



HAL
open science

Posters de médiation scientifique IV : Jeux dans les Graphes

Nicolas Nisse

► **To cite this version:**

| Nicolas Nisse. Posters de médiation scientifique IV : Jeux dans les Graphes. 2017. hal-01645165

HAL Id: hal-01645165

<https://inria.hal.science/hal-01645165>

Submitted on 23 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Posters de médiation scientifique IV : Jeux dans les Graphes

Nicolas Nisse^{*,**}

Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S, France

Abstract. Ces posters font partie d'une série de posters que nous présentons lors de diverses interventions de médiation (vulgarisation) scientifique (Fête de la Science, intervention dans des écoles, etc.). Nous essayons d'y présenter des bases théoriques (mathématiques) de l'algorithmique (Un algorithme est une suite finie et non ambiguë d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre un problème ou d'obtenir un résultat) et structures de données (comment "coder" un nombre, une image, etc.)..

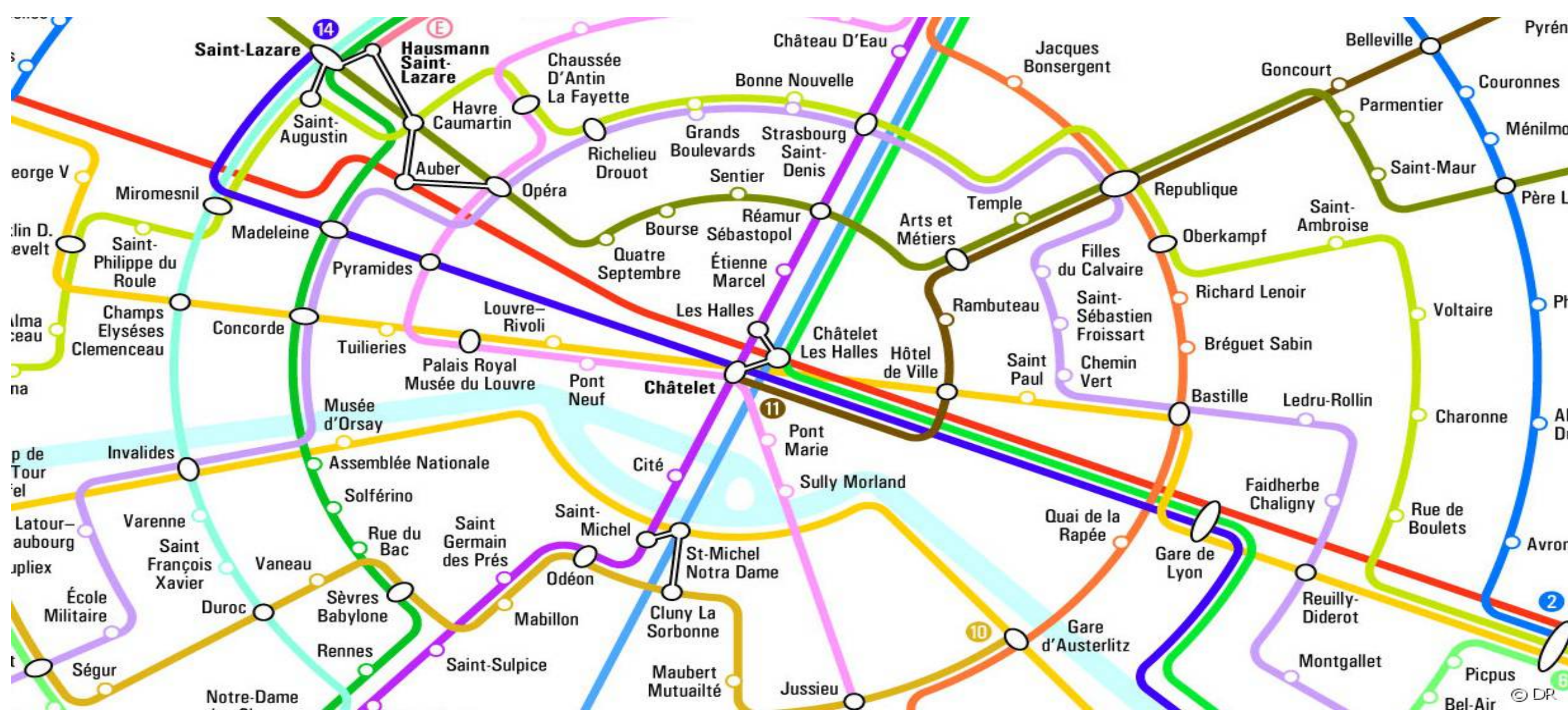
Ici, nous parlons des graphes : modèle mathématique pour décrire des interactions entre éléments (routes entre des villes, liens d'amitié entre personnes, fibre optique entre ordinateurs, liaisons chimiques entre protéines...) et de leurs applications dans les réseaux actuels. Nous en profitons pour présenter deux jeux (à deux joueurs) dans les graphes.

La majorité du contenu de ces posters est accessible dès l'école primaire, cependant ils peuvent être utilisés au collège voire au lycée.

