HAL open science

Affectation distribuée d'individus à des activités avec des préférences additivement séparables

Maxime Morge, Antoine Nongaillard

To cite this version:

Maxime Morge, Antoine Nongaillard. Affectation distribuée d'individus à des activités avec des préférences additivement séparables. Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents (JFSMA), Jul 2017, Caen, France. pp.19-28. hal-01558608

HAL Id: hal-01558608

https://inria.hal.science/hal-01558608

Submitted on 8 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Affectation distribuée d'individus à des activités avec des préférences additivement séparables

Maxime Morge
maxime.morge@univ-lille1.fr

Antoine Nongaillard
antoine.nongaillard@univ-lille1.fr

Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 - CRIStAL - Centre de Recherche en Informatique Signal et Automatique de Lille, F-59000 Lille, France

Résumé

Nous souhaitons proposer un réseau social numérique afin que les utilisateurs forment des groupes pour pratiquer ensemble des activités. Dans cet article, nous introduisons un modèle formel de formation de coalitions correspondant à ce cas d'usage. Nous nous restreignons à des préférences additivement séparables pour proposer un algorithme distribué. Nous démontrons que le résultat est Pareto-optimal. Nos expérimentations montre que la solution atteinte par notre algorithme est meilleure que celle obtenue via les techniques classiques de recherche locale et que sa distribution permet d'accélérer son exécution.

Mots-clés : *Résolution distribuée de problème, Négociation, Comportement d'agents, Problème d'appariement*

Abstract

We aim at providing a social network such that users form groups to practice together some activities. In this paper, we introduce a formal framework for coalition formation which is suitable for our usecase. We restrict ourselves to additively separable preferences in order to propose a distributed matching algorithm. We demonstrate that its outcome is a Pareto-optimum. Our experiments shows we reach a better outcome than the classical local search techniques and that the distribution of our algorithm speeds up its runtime.

Keywords: *Distributed problem solving, Negotiation, Agent behavior, Matching problem*

1 Introduction

Les Systèmes Multi-Agents (SMA) constituent un paradigme de premier ordre pour l'analyse, la conception et l'implémentation de systèmes composés d'entités autonomes en interaction. Afin de concevoir des environnements socio-techniques médiateurs ou simulés, les SMA permettent de modéliser des boucles de rétroaction entre acteurs hétérogènes dont les prises de décision locales font émerger des phénomènes globaux. Un des défis auquel la communauté SMA fait façe consiste à faciliter l'élicitation des préférences des utilisateurs.

Nos travaux s'inscrivent dans le projet « Partir Ensemble » (PartENS). Ce projet vise à comprendre et modéliser les dynamiques de rétroaction se produisant dans un collectif en interaction à la fois au sein d'un réseau social virtuel et d'un réseau social réel. Le cas d'usage sur lequel nous nous concentrons ici concerne un collectif de séniors âgés de 60 à 70 ans qui entrent en relation afin d'effectuer des activités ponctuelles. Ce terrain d'expérimentation implique plusieurs milliers d'individus inscrits au CCAS (Caisse Centrale d'Activités Sociales du Personnel) de la ville de Lille. L'objectif est ici de maximiser les activités organisées afin d'améliorer la cohésion sociale et lutter contre l'isolement chez certains séniors. Nous souhaitons proposer un réseau social numérique afin que les utilisateurs forment des groupes pour pratiquer ensemble des activités. Ce système a pour objectif de suggérer à chaque utilisateur des individus avec lesquels pratiquer ces activités.

Dans cet article, nous introduisons un modèle formel de formation de coalitions correspondant à notre cas d'usage. Un ensemble d'individus doivent être appariés pour pratiquer une des activités qui leur ait proposé en fonction des préférences des individus pour leurs alter egos et pour les activités. Nous nous restreignons à des préférences additivement séparables afin de proposer un algorithme d'affectation. Nous démontrons que le résultat de notre algorithme est valide et Pareto-optimal. En adoptant le modèle d'acteur [2], nous sommes en mesure de distribuer cet algorithme. Nos expérimentations montre que la solution atteinte par notre algorithme est de meilleur qualité que celles obtenues avec des techniques classiques de recherche locale. De plus, sa distribution permet d'accélérer son exécution (jusqu'à 3,5 fois).

La section 2 compare notre approche aux tra-

vaux scientifiques connexes. Nous introduisons notre problème d'affectation dans la section 3. Nous proposons un algorithme d'affectation dans la section 4. La distribution de cet algorithme est présentée sous la forme de comportements d'agents dans la section 5. La section 6 exhibe nos résultats expérimentaux. Finalement, nous synthétisons nos travaux puis nous dressons quelques perspectives (cf Section 7).

2 Travaux connexes

La théorie du choix social vise à construire et à analyser des processus pour la décision collective où un ensemble d'agents sélectionnent ou classent conjointement un sous-ensemble d'alternatives parmi celles disponibles. Contrairement à l'Économie, l'Informatique se préoccupe des questions algorithmiques afin de rendre opérationnelles ces méthodes. Nous nous focalisons ici sur un problème d'appariement en particulier.

Dans le problème de formation de coalition hédonique introduit par [4], chaque joueur est caractérisé par une relation de préférences sur l'ensemble des coalitions auxquelles il peut appartenir. Notre problème est une spécialisation de ce problème générale. Nous pouvons le représenter comme un jeu hédonique en associant à chaque activité un joueur qui préfère ne pas être surchargé et en munissant chacun des autres joueurs des préférences agrègeant celle d'un individu sur les activités et sur les alter egos. Nous considérons ici que ces deux préférences sont indépendantes, puis nous les agrégeons dans une fonction d'utilité. Sous cette hypothèse, notre configuration a des propriétés structurelles utiles qui se distinguent de celle d'un jeu hédonique générique. Le fait que les activités soient des points focaux [11] et la représentation succincte des préférences nous permet de proposer un algorithmique pour atteindre de "bon" appariements.

