



**HAL**  
open science

# Problème inverse en électrocardiographie : Théorie de la factorisation

Ronald Reagan Moussitou

► **To cite this version:**

Ronald Reagan Moussitou. Problème inverse en électrocardiographie : Théorie de la factorisation. Analysis of PDEs [math.AP]. 2016. hal-01418738

**HAL Id: hal-01418738**

**<https://inria.hal.science/hal-01418738>**

Submitted on 16 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE NANTES

## RAPPORT DE STAGE DE FIN D'ETUDES

---

MASTER 2 INGENIERIE MATHÉMATIQUES, OPTION CS  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
UNIVERSITÉ DE NANTES, FRANCE

### Problème inverse en électrocardiographie : Théorie de la factorisation

---

*Ronald Reagan MOUSSITOU*

DIRECTEURS DE STAGE : JACQUES HENRY ET NEJIB ZEMZEMI  
LIEU DU STAGE : CENTRE DE RECHERCHE INRIA BORDEAUX  
EQUIPE : CARMEN

COORDONNATEUR : FRANÇOIS JAUBERTEAU



# Table de Matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Outils Mathématiques</b>	<b>4</b>
1.1 Espaces de Sobolev . . . . .	4
1.2 Espaces duaux . . . . .	5
1.3 Décomposition modale . . . . .	6
<b>2 Méthode de factorisation</b>	<b>9</b>
2.1 Définition du cas modèle et cadre fonctionnel . . . . .	9
2.2 Plongement invariant direct . . . . .	10
2.3 Plongement invariant retrograde . . . . .	13
2.4 La méthode Anadromique . . . . .	16
2.5 Expressions modales des opérateurs P, Q et des opérateurs résidus . . . . .	18
2.5.1 Comparaison des opérateurs . . . . .	21
2.6 Discrétisation par différences finies de $(\mathcal{P}_0)$ . . . . .	23
2.7 Application de la méthode de factorisation au problème $(\mathcal{P}_h)$ . . . . .	25
2.7.1 Schémas et résultats numériques . . . . .	26
<b>3 Application de la méthode de factorisation dans le cas d'un cylindre</b>	<b>31</b>
3.1 Problème de complétion de données . . . . .	31
3.2 Complétion des données comme problème de contrôle optimal . . . . .	32
3.3 Méthode de plongement invariant pour le système d'optimalité . . . . .	34
3.3.1 Application Dirichlet-Neumann . . . . .	34
3.3.2 Application Neumann-Dirichlet . . . . .	35
3.4 Résolution du problème de contrôle optimal . . . . .	35
3.4.1 Résolution Sans régularisation . . . . .	36
3.4.2 Résolution avec régularisation . . . . .	36
3.5 Résultats numériques . . . . .	37
3.5.1 Schémas numériques . . . . .	37
3.5.2 Schéma de Crank-Nicolson modifié . . . . .	41
3.5.3 Comparaison Anadromique 2 Vs Crank-Nicolson modifié . . . . .	43
<b>4 Méthode de factorisation dans le cas tridimensionnel</b>	<b>44</b>
4.1 Formulation du problème : opérateur Dirichlet-Neumann . . . . .	45
4.2 Formulation du problème : opérateur Neumann-Dirichlet . . . . .	47
4.3 Discrétisation des équations par éléments finis . . . . .	49
4.4 Résultat numérique . . . . .	51
<b>Conclusion</b>	<b>53</b>

# Introduction

Un problème inverse est un processus de calcul qui consiste à remonter aux causes d'un phénomène à partir de ses effets dans une situation donnée. Il y a plusieurs types de problèmes inverses : par exemples, le problème inverse de détermination des paramètres d'un systèmes connaissant une partie de son évolution, le problème inverse de reconstruction de l'état passé d'un système connaissant son état actuel. Dans notre cas, nous nous intéressons au problème de détermination des paramètres (complétion des données).

Le problème inverse en électrocardiographie consiste à déterminer la cause du potentiel électrique généré sur la surface du torse. On cherche à relier l'activité électrique du coeur à partir du potentiel qu'il génère au potentiel qui s'est propagé sur le thorax par conduction dans tout le torse. C'est un domaine de recherche en plein expansion et qui a des nombreuses applications cliniques importantes (par exemples : aide aux cliniciens dans leurs diagnostics d'arrhythmie cardiaque, aide aux chirurgiens en leur donnant des informations supplémentaires avant les interventions).

Le problème inverse de détermination des paramètres est mathématiquement modélisé par une équation de Laplace :

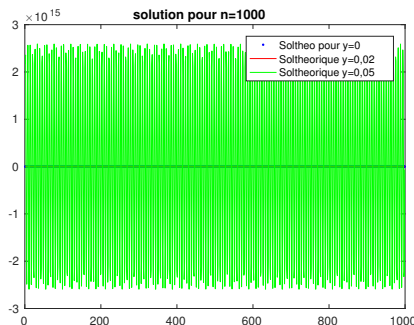
$$(\mathcal{P}_{inv}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_0} = 0, & u|_{\Gamma_0} = u_{mes} \end{cases} \quad (1)$$

où  $u_{mes}$  est le potentiel mesuré sur le torse avec  $\Omega$ , la cage thoracique entre la peau et l'épicarde. Pour tester les méthodes numériques et la méthode de factorisation, nous allons simplifié le problème en supposant que  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$  avec  $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$ .

Le problème  $(\mathcal{P}_{inv})$  est un problème de Cauchy mal posé au sens de Hadamard. Voici l'exemple classique de Hadamard d'un problème mal posé :

$$\begin{cases} -\Delta u_n = 0 & \text{dans } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ -\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx), & u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$u_n = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ .  $u_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , mais la solution explose.



obtenue pour  $n = 1000$ ,  $x = ih$  avec  $h = \frac{\pi}{n}$ .

Le problème inverse est mal posé c'est-à-dire qu'une paire de données sur une partie de la frontière ne conduit pas nécessairement à une solution sur tout le domaine (problème d'existence), que des données proches ne conduisent pas nécessairement à des solutions proches (problème de stabilité ou continuité par rapport aux données).

En électrocardiographie, la solution n'est pas unique et ne dépend pas continûment des données que l'on va utiliser pour la résolution du problème parce que les mesures de potentiel à la surface du torse comportent toujours des erreurs (imprécision sur les mesures par les appareils utilisés).

L'utilisation de la méthode de factorisation pour la résolution du problème inverse a été étudiée par Fadhel. J dans le cas cylindrique [4] puis par Julien. B pour une géométrie quelconque dans [1]. L'objectif de ce travail est d'évaluer l'apport du schéma anadromique pour la résolution des équations de Riccati dans la résolution du problème inverse.

Dans le premier chapitre, nous présentons les éléments mathématiques que nous allons utiliser dans tout le travail. Nous présentons les espaces dans lesquels nous allons travailler, nous présentons également la décomposition d'un opérateur en base modale [2].

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la méthode de plongement invariant introduite par J. Henry et A. Ramos [3]. Il est question de factoriser un problème de Laplace dans un domaine cylindrique  $\Omega$ . Nous présentons le cadre fonctionnel et les calculs formels de la méthode, nous présentons également dans cette partie un schéma numérique adapté pour la résolution des équations de Riccati [5] et nous appliquons la méthode de factorisation dans le cas d'un problème direct.

Dans le troisième chapitre, nous appliquons la méthode factorisation pour résoudre le problème de complétion des données pour un problème de Laplace dans un domaine cylindrique  $\Omega$ . Nous utilisons la différence finie pour la discrétisation de l'opérateur Laplacien et nous résolvons numériquement le problème en utilisant le schéma anadromique. Nous comparons en suite la solution obtenue par le schéma anadromique avec celle obtenue par le schéma d'Euler explicite.

Dans le quatrième chapitre, nous allons appliqué la méthode de plongement invariant pour la résolution du problème inverse dans un domaine tridimensionnel quelconque. Nous faisons l'application dans un domaine sphérique.

# Chapitre 1

## Outils Mathématiques

### 1.1 Espaces de Sobolev

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats que nous allons utiliser tout au long de ce travail.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  à support compact. On note  $L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions à valeurs réelles telles que :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f|^2 dx < +\infty \right\}.$$

La norme de cet espace est :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left[ \int_{\Omega} |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire associé est :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle espace de Sobolev  $H^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  telles que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $p$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$ . Autrement dit

$$H^p(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / \alpha \in \mathbb{N}^*, |\alpha| \leq p, D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert.

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq p} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs  $H_0^1(\Omega)$  est la fermeture dans  $H^1(\Omega)$  de l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \left\{ f \in H^1(\Omega) / f = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\ \|f\|_{H_0^1(\Omega)} &= \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Soit  $s$  un réel quelconque. L'espace de Sobolev à exposant fractionnaire  $H^s(\Omega)$  est l'interpolé d'ordre  $\frac{s}{n}$  de  $L^2(\Omega)$  et de  $H^n(\Omega)$  pour  $n > s$ .

Soit  $A \in \mathcal{L}(H^n(\Omega))$  l'opérateur symétrique tel que :

$$\langle Au, v \rangle_{H^n(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^n(\Omega).$$

Comme  $L^2(\Omega)$  est compact dans  $H^n(\Omega)$  et  $A$  est symétrique, alors celui-ci est diagonalisable dans une base  $\omega_n$  orthogonale à la fois pour  $L^2(\Omega)$  et  $H^n(\Omega)$ . On a :

$$A\omega_n = \Lambda_n\omega_n.$$

On caractérise alors  $H^n(\Omega)$  par :

$$H^n(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \omega_n / \sum_n |u_n|^2 \|\omega_n\|_{H^n(\Omega)}^2 < +\infty \right\}.$$

On a alors la définition suivante de  $H^s$  :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \omega_n / \sum_n |u_n|^2 \|\omega_n\|_{H^n(\Omega)}^{2\frac{s}{n}} \|\omega_n\|_{L^2(\Omega)}^{2(1-\frac{s}{n})} < +\infty \right\}.$$

Soit  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la base orthonormale de  $L^2(\Omega)$  constituée de vecteurs propres du Laplacien sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet sur  $\partial\Omega$  et  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des valeurs propres associées. Dans cette base, les espaces usuels ont pour définition équivalente :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n |u_n|^2 < +\infty \right\} \\ H_0^1(\Omega) &= \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n) |u_n|^2 < +\infty \right\} \end{aligned}$$

$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$  est le demi-interpolé de  $H_0^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ , et on écrit :  $[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ .

On a la caractérisation suivante :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n)^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Enfin, pour  $s \in \mathbb{R}^+$ , on désigne par  $H_0^s(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ .

Pour  $s, s'$  non demi-entiers, l'interpolé entre  $H_0^s(\Omega)$  et  $H_0^{s'}(\Omega)$  d'ordre  $\theta$  (avec  $\theta \in ]0, 1[$ ) est  $H^{\theta s + (1-\theta)s'}$ , sauf si  $\theta s + (1-\theta)s'$  est un demi-entier (cf [2]).

## 1.2 Espaces duaux

On note  $H^s(\Omega)'$  le dual de l'espace  $H^s(\Omega)$ ; c'est l'espace des formes linéaires continues sur  $H^s(\Omega)$ .

### **Théorème 1.1: (Représentation de Riesz-Frechet)**

Pour tout  $\varphi \in H^s(\Omega)'$ , il existe un unique  $f \in H^s(\Omega)$  tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle_{H^s(\Omega)' \times H^s(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{H^s(\Omega)} \quad \forall v \in H^s(\Omega).$$

On identifie  $L^2(\Omega)$  à son dual, mais on identifie pas  $H_0^1(\Omega)$  et son dual.

On note  $H^{-s}$  le dual de  $H_0^s(\Omega)$ . Pour  $s \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $H^{-s}(\Omega) = H^s(\Omega)'$ .

### Cas particulier :

On désigne par  $H^{-1}$  le dual de  $H_0^1(\Omega)$ .

Pour  $s > 0$ , on a :  $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$  des injections continues et denses.

Si on applique le théorème de représentation de Riesz à la base  $\psi_n$ , on obtient la caractérisation suivante pour  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)'$  :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)' = \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

### Remarque 1.1

$H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$  est le dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ , mais pas celui de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$  (cf [2]).

### Définition 1.1

On considère un ouvert cylindrique  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^n$ . La section  $\mathcal{O}$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de bord régulier. Le cylindre est limité par ses faces  $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$  et  $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$ .

On note  $\Sigma = \partial\mathcal{O} \times ]0, a[$  la frontière latérale du cylindre.

On définit les espaces  $X$ ,  $X_0$ ,  $Y$ ,  $\hat{X}$  et  $\hat{X}'$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X &= L^2(0, a; H_0^1(\mathcal{O})) \cap H^1(0, a; L^2(\mathcal{O})), \\ X_0 &= X \cap \{u \in X; u|_{\Gamma_a} = 0\}, \\ Y &= \{u \in X : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(0, a; H^{-1}(\mathcal{O}))\} \\ \hat{X} &= L^2(0, a; H_0^1(\mathcal{O})) \\ \hat{X}' &= L^2(0, a; H_0^{-1}(\mathcal{O})) \end{aligned}$$

Ces espaces d'un type adapté aux problèmes d'évolution permettent d'insister sur le rôle privilégié donné à la variable  $x$ .

On munit  $X$  et  $X_0$  respectivement des normes :

$$\begin{aligned} \|u\|_X^2 &= \int_0^a \|u(x)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^a \|u(x)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^a \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx \\ \|u\|_{X_0}^2 &= \int_0^a \|u(x)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^a \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx \end{aligned}$$

La norme de  $X$  est équivalente à la norme de  $H^1(\mathcal{O})$ . Par l'inégalité de Poincaré il en est de même pour  $X_0$ , donc  $X_0$  est fermé dans  $X$  lui-même fermé dans  $H^1(\mathcal{O})$  (cf [3]).

## 1.3 Décomposition modale

### Lemme 1.1

Soit l'opérateur Laplacien

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y$$



avec  $x_1 = x$  et les variables  $x_2, \dots, x_n$  notées  $y$ , agissant sur des fonctions définies sur la section  $\mathcal{O}$ , associé a une condition de Dirichlet nulle sur le bord  $\partial\mathcal{O}$ .  $\Delta$  est diagonalisable dans une base orthonormale de  $L^2(\mathcal{O})$  et orthogonale pour  $H^1(\mathcal{O})$ .

## Démonstration

L'opérateur  $A : u \in D(A) \subset L^2(\mathcal{O}) \rightarrow Au \in L^2(\mathcal{O})$  défini par :

$$\langle Au, v \rangle_{L^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} \Delta u v dy$$

avec  $D(A) = H_0^1(\Delta, \mathcal{O}) = \left\{ u \in H_0^1(\mathcal{O}) / \Delta u \in L^2(\mathcal{O}) \right\}$  est auto-adjoint et a une résolvante compacte, il est donc diagonalisable et ses vecteurs propres forment une base orthonormale dans  $L^2(\mathcal{O})$ . On note  $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  cette base.

Soit  $\lambda_n$  la suite des valeurs propres de  $-\Delta$  et  $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$ . Comme  $-\Delta$  est strictement positif, les  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  forment une suite de termes positifs et qui tend vers  $+\infty$ .

Si  $i \neq j$ , on vérifie que :

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla \Psi_i \nabla \Psi_j = \lambda_i \int_{\mathcal{O}} \Psi_i \Psi_j$$

On en déduit que la famille  $(\Psi_i)_i$  est orthogonale dans  $H_0^1(\mathcal{O})$ . La famille  $(\Psi_i)_i$  est totale, c'est donc une base de  $H_0^1(\mathcal{O})$ .

Soit maintenant  $\gamma$  un élément de  $L^2(0, a; H_0^1(\mathcal{O})) \cap H^1(0, a; L^2(\mathcal{O}))$ . Sa trace sur le section  $\Gamma(x)$ , pour  $y$  fixé appartient donc à  $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ . On peut donc écrire sa décomposition dans la base  $\Psi_i$  :

$$\gamma(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(x) \Psi_n(y) \text{ où } \gamma_n(x) = \int_{\Gamma(x)} \gamma(x) \Psi_n(y) dy.$$

Comme la section la section est constante, les fonctions de base ne dépendent plus de la variable  $x$  et il est possible de dériver l'expression de  $\gamma$  terme à terme.

## Lemme 1.2

Dans le cylindre de section constante, la fonction  $\gamma$  d'expression

$$\gamma(x, y) = \sum_n \Psi_n \gamma_n(x)$$

dans la base orthogonale  $\Psi_n$  a pour dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = \sum_n \Psi_n(y) \gamma_n''(x) \quad \text{et} \quad \Delta \gamma = - \sum_n \alpha_n^2 \Psi_n(y) \gamma_n(x).$$

## Démonstration

Cela revient à montrer que les coefficients  $\gamma'_n(x)$  ont pour expression :

$$\begin{aligned}\gamma'_n(x) &= \int_S \Psi_n(y) \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) dy, \\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad , \quad &\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \gamma_n(x) dx. \\ \text{Soit :} \quad &\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \int_S \Psi_n(y) \gamma_n(x, y) dy dx\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx = - \int_S \Psi_n(y) \int_{\mathbb{R}} \gamma(x, y) \phi'(x) dx dy$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx &= \int_S \Psi_n(y) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \phi(x) dx dy \\ &= \int_S \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \phi(x) \Psi_n(y) dy dx.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\gamma'_n(x) = \int_S \Psi_n(y) \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) dy$$

On trouve alors le résultat souhaité (cf [2]).

### Lemme 1.3

$h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  peut être décomposé dans la base de fonctions  $\Psi_n$  comme suit :

$$h(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y).$$

# Chapitre 2

## Méthode de factorisation

Dans ce chapitre nous allons présenter un "cas modèle" noté  $(\mathcal{P}_0)$  de problème aux limites elliptique sur lequel nous décrirons l'utilisation de la méthode du plongement invariant spacial et les formes factorisées qui en résultent. Pour ce problème, l'opérateur est naturellement le Laplacien et le domaine est supposé de forme cylindrique.