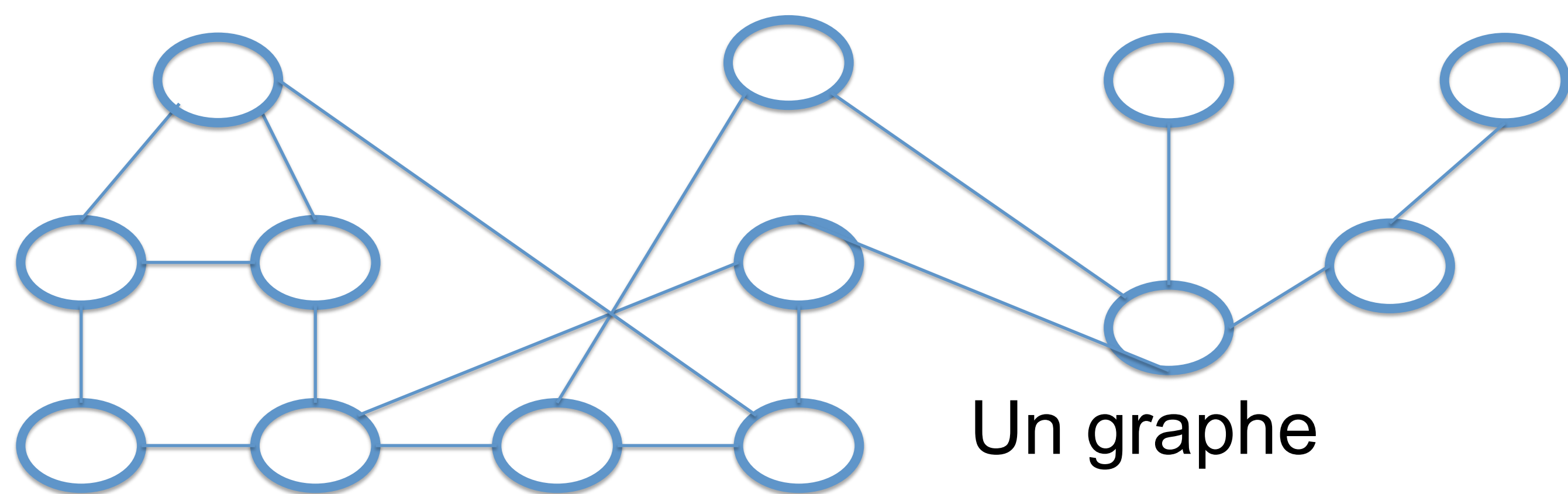
* nicolas.nisse@inria.fr

** Merci à Frédéric Havet, Dorian Mazauric et les autres membres de l'équipe COATI pour leur aide et leurs conseils.

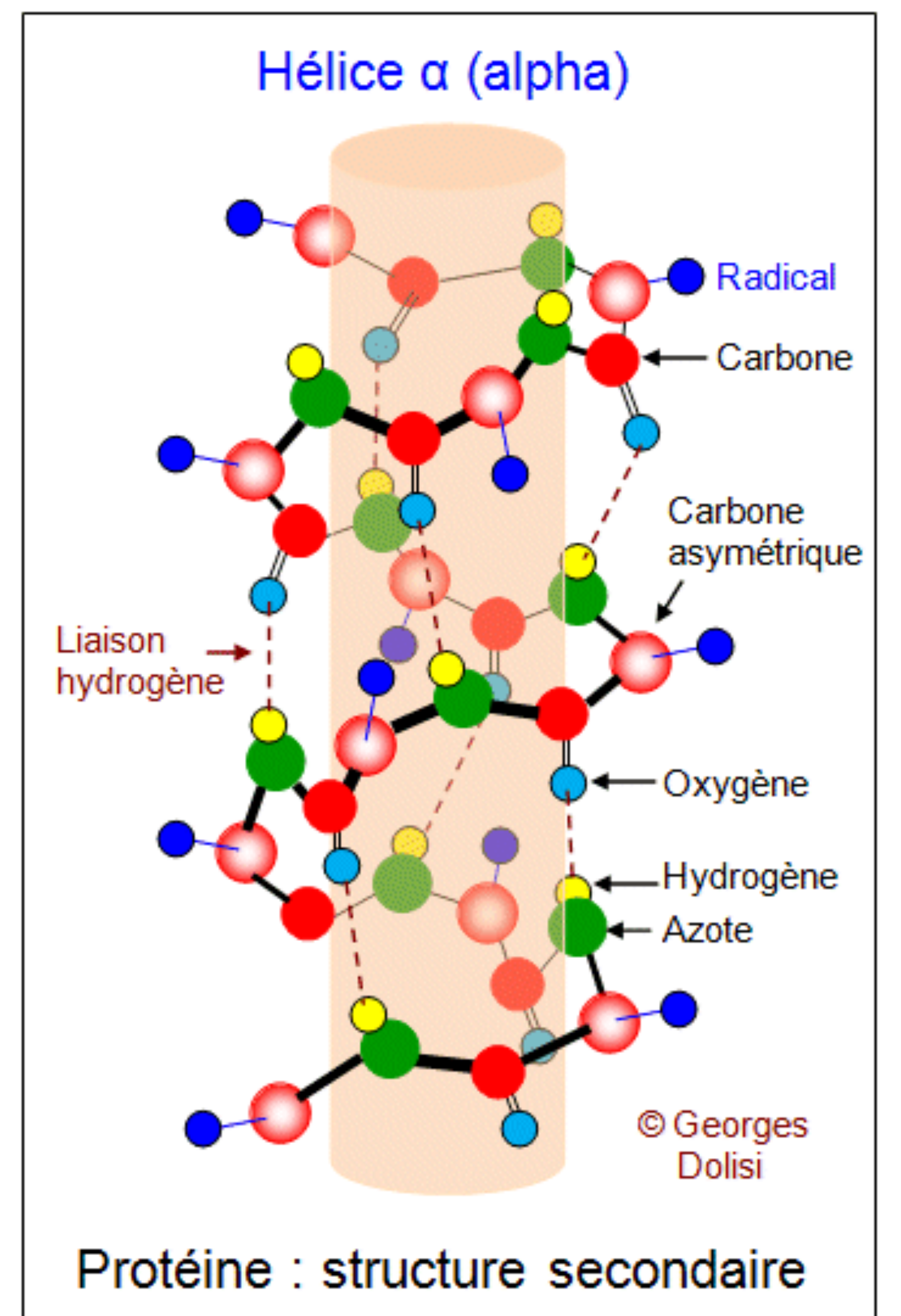
JEU dans les GRAPHEs



Graphe du métro parisien

