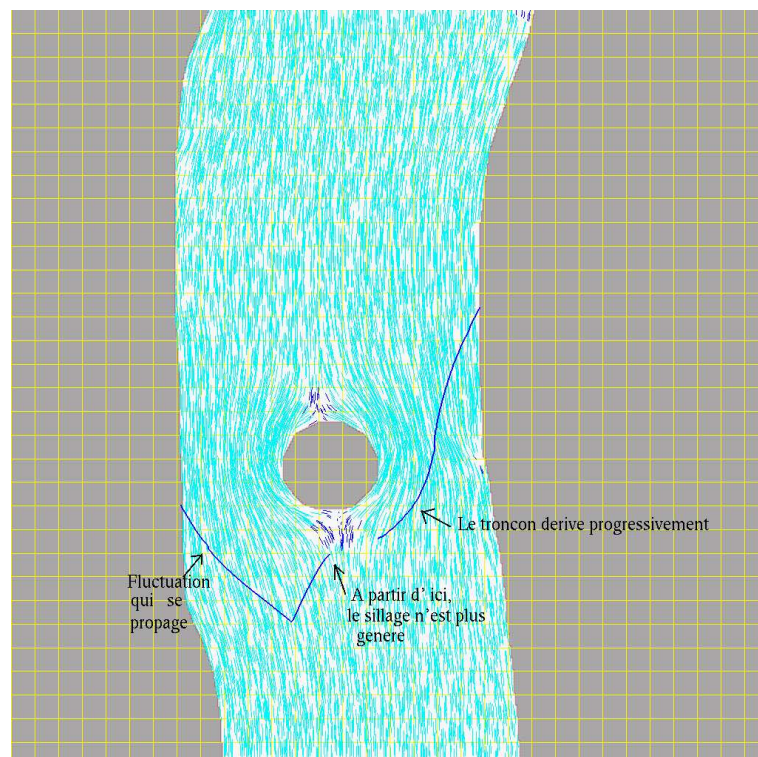
Pour cela, nous avons ajouté un champ aux points faisant partie de la ligne de Mach, indiquant si le point est dans une zone où l'onde peut exister.

Lors de la construction progressive de la ligne de Mach, si l'on est amené à construire un point dans une zone où le nombre de Froude est inférieur à un, ou bien hors du domaine, et que ce point se trouvait initialement valide, on met à jour le champ défini précédemment, et l'information va elle-même se propager le long du tronçon de ligne aval, car plus rien n'alimente la création de cette ligne.

En ce qui concerne le tracé, tant que les points ont un champs "l'onde ne peut pas exister", on ne les relie pas.

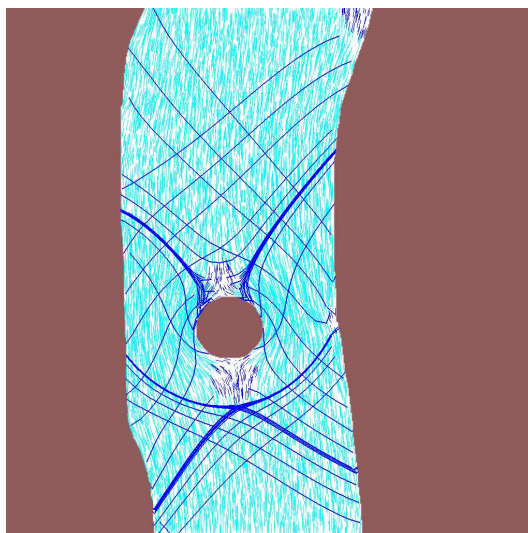
Dès qu'on tombe sur un point où le champ est différent, c'est qu'on a rejoint le "morceau de sillage" qui doit dériver avant de disparaître.

Cela est illustré sur la figure suivante : on a tracé une ligne de Mach dont l'un des bras est proche d'une zone où le nombre de Froude est inférieur à un, et on crée une perturbation à son origine. Sur une des branches, on voit la fluctuation qui se propage. L'autre se scinde en deux, et un morceau dérive jusqu'à disparaître.