### 2.1 Définition du cas modèle et cadre fonctionnel

On considère le problème de Poisson posé dans un ouvert cylindrique  $\Omega$ . Pour insister sur le rôle de la variable  $x$ , on notera la fonction  $u(x, y)$  comme  $u(x)$  et la dérivée en  $x$  soit  $\frac{\partial u}{\partial x}$  par  $\frac{du}{dx}$ . On considère le problème :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Delta_y u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u = u_1 & \text{sur } \Gamma_a \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  et  $u_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$

#### Proposition 2.1

Soit  $u \in Y$  alors on a :

$$\langle u|_{\Gamma_s}, \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_s} \rangle \in \mathcal{C}([0, a]; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})')$$

et l'application trace  $\langle u|_{\Gamma_s}, \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_s} \rangle$  est continue et surjective de  $Y$  vers  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$ .

La formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P}_0)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = \langle f, v \rangle_{\hat{X}' \times X} \\ &+ \langle u_0, v|_{\Gamma_0} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})} \end{aligned}$$

où  $u \in X$  satisfait la contrainte  $u|_{\Gamma_a} = u_1$ . Après translation d'un relèvement de  $u_1$ , on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram. On obtient donc que  $(\mathcal{P}_0)$  est bien posé et admet une solution dans  $X$ .

## 2.2 Plongement invariant direct

On utilise la méthode de plongement direct qui, en théorie du contrôle sert à déduire le feedback optimal : on plonge le problème de contrôle dans une famille de problème identiques définis entre l'instant courant et l'instant final, l'état initial étant l'état constaté à l'instant présent. Ici le plongement invariant est spacial : on plonge le problème  $(\mathcal{P}_0)$  dans une famille de problèmes similaires  $(\mathcal{P}_{s,h})$  définis sur  $\Omega_s = ]0, s[ \times \mathcal{O}$  pour  $s \in ]0, s[$ . Pour chaque problème on impose une condition aux limites de Dirichlet  $u|_{\Gamma_s} = h$ , où  $\Gamma_s = \{s\} \times \mathcal{O}$ .

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta u_s = f & \text{dans } \Omega_s \\ u_s = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_s = h & \text{sur } \Gamma_s \\ -\frac{\partial u_s}{\partial x} = u_0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

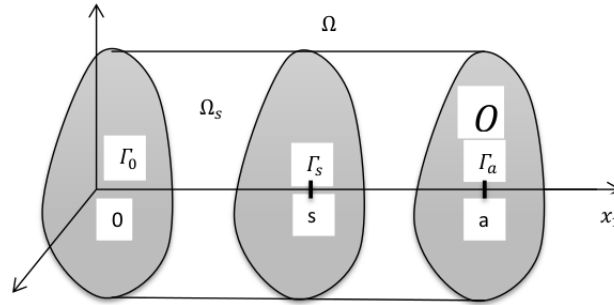


Figure 2.1: Domaine du problème et sous-domaine pour le plongement invariant direct

Soit  $u_s = u_s(h)$  la solution de  $(\mathcal{P}_{s,h})$ . De façon évidente  $(\mathcal{P}_0)$  est exactement  $(\mathcal{P}_{s,h})$  pour  $s = a, h = u_1$ , et donc  $u = u_a(u_1)$ . Pour  $s \in ]0, a[$  on définit  $Y_s = \{v \in H^1(\Omega_s) : L^2(0, s; H^{-1}(\mathcal{O})) \text{ et } v|_{\Sigma} = 0\}$ . Le calcul est maintenant semblable à celui utilisé par Lions ([3]) pour obtenir le feedback optimal pour un problème de contrôle optimal pour une équation parabolique.

### Définition 2.1

Pour tout  $s \in ]0, a[$ , on définit l'application Dirichlet-Neumann (D-N)  $P(s)$  par  $P(s)h = \frac{\partial \gamma_s}{\partial x}$ , où  $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}$  et  $\gamma_s \in Y_s$  est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta \gamma_s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \gamma_s = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \gamma_s = h & \text{sur } \Gamma_s \\ \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Posons  $P(0)h = 0$  et définissons  $w$  par  $w(s) = \frac{\partial \beta_s}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ , où  $\beta_s \in Y_s$  est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta \beta_s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \beta_s = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \beta_s = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ -\frac{\partial \gamma_s}{\partial x} = u_0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

et posons  $w(0) = -u_0$ . Pour presque tout  $s \in ]0, a]$ ,  $P(s) : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \rightarrow H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  est un opérateur linéaire et  $w(s) = \frac{d\beta_s}{dx} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  grâce au caractère bien posé du problème en  $\gamma_s$  et la proposition 2.1.

## Proposition 2.2

L'opérateur linéaire  $P(s) : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \rightarrow H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  est continu, auto-adjoint et positif pour tout  $s \in ]0, a]$  et la forme bilinéaire associée sur  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ ,  $\langle P(s)h, \bar{h} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}$  est coercive pour tout  $s \in ]0, a]$ .

## Preuve

L'opérateur  $P(s)$  est défini par la composition de deux opérateurs continus :  $h \rightarrow \gamma_s \rightarrow \frac{\partial \gamma_s}{\partial x}$  sur  $\Gamma_s$  de  $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}), Y_s)$  et  $\mathcal{L}(Y_s, H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})')$  respectivement et est donc continu. Soient  $h, \bar{h} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$  et  $\gamma_s, \bar{\gamma}_s$  les solutions correspondantes dans  $\Omega_s$ . On a par la formule de Green :

$$0 = - \int_{\Omega_s} \Delta \gamma_s \bar{\gamma}_s dx dy = \int_{\Omega_s} \nabla \gamma_s \nabla \bar{\gamma}_s dx dy - \langle P(s)h, \bar{h} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})} \quad (2.1)$$

ce qui montre le caractère auto-adjoint de l'opérateur  $P(s)$  si l'on permute  $h$  et  $\bar{h}$ . En faisant  $h = \bar{h}$  on a :

$$\langle P(s)h, h \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})} = \int_{\Omega_s} (|\nabla_y \gamma_s|^2 + |\frac{\partial \gamma_s}{\partial x}|^2) dx dy \quad (2.2)$$

Alors par un calcul semblable à celui permettant de démontrer l'inégalité de Poincaré :

$$\|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2 = \|\gamma_s\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2 + \int_t^s \frac{d}{dx} \|\gamma_s\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2 dx \quad (2.3)$$

Or

$$\frac{d}{dx} \|\gamma_s\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2 = 2 \left\langle \frac{d\gamma_s}{dx}, \gamma_s \right\rangle_{L^2(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})}, \quad (2.4)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})}$  est le produit de dualité en prenant  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$  pour un espace pivot.

Alors, en prenant en compte l'injection continue de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$  dans  $H_0^1(\mathcal{O})$ , il existe  $C > 0$  qui dépend de  $\mathcal{O}$  mais pas de  $a$  tel que :

$$\|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2 \leq C \|\gamma_s\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \int_t^s \|\gamma_s\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_t^s \left\| \frac{d\gamma_s}{dx} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx \quad (2.5)$$

pour  $0 \leq t \leq s \leq a$ . En intégrant par rapport à  $t$  de 0 à  $s$ , on obtient :

$$s \|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2 \leq (C + s) \int_0^s \|\gamma_s\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^s \left\| \frac{d\gamma_s}{dx} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx \quad (2.6)$$

et donc

$$\langle P(s)h, h \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})} \geq \frac{s}{C + s} \|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}^2, \quad (2.7)$$

ce qui démontre la coercivité.

On a donc par la linéarité de  $(\mathcal{P}_{s,h})$  :

$$\frac{\partial u_{s,h}}{\partial x} = P(s)h + w(s), \quad (2.8)$$

où  $u_s = \gamma_s + \beta_s$ , l'indice  $s$  rappelant que le problème est défini sur  $\Omega_s$ .

On considère maintenant pour  $x \leq s$  la restriction de  $u_s$  à  $\Omega_s$ . Elle est solution du problème  $(\mathcal{P}_{x,u_s(x,h)})$ . Par le raisonnement précédent, on a la relation :

$$\frac{du_s}{dx}(x, h) = P(x)u_s(x, h) + w(x) \quad (2.9)$$

Pour reprendre l'analogie avec les problèmes d'évolution, on appelle trajectoire l'application

$$x \mapsto u_s(x, h) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}).$$

Donc (2.9) représente une identité pour la famille de trajectoires dépendant de  $h$ . Chaque trajectoire est continue de  $[0, s]$  à valeur dans  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$  pour  $0 < s \leq a$ , mais elle est aussi définie dans  $L^2(0, s; H_0^1(\mathcal{O}))$ .

On peut alors, au moins formellement pour le moment, prendre la dérivée (2.9) par rapport à  $x$ , et en utilisant l'équation vérifiée par  $u_s$  :

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = -\Delta_y u_s - f = \frac{dP}{dx} u_s + P \frac{du_s}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

En substituant  $\frac{du_s}{dx}$  grâce à (2.9) :

$$0 = \left( \frac{dP(x)}{dx} + P^2(x) + \Delta_y \right) u_s(x) + \frac{dw(x)}{dx} + P(x)w(x) + f(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq s.$$

En faisant  $x = s$  :

$$0 = \left( \frac{dP}{ds}(s) + P^2(s) + \Delta_y \right) h + \frac{dw(s)}{ds} + P(s)w(s).$$

Ce calcul s'applique à toute les trajectoires vérifiant l'équation de Poisson et la condition aux limites en  $\Gamma_0$ ,  $-\frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_0} = u_0$  (cette trajectoire est entièrement déterminée si l'on se donne  $h$  et  $s$ ). Donc  $h$  et  $s$  sont arbitraires l'on déduit de l'identité précédente :

$$\frac{dP}{dx} + P^2 = -\Delta_y \quad \text{pour } x \in ]0, a], \quad (2.10)$$

et pour le terme résiduel

$$\frac{dw}{dx} + Pw = -f \quad \text{pour } x \in ]0, a]. \quad (2.11)$$

Pour la justification de l'argument selon lequel la trajectoire arbitraire peut être prolongée par continuité jusqu'en  $x = 0$ , voir [4] et [3]. Donc la relation (2.9) en  $x = 0$  et en utilisant le fait que  $u(0)$  est arbitraire fournit les conditions initiales pour  $P$  et  $w$  :

$$P(0) = 0, \quad w(0) = -u_0. \quad (2.12)$$

Insistons sur le fait que  $P$  est un opérateur dépendant de  $x$  agissant sur des fonctions de la variable  $y$  définies sur la section  $\mathcal{O}$ . Il vérifie l'équation de Riccati (2.10) qui a la particularité de ne pas avoir de termes linéaires. Cette particularité est spécifique au Laplacien dans un cylindre et disparaît dans d'autres cas. Le second membre est un opérateur non borné sur  $L^2(\mathcal{O})$ . En réunissant les équations (2.10), (2.11), les conditions initiales de  $P$  et  $w$  (2.12), l'équation (2.9) et la condition sur  $\Gamma_a$  pour  $v$ , on obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y &= 0, & P(0) &= 0, \\ \frac{dw}{dx} + Pw &= -f, & w(0) &= -u_0, \\ -\frac{du}{dx} + Pu &= -w, & u(a) &= u_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le système (2.13) est découplé car on peut intégrer les deux premières équations en  $x$  et 0 à  $a$  pour obtenir  $P$  et  $w$  ("descente"), puis  $u$  est obtenu par intégration rétrograde de la troisième équation ("remontée"). De façon formelle, connaissant  $P$ , on a factorisé ( $\mathcal{P}_0$ ) en :

$$-\left(\frac{d}{dx} + P\right)\left(\frac{d}{dx} - P\right)u = f. \quad (2.14)$$

Pour plus de détails, voir [3].

## 2.3 Plongement invariant retrograde

De façon naturelle, la solution  $u$  peut aussi être obtenue par un plongement invariant dans la partie complémentaire du domaine :  $\tilde{\Omega}_s = ]s, a[ \times \mathcal{O}$ .

Pour  $s \in [0, a[$  on définit  $\tilde{Y} = \{v \in H^1(\tilde{\Omega}_s) : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \in L^2(s, a; H^{-1}(\mathcal{O})) \text{ et } v|_{\Gamma_a} = v|_{\Sigma}\}$  et

$$(\tilde{\mathcal{P}}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta \tilde{u}_{s,h} = f & \text{dans } \tilde{\Omega}_s \\ \tilde{u}_{s,h}|_{\Sigma} = 0, & -\frac{\partial \tilde{u}_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h, \quad \tilde{u}_{s,h}|_{\Gamma_a} = u_1, \end{cases}$$

où  $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$ .

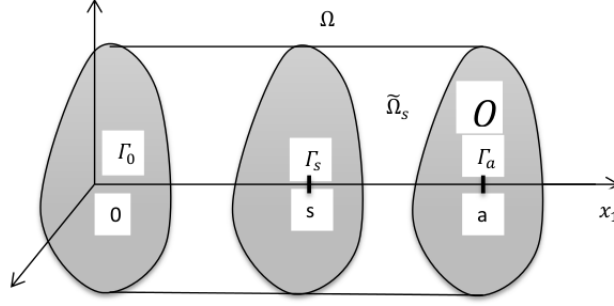


Figure 2.2: Domaine du problème et sous-domaine pour le plongement invariant retro-grade

### Définition 2.2

Pour tout  $s \in [0, a[$  on définit l'application Neumann-Dirichlet (N-D)  $Q(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})', H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}))$  par  $Q(s)h = \tilde{\gamma}_{s,h}|_{\Gamma_s}$ , où  $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  et  $\tilde{\gamma}_{s,h} \in \tilde{Y}_s$  est la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\gamma}_{s,h} = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}_s \\ \tilde{\gamma}_{s,h}|_{\Sigma} = 0, & -\frac{\partial \tilde{\gamma}_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h, \quad \tilde{\gamma}_{s,h}|_{\Gamma_a} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

posons  $Q(a)h = 0$  et définissons  $r$  par  $r(s) = \tilde{\beta}_s|_{\Gamma_s} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ , où  $\tilde{\beta}_s \in \tilde{Y}_s$  est la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\beta}_{s,h} = f & \text{dans } \tilde{\Omega}_s \\ \tilde{\beta}_{s,h}|_{\Sigma} = 0, & -\frac{\partial \tilde{\beta}_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s} = 0, \quad \tilde{\beta}_{s,h}|_{\Gamma_a} = u_1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Posons aussi  $r(a) = u_1$ . On obtient :

$$\tilde{u}_{s,h} = Q(s)h + r(s). \quad (2.17)$$

Comme précédemment nous simplifions l'écriture lorsqu'il n'est pas nécessaire d'insister sur la dépendance en  $h$  par :

$$\tilde{u}_s = \tilde{u}_{s,h}, \quad \tilde{\gamma}_s = \tilde{\gamma}_{s,h}.$$

Montrons que  $Q$  a des propriétés similaires à celle obtenues pour  $P$  dans la section précédente.

### Proposition 2.3

L'opérateur linéaire  $Q(s) : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})' \rightarrow H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$  est continu et auto-adjoint et non négatif pour tout  $s \in [0, a]$  et la forme bilinéaire associée sur  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})', \langle Q(s)h, \bar{h} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}$  est coercive pour tout  $s \in [0, a[$ .

### Preuve

L'opérateur  $Q(s)$  est défini par la composition de deux opérateurs continus :

$h \rightarrow \tilde{\gamma}_s \rightarrow \tilde{\gamma}_s|_{\Gamma_s}$  de  $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})', \tilde{Y}_s)$  et  $\mathcal{L}(\tilde{Y}_s, H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}))$  respectivement et est donc continu.



Soient  $h, \bar{h} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  et  $\tilde{\gamma}_s, \bar{\tilde{\gamma}}_s$  les solutions correspondantes à (2.15) dans  $\tilde{\Omega}_s$ . On a, par la formule de Green :

$$0 = - \int_{\tilde{\Omega}_s} \tilde{\gamma}_s \Delta \bar{\tilde{\gamma}}_s dx dy = \int_{\tilde{\Omega}_s} \nabla \tilde{\gamma}_s \nabla \bar{\tilde{\gamma}}_s dx dy - \langle Q(s)h, \bar{h} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}, \quad (2.18)$$

ce qui montre le caractère auto-adjoint de  $Q(s)$  si l'on permute  $h$  et  $\bar{h}$  et sa non négativité en faisant  $h = \bar{h}$ . On a :

$$\langle Q(s)h, h \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'} = \int_{\tilde{\Omega}_s} \left( |\nabla \tilde{\gamma}_s|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{\gamma}_s}{\partial x} \right|^2 \right) dx dy. \quad (2.19)$$

Alors par un calcul semblable à celui de la proposition 2.1 :

$$\begin{aligned} \|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}^2 &= \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(t) \right\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}^2 - \int_s^t \frac{d}{dx} \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(x) \right\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}^2 dx \\ &\leq C \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \int_s^t \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx \\ &\quad + \int_s^t \left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}_s}{dx^2}(x) \right\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 dx, \end{aligned}$$

pour  $0 \leq s \leq t \leq a$ . Or

$$\left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}_s}{dx^2}(x) \right\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 = \|\Delta \tilde{\gamma}_s(x)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 \leq C \|\tilde{\gamma}_s\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2,$$

d'où

$$\|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}^2 \leq C \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \int_s^t \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx + C \int_s^t \|\tilde{\gamma}_s\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx. \quad (2.20)$$

En intégrant par rapport à  $t$  entre  $s$  et  $a$ , on obtient :

$$(a-s) \|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}^2 \leq (C+a-s) \int_s^a \left\| \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dx}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx + (a-s)C \int_s^a \|\tilde{\gamma}_s\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx. \quad (2.21)$$

et donc en supposant  $C > 1$ , (sinon en remplace  $C$  par 1) :

$$\langle Q(s)h, h \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'} \geq \frac{a-s}{C(C+a-s)} \|h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'}^2, \quad (2.22)$$

ce qui démontre la coercivité de  $Q(s)$  pour tout  $s \in [0, a[$ .