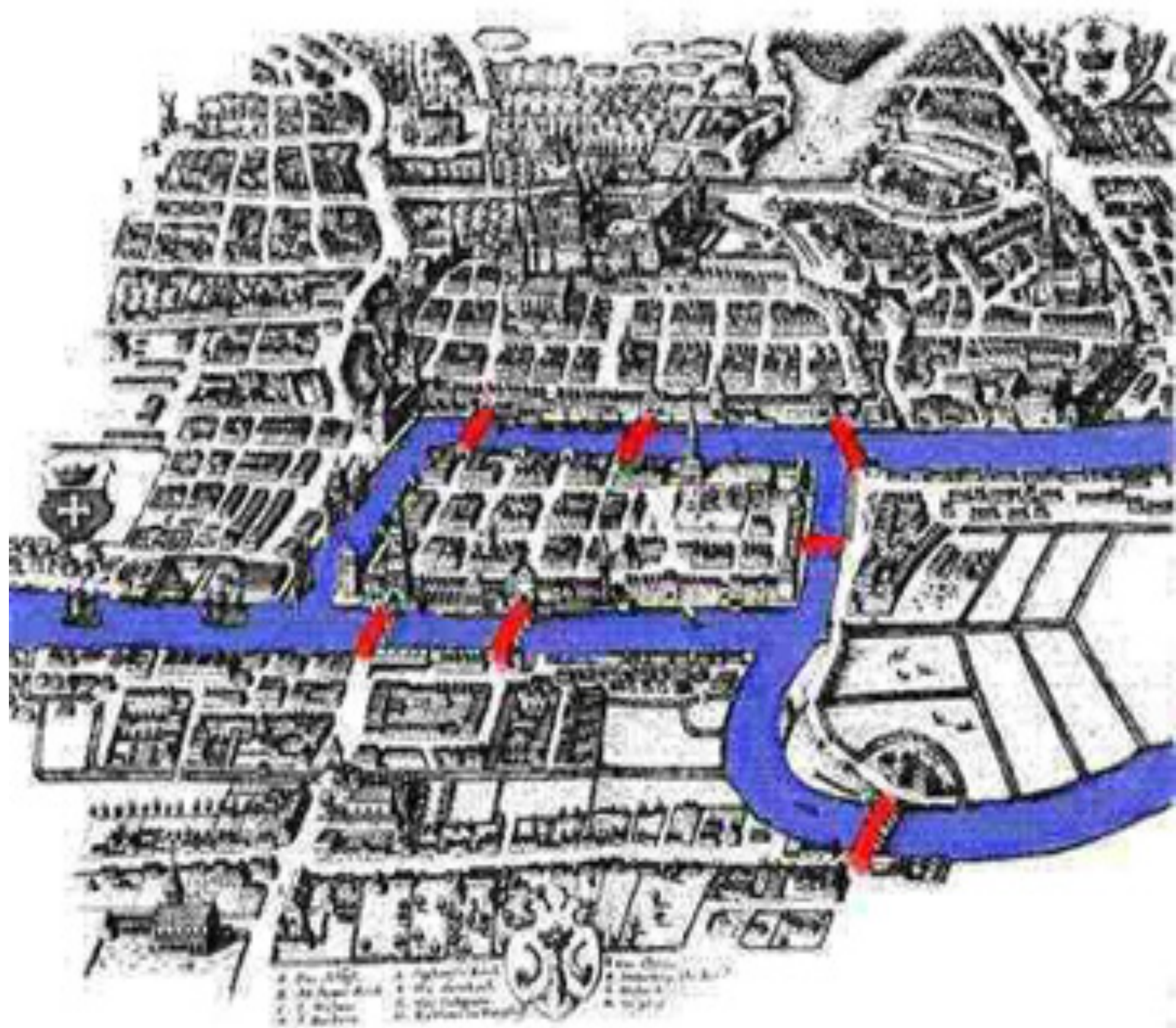


Un graphe

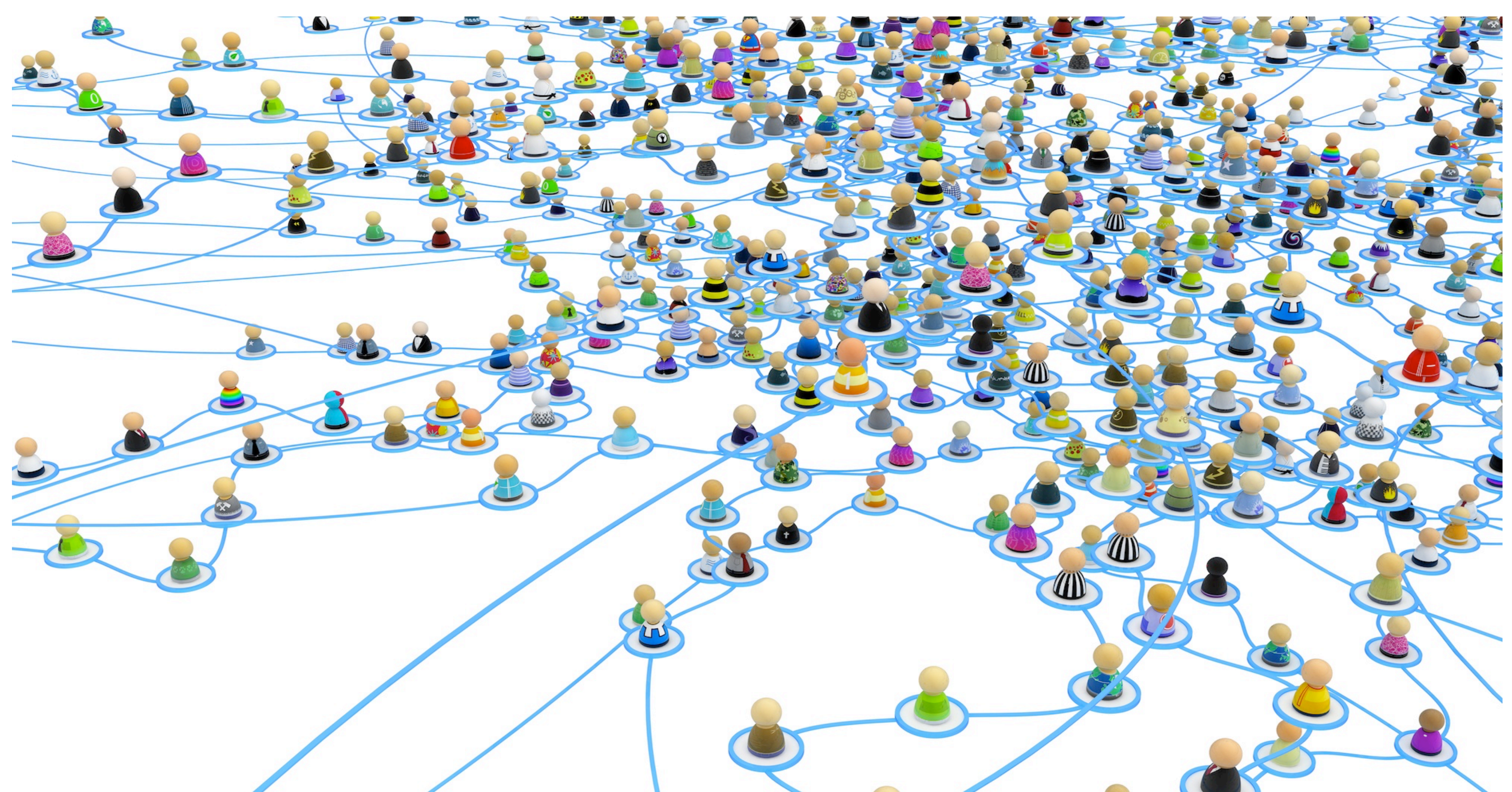


Protéine : structure secondaire

et APPLICATIONS



Les ponts de Königsberg (Russie)



Représentation d'un réseau social sous forme de graphe <http://wam.wikia.com/>

Qu'est ce qu'un **GRAPHE** ?