Le problème de sélection d'activité de groupe a été proposé dans [3]. Dans un tel problème, chaque agent participe à au plus une activité et ses préférences portent uniquement sur les activités et elles dépendent du nombre de participants à l'activité. C'est une généralisation d'un jeu hédonique anonyme. Même si ce problème a été étendu dans [7] pour prendre en compte les relations entre individus, ces relations sont encodées par un réseau social, i.e. un graphe non orienté où les nœuds correspondent aux individus et les arêtes représentent des liens de communication entre eux. À l'inverse, les individus sont munis, dans notre problème, d'une relation de préférence sur leur alter egos.

Le problème des hôpitaux-internes a été introduit dans [6]. Ce problème peut être considéré comme une spécialisation du problème de formation de coalition hédonique où un ensemble de résidents doivent être affectés à des hôpitaux étant donnés les préférences des résidents vis-à-vis des hôpitaux et les préférences des hôpitaux pour les résidents. Le problème HR a fait l'objet de nombreuses extensions [8]. À notre connaissance, aucune n'est adaptée à notre cas d'usage.

Comment un agent évalue ses penchants vis-à-vis des alternatives ? Nous optons ici pour des fonctions d'utilité, i.e. des préférences cardinales. Par souci de simplification, nous supposons que l'évaluation des activités et celle des groupes sont comparables. Bien que leur expressivité soit limitée, nos préférences sont linéaires par rapport au nombre d'individus et d'activités.

Quelle est la « meilleure » solution à un problème de choix collectif ? Dans la littérature, on trouve principalement deux types de règles qui dérivent le choix collectif de la satisfaction individuelle des agents : les premières se basent sur les propriétés désirables de la solution (e.g. la stabilité) alors que les secondes se basent sur l'agrégation de la satisfaction individuelle des agents (e.g. le bien-être utilitaire). Dans cet article, nous adoptons la seconde approche car aucun concept de la première approche ne convient.

Comment atteindre un appariement maximisant le bien-être utilitaire ? Comme affirmé dans cet article, ce problème peut être NP-difficile. C'est la raison pour laquelle, nous pouvons considéré les algorithmes de Problème d'Optimisation sous Contraintes Distribué (DCOP) ou les méthodes de recherche locale (LST). Il a été montré dans [5] que les algorithmes de DCOP ne passent pas nécessairement à l'échelle pour les problèmes d'appariement. Nous montrons ici que les techniques de LST ne conviennent pas car la fonction à optimiser possède de nombreux optima locaux. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté une méthode de résolution multi-agents et notamment une modélisation multi-niveaux comme préconisé par [9] où chaque agent « activité » représente un groupe d'individus.

3 Problème IA

Notre objectif ici est de proposer un modèle formel de formation de coalitions adapté à notre cas d'usage. Nous introduisons ici le problème des individus/activités (IA). Dans une instance de problème IA, les individus privilégient les activités qui leur plaisent avec les partenaires qu'ils apprécient.

Définition 1 (Problème IA)**.** *Un **problème individus/activités (IA)** de taille (m, n), avec $m \geq 1$ et $n \geq 1$, est un couple $IA = \langle I, A \rangle$ avec m individus et n activités, où :*

- *$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est un ensemble de n activités. Chaque activité a_j peut accueillir au plus c_j membres ;*
- *$I = \{1, \ldots, m\}$ est un ensemble de m individus. À chaque individu i correspond,*
  1. *une préférence sur les activités, i.e. une relation réflexive, complète et transitive $\trianglerighteq_i$ sur les activités $A \cup \{\theta\}$, notamment l'activité nulle (notée θ). La relation de préférence stricte correspondante est notée $\triangleright_i$,*
  2. *une préférence purement hédonique, i.e. une relation de préférence réflexive, transitive et complète $\succsim_i$ sur l'ensemble des groupes auxquels il appartient $G(i) = \{G \subseteq I; i \in G\}$. La relation de préférence stricte correspondante est dénotée $\succ_i$.*

L'activité nulle correspond à ne rien faire. Les préférences sur les groupes sont des préférences purement hédoniques car la satisfaction d'un individu dépend uniquement des autres membres de son groupe et non pas des autres groupes constitués par les individus restants.

Nous souhaitons former des coalitions autour des activités.

Définition 2 (Coalition)**.** *Soit $IA = \langle I, A \rangle$ un problème IA. Une **coalition** est un couple $C = \langle a, G \rangle$ où $a \in A \cup \{\theta\}$ et $G \subseteq I$. L'activité de la coalition C, éventuellement l'activité nulle, est a_C avec une capacité[1] c_C et le groupe G_C. Une coalition non-vide C est telle que $G_C \neq \emptyset$ et C est pour i si $i \in G_C$.*

Nous espérons que le nombre d'individus est considérablement plus important que le nombre d'activités ($m >> n$).

1. l'activité nulle a une capacité infinie.