On appelle maintenant trajectoire, l'application :

$$x \longmapsto \frac{d\tilde{u}_s}{dx}(x) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})', \quad x \in [s, a],$$

où  $\tilde{u}_s$  vérifie  $(\tilde{\mathcal{P}}_{s,h})$ . Chaque trajectoire est déterminée par un couple  $(s, h)$ . Le long d'une trajectoire, on a l'identité :

$$\tilde{u}_s(x) = -Q(x) \frac{d\tilde{u}_s}{dx}(x) + r(x). \quad (2.23)$$

En dérivant formellement en  $x$  :

$$\frac{d\tilde{u}_s}{dx}(x) = -\frac{dQ}{dx}(x)\frac{d\tilde{u}_s}{dx}(x) - Q(x)\frac{d^2\tilde{u}_s}{dx^2}(x) + \frac{dr}{dx}(x).$$

En utilisant  $(\tilde{\mathcal{P}}_{s,h})$  et en substituant grâce à (2.23), on obtient :

$$\frac{d\tilde{u}_s}{dx}(x) = \left(-\frac{dQ}{dx} - Q\Delta_y Q\right)\frac{d\tilde{u}_s}{dx}(x) + \frac{dr}{dx}(x) + Q\Delta_y r(x) + Qf. \quad (2.24)$$

En faisant  $x = s$  et en utilisant le fait que  $\frac{d\tilde{u}_{s,h}}{dx}(s) = h$  est arbitraire, on obtient le système découplé :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} + Q\Delta_y Q + I &= 0, & Q(a) &= 0, \\ \frac{dr}{dx} + Q\Delta_y r &= -Qf, & r(a) &= u_1, \\ Q\frac{du}{dx} + u &= r, & u(0) &= Q(0)u_0 + r(0) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La condition initiale pour  $u$  est obtenue par la relation (2.23) en  $x = 0$ . Formellement, on a obtenu la factorisation de  $(\mathcal{P}_0)$  en :

$$\left(\frac{d}{dx} + Q\Delta_y\right) \circ \left(I + Q\frac{d}{dx}\right) u = Qf. \quad (2.26)$$

Pour plus d'informations, voir [3].

## 2.4 La méthode Anadromique

On considère l'équation de Riccati suivant :

$$X' = A_{21} - XA_{11} + A_{22}X - XA_{12}X, \quad X(0) = X_0,$$

où  $X$  est une matrice  $n \times m$ , pas necessairement carrée dépendant du temps  $t$  et tous les  $A_{ij}$  sont régulières dépendant aussi de  $t$ . Les dimensions des  $A_{ij}$  sont comme suit :

$$A = A(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$A_{11}$  est une matrice  $m \times m$ ,  $A_{12}$  une matrice  $m \times n$ ,  $A_{21}$  une matrice  $n \times m$ , et  $A_{22}$  une matrice  $n \times n$ .

### Méthode d'ordre 2

La méthode anadromique est basée sur une technique de partition : on considère une étape d'intégration de  $\tau$  à  $\tau + \theta$ , où  $\theta$  est le pas. On définit une fonction à valeur matricielle  $f(X, Y)$  par :

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= A_{21} - XA_{11} + A_{22}Y - XA_{12}Y \\ \text{où } A_{ij} &= A_{ij}\left(\tau + \frac{1}{2}\theta\right) \end{aligned}$$

Soit  $X \approx X(\tau)$ . Une approximation  $Z \approx X(\tau + \theta)$  peut être calculée en résolvant :

$$\frac{Y - X}{\theta/2} = f(X, Y), \quad \frac{Z - Y}{\theta/2} = f(Z, Y),$$

où  $Y = X(\tau + \frac{1}{2}\theta)$  et  $Z = X(\tau + \theta)$ . Ceci définit une méthode anadromique d'ordre 2.

## Méthode d'ordre élevé

On veut intégrer entre  $\tau$  et  $\tau + \theta$ , nous allons chercher une suite de matrices

$$\tilde{A}_\ell = \begin{pmatrix} A_{11,\ell} & A_{12,\ell} \\ A_{21,\ell} & A_{22,\ell} \end{pmatrix} \quad \text{pour } \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.27)$$

qui ne dépend que de  $A(t)$  et ses dérivées à  $\tau + \frac{1}{2}\theta$ . On définit alors

$$f_\ell(X, Y) = A_{21,\ell} - XA_{12,\ell} + A_{11,\ell}Y - XA_{12,\ell}Y, \quad (2.28)$$

une fonction matricielle qui à deux matrices arguments  $X$  et  $Y$ . Soit  $c_\ell$  les coefficients de  $t^{2\ell+1}$  dans la série de  $\tanh(t)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell t^{2\ell+1} &= \frac{\exp(2t) - 1}{\exp(2t) + 1} = \tanh(t) \\ &= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + O(t^{11}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Finalement, notre méthode d'ordre  $2k$  prend la forme :

$$\frac{Y - X}{\theta/2} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2\ell} c_\ell f_\ell(X, Y), \quad \frac{Z - Y}{\theta/2} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2\ell} c_\ell f_\ell(Z, Y) \quad (2.30)$$

où  $Y \approx X(\tau + \frac{1}{2}\theta)$  et  $Z \approx X(\tau + \theta)$ .

## Cas où $A$ ne dépend pas du temps

Lorsque  $A$  est indépendant du temps, on a

$$\tilde{A} = \frac{1}{\frac{1}{2}\theta} (e^{\theta A} - I)(e^{\theta A} + I)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\theta\right)^{2\ell} c_\ell A^{2\ell+1}. \quad (2.31)$$

## Cas où $A$ dépend du temps

C'est le cas le plus compliqué et ici, on présente  $\tilde{A}_\ell$  pour  $\ell = 0, 1, 2$ .

$$\tilde{A}_\ell = \frac{d^\ell}{dt^\ell} A(t) \Big|_{t=\tau+\frac{1}{2}\theta}$$

On a :

$$\tilde{A}_0 = A_0 = A(\tau + \frac{1}{2}\theta) \quad (2.32)$$

$$\tilde{A}_1 = A_0^3 + (A_0 A_1 - A_1 A_0) - \frac{1}{2} A_2 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 &= A_0^5 - \frac{1}{2} A_0 (A_0 A_1 - A_1 A_0) A_0 + (A_0^3 A_1 - A_1 A_0^3) \\ &+ \frac{1}{2} [A_0 (A_1)^2 - 2A_1 A_0 A_1 + (A_1)^2 A_0] \\ &- \frac{1}{4} (A_0^2 A_2 + 3A_0 A_2 A_0 + A_2 A_0^2) + \frac{1}{4} (A_1 A_2 - A_2 A_1) \\ &- \frac{1}{4} (A_0 A_3 - A_3 A_0) + \frac{1}{16} A_4 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ces formules pour  $\tilde{A}_\ell$  contiennent des dérivées qui peuvent parfois être difficiles à calculer.

Pour plus d'information, voir [5].

## 2.5 Expressions modales des opérateurs P, Q et des opérateurs résidus

### Décomposition de P

Pour  $s \in ]0, a[$ , l'application Dirichlet-Neumann (D-N)  $P(s)$  est définie par  $P(s)h = \frac{\partial \gamma_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ , où  $h \in H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  avec  $\gamma_{s,h} \in Y_s$  solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma_{s,h} = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \gamma_{s,h}|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_0}, \quad \gamma_{s,h}|_{\Gamma_s} = h \end{cases}$$

L'expression des coefficients de  $\gamma_{s,h}$  permet d'obtenir une écriture matricielle de  $P(s)$ .

Dans la base  $\Psi_n$  on a :

$$\begin{cases} \gamma_{s,h}(x, y) = \sum_n \gamma_n(x) \Psi_n(y) \\ h(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y) \end{cases}$$

Comme  $-\Delta \gamma_{s,h} = -\frac{\partial^2 \gamma_{s,h}}{\partial x^2} - \Delta_y \gamma_{s,h}$ , on a :

$$\sum_n (-\gamma_n''(x) + \alpha_n^2 \gamma_n(x)) \Psi_n(y) = 0$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \sum_n \gamma_n(x) \Phi_n(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y) \\ \sum_n \gamma_n'(0) \Psi_n(y) = 0 \end{cases}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\gamma_n''(x) + \alpha_n^2 \gamma_n(x) = 0 \\ \gamma_n(s) = h_n \\ \gamma_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Explicitons la solution  $\gamma_n(x)$  :

$\gamma_n''(x) - \alpha_n^2 \gamma_n(x) = 0$ , on obtient :  $\gamma_n(x) = A \exp(-\alpha_n x) + B \exp(\alpha_n x)$ .

En utilisant les deux conditions, on a :  $A = B = \frac{h_n}{2 \cosh(\alpha_n s)}$ . Ainsi,

$$\gamma_n(x) = h_n \frac{\cosh(\alpha_n x)}{\cosh(\alpha_n s)}$$

Pour  $x = s$ , on  $\gamma_n(s) = h_n$ .

Comme :  $P(s)h = \frac{\partial \gamma_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ , on obtient :

$$P(s)h = \sum_n h_n \alpha_n \tanh(\alpha_n s) \Psi_n(y)$$

Soit  $P_n$  le coefficient correspondant à la fonction propre  $\Psi_n$  :

$$P_n(s) = \alpha_n \tanh(\alpha_n s)$$

## Décomposition de Q

Pour  $s \in ]0, a]$ , l'application Neumann-Dirichlet (N-D) est donnée par :  $Q(s)h = \gamma_{s,h} = 0$ , où  $h \in H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})'$  et  $\gamma_{s,h} \in Y_s$  solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma_{s,h} = 0 & \text{dans } \Omega_s. \\ \gamma_{s,h}|_{\Sigma} = 0, & \frac{\partial \gamma_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h, \quad \gamma_{s,h}|_{\Gamma_0} = 0 \end{cases}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \gamma_n''(x) - \alpha_n^2 \gamma_n(x) = 0 \\ \gamma_n(0) = 0 \\ \gamma_n'(s) = h_n \end{cases}$$

La solution de ce système est :  $\gamma_n(x) = A \exp(-\alpha_n x) + B \exp(\alpha_n x)$ . On a :  $A = -B$  avec  $B = \frac{h_n}{2\alpha_n \cosh(\alpha_n s)}$ . Ainsi,

$$\gamma_n(x) = \frac{h_n \sinh(\alpha_n x)}{\alpha_n \cosh(\alpha_n s)}$$

Pour  $x = s$ ,  $\gamma_n(x) = \frac{h_n}{\alpha_n} \tanh(\alpha_n s)$ . On obtient :

$$Q(s)h = \sum_n \frac{h_n}{\alpha_n} \tanh(\alpha_n s) \Psi_n(y)$$

Soi  $Q_n$  le coefficient correspondant à la fonction propre  $\Psi_n$  :

$$Q_n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \tanh(\alpha_n s)$$

### Remarque

On peut aussi décomposer  $Q$  en considérant  $\gamma_{s,h} \in Y_s$  solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma_{s,h} = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}_s. \\ \gamma_{s,h}|_{\Sigma} = 0, & -\frac{\partial \gamma_{s,h}}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h, \quad \gamma_{s,h}|_{\Gamma_a} = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, on obtient :

$$\gamma_n(x) = \frac{h_n \sinh[\alpha_n(a-x)]}{\alpha_n \cosh[\alpha_n(a-s)]}$$

pour  $x = s$ ,  $\gamma_n(x) = \frac{h_n}{\alpha_n} \tanh[\alpha_n(a-s)]$

On en déduit la décomposition modale de  $Q$  par :

$$Q(s)h = \sum_n \frac{h_n}{\alpha_n} \tanh[\alpha_n(a-s)] \Psi_n(y)$$

et  $Q_n$  est donné par :

$$Q_n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \tanh[\alpha_n(a-s)]$$

## Décomposition des résidus dans la base modale

On sait que  $\frac{dw_2}{dx} + Pw_2 = 0$ , on a :

$$(w_2^n)' + P_n w_2^n = 0 \Rightarrow (w_2^n)' + \alpha_n \tanh(\alpha_n x) w_2^n = 0$$

On obtient :  $w_2^n = \frac{w_2(0)}{\cosh(\alpha_n x)}$ .

$\frac{dw_1}{dx} - Q\Delta_y w_1 = 0$ , on a :

$$(w_1^n)' - Q_n \Delta_y w_1^n = 0 \Rightarrow (w_1^n)' - \frac{1}{\alpha_n} \tanh(\alpha_n x) w_1^n = 0$$

On obtient :  $w_1^n = \frac{w_1(0)}{\cosh(\alpha_n x)}$ .

## Discrétisation des équations en P et Q

### Schéma d'ordre 2

Les équations en P et Q sont :

$$\begin{cases} \frac{dP}{ds} + P^2 = -\Delta_y, & P(0) = 0 \\ \frac{dQ}{ds} + Q\Delta_y Q = I, & Q(0) = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = (I + \frac{h}{2}P)^{-1}(P - \frac{h}{2}\Delta_y) \Rightarrow Z = (P_1 - \frac{h}{2}\Delta_y)(I + \frac{h}{2}P_1)^{-1} \quad P(0) = 0$$

$$Q_1 = (I - \frac{h}{2}Q\Delta_y)^{-1}(Q + \frac{h}{2}I) \Rightarrow Z = (Q_1 + \frac{h}{2}I)(I - \frac{h}{2}\Delta_y Q_1)^{-1} \quad P(0) = 0,$$

avec  $P = P(0)$ ,  $P_1 = P(\frac{1}{2}h)$  et  $Z = P(h)$ ;  $Q = Q(0)$ ,  $Q_1 = Q(\frac{h}{2})$  et  $Z = Q(h)$ .

### Schéma d'ordre 4

On a :

$$\begin{aligned} P_1 &= (I + \frac{1}{2}hP + \frac{1}{24}h^3\Delta_y P)^{-1}(P - \frac{1}{2}h\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y^2) \\ Z &= (I + \frac{1}{2}hP_1 + \frac{1}{24}h^3\Delta_y P_1)^{-1}(P_1 - \frac{1}{2}h\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y^2) \\ Q_1 &= (I - \frac{1}{2}hQ\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y Q\Delta_y)^{-1}(\frac{1}{2}hI + \frac{1}{24}h^3\Delta_y + Q) \\ Z &= (I - \frac{1}{2}hQ_1\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y Q_1\Delta_y)^{-1}(\frac{1}{2}hI + \frac{1}{24}h^3\Delta_y + Q_1) \end{aligned}$$

avec  $P = P(0)$ ,  $P_1 = P(\frac{1}{2}h)$  et  $Z = P(h)$ ;  $Q = Q(0)$ ,  $Q_1 = Q(\frac{h}{2})$  et  $Z = Q(h)$

## 2.5.1 Comparaison des opérateurs

Dans cette partie, nous comparons les expressions analytiques et discrétisées des opérateurs  $P$  et  $Q$  pour être rassuré que la discrétisation a été bien faite et pour voir numériquement l'ordre de la méthode anadromique.

Nous considérons  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$ . Nous représentons le  $\log$  des erreurs relatives en fonction de  $\log(h)$ .  $h = a/n$  est le pas de discrétisation suivant l'axe de plongement et  $k = b/p$  le pas suivant l'axe transverse.  $n$  est le nombre de mailles suivant l'axe de plongement et  $p$  le nombre de mailles suivant l'axe transverse. Les erreurs relatives sont données par :

$$Err_P = \frac{\|P_{theo} - P_{num}\|}{\|P_{theo}\|}, \quad Err_Q = \frac{\|Q_{theo} - Q_{num}\|}{\|Q_{theo}\|}$$

$$Err_{w1} = \frac{\|w1_{theo} - w1_{num}\|}{\|w1_{theo}\|}, \quad Err_{w2} = \frac{\|w2_{theo} - w2_{num}\|}{\|w2_{theo}\|}$$

Les  $P_{theo}$  et  $Q_{theo}$  ne sont vraiment pas analytiques parce que ce sont des expressions obtenues par semi-discrétisation, c'est-à-dire, une discrétisation suivant l'axe transverse, des expressions écrites dans la base modale comme suit :

$$P_{theo} = \alpha_n \tanh(\alpha_n a),$$

$$Q_{theo} = \frac{1}{\alpha_n} \tanh(\alpha_n a).$$

et les  $w1_{theo}$  et  $w2_{theo}$  sont les projetés respectivement de  $w1$  et  $w2$  sur l'axe transverse. Leurs expressions sont données par :

$$w1_{theo} = \frac{w1(0)}{\cosh(\alpha_n a)},$$

$$w2_{theo} = \frac{w2(0)}{\cosh(\alpha_n a)}.$$

avec  $\alpha_n = \lambda_n^{\frac{1}{2}}$  où  $\lambda_n$  est une suite de valeurs propres de  $-\Delta_y$ .

Les  $P_{num}$  et  $Q_{num}$  sont aussi ramenés de la base canonique à la base propres comme suit :  $P_{num} = T^{-1}PT$  et  $Q_{num} = T^{-1}QT$ , où  $T$  est la matrice des vecteurs propres associés à  $\lambda_n$ ; De la même façon,  $w1_{num}$  et  $w2_{num}$  sont projetés dans la base propre comme suit :  $w1_{num} = T^t w1$  et  $Q_{num} = T^t w2$ , avec  $T^t$  la matrice transposée de  $T$ .