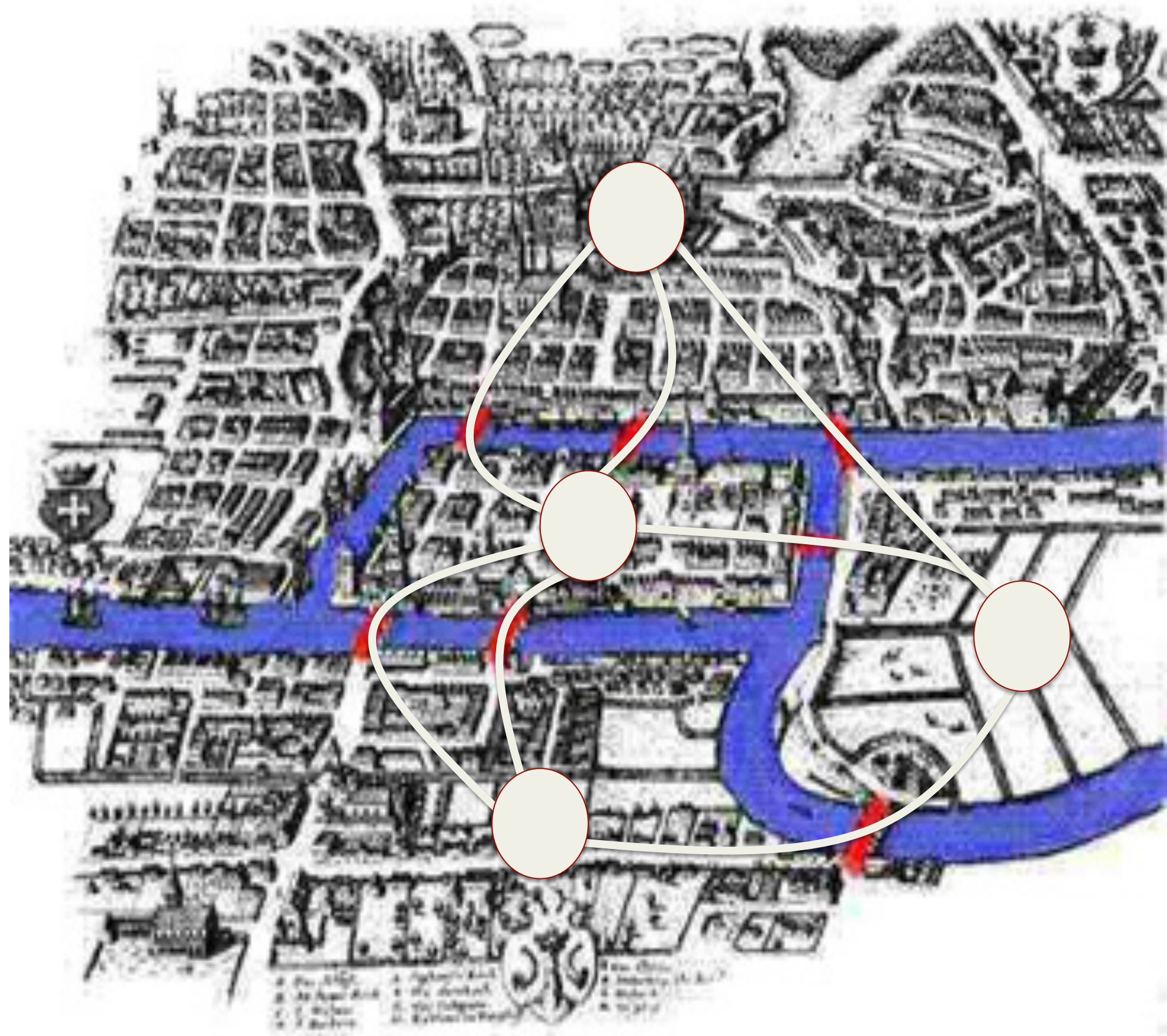
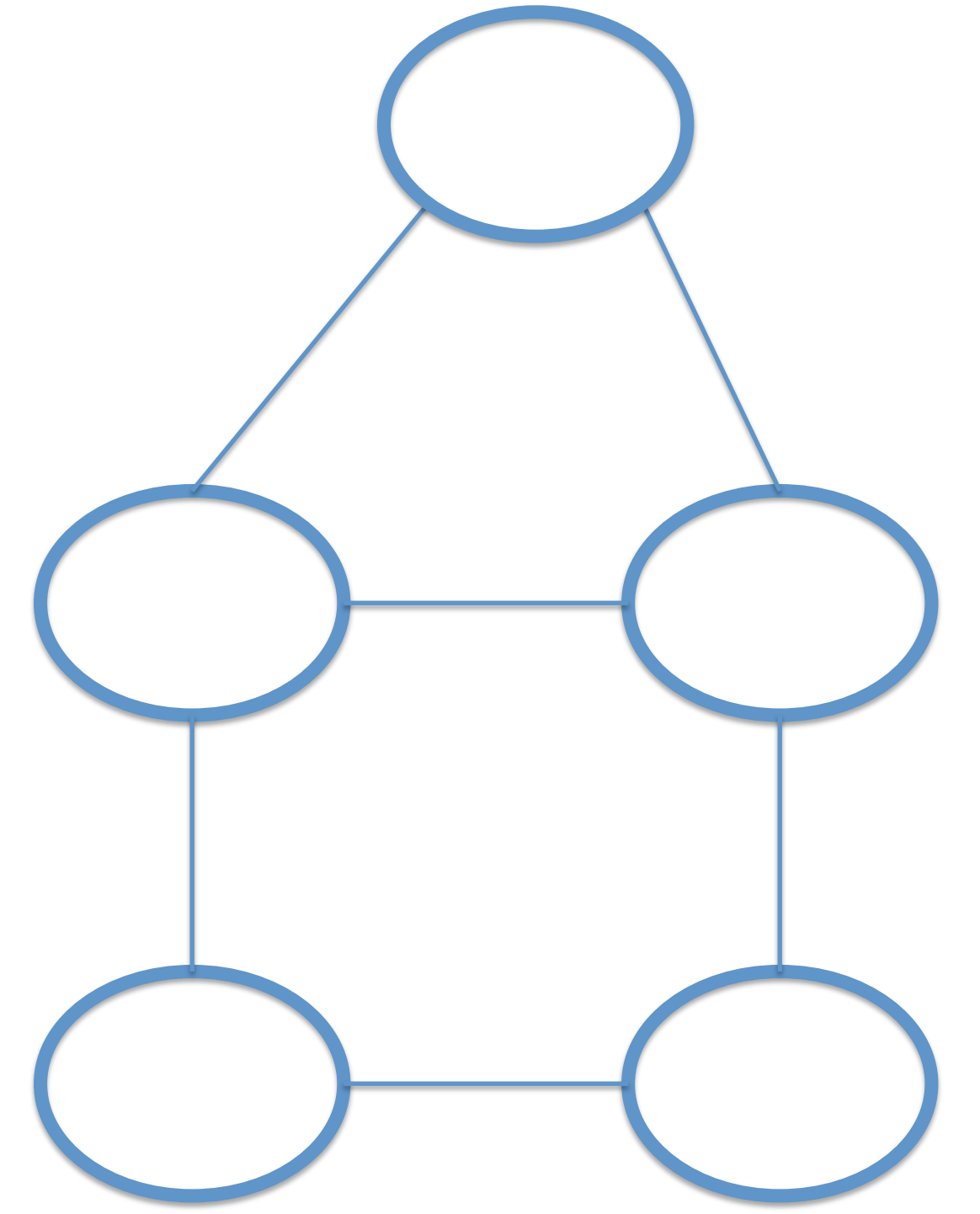
graphe : objet mathématique décrivant les **relations/interactions** entre les **éléments** d'un **ensemble**. Un graphe est composé de **sommets** reliés par des **arêtes** (les liens entre sommets). Les graphes permettent l'étude de nombreux **réseaux** : géographiques (**routiers**), sociaux (**Facebook**), biologiques (**molécules**), informatiques (**Internet**)...