Définition 3 (Appariement)**.** *Un **appariement** M pour le problème $IA = \langle I, A \rangle$ est représenté par les fonctions $a_M : I \to A \cup \{\theta\}$ et $g_M : I \to \mathcal{P}(I)$ telles que :*

$$\forall i \in I,\ a_M(i) \in A \cup \{\theta\} \quad (1)$$

$$\forall i \in I,\ i \in g_M(i) \subseteq I \quad (2)$$

$$\forall i \in I,\ a_M(i) = \theta \Rightarrow g_M(i) = \{i\} \quad (3)$$

$$\forall i \in I\ \forall j \in g_M(i),\ a_M(j) = a_M(i) \quad (4)$$

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \wedge a_M(i) = a_M(j) \neq \theta \Rightarrow g_M(i) = g_M(j) \quad (5)$$

L'affectation d'un individu est une activité, éventuellement l'activité nulle (cf équation 1). Chaque individu est associée à un groupe auquel il appartient (cf équation 2). Tous les individus qui sont affectés à l'activité nulle sont seuls (cf équation 3). Tous les individus associés les uns aux autres ont la même activité (cf équation 4) et réciproquement tous les individus qui sont affectés à la même activité, à l'exception de l'activité nulle, sont associés les uns aux autres (cf équation 5).

Pour simplifier les notations, nous introduisons la fonction de poste d'un appariement M qui retourne l'ensemble des individus affectés à chaque activité :

$$p_M : A \cup \{\theta\} \to \mathcal{P}(i)$$
$$p_M(a) = \{i \in I; a_M(i) = a\} \quad (6)$$

Les postes d'une activité peuvent être vide. Si $a_M(i) = \theta$, on dit que i n'est pas affecté. Une activité $a \in A$ est : i) surchargée si $|p_M(a)| > c_a$; ii) pleine si $|p_M(a)| = c_a$; iii) sous-chargée sinon. Un appariement est dit **valide** si aucune activité n'est surchargée.

Un appariement est une structure de coalition.

Proposition 1 (Partition)**.** *Soit M un appariement pour le problème $IA = \langle I, A \rangle$.*

$$\forall a \in A \cup \{\theta\},\ \langle a, p_M(a) \rangle \text{ est une coalition} \quad (7)$$

$$\bigcup_{a \in A \cup \{\theta\}} p_M(a) = I \wedge \quad (8)$$
$$\forall a_i, a_j \in A \cup \{\theta\}\ p_M(a_i) \cap p_M(a_j) = \emptyset$$

Preuve 1 (Partition)**.** *Des définitions 2 et 3.*

$C_M(i)$ est la coalition dans M qui contient i.

Chaque individu évalue les coalitions et donc les appariements en fonction du groupe auquel il appartient et de son activité.

Définition 4 (Rationalité)**.** *Soit $IA = \langle I, A\rangle$ un problème IA.*

— *Une coalition C pour i est* ***individuellement rationelle*** *pour i ssi :*

$$(a_C \trianglerighteq_i \theta) \wedge G_C \succsim_i \{i\} \tag{9}$$

— *Un appariement M est* ***individuellement rationel*** *ssi :*

$$\forall i \in I,\ (a_M(i) \trianglerighteq_i \theta) \wedge g_M(i) \succsim_i \{i\} \tag{10}$$

— *Soient C et C' deux coalitions qui sont individuellement rationelles pour i.*

— *L'individu i* ***préfère*** *C à C' (dénoté $C \succsim_i C'$) ssi :*

$$a_C \trianglerighteq_i a_{C'} \wedge G_C \succsim_i G_{C'} \tag{11}$$

— *L'individu i* ***préfère srictement*** *C à C' (noté $C \succ_i C'$) ssi :*

$$C \succsim_i C' \wedge (a_C \triangleright_i a_{C'} \vee G_C \succ_i G_{C'}) \tag{12}$$

— *Soient M et M' deux appariements valides pour IA. L'individu i* ***préfère*** *M à M' (noté $M \succsim_i M$) ssi :*

$$C_M(i) \succsim_i C_{M'}(i) \tag{13}$$

La relation de préférence stricte sur les appariements est notée $\succ_i$. Un individu choisit une coalition et donc un appariement tel que son activité est préférée à l'activité nulle et il préfère ses partenaires plutôt que de rester seul (cf équations 9 et 10). Il préfère une coalition à une autre s'il préfère l'activité et le groupe de la première (cf équation 11). Un individu préfère un appariement à un autre s'il préfère sa coalition dans le premier (cf équation 13). La relation de préférence sur les appariements valides est réflexive, transitive et éventuellement partielle.

Une première propriété désirable pour l'évaluation d'un appariement est la stabilité du cœur.

Définition 5 (Stabilité du cœur)**.** *Soit M un appariement pour le problème $IA = \langle I, A\rangle$. Une coalition non-vide C* ***bloque*** *l'appariement M ssi :*

1. *l'activité n'est pas surchargée : $|G_C| \leq c_C$*
2. *tous les individus de la coalition préfère celle-ci à leur affectation dans M :*

$$\forall i \in G_C,\ C \succsim_i C_M(i) \tag{14}$$

3. *au moins un individu de la coalition préfère strictement celle-ci à son affectation selon M :*

$$\exists i \in G_C\ C \succ_i C_M(i) \tag{15}$$

L'appariement M est ***stable de cœur*** *s'il est valide et qu'il n'existe pas de coalition bloquante :*

$$\forall C \subseteq (A \cup \{\theta\}) \times (2^I \setminus \emptyset) \tag{16}$$
ce n'est pas le cas que C bloque M

Les individus dans une coalition bloquante souhaite se désolidariser et former leur propre coalition, ce qui rend le partitionnement instable.

Un appariement est Nash stable si aucun individu n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa coalition vers une autre (éventuellement vide).

Définition 6 (Nash stabilité)**.** *Soit M un appariement pour le problème $IA = \langle I, A\rangle$. L'appariement M est* ***Nash stable*** *s'il est valide, rationel et :*

$$\forall i \in I\ \forall a \in A,\ a \neq a_M(i) =>$$
$$p_M(a) = c_a \vee C_M(i) \succsim_i \langle a, p_M(a) \cup \{i\}\rangle \tag{17}$$

Un appariement Nash stable est à l'abri des mouvements individuels car les activités sont pleines ou la coalition de chaque individu est au moins aussi bonne que les autres.