### Pour l'ordre 2 :

Nous fixons  $p = \{100, 200, 300\}$  et nous faisons varier  $n$  suivant la direction de plongement avec  $a = \pi$  et  $b = \pi$  :

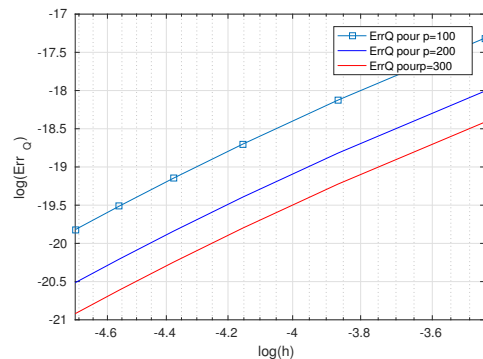
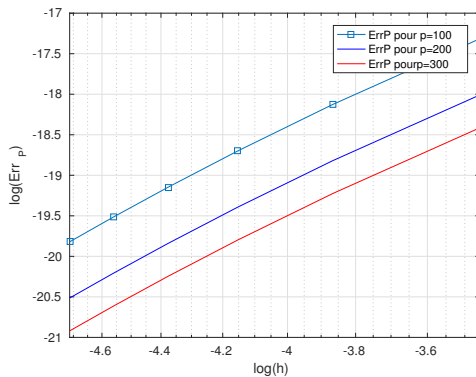


Figure 2.3 : L'évolution du  $\log$  de l'erreur relative en  $P$  pour la figure de gauche et en  $Q$  pour celle de droite en fonction du  $\log(h)$ .

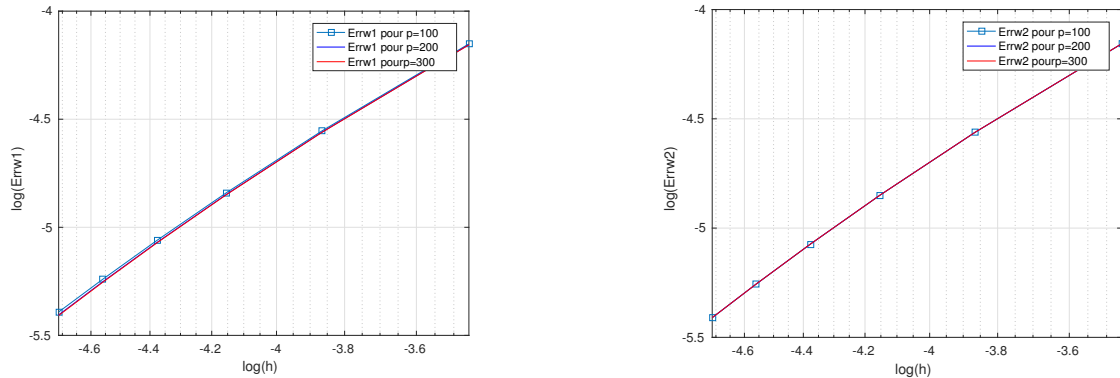


Figure 2.4 : L'évolution du  $\log$  de l'erreur relative en  $w1$  pour la figure de gauche et en  $w2$  pour celle de droite en fonction du  $\log(h)$ .

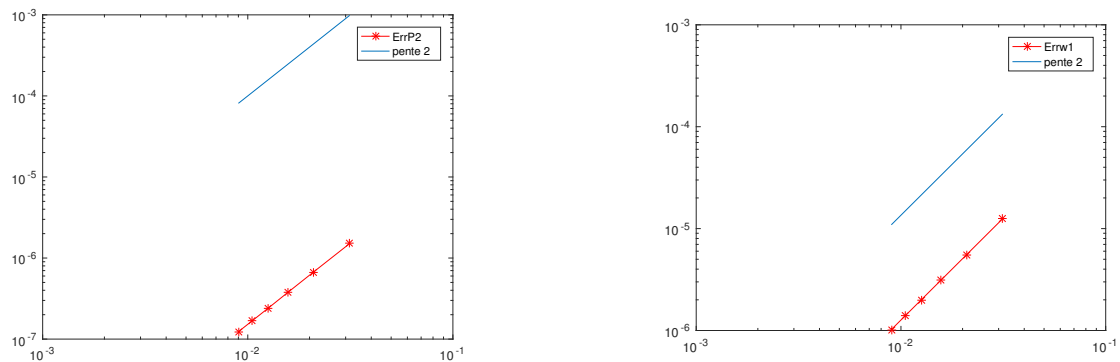


Figure 2.5 : La pente 2 (l'équation en  $P$  pour la figure de gauche et en  $w1$  pour celle de droite ). Cette pente représente l'ordre de la méthode.

### Pour l'ordre 4 :

Pour le schéma d'ordre 4, lorsque  $p \geq 200$ , les erreurs relative en  $w1$  et  $w2$  explosent. Nous considérons donc  $p \in \{100, 150\}$ .

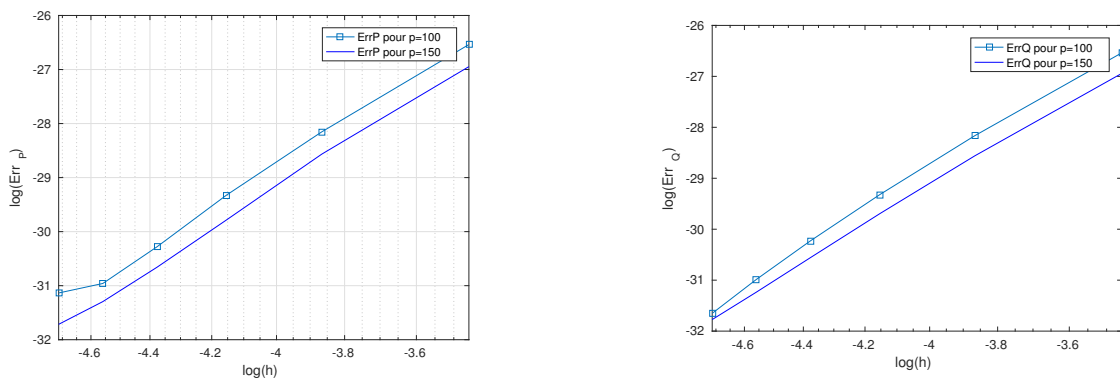


Figure 2.6 : L'évolution du  $\log$  de l'erreur relative en  $P$  pour la figure de gauche et en  $Q$  pour celle de droite en fonction du  $\log(h)$ .



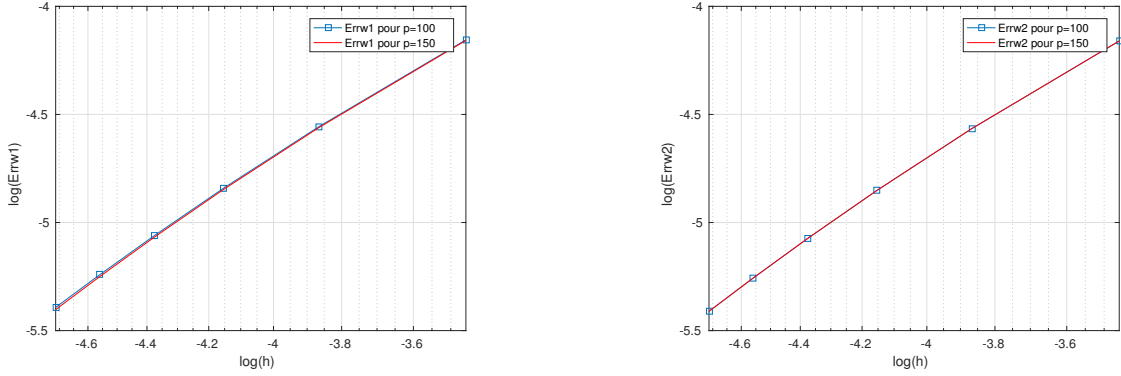


Figure 2.7 : L'évolution du  $\log$  de l'erreur relative en  $w1$  pour la figure de gauche et en  $w2$  pour celle de droite en fonction du  $\log(h)$ .

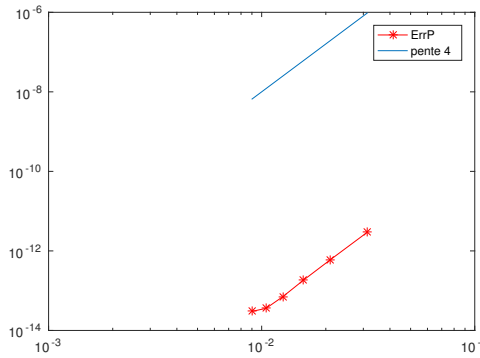


Figure 2.8 : La pente 4 en  $P$

Nous avons dans cette partie, étudié l'évolution du  $\log$  des erreurs relatives en  $P$ ,  $Q$ ,  $w1$  et  $w2$  en fonction du  $\log(h)$  pour  $n = \{100, 150, 200, 250, 300\}$  et les pentes dans les deux cas pour  $p = 100$ .

Nous avons remarqué que pour les erreurs en  $P$  et  $Q$ , plus on raffine dans les deux directions : transversable et plongement, plus les erreurs relative diminues. Par contre, pour les erreurs relatives en  $w1$  et  $w2$ , il n'y a pas de grand changement.

## 2.6 Discrétisation par différences finies de $(\mathcal{P}_0)$

Nous voulons montrer dans cette partie comment on peut appliquer la méthode de plongement invariant à des versions discrétisées du problème  $(\mathcal{P}_0)$ .

Nous supposons que  $\Omega$  est un rectangle dans  $\mathbb{R}^2$  de longueur  $a$  et de largeur  $b$ , c'est-à-dire :  $\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[$ . On suppose que  $f$ ,  $u_0$  et  $u_1$  sont suffisamment régulières et que les conditions de compatibilité sont vérifiées aux angles du bord du domaine, pour obtenir une solution  $u \in \mathcal{C}^3(\Omega)$  et la convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème continu.

Pour deux entiers  $N$  et  $p$  donnés, nous posons  $h = \frac{a}{N - \frac{1}{2}}$  et  $k = \frac{b}{p}$ . Les noeuds sont définis par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = ((-\frac{1}{2} + i)h, jk) & i \in \{0, \dots, N\} \text{ et } j \in \{0, \dots, p\} \\ a_{\frac{1}{2},j} = (0, jk) & \text{pour } j \in \{0, \dots, p\} \end{cases}$$



dans la formule de Taylor, on obtient que  $A_h u(a) = F_h + O(h^2)$ . Donc la discrétisation par différences finies ( $\mathcal{P}_h$ ) du problème ( $\mathcal{P}_0$ ) consiste à trouver :

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-1} \end{pmatrix}$$

tel que :

$$(\mathcal{P}_h) \quad A_h u_h = F_h.$$

## 2.7 Application de la méthode de factorisation au problème ( $\mathcal{P}_h$ )

Pour  $i_0 \in \{2, \dots, N\}$  on définit le même problème sur le sous domaine  $\Omega_{i_0}$  ( $i \in \{1, \dots, i_0\}$ ) avec la donnée Dirichlet  $u_{i_0}$  pour  $i = i_0$ . Si nous notons :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i_0-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(i_0-1)(p-1)},$$

la solution du problème sur le sous domaine  $\Omega_{i_0}$ . Nous obtenons :

$$(\mathcal{P}_{i_0}) : \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & & & \\ -I & B_2 & -I & 0 & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & -I & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -I & B_{i_0-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i_0-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{u_0(a_{\frac{1}{2}})}{h} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{i_0-1} + \frac{u_{i_0}}{h^2} \end{pmatrix}$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, i_0\}$ , posons  $P_{i-1} = P(-\frac{1}{2} + ih)$  et  $w_i = (w(a_{i,j}))_{j=1}^{p-1} \in \mathbb{R}^{p-1}$ .

$P_{i-1}$  est l'opérateur de Dirichlet-Neumann discrétisé qui est une matrice  $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ . Nous avons :

$$P_{i-1} u(a_{i-1}) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_{i-1}) - w_{i-1}$$

Nous approximons par  $\frac{u_i - u_{i-1}}{h}$  le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}(a_{i-1})$ , nous obtenons :

$$P_{i-1} u_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - w_{i-1} \quad (2.36)$$

Si  $u$  est la solution de ( $\mathcal{P}_{i_0}$ ), nous obtenons :

$$-\Delta u_i = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \Delta_y u_i = 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} - h^2 \Delta_y u_i = h^2 f_i \quad (2.37)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, i_0\}$ . Comme :

$$2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} + h^2 \Delta_y u_i = u_i - u_{i-1} - (u_{i+1} - u_i) - h^2 \Delta_y u_i \quad (2.38)$$

on a alors d'après (2.36):

$$u_i = (I + hP_{i-1})u_{i-1} + hw_{i-1}$$

et

$$-h^2 \Delta_y u_i - h^2 f_i = hP_i u_i - hP_{i-1} + hw_i - hw_{i-1}$$

On obtient alors :

$$-h^2 \Delta_y u_i - h^2 f_i = hP_i u_i - hP_{i-1}(I + hP_{i-1})^{-1}(u_i - hw_{i-1}) + hw_i - hw_{i-1}.$$

Puisque  $u_{i_0}$  est arbitraire, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} P_i &= P_{i-1}(I + hP_{i-1})^{-1} - h\Delta_y & P(0) &= 0 \\ w_i &= (I + hP_{i-1})^{-1}w_{i-1} - hf_i & w(0) &= -u_0(a_{\frac{1}{2}}) \\ (I + hP_i)u_i &= u_{i+1} - hw_i & u_N &= u_1(a_N). \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.7.1 Schémas et résultats numériques

Nous considérons le problème  $(\mathcal{P}_0)$  dans  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$ ,  $f(x, y) = 0$ ,  $u_1(y) = e^\pi \sin(y)$  et  $u_0(y) = -\sin(y)$ . La solution théorique est  $u(x, y) = e^x \sin(y)$ .

Etant donné que nous avons une condition de Dirichlet en  $a$ , nous cherchons donc à déterminer la solution numérique en 0.

#### Approximation à l'ordre 1

A l'ordre 1, on approxime  $(I + hP_i)^{-1}$  par  $I - hP_i$ , c'est-à-dire :  $(I + hP_i)^{-1} = I - hP_i + o(h)$ , le système (2.39) devient :

$$\begin{aligned} P_i &= P_{i-1}(I - hP_{i-1}) - h\Delta_y + o(h) & P(0) &= 0 \\ w_i &= (I - hP_{i-1})w_{i-1} - hf_i + o(h) & w(0) &= -u_0(a_{\frac{1}{2}}) \\ u_i &= (I - hP_i)(u_{i+1} - hw_i) & u_N &= u_1(a_N) \end{aligned} \quad (2.40)$$

On a les figures suivantes :

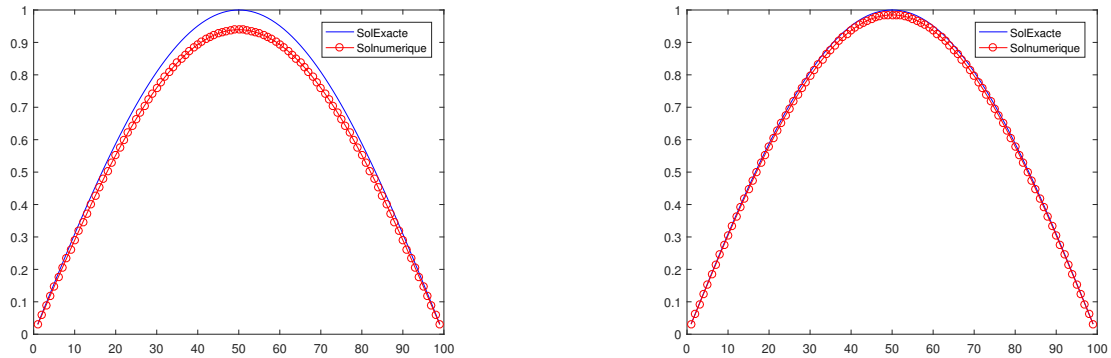


Figure 2.9 : La solution numérique du problème  $(\mathcal{P}_0)$  par le schéma d'Euler explicite pour  $n = 150$ ,  $p = 100$  pour la figure de gauche et  $n = 600$ ,  $p = 100$  pour la figure de droite.