sommets : représentés par des **ronds**  modélisant les **éléments** dont on étudie les relations.

Exemples : **villes** (réseaux routiers), **personnes** (réseaux sociaux), **atomes** (molécules), **routeurs** de l'Internet...

arêtes : représentées par des **traits**  modélisant les **relations** entre les sommets. Deux sommets en relation sont liés par une arête et sont dits **adjacents** ou **voisins**.

Exemples : **routes** (entre 2 villes), **liens d'amitié** (entre 2 personnes), **liens chimiques** (entre 2 atomes), **fibres optiques** (entre 2 routeurs)...



Les **ponts de Königsberg** (Russie)

Histoire : Les graphes ont été initialement étudiés par le mathématicien **Leonhard Euler** (1707-1783) en **1735** pour répondre à la question suivante :

Peut-on se promener dans la ville de **Königsberg** en passant **exactement une fois** par chacun des **7 ponts** et revenir à son point de départ?

Théorème [Euler 1735] : Etant donné un graphe connexe, on peut se « promener » en visitant chaque arête exactement une fois et revenir à son point de départ si et seulement si chaque sommet est lié par un nombre **pair** d'arêtes.

Quelle est la réponse à la question d'Euler ?

1^{er} jeu (Cycle Eulérien) : étant donné un graphe, trouver une « promenade » qui passe exactement une fois par chaque **arête**.

Application : **Problème de la tournée du facteur** : un facteur doit passer dans chaque rue pour y distribuer le courrier mais veut éviter, autant que possible, de passer 2 fois par la même rue.

2^e jeu (Cycle Hamiltonien) : étant donné un graphe, trouver une « promenade » qui passe exactement une fois par chaque **sommet**.

Application : **Problème du voyageur de commerce (VRP)** : un VRP doit passer dans chaque ville pour y démarcher mais veut éviter, autant que possible, de passer 2 fois par la même ville.