Comme l'illustre l'exemple suivant, même si la rationalité individuelle d'un appariement est une condition nécessaire pour être soit stable de cœur soit Nash stable, aucune de ces stabilités n'implique l'autre. De plus, un problème IA n'a pas nécessairement d'appariement stable de cœur ou Nash stable.

Exemple 1 (Stabilité)**.** *Considéron le problème IA avec 3 individus (1, 2 et 3) et une activité a telle que $a \trianglerighteq_i \theta$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$.*
Nous supposons que la capacité de a est 2 et que les préférences sociales sont circulaires :

— $\{1, 2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \{1, 3\}$ *;*
— $\{2, 3\} \succ_2 \{2\} \succ_2 \{1, 2\}$ *;*
— $\{1, 3\} \succ_3 \{3\} \succ_3 \{2, 3\}$.

Cette instance n'a pas d'appariement stable de cœur car l'appariement M_1 (avec $p_{M_1}(a) = \{1, 2\}$) est bloqué par la coalition $\langle a, \{2, 3\}\rangle$, l'appariement M_2 (avec $p_{M_2}(a) = \{2, 3\}$) est bloqué par $\langle a, \{1, 3\}\rangle$ et M_3 (avec $p_{M_3}(a) = \{1, 3\}$) est bloqué par $\langle a, \{1, 2\}\rangle$. De plus, il n'y a pas d'appariement Nash stable. En particulier, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas individuellement rationnels.
Supposons maintenant que la capacité de a est 3 et que l'individu 3 est "indésirable", i.e. les coalitions avec 3 ne sont pas individuellement rationnelles pour les autres :

— $\{1, 2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \{1, 2, 3\} \succ_1 \{1, 3\}$ *;*
— $\{1, 2\} \succ_2 \{2\} \succ_2 \{1, 2, 3\} \succ_2 \{2, 3\}$ *;*

— $\{1,2,3\} \succ_3 \{2,3\} \succ_3 \{1,3\} \succ_3 \{3\}$;
L'appariement M_1 tel que $p_{M_1}(a) = \{1,2\}$ est stable de cœur mais n'est pas Nash stable. L'appariement M_2 tel que $p_{M_2}(a) = \{3\}$ est Nash stable mais n'est pas stable de cœur.

Une autre propriété désirable pour évalue un appariement est la Pareto-optimalité.

Définition 7 (Pareto-optimal)**.** *Soient M et M' deux appariements valides pour le problème $IA = \langle I, A\rangle$. M'* ***domine au sens de Pareto*** *M ssi :*

$$\forall i \in I, C_{M'}(i) \succsim_i C_M(i) \tag{18}$$

$$\exists i \in I, C_{M'}(i) \succ_i C_M(i) \tag{19}$$

Un appariement est ***Pareto-optimal*** *s'il n'est pas dominé au sens de Pareto.*

Un appariement est Pareto-optimal s'il n'existe pas d'alternative pour laquelle tous les agents sont dans une position meilleure ou équivalente.

La stabilité de cœur est une condition suffisante mais pas nécessaire pour la Pareto-optimalité.

Proposition 2 (Pareto-optimum)**.** *Tous les appariements stable de cœur sont Pareto-optimaux.*

Preuve 2 (Pareto-optimum)**.** *Nous prouvons par contradiction qu'un appariement stable de cœur est Pareto-optimal. Nous supposons que M est un appariement stable de cœur qui n'est pas Pareto-optimal. Donc, il existe un appariement M' qui domine M au sens de Pareto. Considérons la coalition $C_{M'}(i)$ avec i qui satisfait l'équation 19. On vérifie :*

1. *M' est valide ;*
2. *l'équation 14 par l'équation 18 ;*
3. *l'équation 15 par l'équation 19.*

En conséquence, par la définition 5, on conclut que $C_{M'}(i)$ bloque M qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Dans notre exemple précédent, quand la capacité de a est 2 et que les préférences sociales sont circulaires, tous les appariements où l'activité est pleine sont Pareto-optimaux. Quand la capacité est 3 et que l'individu 3 est indésirable, l'appariement où l'activité est pleine est également Pareto-optimal.

Même si la stabilité est une propriété souhaitable, il n'existe pas nécessairement une telle solution. En revanche, la Pareto-optimalité semble ne pas être discriminante. Une autre façon d'évaluer la qualité d'un appariement réside dans la notion de bien-être social. Pour cela, nous supposons que les individus ont des préférences cardinales. De plus, dans un problème IA, chaque individu évalue ses préférences vis-à-vis des 2^{m-1} groupes. La représentation de telles préférences est exponentielle en espace. En revanche, la représentation de préférences additivement séparables est linéaire par rapport au nombre d'individus.

Définition 8 (Additivement Séparable IA)**.** *Soit $IA = \langle I, A\rangle$ un problème IA de taille (m, n). Le problème est* ***additivement séparable*** *(ASIA) si chaque individu $i \in I$ est muni :*

1. *d'une fonction de valuation $v_i : A \cup \{\theta\} \to [-1; 1]$ représentant ses préférences sur les activités, éventuellement nulle ;*
2. *d'une fonction de valuation $w_i : I \setminus \{i\} \to [-1; 1]$ représentant ses préférences sur les partenaires potentiels.*

La fonction d'utilité pour un individu i est la fonction $u_i : G(i) \times A \cup \{\theta\} \to [-1; 1]$ définie telle que :

$$\forall g \in G(i)\ \forall a \in A \cup \{\theta\} \tag{20}$$

$$u_i(g, a) = \frac{[\frac{1}{m-1}\Sigma_{j\in g, j\neq i} w_i(j)] + v_i(a)}{2} \tag{21}$$

Nous supposons que les préférences sur les individus et les préférences sur les activités sont comparables. En particulier, l'utilité pour un individu d'être seul dépend uniquement de son évaluation de l'activité. En outre, nous supposons que plus l'individu a de partenaires, plus il est satisfait car nous visons à améliorer la cohésion sociale et éviter l'isolement.