## Résolution par l'anadromique 2

On sait que :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y &= 0, & P(0) &= 0, \\ \frac{dw}{dx} + Pw &= -f, & w(0) &= -u_0, \\ -\frac{du}{dx} + Pu &= -w, & u(a) &= u_1. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nous discrétisons l'équation en  $P$  par le schéma anadromique d'ordre 2, les équations en  $w$  et  $u$  par Crank-Nicolson. On a :

$$\begin{aligned} P_1 &= (I + \frac{h}{2}P_{i-1})^{-1}(P_{i-1} - \frac{h}{2}\Delta_y) \Rightarrow P_i = (P_1 - \frac{h}{2}\Delta_y)(I + \frac{h}{2}P_1)^{-1} & P(0) &= 0 \\ w_i &= (I + \frac{1}{2}hP_i)^{-1} \left( (I - \frac{1}{2}hP_{i-1})w_{i-1} - \frac{h}{2}f_i - \frac{h}{2}f_{i-1} \right) & w(0) &= -u_0(a_{\frac{1}{2}}) \\ u_{i-1} &= (I + \frac{1}{2}hP_{i-1})^{-1} \left( (I - \frac{1}{2}hP_i)u_i - \frac{h}{2}w_i - \frac{h}{2}w_{i-1} \right) & u_N &= u_1(a_N) \end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants :

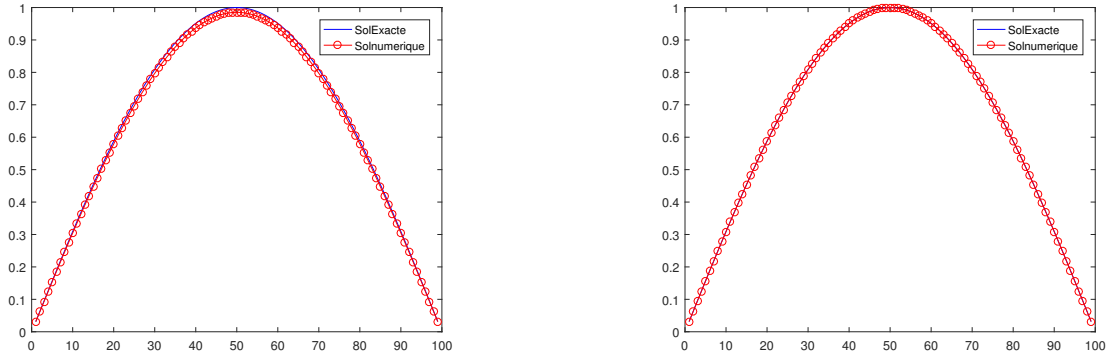


Figure 2.10 : La solution numérique du problème ( $\mathcal{P}_0$ ) par le schéma anadromique d'ordre 2 pour  $n = 20$ ,  $p = 100$  pour la figure de gauche et  $n = 100$ ,  $p = 100$  pour la figure de droite.

## Résolution par Crank-Nicolson

On sait que :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y &= 0, & P(0) &= 0, \\ \frac{dw}{dx} + Pw &= -f, & w(0) &= -u_0, \\ -\frac{du}{dx} + Pu &= -w, & u(a) &= u_1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nous discrétisons les équations en  $p$ ,  $w$  et  $u$  par Crank-Nicolson, mais étant donné le caractère non linéaire de l'équation en  $P$ , nous allons faire une extrapolation à l'ordre 2

pour lever cet équivoque. On a pour  $P_i = 2P_{i-1} - P_{i-2}$  :

$$\begin{aligned}
 P_i &= \left(I + \frac{h}{2}P_i\right)^{-1} \left( \left(I - \frac{h}{2}P_{i-1}\right)P_{i-1} - h\Delta_y \right) & P(0) &= 0 \\
 w_i &= \left(I + \frac{1}{2}hP_i\right)^{-1} \left( \left(I - \frac{1}{2}hP_{i-1}\right)w_{i-1} - \frac{h}{2}f_i - \frac{h}{2}f_{i-1} \right) & w(0) &= -u_0(a_{\frac{1}{2}}) \\
 u_{i-1} &= \left(I + \frac{1}{2}hP_{i-1}\right)^{-1} \left( \left(I - \frac{1}{2}hP_i\right)u_i - \frac{h}{2}w_i - \frac{h}{2}w_{i-1} \right) & u_N &= u_1(a_N)
 \end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants :

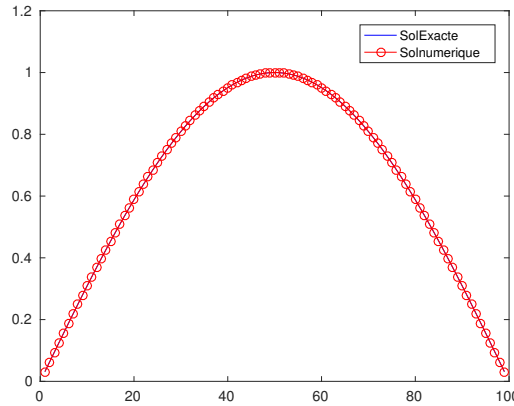


Figure 2.11 : Solution numérique obtenue pour  $p = 100$  et  $n = 200$ .

Le schéma utilisé ici est un schéma Crank-Nicolson modifié. Il est modifié parce que nous avons fait une extrapolation pour linéariser l'équation en  $P$ . Pour  $n < 200$ , ce schéma est instable.

## Etude de la convergence

Dans cette partie, nous étudions la convergence de la solution numérique vers la solution analytique d'une part et de l'autre part, la convergence de la solution numérique vers la solution semi-discrétisée.

### Solution semi-discrétisée

Nous considérons l'équation  $\frac{du}{dx} = Pu + w$  avec  $u(a) = u_1$ .

Soit  $U(x) = u(a - x)$ . Nous obtenons l'équation  $\frac{dU}{dx} = -P(a - x)U - w(a - x)$  avec  $U(0) = u(a)$ .

La solution semi-discrétisée est déterminée par :  $\frac{dU_n}{dx} = -P_n U_n - w_n$  avec  $U_n(0) = u(a)$ .

$$\frac{dU_n}{dx} = -\alpha_n \tanh(\alpha_n(a - x))U_n - \frac{w(0)}{\cosh(\alpha_n(a - x))}$$

La solution homogène est donnée par :  $U_h(x) = C \cosh(\alpha_n(a - x))$ .

Par la méthode de variation de constantes, on a :  $U_p(x) = v(x)U_h(x)$ , la solution particulière.

$$\frac{dU_p}{dx} = \frac{dv}{dx} U_p + v \frac{dU_h}{dx}. \text{ On obtient : } \frac{dv}{dx} U_h(x) = -\frac{w(0)}{\cosh(\alpha_n(a-x))} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{w(0)}{C \cosh^2(\alpha_n(a-x))}.$$

Nous intégrons entre 0 et  $x$  et nous obtenons :  $v(x) = \frac{w(0)}{C\alpha_n} \tanh(\alpha_n(a-x))$ .

Nous obtenons la solution discrétisée suivante :

$$U_n(x) = C \cosh(\alpha_n(a-x)) + \frac{w(0)}{\alpha_n} \sinh(\alpha_n(a-x)).$$

avec  $C = \frac{e^a \sin(y) - \frac{w(0)}{\alpha_n} \sinh(\alpha_n a)}{\cosh(\alpha_n a)}$ .

Nous représentons maintenant les figures illustrant l'évolution des erreurs relatives en fonction de  $h$  dans les deux cas, en fixant  $p = 100$  et en raffinant sur la direction de plongement :

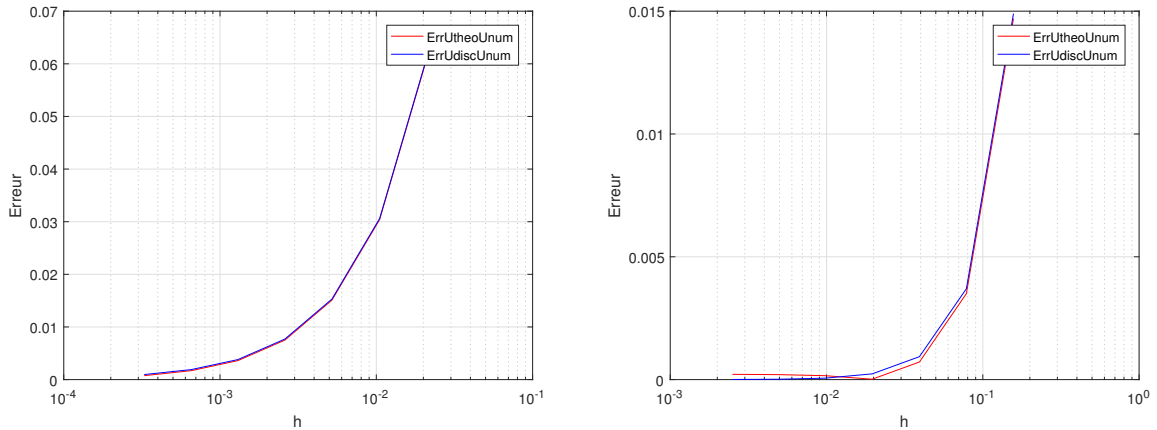


Figure 2.12 : L'évolution des erreurs relatives entre la solution analytique et la solution numérique, entre la solution semi-discrétisée et la solution numérique en fonction de  $h$  avec le schéma d'Euler pour la figure de gauche et avec le schéma anadromique d'ordre 2 pour la figure de droite.

La solution numérique converge bien vers la solution analytique, mais aussi vers la solution semi-discrétisée. Par contre, nous remarquons que à un certain moment, les erreurs relatives entre la solution analytique et la solution numérique ne diminuent plus en raffinant dans la direction de plongement. C'est parce que la solution analytique est définie dans tout le domaine, donc portée par les deux directions alors que nous ne raffinons que dans une seule direction. Pour que les erreurs relatives continuent à diminuer, il faut raffiner dans les deux directions. Quant aux erreurs relatives entre la solution numérique et la solution semi-discrétiser, elles continuent de diminuer en raffinant dans la direction de plongement parce que la solution semi-discrétisée est obtenue en discrétisant suivant l'axe transverse, donc on a besoin de raffiner que dans la direction de plongement.

Quant à l'ordre des schémas numériques, il est bien respecté. Les erreurs relatives sont divisées par deux pour le schéma d'Euler et par quatre pour le schéma anadromique d'ordre 2 chaque fois que nous multiplions  $n$  (le nombre de points dans la direction de plongement) par deux.

En conclusion, on a une meilleur précision avec le schéma anadromique.

## L'ordre de la solution

Dans cette partie nous vérifions l'ordre de la solution obtenue. Les figures ci-dessous montrent bien l'ordre de la solution selon l'ordre du schéma utilisé :

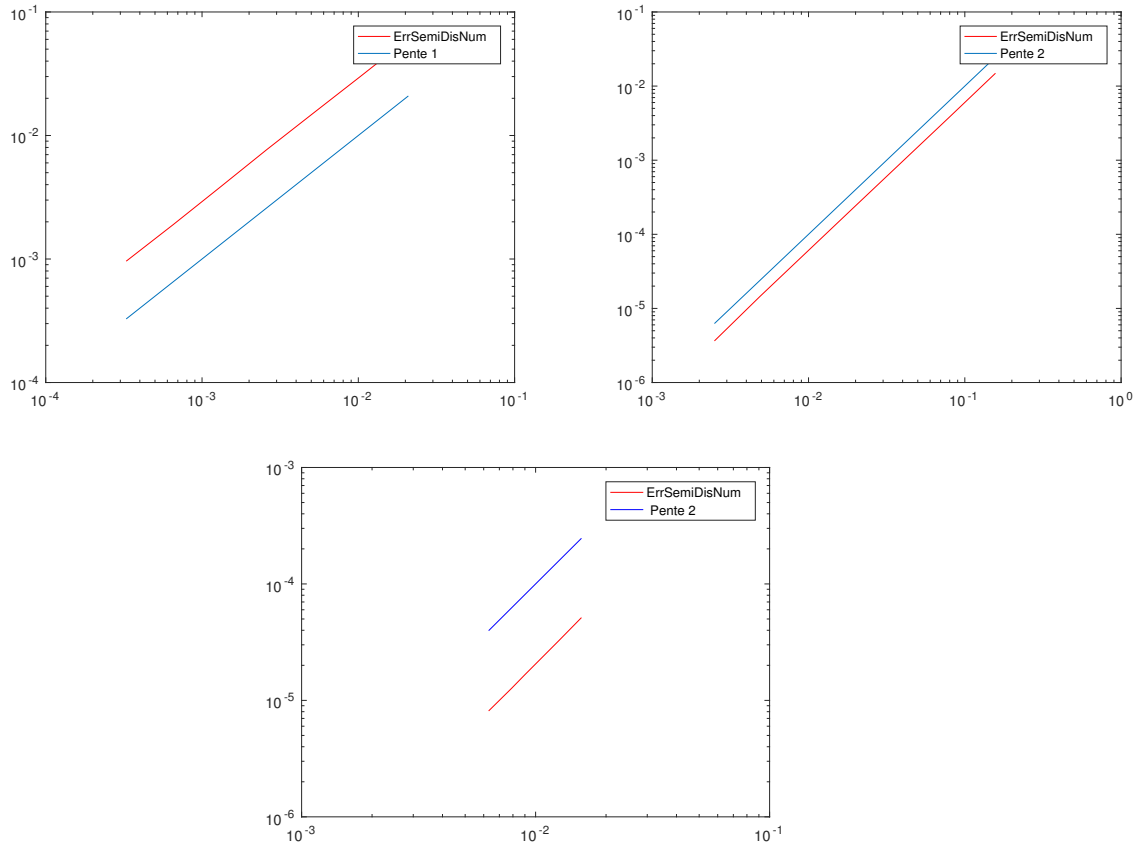


Figure 2.13 : La pente de la solution selon le schéma.

La figure de gauche représente la pente de la solution obtenue par le schéma d'Euler explicite (pente 1), celle de droite représente la pente de la solution obtenue avec le schéma Runge-Kutta d'ordre 2 (pente 2) et la dernière représente la pente de la solution obtenue avec le schéma de Crank-Nicolson modifié.



# Chapitre 3

## Application de la méthode de factorisation dans le cas d'un cylindre

Dans cette partie, nous nous appuyons sur les travaux de Fadhel. J, de Julien. B, Nejib. Z et Jacques. H dans [4], [1] pour résoudre un problème de complétion des données en utilisant la méthode de factorisation.

### 3.1 Problème de complétion de données

Nous considérons le problème de Laplace sur le cylindre  $\Omega$  de longueur  $a$  et de section  $\mathcal{O}$  tel que :  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O}$  défini dans [4] et [1]. Soit  $\Sigma = ]0, a[ \times \partial\mathcal{O}$  la frontière latérale du cylindre. On considère que la solution est nulle sur cette partie du domaine. On note  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_a$  les faces du cylindre telles que  $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$  et  $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$  et on désigne  $x$  la coordonnée qui décrit l'axe du cylindre entre ces deux surfaces. Les données de Cauchy de notre problème sont connues sur la surface en  $x = 0$  :  $u = T$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = \Phi$  sur  $\Gamma_0$  (avec  $n$  la normale sortante par rapport à la surface considérée). Notre problème s'écrit alors :

$$(P^0) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u = T, \quad \nabla u \cdot n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous cherchons à déterminer les conditions de Dirichlet et de Neumann sur la surface en  $x = a$  qui complètent le problème  $(P^0)$ , c'est-à-dire déterminer les données de potentiel  $t$  et sa dérivée  $\phi$  sur la surface  $\Gamma_a$  tels que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u = T, \quad \nabla u \cdot n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = t, \quad \nabla u \cdot n = \phi & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad (3.2)$$

On suppose que les données  $T$  et  $\Phi$  sont compatibles, c'est-à-dire qu'elles conduisent à une solution sur tout le domaine  $\Omega$  (ce n'est pas forcément le cas à cause des erreurs qui peuvent apparaître quand on modélise et discrétise le modèle ou bien quand on effectue les mesures de potentiel à la surface du torse dans le cas du problème en ECG) [3].

## 3.2 Complétion des données comme problème de contrôle optimal

Pour le problème de completion des données, on va utiliser la méthode anadromique décrite dans [5] et que nous avons rappelé dans le chapitre précédent.

Le problème de complétion des données ( $P^0$ ) est transformé en problème de contrôle optimal. Il comprend deux états, chacun vérifiant une des conditions aux limites sur  $\Gamma_0$  et se traduit par deux problèmes mixtes bien posés suivants :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1 = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u_1 \cdot n = \eta & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_2 = \tau & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla u_2 \cdot n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

où  $\eta$  et  $\tau$  sont les paramètres de contrôle.

On définit ensuite une fonctionnelle d'énergie sur les paramètres de contrôle :

$$E(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 dx dy \quad (3.3)$$

En cherchant à minimiser cette fonctionnelle, on détermine les valeurs des paramètres  $\eta$  et  $\tau$  pour lesquelles  $u_1 = u_2$ , et ainsi déterminer  $\phi$  et  $t$  puisque dans ce cas là  $(\phi, t) = (\eta, \tau)$  sur  $\Gamma_a$ . Fonctionnellement, si les données de Cauchy  $(\Phi, T)$  sont compatibles, on a :

$$(\phi, t) = \arg \min \{E(\eta, \tau); (\eta, \tau) \in U_{ad}\} \quad (3.4)$$

où  $U_{ad} = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$  l'ensemble des solutions admissibles.

Les espaces  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)'$  et  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$  sont respectivement munis des des produits scalaires suivants :

$$(\psi, \eta) = \int_{\Gamma_a} \psi (-\Delta_{\Gamma_a})^{\frac{1}{4}} \eta$$

$$(\tau, h) = \int_{\Gamma_a} \tau (-\Delta_{\Gamma_a})^{\frac{1}{4}} h$$

Le problème de minimisation est instable numériquement, en effet l'existence et l'unicité de la solution sont liées à la compatibilité des données  $(\Phi, T)$ . Nous regularisons alors la fonctionnelle  $E(\eta, \tau)$  par une régularisation de Tikhonov classique. Notons  $E_\varepsilon$  cette régularisation, nous avons :

$$E_\varepsilon(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 + \varepsilon \left( \|\eta\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)'}^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 \right)$$

L'expression du gradient de la fonction coût régularisée est donnée par :

$$\left( \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial \eta}, \psi \right) = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2) \nabla u_1^* dx dy + 2\varepsilon (\psi, \eta)$$

$$\left( \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial \tau}, h \right) = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2) \nabla u_2^* dx dy + 2\varepsilon (\tau, h)$$

où  $\Delta_{\Gamma_a}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\Gamma_a$  (cf [1]), et  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  solutions des systèmes respectifs :

$$\begin{cases} \Delta u_1^* = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1^* = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1^* = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u_1^*.n = \psi & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2^* = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_2^* = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_2^* = h & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla u_2^*.n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

On utilise alors l'écriture du gradient en passant par les variables de l'état adjoint associé  $v_1$  et  $v_2$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial \eta}, \psi \right) &= -2 \int_{\Omega} (v_1 - \varepsilon(-\Delta_{\Gamma_a})^{-\frac{1}{2}} \eta) \psi dy \\ \left( \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial \eta}, h \right) &= -2 \int_{\Omega} (\nabla v_2.n - \varepsilon(-\Delta_{\Gamma_a})^{\frac{1}{2}} \tau) h dy \end{aligned}$$

avec  $v_1$  et  $v_2$  solution de :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla v_1.n = \nabla u_2.n - \eta & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_2 = u_1 - \tau & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla v_2.n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Etant donné que le contrôle optimal est caractérisé par  $\nabla E_\varepsilon(\varphi, t) = 0$ , ceci implique :

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma_a})^{\frac{1}{2}} v_1|_{\Gamma_a} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma_a})^{-\frac{1}{2}} \nabla v_2.n|_{\Gamma_a}$$

On obtient alors le système optimal suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_1 = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u_1.n = \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma_a})^{\frac{1}{2}} v_1|_{\Gamma_a} & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_2 = \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma_a})^{-\frac{1}{2}} \nabla v_2.n|_{\Gamma_a} & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla u_2.n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla v_1.n = \nabla u_2.n - \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma_a})^{\frac{1}{2}} v_1|_{\Gamma_a} & \text{sur } \Gamma_a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta v_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_2 = 0 & \text{sur } \Sigma \\ v_2 = u_1 - \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\Gamma_a})^{-\frac{1}{2}} \nabla v_2.n|_{\Gamma_a} & \text{sur } \Gamma_a \\ \nabla v_2.n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

On remarque qu'il y a un couplage entre état et état adjoint à partir les conditions aux limites sur  $\Gamma_a$ .