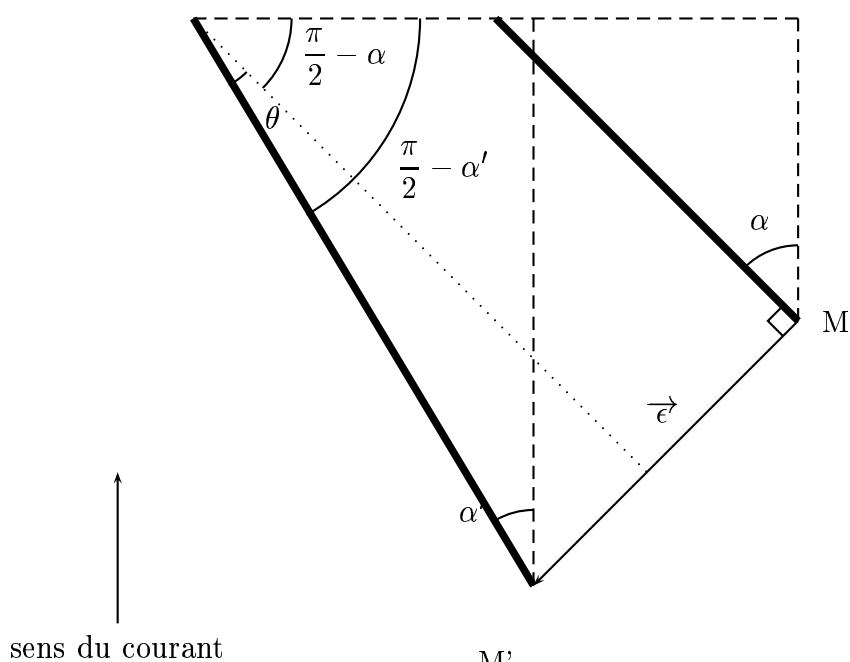


## 10 Compléments sur les ondes de choc

Comme nous l'avons vu à la section 8, on observe la naissance d'ondes de choc aux abords des obstacles, mais aussi parfois au centre du ruisseau, où l'on peut remarquer la présence de "chevrons". La prise en compte de ce phénomène est en cours ; pour ce faire, on cherche à qualifier de façon plus générale les critères caractérisant la formation de l'onde de choc. Nous pouvons remarquer qu'il y a des zones à l'intérieur du ruisseau où les lignes de Mach convergent, et d'autres où elles divergent. Cela est très bien illustré par la figure suivante :



Si les lignes convergent au point de s'accumuler sur une asymptote, par définition, une onde de choc naît. Nous devons donc écrire un critère pour identifier les zones où il y a convergence. Considérons deux branches appartenant à deux lignes de Mach, représentées ici en trait plein, d'origines respectives  $M$  et  $M'$ , que l'on a représentées par deux droites pour simplifier.



On étudie le signe de l'angle entre les deux droite,  $\theta$  : c'est lui qui nous indique si les deux lignes convergent (cas représenté) ou divergent.

On désigne par  $v$  (resp  $v'$ ) le module de la vitesse en M (resp M').

On désigne par  $\alpha$  (resp  $\alpha'$ ) le demi angle au sommet du cône de Mach de sommet M (resp M').

On désigne par  $F$  (resp  $F'$ ) le nombre de Froude en M (resp M').

On désigne par  $\vec{\epsilon}' = \overrightarrow{MM'}$ .

On peut écrire :  $v' \simeq v + \vec{\epsilon}' \cdot \nabla v$ .

On a alors :

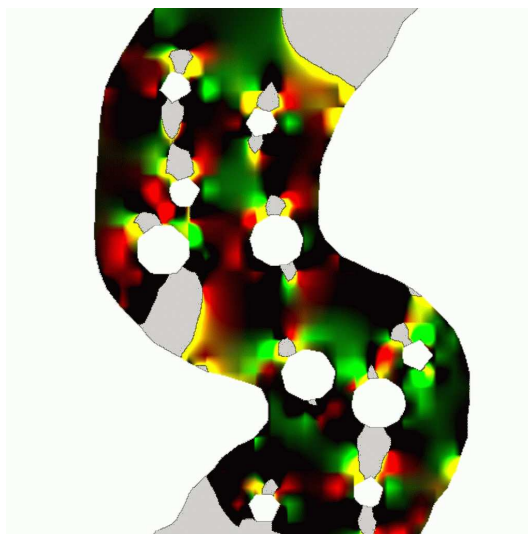
$$\sin \alpha' = \frac{1}{F'} = \frac{c}{v'} = \frac{c}{v + \vec{\epsilon}' \cdot \nabla v}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \\ &= \sin(\alpha - \alpha') \\ &= \sin \alpha \cos \alpha' - \cos \alpha \sin \alpha' \\ &= \frac{1}{F} \sqrt{1 - \frac{1}{F'^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{F^2}} \frac{1}{F'} \\ &\simeq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\nabla v \cdot \vec{\epsilon}'}{v} \quad (\text{DL obtenu par Maple}) \end{aligned}$$

Cette valeur nous donne une indication sur le taux de convergence des lignes de Mach, aussi nous avons appelé ce premier critère *pression de convergence*.