Dans la suite, nous ne considérons pas que les utilités sont définies pour correspondre aux préférences comme dans [1] mais nous supposons un accès direct aux utilités des individus car cela sera le cas dans notre application pratique.

Nous adoptons ici l'approche utilitaire inspirée par Bentham. En d'autres termes, notre objectif est de maximiser la somme des utilités individuelles.

Définition 9 (Bien-être)**.** *Soit $IA = \langle I, A\rangle$ un problème ASIA de taille (m, n). Le* ***bien-être utilitaire*** *d'un appariements M est défini tel que :*

$$U_I(M) = \frac{1}{m}\sum_{i\in I} u_i(g_M(i), a_M(i)) \tag{22}$$

Plus le bien-être est important, meilleur est l'appariement.

Exemple 2 (problème ASIA)**.** *Considérons l'exemple précédent où la capacité de l'activité est* 3 *et l'individu* 3 *est indésirable. On définit les fonctions de valuations telles que* $v_1(a) = v_2(a) = v_3(a) = 0$, $w_1(2) = w_2(1) = \frac{1}{2}$, $w_1(3) = w_2(3) = -1$, $w_3(1) = \frac{1}{2}$ *et* $w_3(2) = 1$. *En conséquence, les préférences sur les groupes sont conformes à la formulation précédente. L'appariement où les individus* 1 *et* 2 *sont affectés à l'activité maximise le bien-être.*

4 Résolution

Afin de maximiser le bien-être utilitaire, nous pouvons considérer la programmation quadratique, i.e. une méthode d'optimisation avec un modèle mathématique représentable par une fonction quadratique. Une instance de problème ASIA peut être modélisé par $n \times m$ variables $x_{ia} \in \{0, 1\}$ telles que $x_{ia} = 1$ si l'individu i est affecté à l'activité a et $x_{ia} = 0$ sinon, m contraintes $\Sigma_{a \in A} x_{ia} \leq 1$ représentant l'exclusion mutuelle de l'affectation d'un même individu aux activités et n contraintes $\Sigma_{i \in I} x_{ia} \leq c_a$ garantissant la validité de l'appariement. En considérant les fonctions de valuations $(w_i(j))_{i \in I}$ et $(v_i(a))_{i \in JI}$, la fonction objectif correspondant au bien-être utilitaire, qui est à maximiser, est :

$$\sum_{a \in A} \sum_{i \in I} x_{ia}(v_i(a) + \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} w_i(j) \times x_{ja})$$

Quand on écrit sous une forme standard ce problème, i.e. en minimisant une fonction objectif de la forme $\frac{1}{2} x Q x^T + c^T x$ avec une matrice symétrique Q, on peut remarquer que cette dernière n'est pas nécessairement définie positive et donc le problème peut être NP-difficile [10].

C'est la raison pour laquelle nous proposons ici un algorithme (cf algorithme 1) qui permet de calculer un "bon" appariement. Initialement, tous les individus sont seuls, affectés à l'activité nulle et libres. Tour à tour, chaque individu libre i considère l'activité qui l'attire et qu'il préfère a. Si aucun autre individu n'est affecté à cette activité, i est affecté. Sinon, l'algorithme tente d'améliorer le bien-être de ce groupe, éventuellement en renvoyant les individus dont la présence contribue le moins au bien-être du groupe. Si l'affectation de i n'améliore pas le bien-être du groupe, alors i doit concéder et donc considérer l'activité attractive suivante. Les individus qui sont remplacés par i doivent concéder. Si la capacité de a n'est pas atteinte alors le groupe peut croître (ligne 21). Un agent qui est rejeté par toutes les activités qu'il considère comme attrayantes reste seul et il est définitevement inactif. Un algorithme d'approximation consiste à exclure qu'un seul individu à chaque étape (ligne 20).

On peut remarquer que notre algorithme (éventuellement d'approximation) retourne toujours un appariement valide.

Proposition 3 (Terminaison)**.** *Notre algorithme (d'approximation) appliqué à* $ASIA$ *se termine et l'appariement retourné est valide.*

Preuve 3 (Terminaison)**.** *Soit* $IA = \langle I, A \rangle$ *un problème ASIA. Nous considérons l'invariant de boucle* $\Sigma_{i \in I} |concessions(i)| + |Free|$. *Cet invariant est positif ou nul. Il décroît strictement à l'issue de chacune des boucles car :*

1. *un individu affecté est retiré de* $Free$ *;*
2. *un individu qui n'est pas affecté concède jusqu'à être éventuellement affecté à l'activité nulle ;*
3. *un individu, qui est désaffecté, concèdent et au moins un autre individu est affecté (donc retiré de* $Free$*) ;*

L'appariement obtenu est valide car les activités ne sont jamais surchargées.

Le resultat de notre algorithme exact est Pareto-optimal.