Note : **Le 2nd jeu est BEAUCOUP plus difficile que le 1^{er}**



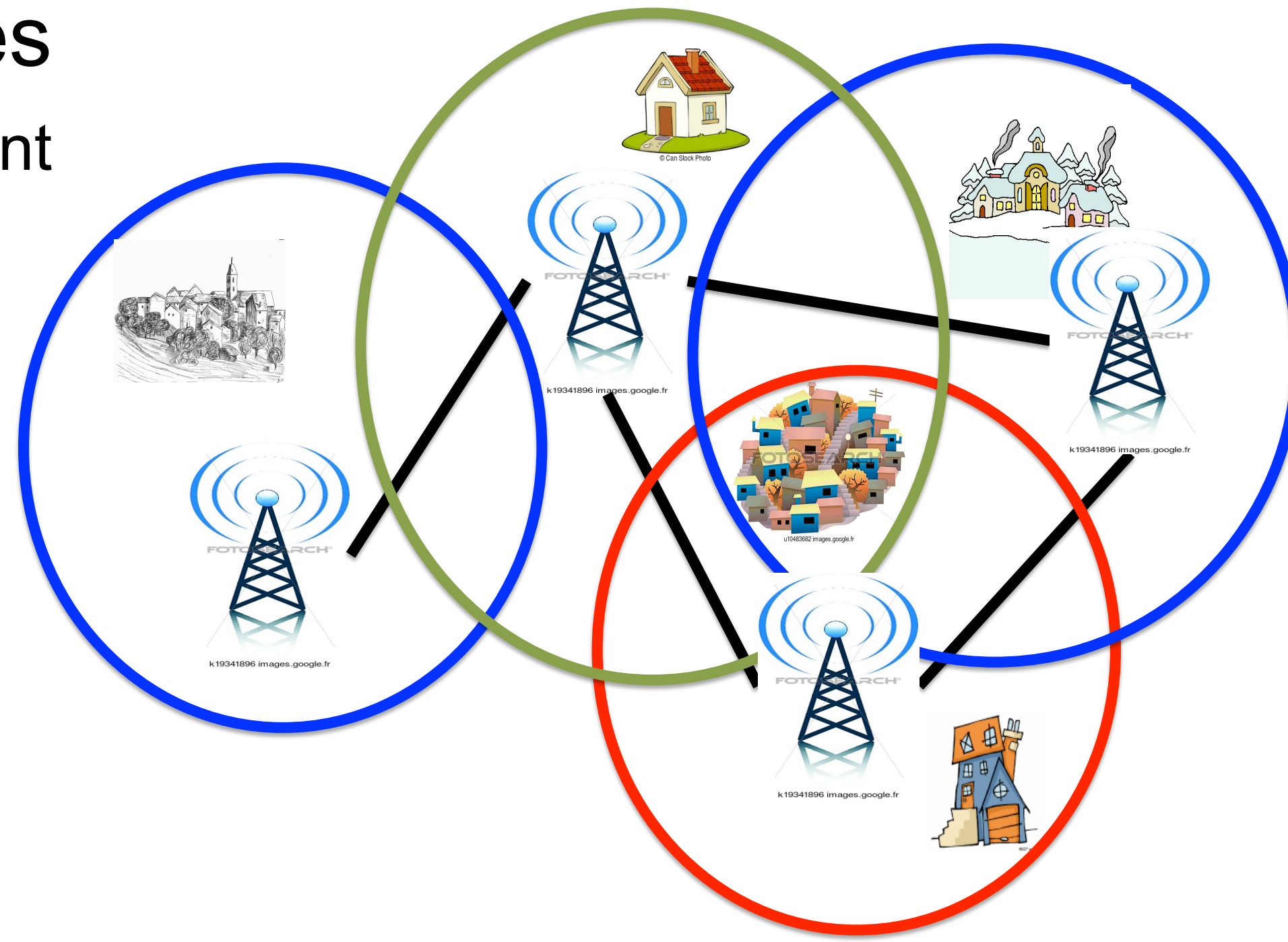
Graphes : APPLICATIONS

Affectation de fréquences dans les réseaux de téléphonie mobile

Deux **antennes voisines** utilisant la **même fréquence** vont créer des **interférences** (si deux personnes parlent en même temps, on ne comprend rien)

Il faut donc **affecter** des **fréquences différentes** à des antennes voisines

Tout en **minimisant le nombre total de fréquences** (une bande de fréquences coûte cher)



Modélisation avec des graphes :

- **Sommet** = antenne
- **Couleur** = fréquence

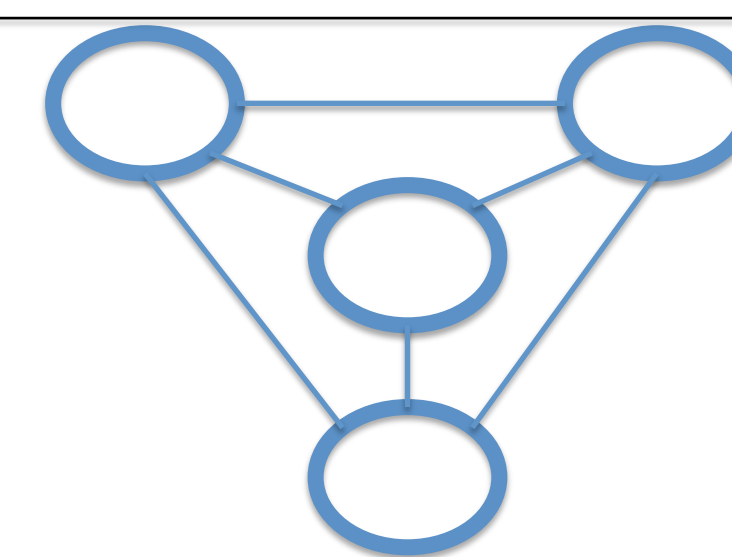
Coloration propre :

Donner une couleur à chaque sommet tel que 2 sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.

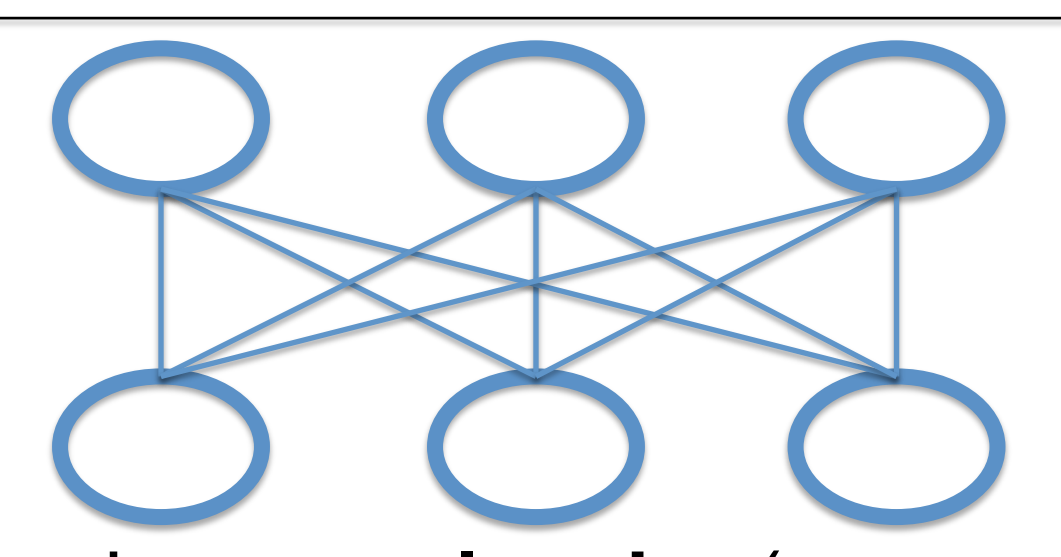
But : minimiser le nombre de couleurs utilisées

graphe planaire : graphe que l'on peut dessiner (dans le plan) sans croisement d'arêtes.