Voici sur la figure suivante la carte des pressions.(les zones rouges sont des zones de convergence de branches droites, les vertes de branches gauches. Les zones noires sont des zones de divergence). On constate bien de fortes valeurs dans les zones où nous avons fait partir des ondes de choc, à l'amont des poches où  $Fr$  est inférieur à un (en jaune, à l'amont et à l'aval des obstacles).



Mais ce critère est insatisfaisant, car les zones trouvées sont trop vagues et trop nombreuses. Une forte convergence n'entraîne pas obligatoirement une onde de choc (c'est une condition nécessaire, mais pas suffisante).

Ce critère n'est donc pas assez fin.

Nous avons alors établi un second critère, dont on a déjà parlé au début de la section 8 : lorsque les sillages sont parallèles aux iso- $V$  (on a alors la pente de la ligne de Mach et le gradient de la vitesse qui sont orthogonaux), on observe la naissance d'ondes de choc. Nous avons alors déterminé ces zones (voir figure 1 ci-dessous). Malheureusement, bien que le critère soit très précis, cette condition, nécessaire, n'est encore pas suffisante.

Nous avons alors remarqué que les ondes de choc naissent en général à l'amont de zones de ralentissement, que l'on peut caractériser par la relation :  $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} < 0$ . Nous avons alors ainsi éliminé certaines zones (voir figure 2).

La combinaison des critères 1 et 2, qui mesurent des choses différentes, nous a permis d'affiner encore les résultats : nous avons choisi de conserver uniquement les zones où la pression atteignait un certain seuil (voir figure 3).