Proposition 4 (Pareto-optimalité)**.** *Notre algorithme appliqué à un problème* $ASIA$ *retourne un appariement Pareto-optimal.*

Preuve 4 (Pareto-optimalité)**.** *Soit* $IA = \langle I, A \rangle$ *un problème* $ASIA$. *Nous montrons par contradiction que le résultat de notre algorithme est un appariement Pareto-optimal* M. *Nous supposons que* M *est dominé au sens de Pareto par un appariement valide* M'. *Par l'équation 19, il existe un individu* i *tel que* $C_{M'}(i) \succ_i C_M(i)$. *Par l'équation 12,* $C_{M'}(i) \succsim_i C_M(i)$ *et :*

— *soit* $g_{M'}(i) \succ_i g_M(i)$ *et* $a_{M'}(i) = a_M(i)$. *Comme* $C_{M'}(i) \succsim_j C_M(i)$ *et par l'équation 11,* $g_{M'}(i) \succsim_j g_M(i)$ *pour tous les partenaires de* i. *Par l'équation 20,* $\Sigma_{j \in g_{M'}(i)} u_j(g_{M'}(i), a_{M'}(i)) > \Sigma_{j \in g_M(i)} u_j(g_M(i), a_M(i))$. *Ceci est une contradiction avec notre algorithme (ligne 27) qui calcule les postes qui maximisent le bien-être du groupe ;*

— *soit* $a_{M'}(i) \rhd_i a_M(i)$ *et donc* $a_{M'}(i)$ *précède* $a_M(i)$ *dans* $concessions(i)$. *Selon l'algorithme,* i *a été rejeté ou désaffecté*

Algorithme 1 : Calcul d'un appariement pour un problème ASIA

. **Entrées** : $IA = \langle I, A \rangle$
Sorties : un appariement M
$Free = I$;
pour chaque $i \in I$ **faire**
  $concessions(i) = A.SortWith(v_i(_) > v_i(_) > 0)$;
  $a_M(i) = \theta$;
  $g_M(i) = \{i\}$;
tant que $Free \neq \emptyset$ **faire**
  pour chaque $i \in Free$ **faire**
    si $concessions(i) = \emptyset$ **alors** $Free\backslash = \{i\}$;
    sinon
      $a = concessions(i).head$; //a est l'activité préférée
      $g = p_M(a)$;
      $g' = g \cup \{i\}$;
      si $g = \emptyset$ **alors**
        /* les postes de a sont vides et donc i et affecté */
        $a_M(i) = a$;
        $g_M(i) = \{i\}$;
        $Free\backslash = \{i\}$;
      sinon
        $u_{max} = -\infty$;
        $bg = \emptyset$;
        $SG = \{sg \subsetneq g'; sg \neq \emptyset\}$;
        /* éventuellement $SG = \{sg \subsetneq g'; |sg| = |g'| - 1\}$ */
        si $c_a > |g|$ **alors** $SG \cup = g'$;
        /* g peut croître */
        pour chaque $sg \in SG$ **faire**
          $u = \Sigma_{k \in sg} u_k(sg, a)$;
          si $u > u_{max}$ **alors**
            $u_{max} = u$;
            $bg = sg$;
        /* bg est le meilleur groupe */
        pour chaque $j \in bg$ **faire** $g_M(j) = bg$;
        pour chaque $j \in g \setminus bg$ **faire**
          /* j est désaffecté */
          $a_M(j) = \theta$;
          $g_M(j) = \{j\}$;
          $Free \cup = \{j\}$;
          $concessions(j) = concessions(j).tail$;
        si $i \in bg$ **alors**
          /* i est affecté */
          $a_M(i) = a$;
          $g_M(i) = bg$;
          $Free\backslash = \{i\}$;
        else
          /* i est rejeté */
          $concessions(i) = concessions(i).tail$;
retourner M

par $a_{M'}(i)$. En conséquence, il existe un individu $j \in C_{M'}(i)$ tel que $C_M(j) \succ_j C_{M'}(j)$. Ceci est une contradiction avec l'équation 18.

Exemple 3 (Algorithme)**.** *Considérons l'exemple 2. Notre algorithme opère les affectations/désaffectations suivantes sur la liste d'individus libres $(3, 2, 1)$:*

1. *3 est affecté car les postes de a sont initialement vide ;*
2. *2 est affecfé car la capacité de 3 n'est pas atteinte et $\{2, 3\}$ est le meilleur sous-groupe de $\{2, 3\}$;*
3. *1 remplace 3 car $\{1, 3\}$ est le meilleur sous-groupe de $\{1, 2, 3\}$;*
4. *3 concède et il est définitevement affecté à l'activité vide.*

L'appariement obtenu est Pareto-optimal et maximise le bien-être utilitaire.

On peut noter que dans le cas général notre algorithme ne maximise pas nécessairement le bien-être utilitaire.

5 Comportement d'agents

Nous considérons ici le modèle de programmation concurrente par passage de messages asynchrones, appelé modèle d'acteur, proposé dans [2]. Selon cette perspective, les primitives sont les agents et les événements. Un agent représente un programme indépendant qui s'exécute sur son propre processeur. Un événement consiste en la création d'un agent ou l'émission/la réception d'un message. On peut noter qu'un tel système est distribué car le délai de transmission des messages est arbitraire mais non négligeable. On suppose que les canaux de communication sous-jacents sont fiables (un message est délivré une et une seule fois) et que les messages peuvent arriver dans un ordre différent de celui de l'émission.

Afin de proposer un solveur distribué à partir de ce modèle, nous distinguons trois types d'agents :

1. l'agent « solveur » qui crée les autres agents et enregistre les affectations ;
2. les agents « individu » tous munis du même comportement mais avec des préférences qui les distinguent ;
3. les agents « activité » tous munis du même comportement mais qui gèrent des coalitions et des capacités différentes.

Le comportement de l'agent « solveur » consiste à : i) créer les agents ; ii) lancer la résolution ; iii) enregistrer les affectations et les désaffectations ; iv) renvoyer l'appariement quand tous les individus sont affectés.