### 3.3 Méthode de plongement invariant pour le système d'optimalité

Dans cette partie, nous appliquons la méthode de plongement invariant présentée dans le chapitre 2, aux systèmes d'optimalité (3.5). Et à l'aide de cette méthode nous explicitons la fonction coût en fonction des contrôles  $\eta$  et  $\tau$ .

Nous plongeons les problèmes (3.5) dans une famille de problèmes similaires définis sur  $\Omega_s$ , sous domaines de  $\Omega$ . Pour cela nous définissons  $\Gamma_s : \{x = s\} \times \mathcal{O}$  une frontière mobile qui se déplacera de  $x = 0$  vers  $x = a$ . A chaque position  $x = s$ , on peut ainsi définir un sous domaine  $\Omega_s$ , de surface latérale  $\Sigma_s$  et délimitée par les surfaces  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_s$ . Sur cette dernière frontière, nous imposons une condition aux limites de type :

- Neumann pour le problème sur  $u_1 : \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_s} = \alpha$ .
- Dirichlet pour le problème sur  $u_2 : (u_2^s)|_{\Gamma_s} = \beta$ .

Chacun des positions successives de  $\Gamma_s$  permet de définir un sous domaine  $\Omega_s$  auquel est associé un problème de type (3.5), aboutissant ainsi aux deux familles de problèmes :

$$(\mathcal{P}_1^s) \begin{cases} \Delta u_1^s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ u_1^s = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ u_1^s = T & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u_1^s \cdot n = \alpha & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2^s) \begin{cases} \Delta u_2^s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ u_2^s = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ u_2^s = \beta & \text{sur } \Gamma_s \\ \nabla u_2^s \cdot n = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

C'est la résolution de ces deux familles de problèmes, symbolisant le mouvement de la frontière  $\Gamma_s$  le long de l'axe  $[0, a]$  et donc le transport des données de Dirichlet et Neumann depuis la surface  $\Gamma_0$  vers  $\Gamma_a$ , qui permet de déterminer les données manquantes sur cette dernière surface.

#### 3.3.1 Application Dirichlet-Neumann

Nous considérons la famille de problèmes  $(\mathcal{P}_2^s)$  de (3.7). Pour tout  $s \in ]0, a[$ , on définit :

- l'application Dirichlet-Neumann, d'opérateur  $P$  qui dépend de  $x$ , et telle que

$$P(x = s)\beta = \frac{\partial \gamma_s}{\partial x}|_{\Gamma_s},$$

- un terme de résidu associé à  $P$ ,  $w_2$ , qui dépend aussi de  $x$  et tel que  $w_2(x = s) = \frac{\partial \delta_s}{\partial x}$

avec  $\gamma_s$  et  $\delta_s$  respectivement solution de :

$$\begin{cases} \Delta \gamma_s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \gamma_s = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ \gamma_s = \beta & \text{sur } \Gamma_s \\ \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta \delta_s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \delta_s = 0 & \text{sur } \Sigma_s \\ \delta_s = 0 & \text{sur } \Gamma_s \\ -\frac{\partial \delta_s}{\partial x} = \Phi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

avec  $P(0) = 0$  et  $w_2(0) = -\Phi$ .

Alors par linéarité du problème  $(P_2^s)$  et en posant  $u_2^s = \gamma_s + \delta_s$ , nous avons :

$$\frac{\partial u_2^s}{\partial x} \Big|_{\Gamma_s} = P(s)\beta + w_2(s)$$

avec  $P(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})')$ . D'après le plongement invariant du chapitre 2, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} + P^2 &= -\Delta_y \quad P(0) = 0, \\ \frac{dw_2}{dx} + Pw_2 &= 0, \quad w_2(0) = -\Phi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nous résolvons ces deux équations dans le cadre du problème inverse, dans le sens  $0 \rightarrow a$  pour déterminer  $P(a)$  et  $w_2(a)$ . Dans le cadre du problème direct on suppose connaître la donnée de potentiel sur  $\Gamma_a$ . D'après le chapitre 2, on a :

$$\frac{du_2}{dx} = Pu_2 + w_2, \quad u_2(a) = t \quad (3.9)$$

L'opérateur  $P$  est auto-adjoint, continu et positif pour tout  $s \in ]0; a]$ .

### 3.3.2 Application Neumann-Dirichlet

En reprenant le même raisonnement,  $u_1$  vérifie :

$$u_1^s(s) = Q(s)\alpha + w_1(s) \quad (3.10)$$

$Q(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})')$ .

On considère le plongement invariant pour  $x \leq s$ , nous avons :

$$u_1^s(x) = Q(s) \frac{du_1^s}{dx}(x) + w_1(x) \quad (3.11)$$

D'après le plongement invariant retrograde du chapitre 2, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} - Q\Delta_y Q &= I \quad Q(0) = 0, \\ \frac{dw_1}{dx} - Q\Delta_y w_1(x) &= 0, \quad w_1(0) = T \end{aligned} \quad (3.12)$$

et

$$u_1 = Q \frac{du_1}{dx}(x) + w_1, \quad u_1(a) = Q(a)\eta + w_1(a) \quad (3.13)$$

## 3.4 Résolution du problème de contrôle optimal

Dans cette partie, nous allons faire un lien entre le problème de contrôle optimal utilisé pour transformer  $(P^0)$  et la méthode de plongement invariant. Pour se faire, nous cherchons à exprimer la fonction d'énergie  $E$  en fonction des contrôles  $\eta$  et  $\tau$  en utilisant les opérateurs  $P$ ,  $Q$  et les résidus  $w_2$  et  $w_1$ . Ceci nous permettra de déterminer  $\phi$  et  $t$  sans passer par la résolution de l'état adjoint. Dans toute la suite de cette section, nous notons  $P = P(a)$ ,  $Q = Q(a)$ ,  $w_1 = w_1(a)$  et  $w_2 = w_2(a)$ .

### 3.4.1 Résolution Sans régularisation

On définit la matrice d'opérateurs  $A$  par :

$$A = \begin{pmatrix} Q & -QP \\ -PQ & P \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Notons  $[\eta; \tau]$  le vecteur ligne de composants  $\eta$  et  $\tau$ .

#### Proposition

La fonction coût  $E$  s'écrit sous la forme suivante :

$$E(\eta, \tau) = C + [\eta, \tau]A[\eta, \tau]' - 2 \int_{\Gamma_a} (w_1 P \tau + Q w_2 \eta) dy$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\eta$  et  $\tau$ . Si un minimum  $(\phi, t)$  de  $E$  est atteint, il satisfait :

$$A[\phi, t]' = [Qw_2, Pw_1]'. \quad (3.15)$$

Pour la preuve de cette proposition, voir [4].

Pour déterminer la solution du problème de contrôle optimal, nous devons inverser le système matriciel (3.15). Ce système est aussi équivalent à :

$$(I - QP)t = Qw_2 + w_1 \quad \text{et} \quad (I - PQ)\phi = Pw_1 + w_2 \quad (3.16)$$

Dans le cas cylindrique, les opérateurs  $P$  et  $Q$  commutent. Notons par :

$$R = I - PQ = I - QP \quad (3.17)$$

l'opérateur d'interface, qui permet de passer aux données  $\phi$  et  $t$  sur  $\Gamma_a$ .

Etant donné le caractère mal-posé de notre problème, nous allons pouvoir utiliser des méthodes de régularisation pour obtenir une solution acceptable à notre problème. Pour ce faire, nous allons considérer deux régularisations différentes et voir comment cela se traduit sur la formulation matricielle équivalente.

### 3.4.2 Résolution avec régularisation

#### Première régularisation

Une première régularisation d'après [4] donne la relation suivante pour déterminer  $t$  :

$$(R + \varepsilon I)t = Qw_2 + w_1 \implies R_\varepsilon t = Qw_2 + w_1 \quad (3.18)$$

avec  $R_\varepsilon$  l'opérateur d'interface associé et  $\varepsilon$  le paramètre de contrôle optimal.

## Deuxième régularisation

La seconde régularisation du problème de contrôle optimal d'après [4] et [1] à partir de la fonction coût est donnée par :

$$E_{\varepsilon\varepsilon}(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 dx dy + 2\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla u_2 dx dy \quad (3.19)$$

On définit la matrice  $A_{\varepsilon\varepsilon}$  telle que :

$$\begin{pmatrix} Q & -(1-\varepsilon)QP \\ -(1-\varepsilon)PQ & P \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

La solution du problème de contrôle optimal régularisé est donnée par :

$$A_{\varepsilon\varepsilon}[\phi, t]' = (1-\varepsilon)[Qw_2, Pw_1]'$$

qui est bien posé pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. Donc la forme régularisée de l'opérateur d'interface correspondant est :

$$R_{\varepsilon} = (I - (1-\varepsilon)^2 PQ).$$

## 3.5 Résultats numériques

Nous allons dans cette partie, présenter des résultats de simulations numériques pour la résolution du problème de complétion de données (3.5) sur un domaine rectangulaire en utilisant la méthode de plongement invariant. Notre but est de voir l'apport de la méthode anadromique.

Nous allons tester cette méthode pour un problème où une solution analytique est connue, ce qui nous permettra de comparer avec précision les résultats reconstruits et analytiques.

Nous considérons le problème ( $P^0$ ) dans  $\Omega = ]0, a[ \times ]0, \pi[$ . Les données de Cauchy sur  $\Gamma_0$  sont :  $\Phi = \sin(y)$  et  $T = \sin(y)$ . On cherche à reconstruire des données sur la surface  $\Gamma_a$ . Alors,

- la fonction  $u(x, y) = e^x \sin(y)$  est solution du problème,
- les données à compléter sur  $\Gamma_a$  sont :  $\phi_{theo} = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = e^a \sin(y)$   
et  $t_{theo} = u(a, y) = e^a \sin(y)$ .

Nous utilisons une méthode de différences finies pour la résolution numérique de (3.8) et (3.12). Pour cela, on définit  $n$  comme le nombre de points suivant la direction du plongement et  $p$  le nombre de points suivant la direction transverse. Le domaine  $\Omega$  est alors maillé suivant la grille de points  $a_{ij} = (ih, jk)$  avec  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p, n, p \in \mathbb{N}$  et on définit  $u(a_{ij}) = u(ih, jk) = u_{ij}$  comme la solution du problème en  $x = ih$  et  $y = jk$ .  $h = \frac{a}{n}$  et  $k = \frac{\pi}{p}$  sont respectivement les pas de maillage suivant la direction de plongement et la direction transverse.

### 3.5.1 Schémas numériques

Pour les schémas numériques, nous utilisons le schéma d'Euler et le schéma anadromique.

### Schéma 1 : Euler

On présente le schéma d'Euler explicite :

$$\begin{aligned}
 P_i &= P_{i-1}(I - hP_{i-1}) - h\Delta_y & P(0) &= 0 \\
 w_2^i &= (I - hP_{i-1})w_2^{i-1} & w_2(0) &= -\Phi \\
 Q_i &= Q_{i-1} + h(I + Q_{i-1}\Delta_y Q_{i-1}) & Q(0) &= 0 \\
 w_1^i &= (I + hQ_{i-1}\Delta_y)w_1^{i-1} & w_1(0) &= T
 \end{aligned}$$

### Résultats numériques 1

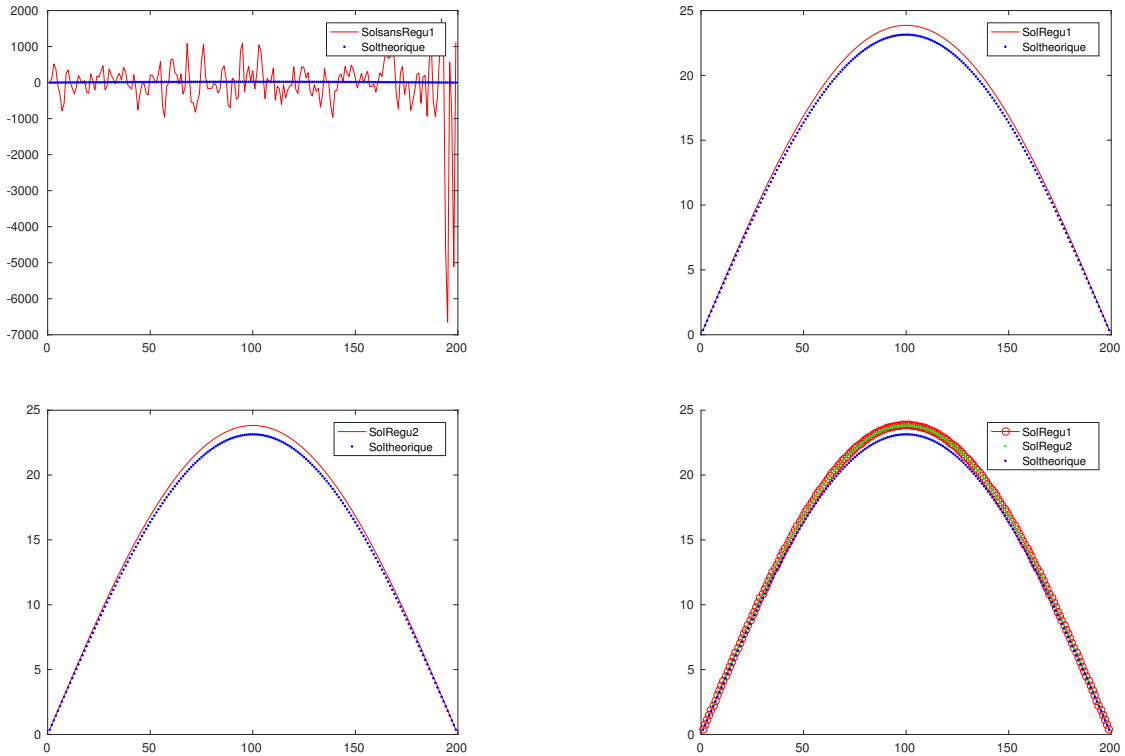


Figure 3.1 : La solution numérique du problème de complétion des données par le schéma d'Euler pour  $h = \frac{\pi}{400}$   $k = \frac{\pi}{200}$  avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  le paramètre de régularisation.

Les trois premières figures représentent l'évolution par rapport à la solution analytique respectivement de la solution numérique sans régularisation, de la solution numérique avec la première régularisation et de la solution numérique avec la deuxième régularisation. La quatrième figure est le recapitulatif des deux dernières figures.

### Schema 2 : Anadromique

Les équations en  $P$  et  $Q$  sont discrétisées avec le schéma anadromique et les équations en  $w_2$  et  $w_1$  par le schéma de Crank-Nicolson.