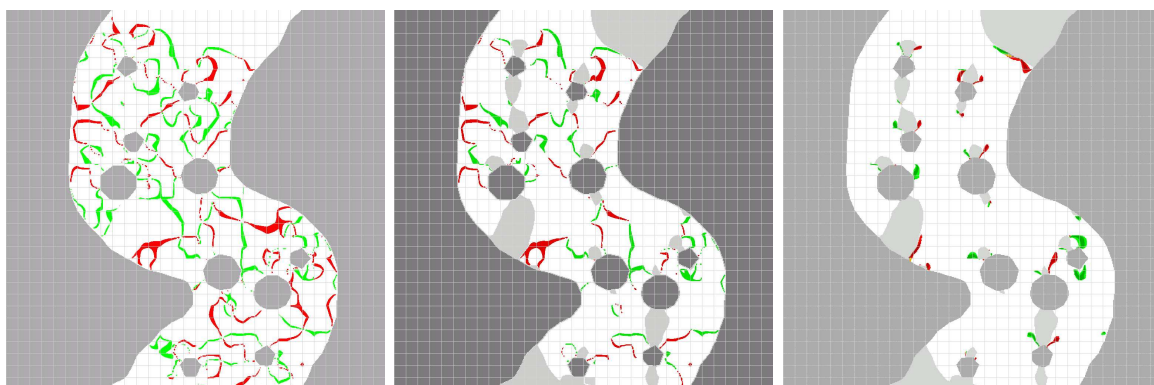


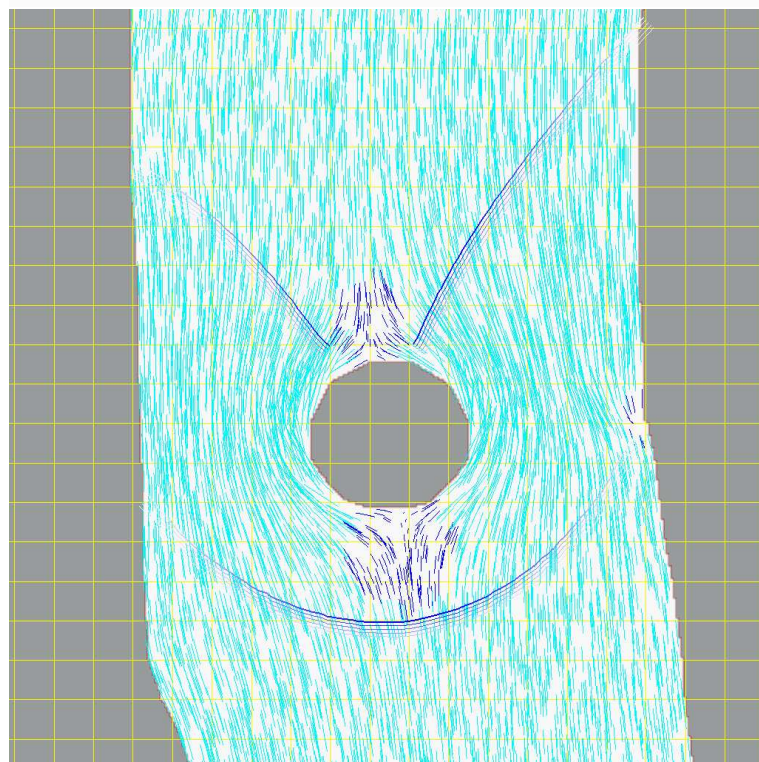
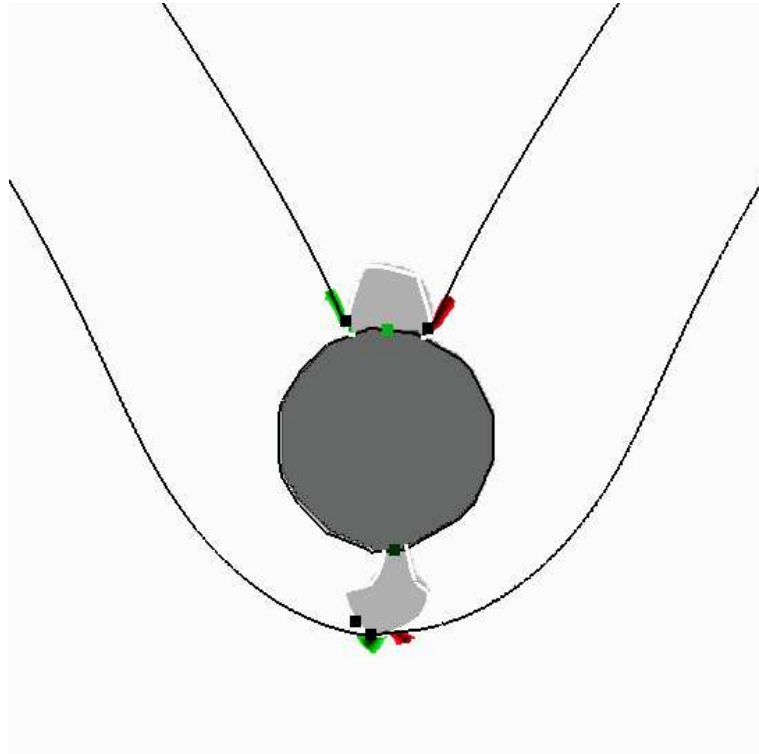
figure 1

figure 2

figure 3

Ces résultats ne permettent pas encore complètement de tracer les lignes. En revanche, ces critères nous permettent de retrouver les résultats obtenus à la section 8, comme le montre la figure de la page suivante, ce qui est plutôt rassurant !

Par contre, le critère 1 (notion de pression de convergence) pourrait nous servir à obtenir un critère de fin de tracé des lignes : l'“intensité” de la ligne serait égale au cumul des pressions qu'elle traverserait, et elle disparaîtrait quand la traversée de zones de divergence ferait tomber ce cumul à zéro.



## 11 Conclusion et remerciements

Bien que préliminaires par rapport à l'ambition que se fixe ce projet à long terme, les résultats que nous obtenons sont assez satisfaisants et encourageants pour la suite. Les animations diverses que l'on peut mettre en oeuvre, par le biais de perturbations, ou bien par le simple fait de pouvoir bouger une aiguille dans l'eau et observer son sillage, rendent le ruisseau "vivant".

L'exploitation de la méthode décrite en section 10 et son amélioration vont sans doute permettre le tracé d'ondes de choc que nous n'avons pas encore su détecter.

La prise en compte des hauteurs d'eau qui suivra enrichira la variété d'écoulements et pourra peut être encore permettre de découvrir d'autres zones de naissance d'ondes de choc.