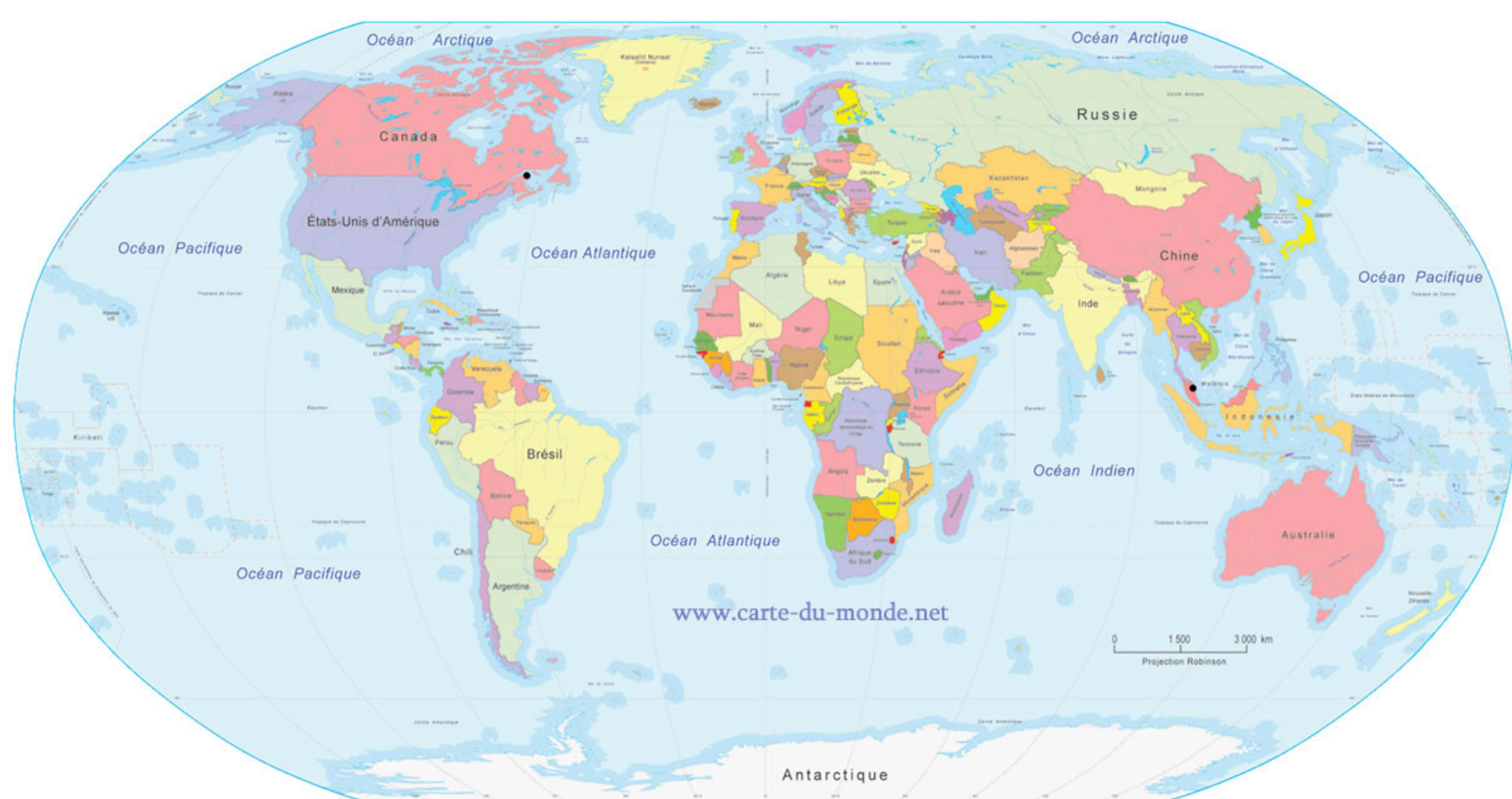
Exemple : planisphère (pays = sommets ; 2 pays sont adjacents si leurs frontières se touchent).



graphe planaire



graphe non planaire (essayez de le dessiner sans croisements...)



Histoire : En 1852, **Francis Guthrie** demande si tout graphe planaire admet une coloration propre avec seulement 4 couleurs. Il faut attendre 1976 pour que **Kenneth Appel** et **Wolfgang Haken** répondent à cette question (en utilisant la puissance de calcul d'ordinateurs).

Théorème des 4 couleurs : Tout graphe planaire a une coloration propre avec 4 couleurs.

3^e jeu (Coloration) : colorer une carte du monde (une couleur par pays) tel que deux pays voisins reçoivent toujours des couleurs différentes. **Saurez vous n'utiliser que 4 couleurs ?**

Comprendre les réseaux sociaux : « le monde est petit »

Histoire : En 1963, **Milgram** réalise l'expérience suivante : des américains doivent **transmettre des lettres**. Ils ne connaissent que le nom, le métier, l'état... du destinataire.

La **règle** est qu'on ne peut transmettre la lettre que "de la main à la main".

Résultats : $\approx 20\%$ des lettres sont arrivées. En moyenne, les lettres victorieuses sont arrivées en 6 étapes.



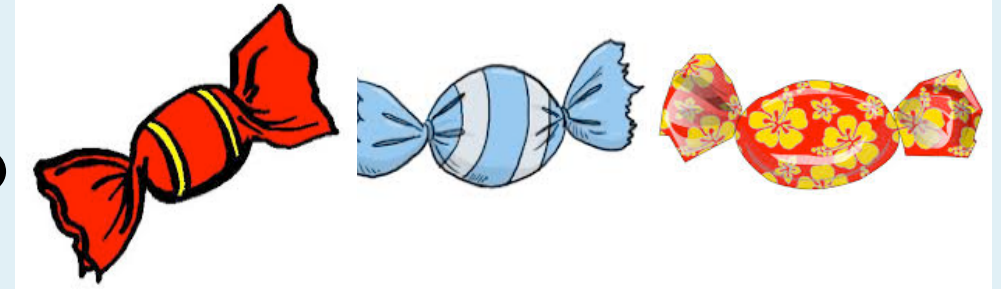
En 2000, **Jon Kleinberg** propose un modèle des réseaux sociaux à l'aide de graphes qui explique pourquoi les distances sont petites (logarithmiques).

4^e jeu : Quelle est la **distance** entre votre page Facebook et celle de Justin Bieber ? de Michelle Bachelet (présidente du Chili) ? de Antoine Griezmann ? ...

Jeu à 2 joueurs dans les graphes : PREVISION

5^{me} jeu : Un avion a, par erreur, déversé son chargement de bonbons dans une forêt (modélisée par un graphe). Un **enfant** veut sortir de sa maison pour manger un bonbon. Ses **parents** veulent l'en empêcher et doivent trouver les bonbons avant lui.

A quel point les parents doivent ils être rapides pour gagner ?