## Anadromique d'ordre 2

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (I + \frac{h}{2}P)^{-1}(P - \frac{h}{2}\Delta_y) \implies Z = (P_1 - \frac{h}{2}\Delta_y)(I + \frac{h}{2}P_1)^{-1} & P(0) &= 0 \\
 w_2^i &= (I + \frac{h}{2}P_i)^{-1}(I - \frac{h}{2}P_{i-1})w_2^{i-1} & w_2(0) &= -\Phi \\
 Q_1 &= (I - \frac{h}{2}Q\Delta_y)^{-1}(Q + \frac{h}{2}I) \implies Z = (Q_1 + \frac{h}{2}I)(I - \frac{h}{2}\Delta_y Q_1)^{-1} & P(0) &= 0 \\
 w_1^i &= (I - \frac{h}{2}P_i\Delta_y)^{-1}(I + \frac{h}{2}Q_{i-1}\Delta_y)w_1^{i-1} & w_1(0) &= T
 \end{aligned}$$

## Résultats numériques 2

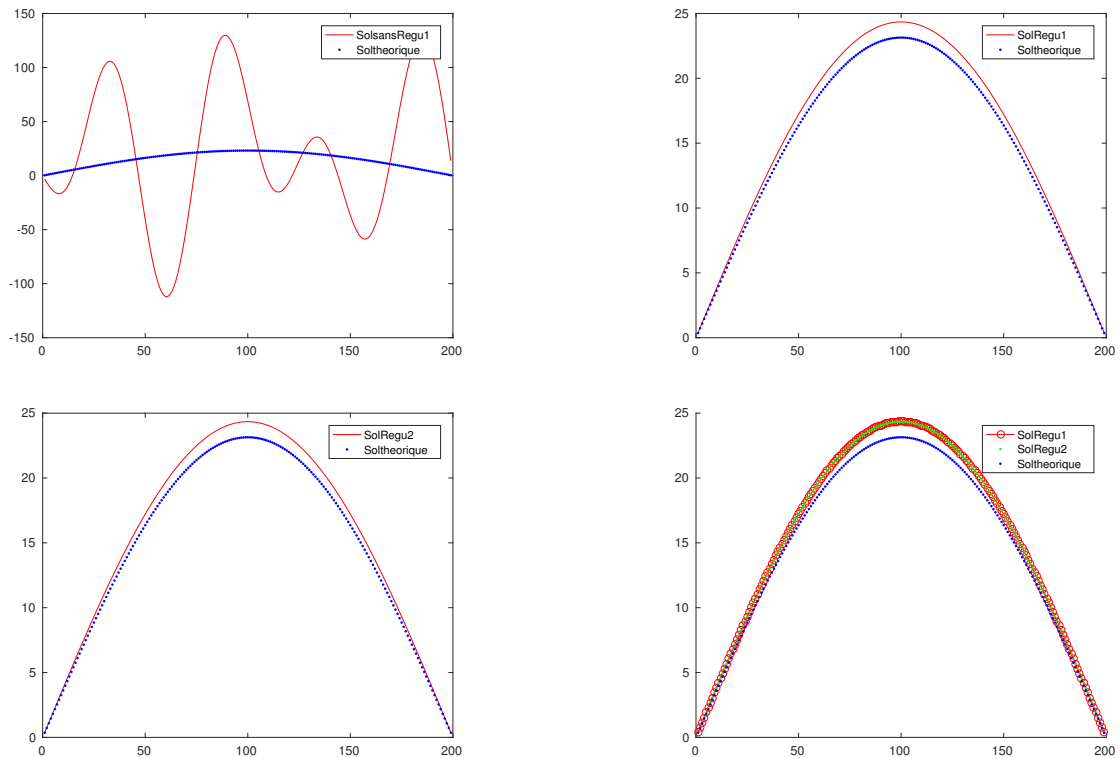


Figure 3.2 : La solution numérique du problème de complétion des données par le schéma Anadromique d'ordre 2 pour  $h = \frac{\pi}{10}$  et  $k = \frac{\pi}{200}$  avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  le paramètre de régularisation.

Les trois premières figures représentent l'évolution par rapport à la solution analytique respectivement de la solution numérique sans régularisation, de la solution numérique avec la première régularisation et de la solution numérique avec la deuxième régularisation. La quatrième figure est le recapitulatif des deux dernières figures.

## Anadromique d'ordre 4

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (I + \frac{1}{2}hP + \frac{1}{24}h^3\Delta_y P)^{-1}(P - \frac{1}{2}h\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y^2) \\
 Z &= (I + \frac{1}{2}hP_1 + \frac{1}{24}h^3\Delta_y P_1)^{-1}(P_1 - \frac{1}{2}h\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y^2) \\
 w_2^i &= (I + \frac{h}{2}P_i)^{-1}(I - \frac{h}{2}P_{i-1})w_2^{i-1} \\
 Q_1 &= (I - \frac{1}{2}hQ\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y Q\Delta_y)^{-1}(\frac{1}{2}hI + \frac{1}{24}h^3\Delta_y + Q) \\
 Z &= (I - \frac{1}{2}hQ_1\Delta_y - \frac{1}{24}h^3\Delta_y Q_1\Delta_y)^{-1}(\frac{1}{2}hI + \frac{1}{24}h^3\Delta_y + Q_1) \\
 w_1^i &= (I - \frac{h}{2}P_i\Delta_y)^{-1}(I + \frac{h}{2}Q_{i-1}\Delta_y)w_1^{i-1}
 \end{aligned}$$

Les équations en  $w_1$  et  $w_2$  sont discrétisées par le schéma de Crank-Nicolson.

## Résultats numériques 3

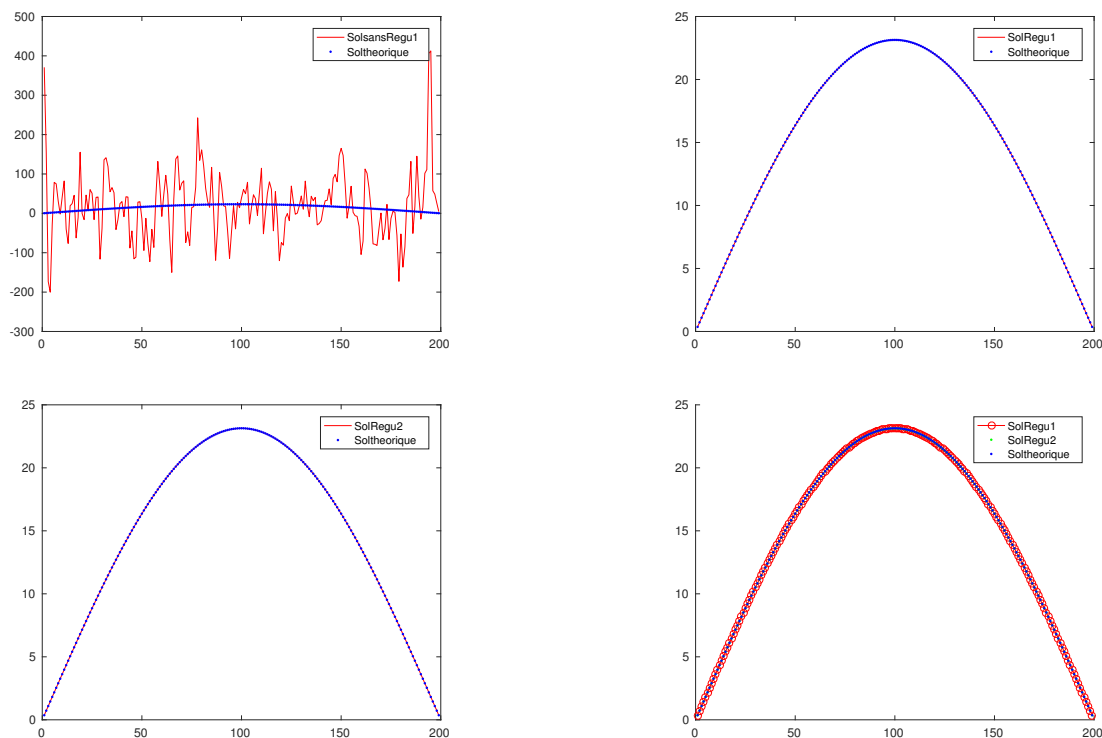


Figure 3.3 : La solution numérique du problème de complétion de données par le schéma Anadromique d'ordre 4 pour  $h = \frac{\pi}{116}$  et  $k = \frac{\pi}{200}$  avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  le paramètre de régularisation.

Les trois premières figures représentent l'évolution par rapport à la solution analytique respectivement de la solution numérique sans régularisation, de la solution numérique avec la première régularisation et de la solution numérique avec la deuxième régularisation. La quatrième figure est le recapitulatif des deux dernières figures.

Pour  $n < 116$  le schéma anadromique d'ordre 4 explose.

### 3.5.2 Schéma de Crank-Nicolson modifié

En utilisant le schéma de Crank-Nicolson modifié, on obtient les équations discrétisées suivantes :

$$\begin{aligned}
 P_i &= \left( I + \frac{h}{2} P_i \right)^{-1} \left( \left( I - \frac{h}{2} P_{i-1} \right) P_{i-1} - h \Delta_y \right) \quad \text{avec } P_i = 2P_{i-1} - P_{i-2}, \\
 Q_i &= \left( I - \frac{h}{2} Q_i \Delta_y \right)^{-1} \left( \left( I + \frac{h}{2} Q_{i-1} \Delta_y \right) Q_{i-1} + h I \right) \quad \text{avec } Q_i = 2Q_{i-1} - Q_{i-2}, \\
 w_2^i &= \left( I + \frac{h}{2} P_i \right)^{-1} \left( I - \frac{h}{2} P_{i-1} \right) w_2^{i-1}, \\
 w_1^i &= \left( I - \frac{h}{2} P_i \Delta_y \right)^{-1} \left( I + \frac{h}{2} Q_{i-1} \Delta_y \right) w_1^{i-1}.
 \end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants :

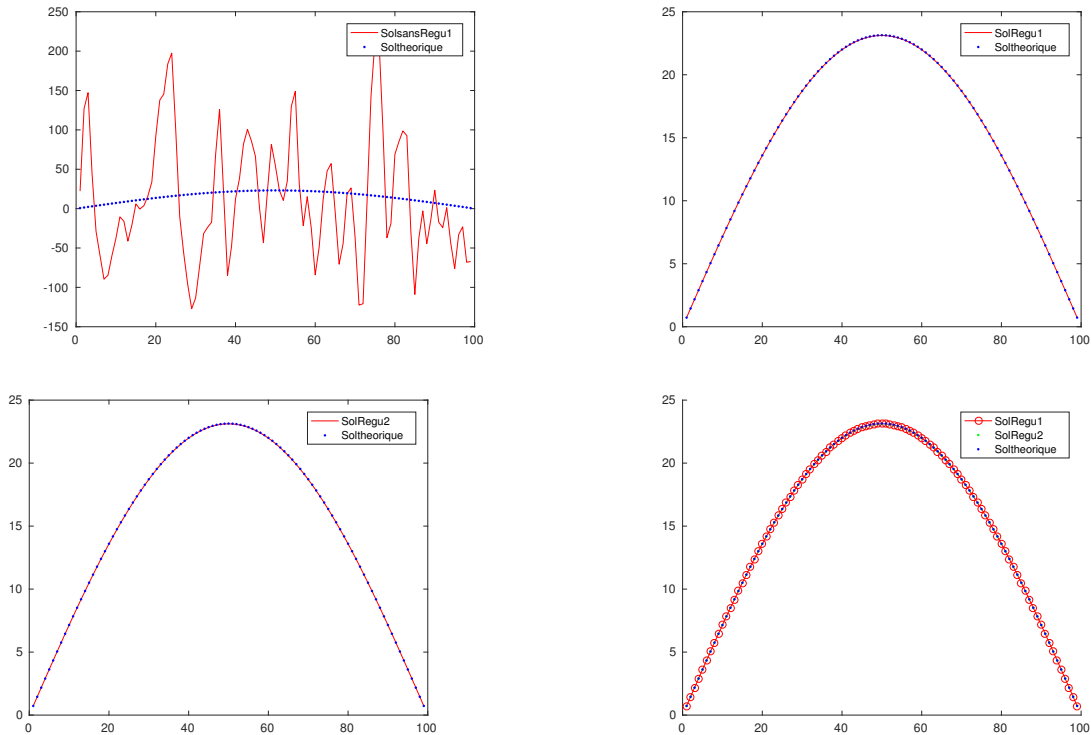


Figure 3.3 : La solution numérique du problème de complétion de données par le schéma Anadromique d'ordre 4 pour  $h = \frac{\pi}{200}$  et  $k = \frac{\pi}{100}$  avec  $\varepsilon = 10^{-6}$  le paramètre de régularisation.

Les trois premières figures représentent l'évolution par rapport à la solution analytique respectivement de la solution numérique sans régularisation, de la solution numérique avec la première régularisation et de la solution numérique avec la deuxième régularisation. La quatrième figure est le recapitulatif des deux dernières figures.

Pour  $n < 200$ , le schéma Crank-Nicolson modifié est instable.

### Etude de la convergence

Nous représentons ici les figures illustrant l'évolution des erreurs relatives en fonction de  $h$  pour le schéma d'Euler, le schéma anadromique d'ordre 2 et le schéma de Crank-Nicolson modifié, en fixant  $p = 100$  et en raffinant dans la direction de plongement :

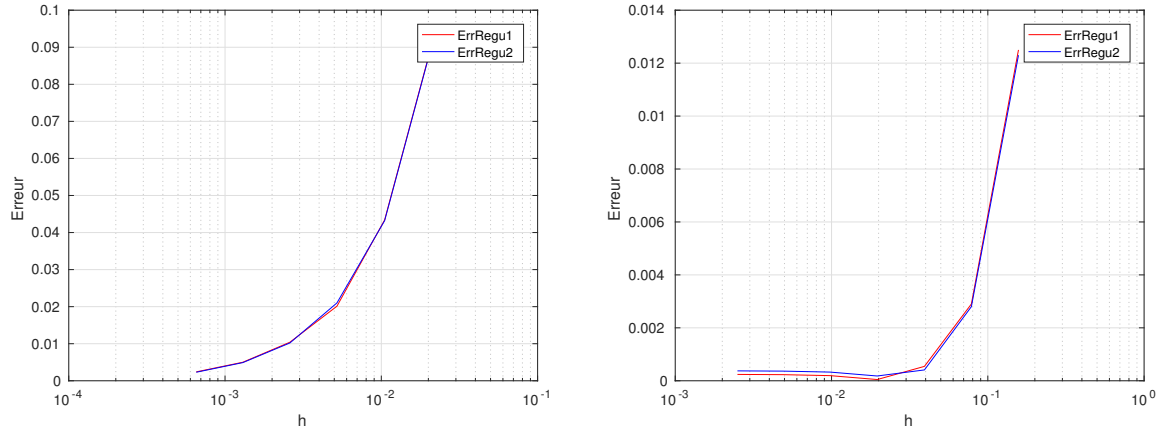


Figure 3.4 : L'évolution des erreurs relatives entre la solution analytique et la solution numérique en fonction de  $h$  avec le schéma d'Euler pour la figure de gauche et avec le schéma anadromique d'ordre 2 pour la figure de droite.

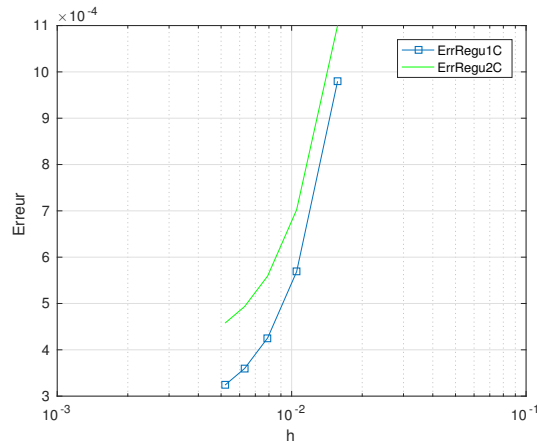


Figure 3.5 : L'évolution des erreurs relatives entre la solution analytique et la solution numérique en fonction de  $h$  avec le schéma de Crank-Nicolson modifié.

Nous remarquons que à partir d'une certaine valeur de  $n$ , les erreurs relatives entre la solution analytique et la solution numérique ne diminuent plus en raffinant dans la direction de plongement. Autrement dit, il reste une erreur due à la discrétisation en  $y$  seulement que l'on voit se manifester pour des très petites valeurs de  $h$ . C'est parce que la solution analytique est définie dans tout le domaine, donc portée par les deux directions alors que nous ne raffinons que dans une seule direction. Pour que les erreurs relatives continuent à diminuer, il nous faut raffiner dans les deux directions. Cela ne se remarque pas vite pour le schéma d'Euler et le schéma de Crank-Nicolson modifié parce que ces schémas sont stables pour des valeurs élevées de  $n$ . Donc il faut beaucoup raffiner pour pouvoir le remarquer.

### Tableau des erreurs relatives

Nous présentons ici le tableau des erreurs relatives entre la solution analytique et la solution numérique avec le schéma Anadromique et le schéma d'Euler.

h	Rég1 Eu	Rég2 Eu	Rég1 Ana2	Rég2 Ana2	Rég1 Ana4	Rég2 Ana4
0.3142	x	x	0.0521	0.0519	x	x
0.1571	x	x	0.0125	0.0123	x	x
0.0785	x	x	0.0029	0.0028	x	x
0.0395	x	x	0.00054352	0.0004954	0.00017532	0.00030910
0.0196	0.0842	0.0840	0.000046436	0.00018026	0.00022603	0.00035981
0.0098	0.0406	0.0404	0.00019364	0.00032762	0.00023873	0.00037250
0.0049	0.0198	0.0197	0.00023069	0.00036446	0.00024191	0.00037568
0.0025	0.0097	0.0096	0.00023990	0.00037367	0.00024270	0.00037647

Le x signifie que l'erreur explose. Nous avons fixé  $p = 100$  et le paramètre de régularisation  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Nous observons dans les trois cas que plus  $h$  est petit, c'est-à-dire que plus on raffine dans la direction de plongement, plus on obtient des résultats meilleurs (des erreurs relatives sont moins importantes). De plus, l'ordre des schéma est bien respecté, c'est-à-dire que les erreurs relatives sont divisées par 2 et par 4 respectivement pour le schéma d'Euler et le schéma anadromique d'ordre 2. Par contre, à partir d'une certaine valeur de  $n$  ( $n = 160$  pour le schéma anadromique d'ordre 2), les erreurs ne diminuent plus pour les raisons que nous avons évoquées sur la section étude de la convergence.

### 3.5.3 Comparaison Anadromique 2 Vs Crank-Nicolson modifié

Les résultats des erreurs relatives pour les deux schémas sont regroupés dans le tableau suivant :

n	Régu1 CNM	Régu2 CNM	Régu1 Anad	Régu2 Anad
200	0.00097968	0.0011	0.00011719	0.00025100
300	0.00056862	0.00070223	0.00018707	0.00032086
400	0.00042564	0.00055936	0.00021153	0.00034530
500	0.00035968	0.00049342	0.00022885	0.00035600
600	0.00032393	0.00045768	0.00022899	0.00036277

avec

- Régu1 CNM et Régu2 CNM sont les erreurs obtenues respectivement avec la régularisation 1 et la régularisation 2 pour le schéma Crank-Nicolson modifié;
- Régu1 Anad et Régu2 Anad sont les erreurs obtenues respectivement avec la régularisation 1 et la régularisation 2 pour le schéma anadromique d'ordre 2.