D'autres phénomènes pourront encore être modélisés, comme par exemple la formation de bulles, d'eau blanche, au niveau des ressauts et des cascades.

D'autre part, le rendu réaliste de la surface ainsi obtenue (avec réfraction, reflets, réflexion du ciel) devrait à terme permettre d'obtenir des images confondantes.

Ce projet est vraiment vaste, et beaucoup de choses peuvent être envisagées pour parfaire l'aspect du ruisseau simulé.

Ce stage, qui recouvrait plusieurs domaines (informatique, mathématiques, mécanique des fluides) m'a permis d'apprendre des choses nouvelles, en particulier sur les ondes de surface.

J'ai également découvert le monde de la recherche. J'ai ainsi pu me rendre compte des difficultés qu'il pouvait y avoir à se procurer des informations sur les sujets qui nous intéressaient.

Pour cela, j'ai effectué de multiples visites à la bibliothèque universitaire de l'UJF (qui est la bibliothèque nationale pour ce qui concerne la mécanique des fluides), des recherches sur Internet et nous avons également pris contact avec de nombreuses personnes, dont les suivantes ont bien voulu répondre favorablement :

- Monsieur N'Som, professeur en mécanique des fluides à l'université de Savoie, qui a eu la gentillesse de nous rendre visite ;
- Messieurs Meunier et Frey, du CEMAGREF, qui nous ont reçu et où nous avons pu observer des expériences en cours sur des écoulements d'eau entre deux parois de verre faiblement espacées ;
- Monsieur N'Guyen, spécialiste en mécanique des fluides à l'ENSHMG (Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique et de Mécanique de Grenoble) ;
- Monsieur Charru, spécialiste en instabilités interfaciales à l'IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) ;
- Monsieur Salati, professeur de physique à l'université de Savoie ;

Je remercie toutes ces personnes, pour nous avoir aidé directement, et pour nous avoir donné les coordonnées d'autres personnes susceptibles de nous aider dans notre recherche ainsi que de la bibliographie.

Je remercie également Fabrice Neyret, pour ses conseils, son aide et sa très grande disponibilité.



## Références

- [1] J. LIGHTHILL. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978.  
Ouvrage contenant notamment des informations sur les différentes variétés de vagues et sur les sillages des bateaux.
- [2] J. LIGHTHILL. *An informal introduction to the theoretical fluid mechanics*. Oxford University Press, 1986.  
Ouvrage général sur la mécanique des fluides.
- [3] FEYNMAN *Lectures on physics*. Addison-Weisley Publishing Compagny, 1977.  
Ouvrage général.
- [4] D. SALIN J.MARTIN *La mécanique des fluides*. Nathan Université, 1999.  
Ouvrage synthétique sur la mécanique des fluides.
- [5] M. CARLIER. *Hydraulique générale et appliquée*. Eyrolles, 1980.  
Ouvrage dans lequel on trouve notamment des informations sur les écoulements par les déversoirs et dans les canalisations.
- [6] P. CHASSAING. *Mécanique des fluides*. Cepadues éditions.  
Ouvrage qui nous a notamment apporté des informations sur la construction géométrique des lignes de Mach.
- [7] C. GARING. *Ondes mécaniques et diffusion*. Ellipses.  
Ouvrage général.
- [8] L M. MILNE-THOMSON. *Theoretical Hydrodynamics*. MacMillan & Co LTD, 1968.  
Ouvrage général.
- [9] A. LENCASTRE. *Manuel d'hydraulique générale*. Eyrolles, 1966. Ouvrage général.
- [10] M. RIEUTORD *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, 1997.  
Seul ouvrage que nous ayons trouvé traitant des ondes solitaires.
- [11] F. CRAWFORD JR *Waves*. McGraw-Hill, 1977. Ouvrage général.
- [12] C. JACOB *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Editions de l'académie de la république populaire roumaine, 1959.  
Ouvrage général.
- [13] Japan society of mechanical engineers. *Visualized flow*. Pergamon Press.  
Ouvrage montrant des photos d'ondes de choc et de lignes de Mach.
- [14] <http://www.chez.com/jppetit/mhd.html>
- [15] [http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott\\_russell.html](http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html)
- [16] <http://www.ec-nantes.fr/DHN/Francais/index.html>
- [17] <http://books.nap.edu/books/NI000061/html/index.html>