Le comportement de l'agent « individu » consiste à créer sa liste de concessions puis à se proposer à l'activité préférée qui l'attire. Quand l'agent est affecté ou désaffecté, il en informe l'agent « solveur ». Lors d'une désaffectation, l'agent « activité » attend une confirmation avant d'affecter un nouvel individu afin que l'appariement ne soit pas retourné prématurément par l'agent « solveur ». Si un agent « individu » devient libre, il concède, i.e. il se propose à l'activité suivante qui l'attire jusqu'à être affecté à l'activité nulle.

Le comportement de l'agent « activité » est décrit par l'automate déterministe représenté dans la figure 1. Quand une proposition est reçue, elle est acceptée si le groupe courant est vide (dans l'état `Available`). Sinon, l'agent traîte les propositions une à une (dans l'état `Raising`) en identifiant le sous-groupe qui maximise le bien-être utilitaire. Si la capacité est atteinte, les sous-groupes de taille c_a sont considérés. Dans le cas contraire, le nombre de postes peut croître. Si le proposant n'est pas dans le nouveau groupe, alors la proposition est rejetée. Sinon la proposition est accepté quand le membre écarté a confirmé la désaffectation (dans l'état `Firing`). Quand une proposition a été traitée, l'agent « activité » est prêt à évaluer les propositions suivantes, éventuellement celles stockées.

6 Évaluation empirique

Nos expérimentations ont pour objectifs d'évaluer la qualité de la solution atteinte par notre algorithme et l'accélération due à sa distribution.

Nous avons implémenté notre prototype avec le langage de programmation Scala [2] et la boîte à outils Akka [3]. Cette dernière, en s'appuyant sur le modèle d'acteur [2], nous permet de réduire la distance entre les spécifications du SMA et son implémentation. Afin d'envisager un grand nombre d'individus, nous considérons notre algorithme d'approximation.

Nous avons implémenté un algorithme de recherche locale pour le comparer à notre algorithme. Cet algorithme de montée en gradient qui, à partir d'un appariement valide aléatoire cherche à améliorer le bien-être utilitaire, est itératif. Deux appariements sont voisins s'ils sont identiques à l'exception d'un individu affecté à l'activité nulle ou ayant changé d'activité. Si la nouvelle activité est pleine, alors tous les échanges d'individus sont envisagés.

Nous considérons des problèmes $ASIA$ constitués de n activités et m individus. Pour une même instance de problème, toutes les activités ont le même capacité (m/n). Pour chaque jeu de paramètres (n et m), nous avons généré (pseudo)-aléatoirement 100 instances.

Dans un premier temps, nous avons comparé le bien-être utilitaire de l'appariement obtenu par notre algorithme avec celui obtenu par recherche locale. La figure 2 présente les bien-utilitaires moyens obtenus pour chaque jeu de paramètres (avec $2 \leq n \leq 10$ et $2 \times n \leq m \leq 10 \times n$). Le bien-être obtenu par notre algorithme surpasse sans conteste celui la recherche locale. En effet, le bien-être utilitaire est pour le problème $ASIA$ une fonction qui possède de nombreux optima locaux.

Dans un second temps, nous avons comparé les temps d'exécution des versions distribuée et centralisée de notre algorithme d'approximation. La figure 2 présente les temps d'exécution moyen obtenus pour chaque jeu de paramètres (avec $2 \leq n \leq 10$ et $2 \times n \leq m \leq 400$). Alors que l'algorithme centralisé est plus rapide quand le nombre d'individus est faible (~ 40), son temps d'exécution croît rapidement avec le nombre d'individus (18 ms pour 100 individus et 10 activités) alors que le temps d'exécution de la version distribuée est moindre (9 ms dans ce dernier cas). De plus, le temps d'exécution de l'algorithme de montée en gradient est très important (1660 ms pour 100 individus et 10 activités). On peut s'attendre à un temps d'exécution encore plus important si on adopte une méthode de recherche locale du type recuit simulé sans pour autant garantir d'obtenir un optimum global.

En résumé, la solution atteinte par notre algorithme semble de bonne qualité. De plus, ce dernier est distribuable ce qui permet d'accélérer (jusqu'à 3,5 fois) son exécution.

7 Conclusions

Nous avons introduit ici le problème générique individus/activités où des individus doivent être affectés à des activités en privilégiant les activités qui leur plaisent avec les partenaires qu'ils apprécient. Bien que souhaitable, la stabilité d'une solution n'est pas garantie. À l'inverse, la

2. http ://www.scala-lang.org/
3. http ://akka.io

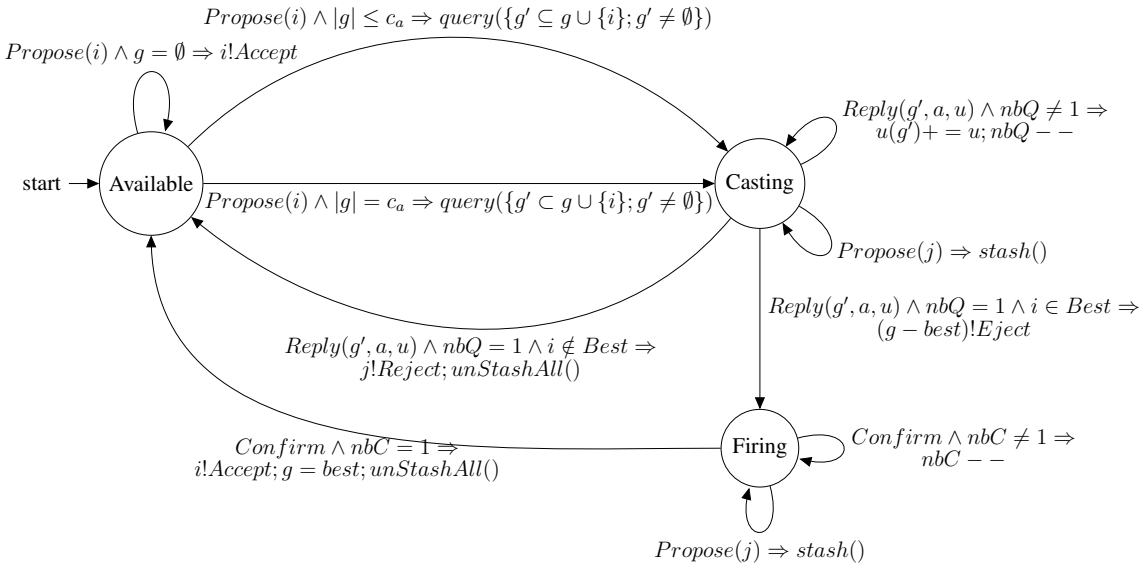

FIGURE 1 – Comportement d'un agent « activité »