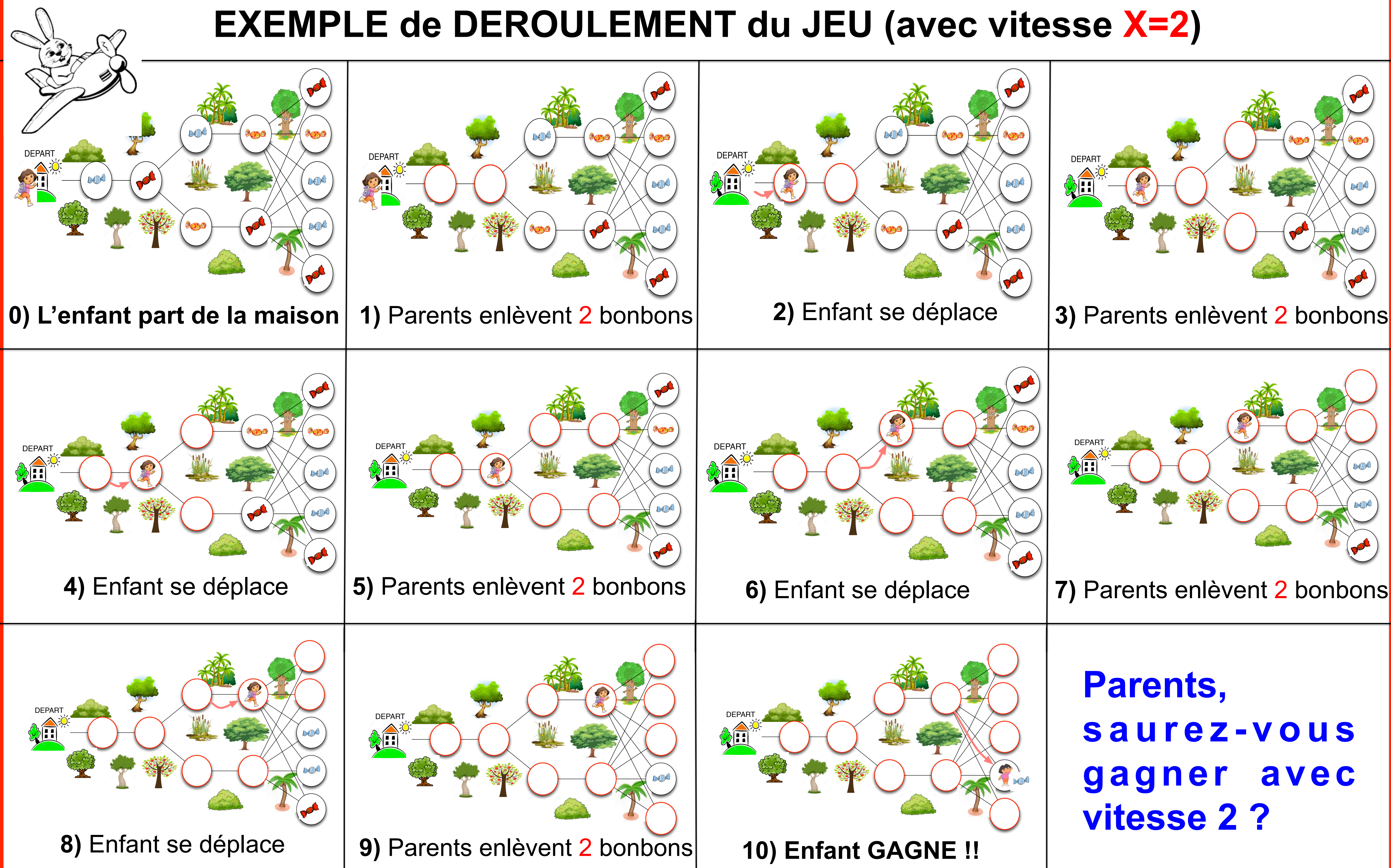
Règles du jeu :

- 1) Choisir la **vitesse X** des Parents ($X = 1$ ou 2 ou 3 ou $4...$)
- 2) L'**Enfant** commence dans la **maison** (notée DEPART)
- 3) **Tour-à-tour** :
 - Les Parents prennent **X bonbons** (n'importe où)
 - L'Enfant **se déplace** le long d'une arête

Fin du jeu :

Les Parents gagnent s'ils arrivent à ramasser tous les bonbons avant que l'Enfant n'en prenne un. L'Enfant gagne s'il arrive à manger un bonbon.

EXEMPLE de DEROULEMENT du JEU (avec vitesse $X=2$)



Application : Les programmes informatiques ont souvent besoin de données obtenues au préalable. Un moyen d'accélérer les calculs est d'anticiper ces besoins et de « **pré-calculer** » des données grâce à des programmes auxiliaires. Afin d'**économiser les capacités de calcul**, il n'est pas possible de pré-calculer trop de données (on ne peut enlever qu'un nombre limité de bonbons). De plus, les données qui seront effectivement nécessaires ne sont **pas connues à l'avance** (la trajectoire de l'Enfant est indéterminée). **Exemples** : Jeux vidéo, pré-téléchargement de pages web (youtube), ...

Jeu à 2 joueurs dans les graphes : Gendarmes et voleur

6^e jeu : Qui n'a jamais joué à ce jeu étant petit ? Une équipe de « gendarmes » essaie d'attraper un « voleur »



qui se déplace dans un graphe.



Combien de gendarmes sont-ils nécessaires pour gagner ?

Règles du jeu :

- 1) Choisir le **nombre X** de gendarmes ($X = 1$ ou 2 ou 3 ou $4...$)
- 2) Chacun des X gendarmes choisit un sommet et s'y place (possiblement plusieurs gendarmes par sommets)
- 3) Le voleur se place sur un sommet
- 4) **Tour-à-tour** :
 - Chaque Gendarme peut se déplacer le long d'une arête (ou rester immobile).
 - Le Voleur peut se déplacer le long d'une arête.

Jeu défini en 1983 par Peter Winkler, Richard Nowakowski, Alain Quilliot



Fin du jeu :

Les Gendarmes gagnent s'ils attrapent le Voleur (si un Gendarme arrive sur le même sommet que le Voleur). Le Voleur gagne sinon.

EXEMPLE de JEU (avec $X=2$ gendarmes) dans une grille 5×6

<p>0) Les gendarmes se placent</p>	<p>1) puis, le voleur</p>	<p>2) Les gendarmes se déplacent</p>	<p>3) Puis le voleur</p>
<p>4) Les gendarmes se déplacent</p>	<p>5) Puis le voleur</p>	<p>6) Les gendarmes se déplacent</p>	<p>7) Le voleur passe son tour pour rester libre</p>
<p>8) Les gendarmes se déplacent</p>	<p>9) Le voleur tente un baroud d'honneur</p>	<p>10) Les gendarmes bougent et gagnent !!!</p>	<p>Saurez-vous gagner avec 2 gendarmes dans une grille 13×9 ?</p> <p>Dans n'importe quelle grille ?</p>

Histoire : En 1985, Henri Meyniel demande si $O(\sqrt{n})$ gendarmes gagnent toujours dans un graphe connexe avec n sommets ?? **La question est toujours sans réponse** 😞, cependant :

Théorème [Aigner, Fromme 1984] : 3 gendarmes peuvent toujours gagner dans un graphe planaire connexe (quel que soit le nombre de sommets).



Applications : Jeux vidéos, robotique, drones, IA, et résultats fondamentaux en théorie des graphes.