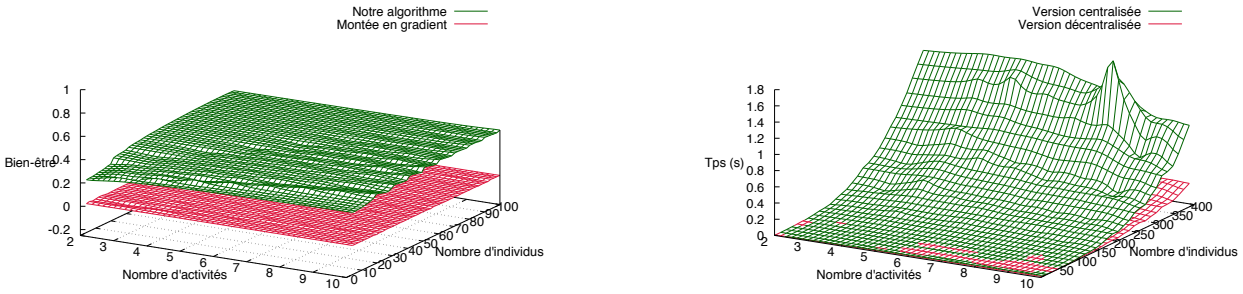

FIGURE 2 – Bien-être utilitaire (à gauche) et temps d'exécution (à droite)

Pareto-optimalité n'est pas discriminante. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté des préférences additivement séparables afin d'évaluer la qualité d'une solution à l'aide du bien-être utilitaire des individus. De plus, la représentation des préférences additivement séparable est linéaire par rapport au nombre d'individus et d'activités. Maximiser le bien-être utilitaire peut être NP-difficile. C'est la raison pour laquelle nous avons proposé un heuristique où les individus se proposent aux activités qu'ils préfèrent quitte à concéder. Les individus qui contribuent le moins au bien-être du groupe son désaffectés et concèdent. Nous avons montré que cet algorithme renvoie systématiquement un appariement valide et Pareto-optimal. En adoptant le modèle d'acteur, nous avons distribué cet algorithme. La difficulté réside dans : i) la détection de l'arrêt (comme les messages peuvent arriver dans un ordre différent de l'envoi, un agent « activité » doit attendre la confirmation d'une désaffection avant d'affecter un nouvel individu) ; ii) la synchronisation (comme l'acceptation d'un individu dépend du groupe, un agent « activité » doit traiter les propositions les unes après les autres). Nos expérimentations montrent que le bien-être utilitaire obtenu par notre algorithme surpasse celui atteint par recherche locale et que la distribution permet d'accélérer notre algorithme (jusqu'à 3,5 fois).

Dans de futurs travaux, nous souhaitons évaluer notre moteur d'appariement avec des données réelles dans le cadre du projet PartENS. Afin de proposer des appariements qui soient socialement plus juste, nous envisageons de modifier le critère local de décision de notre algorithme pour maximiser le bien-être égalitaire.

Remerciements

Ce travail s'inscrit dans le projet PartENS soutenu par le programme chercheur-citoyen de la région Nord Pas de Calais. Nous remercions le comité de programme des JFSMA qui, par ses remarques, nous a permis d'améliorer cet article.

Références

[1] Boutilier, C., Caragiannis, I., Haber, S., Lu, T., Procaccia, A. D., and Sheffet, O. (2015). Optimal social choice functions : A utilitarian view. *Artificial Intelligence*, 227 :190–213.

[2] Clinger, W. D. (1981). *Foundations of actor semantics*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.

[3] Darmann, A., Elkind, E., Kurz, S., Lang, J., Schauer, J., and Woeginger, G. (2012). Group activity selection problem. In *Proc. of the 8th International Conference on Internet and Network Economics*, pages 156–169, Liverpool, UK. Springer Berlin Heidelberg.

[4] Dreze, J. and Greenberg, J. (1980). Hedonic coalitions : Optimality and stability. *Econometrica*, 48 :987–1003.

[5] Everaere, P., Morge, M., and Picard, G. (2012). Casanova : un comportement d'agent respectant la privacité pour des mariages stables et équitables. *RIA*, 26(5) :471–494.

[6] Gale, D. and Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69 :9–14.

[7] Igarashi, A., Peters, D., and Elkind, E. (2017). Group activity selection on social networks. In *Proc. of AAAI*, pages 565–571.

[8] Manlove, D. F. (2014). *Algorithmics of Matching Under Preferences*. World Scientific.

[9] Nongaillard, A. and Picault, S. (2016). Modélisation multi-niveaux des problèmes d'affectation et d'appariement. In *JFSMA'16*, pages 75–84, Rouen, France. Cépaduès.

[10] Sahni, S. (1974). Computationally related problems. *SIAM Journal on Computing*, 3(4) :262–279.

[11] Schelling, T. C. (1980). *The strategy of conflict*. Harvard university press.