Nous remarquons bien que les erreurs obtenues avec le schéma anadromique sont moins importantes que celles obtenues avec Crank-Nicolson modifié. Ceci prouve que le schéma anadromique discrétise au mieux les opérateurs  $P$  et  $Q$ , c'est-à-dire que c'est le schéma le plus adapté pour la discrétisation des équations de Riccati.

# Chapitre 4

## Méthode de factorisation dans le cas tridimensionnel

Dans cette section, nous factorisons un problème aux limites pour lequel le domaine et la famille de surfaces du plongement invariant sont sphériques (cf [3],[1]). Nous considérons  $a = 1$ .

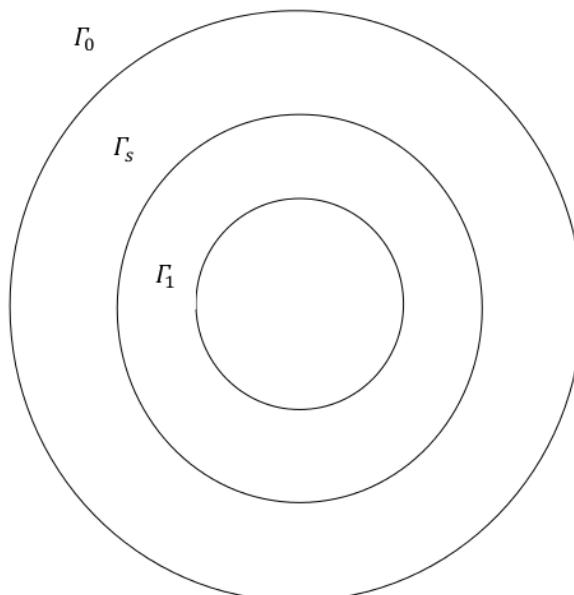


Figure 4.1 : Domaine du problème et sous-domaines pour le plongement invariant direct.

Soient  $\tilde{\Omega}_0$  et  $\tilde{\Omega}_1$  de  $\mathbb{R}^3$  de bord respectivement  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $\overline{\tilde{\Omega}_1} \subset \tilde{\Omega}_0$ . Soit  $\{\Gamma_s\}_{s=0}^{s=1}$  une famille de surfaces de classe  $\mathcal{C}^1$  qui dépendent de  $s$  et qui soient le bord respectivement des ouverts de la famille  $\tilde{\Omega}_s$  avec :

$$\overline{\tilde{\Omega}_s} \subset \tilde{\Omega}_{s'} \quad \text{pour } 0 \leq s' < s \leq 1.$$

Le domaine  $\Omega$  est choisit comme :  $\Omega = \tilde{\Omega}_0 \setminus \overline{\tilde{\Omega}_1}$  et on définit  $\Omega_s = \tilde{\Omega}_s \setminus \overline{\tilde{\Omega}_1}$ .

Soit

$$\begin{aligned} \Phi_s^{s'} : \Gamma_s &\rightarrow \Gamma_{s'} \quad \mathcal{C}^1 \text{ difféomorphisme} \\ x &\mapsto x'(x) = \Phi_s^{s'}(x) = x + \int_s^{s'} V(x, y) dy \end{aligned}$$

Nous considérons pour référence  $\Gamma_0$  et soit  $t$  un système de coordonnées sur  $\Gamma_0$  défini localement par cartes. On a ainsi le système de coordonnées  $(s, t)$ . On notera  $\alpha(x)$  et  $V_{\Gamma_s}(x)$  les projections sur respectivement la normale extérieure à  $\Omega_s$  et l'espace linéaire tangent à  $\Gamma_s$  en  $x \in \Gamma_s$  de  $V(x) = \frac{d}{dx} \Phi_0^s(x)$ .

On note  $\nabla_{\Gamma_s} u$  la projection de  $\nabla u$  sur l'espace tangent à  $\Gamma_s$  en  $x \in \Gamma_s$ . Nous savons que le gradient tangentiel  $\nabla_{\Gamma_s}$  est indépendant du système de cartes locales pour la variété  $\Gamma_s$ . D'après la définition de  $\alpha$  et  $V_{\Gamma_s}$  et en utilisant la définition de la dérivée particulaire de  $u(x', s)$ , on a :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{dx'}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s} + V \nabla u.$$

Pour  $\frac{du}{ds} = 0$ , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -V \nabla u = - \begin{pmatrix} -\alpha \\ -V_{\Gamma_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \nabla_{\Gamma_s} u \end{pmatrix} = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u$$

avec  $\alpha > 0$  et  $V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u > 0$ .

## 4.1 Formulation du problème : opérateur Dirichlet-Neumann

Nous allons dans cette partie appliquer la méthode de plongement invariant pour le problème inverse en électrocardiographie dans un domaine tridimensionnel quelconque. On considère le problème initial  $(\mathcal{P}_0)$  suivant :

$$(\mathcal{P}_0) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x} |_{\Gamma_0} = u_0 & \text{et } u |_{\Gamma_0} = u_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $u_0$  et  $u_1$  sont respectivement les conditions de Dirichlet et Neumann sur la surface  $\Gamma_0$ . On cherche à construire le potentiel sur l'épicarde en  $\Gamma_1$ . Pour cela, le plongement invariant permet d'écrire la première famille de sous problèmes :

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x} |_{\Gamma_s} = u_0 & \text{et } u |_{\Gamma_s} = h \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $h$  est la donnée de potentiel sur la surface  $\Gamma_s$ . Ceci nous permet de définir la famille de surfaces  $\{\Gamma_s\}_{s=0}^{s=1}$  associée à la coordonnée de plongement  $s$  telle que  $0 \leq s \leq 1$ ,  $s = 0$  correspondant à la surface du torse et  $s = 1$  à l'épicarde.

Soit  $s_0$  tel que  $0 \leq s_0 \leq 1$  et  $v \in \Omega_{s_0}$  une fonction test. D'après la formule de Green, on a la formulation variationnelle suivante du problème (4.2) :

$$\int_{\Omega_{s_0}} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega_{s_0}} f v dx + \int_{\Gamma_{s_0}} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma_{s_0} + \int_{\Gamma_0} u_0 v d\Gamma_0. \quad (4.3)$$

Nous savons que :

$$\nabla u \cdot \nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \nabla_{\Gamma_s} u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial n} \\ \nabla_{\Gamma_s} v \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} + \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v.$$

Comme  $\frac{\partial u}{\partial s} = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial s} - V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u \right)$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} - V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u \right) \left( \frac{\partial v}{\partial s} - V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left( (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u)(V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) - \frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\int_{\Omega_{s_0}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_0^{s_0} \int_{\Gamma_s} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left( (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u)(V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) - \frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \right) + \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \right\} \alpha \, ds \, d\Gamma_s$$

Comme  $\frac{\partial u}{\partial s} = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u$ , on a :  $\frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) + (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u)(V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v)$ .

Donc,  $(V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u)(V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) - \frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) = -\alpha \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v)$ .

Ainsi,

$$\int_{\Omega_{s_0}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_0^{s_0} \int_{\Gamma_s} \left( \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \right) \, ds \, d\Gamma_s$$

Posons  $s_0 = s$  :

$$\int_{\Omega_s} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_0^s \int_{\Gamma_s} \left( \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \right) \, ds \, d\Gamma_s$$

et

$$\frac{d}{ds} \int_{\Omega_s} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma_s} \left( \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \right) \, d\Gamma_s.$$

On relie la dérivée normale sur  $\Gamma_s$  à la donnée  $h$  sur la surface par :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle_{\Gamma_s} = \langle P(s)h + w, v \rangle_{\Gamma_s} \quad (4.4)$$

Pour une résolution de  $\mathcal{P}_{s,h}$  on a donc :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_s}, v \right\rangle_{\Gamma_s} = \langle P(s)u \Big|_{\Gamma_s} + w, v \rangle_{\Gamma_s}. \quad (4.5)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Omega_s} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Gamma_s} (\alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v - (P(s)u + w(s))(V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v)) \, d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \, d\Gamma_s - \int_{\Gamma_s} P(s)u (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \, d\Gamma_s - \int_{\Gamma_s} w(s) V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \, d\Gamma_s. \end{aligned}$$

Comme  $v$  ne dépend pas de  $s$ , alors l'équation (4.3) devient :

$$\int_{\Gamma_s} \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \, d\Gamma_s - \int_{\Gamma_s} P(s)u (V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v) \, d\Gamma_s - \int_{\Gamma_s} w(s) V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \, d\Gamma_s = \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma_s.$$

Rappelons que pour :

$$I(s) = \int_{\Gamma_s} g(x, s) n \, d\Gamma_s,$$



la dérivée particulière de l'intégrale de surface  $I(s)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(s) &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{dg}{ds} + \operatorname{div}(V)g - \nabla V g \right) nd\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{dg}{ds} + (\operatorname{div}(V) - \nabla V)g \right) nd\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{dg}{ds} + \beta g \right) nd\Gamma_s\end{aligned}$$

avec  $\beta = \operatorname{div}(V) - \nabla V$  qui est lié à la variation en  $s$  de l'élément d'intégration  $d\Gamma_s$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma_s &= \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} (P(s)u + w(s))v d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \frac{d}{ds} (P(s)u + w(s))v d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \beta (P(s)u + w(s))v d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{dP}{ds}u + P\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \right) v d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \beta P u v d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \beta w v d\Gamma_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma_s &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{dP}{ds}u + P\alpha (Pu + w) + P V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u + \frac{dw}{ds} \right) v d\Gamma_s \\ &+ \int_{\Gamma_s} \beta P u v d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \beta w v d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{dP}{ds}u + P\alpha Pu + P V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u + \beta Pu \right) v d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} \left( P\alpha w + \frac{dw}{ds} + \beta w \right) v d\Gamma_s\end{aligned}$$

En reprenant l'argument de "trajectoire arbitraire" du plongement invariant utilisé dans le chapitre 2 pour déterminer l'équation de Riccati vérifiée par l'opérateur Dirichlet-Neumann  $P$  et le résidu  $w_2$  on a :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dP}{ds}u, v \right\rangle_{\Gamma_s} + \langle P\alpha Pu, v \rangle_{\Gamma_s} + \langle P V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u, v \rangle_{\Gamma_s} + \langle \beta Pu, v \rangle_{\Gamma_s} &= \langle \alpha \nabla_{\Gamma_s} u, \nabla_{\Gamma_s} v \rangle_{\Gamma_s} \quad (4.6) \\ \left\langle \frac{dw_2}{ds}, v \right\rangle_{\Gamma_s} + \langle P\alpha w_2, v \rangle_{\Gamma_s} + \langle \beta w_2, v \rangle_{\Gamma_s} &= -\langle w_2, V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} v \rangle_{\Gamma_s}\end{aligned}$$

avec  $P(0) = 0$  et  $w_2(0) = -u_0$ .

## 4.2 Formulation du problème : opérateur Neumann-Dirichlet

Nous considérons maintenant la famille de problèmes suivante :

$$(\mathcal{P}'_{s,h}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_s} = h & \text{et } u|_{\Gamma_0} = u_1. \end{cases}$$

D'après le plongement invariant :  $u|_{\Gamma_s} = Q(s) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_s} + w(s)$ .

En prenons comme fonction test  $Q(s)v$  où  $v$  est une fonction arbitraire sur  $\Gamma_s$  qui est transportée par le champ de vitesse  $V$  quand  $s$  varie. En appliquant la formule de Green, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{s_0}} \nabla u \nabla(Qv) d\Omega_{\Omega_{s_0}} &= \int_{\Gamma_{s_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(Qv) d\Gamma_{s_0} + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n}(Qv) d\Gamma_0 \\ &= \int_{\Gamma_{s_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(Qv) d\Gamma_{s_0} \quad \text{car } Q(0) = 0. \end{aligned}$$

Evaluons l'expression  $\nabla u \nabla(Qv)$  :

$$\nabla u \nabla(Qv) = \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial n} + \nabla_{\Gamma_s} u \nabla_{\Gamma_s}(Qv).$$

$$\text{Or } \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial s} - V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \right) \text{ et } \frac{\partial(Qv)}{\partial n} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right)$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial n} = \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) - V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \frac{\partial(Qv)}{\partial s} + V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \cdot V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right)$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} &= \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \right) \frac{\partial(Qv)}{\partial s} \\ &= \alpha \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} + (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u) \frac{\partial(Qv)}{\partial s} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial n} = \frac{1}{\alpha^2} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) + V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u \cdot V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right).$$

En écrivant :

$$\frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) + (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u) (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv))$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial s} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) - (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} u) (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv))$$

Ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial n} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) \right).$$

L'expression  $\nabla u \nabla(Qv)$  devient :

$$\nabla u \nabla(Qv) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) + \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Omega_{s_0}} \nabla u \nabla(Qv) dx &= \int_{\Gamma_{s_0}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) + \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right) d\Gamma_{s_0} \\ &= \int_{\Gamma_{s_0}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial n} (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) + \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s}(Qv) + \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \cdot \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right) d\Gamma_{s_0} \end{aligned}$$

Posons maintenant  $\frac{\partial u}{\partial n} = w^1$  et pour  $s_0 = s$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Omega_s} \nabla u \nabla(Qv) dx &= \int_{\Gamma_s} \left( w^1 \frac{\partial(Qv)}{\partial s} - w^1 (V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv)) \right) d\Gamma_s \\ &+ \int_{\Gamma_s} \left( \alpha \nabla_{\Gamma_s}(Qw^1) \nabla_{\Gamma_s}(Qv) + \alpha \nabla_{\Gamma_s} w \cdot \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \right) d\Gamma_s. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} \frac{\partial u}{\partial n}(Qv) d\Gamma_s &= \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} (u - w)v d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \left( \frac{\partial}{\partial s}(u - w) + \beta(u - w) \right) d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \left( \alpha w^1 + V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qw^1 + w) - \frac{dw}{ds} + \beta Qw^1 \right) v d\Gamma_s \end{aligned}$$

En reprenant l'argument de "trajectoire arbitraire" du plongement invariant utilisé dans le chapitre 2 pour déterminer l'équation de Riccati vérifiée par l'opérateur Neumann-Dirichlet  $Q$  et le résidu  $w_1$  on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dQ}{ds} w^1, v \right\rangle_{\Gamma_s} - \langle w^1, V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \rangle_{\Gamma_s} &= \langle V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qw^1), v \rangle_{\Gamma_s} \\ &- \langle \alpha \nabla_{\Gamma_s}(Qw^1), \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \rangle_{\Gamma_s} + \langle \beta Qw^1, v \rangle_{\Gamma_s} + \langle \alpha w^1, v \rangle_{\Gamma_s} \quad (4.7) \\ \left\langle \frac{dw_1}{ds}, v \right\rangle_{\Gamma_s} - \langle V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} w_1, v \rangle_{\Gamma_s} &+ \langle \alpha \nabla_{\Gamma_s} w_1, \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \rangle_{\Gamma_s} = 0 \end{aligned}$$

avec  $Q(0) = 0$  et  $w_1(0) = u_1$ .

### 4.3 Discrétisation des équations par éléments finis

Nous allons discrétiser l'opérateur  $P$ . Soit  $(\varphi_j)_1^N$  la base des fonctions de la forme de l'espace aux éléments finis. Dans cette base, sur la surface  $\Gamma_s$  :

- l'opérateur  $P$  est approché par  $P_h$  tel que  $P_h \varphi_j = \sum_{i=1}^N P_{h,ij} \varphi_i$ ,
- la matrice de raideur définie par  $K_{ij} = \int_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} \varphi_i \nabla_{\Gamma_s} \varphi_j d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s} \varphi_j \nabla_{\Gamma_s} \varphi_i d\Gamma_s$ ,
- la matrice de masse définie par  $M_{ij} = \int_{\Gamma_s} \varphi_i \varphi_j d\Gamma_s = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\Gamma_s} = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_s} = M_{ji}$ .

On a la propriété suivante :  $(MP_h)_{kj} = (MP_h)_{jk}$ . En effet,

$$\langle P_h \varphi_j, \varphi_k \rangle_{\Gamma_s} = \left\langle \sum_{i=1}^N P_{h,ij} \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_{\Gamma_s} = \sum_{i=1}^N P_{h,ij} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_{\Gamma_s} = \sum_{i=1}^N P_{h,ij} M_{ik} = \sum_{i=1}^N M_{ki} P_{h,ij} = (MP_h)_{kj}$$

De plus,

$$\langle P_h \varphi_j, \varphi_k \rangle_{\Gamma_s} = \langle \varphi_j, P_h \varphi_k \rangle_{\Gamma_s} = \left\langle \varphi_j, \sum_{i=1}^N P_{h,ik} \varphi_i \right\rangle_{\Gamma_s} = \sum_{i=1}^N P_{h,ik} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{\Gamma_s} = \sum_{i=1}^N P_{h,ik} M_{ji} = (MP_h)_{jk}$$

Ainsi, on a bien l'égalité. De même, si on pose  $u_h$  la fonction qui approche  $u$  telle que  $u_h = \sum_i u_i \varphi_i$ , on a la relation suivante :

$$\langle u_h, \varphi_j \rangle_{\Gamma_s} = \left\langle \sum_i u_i \varphi_i, \varphi_j \right\rangle_{\Gamma_s} = \sum_i u_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\Gamma_s} = \sum_i u_i M_{ij} = \sum_i M_{ji} u_i = (Mu_h)_j$$

## Opérateurs P et résidu $w_2$

Nous allons maintenant discrétiser les différents termes des de (4.6). Pour éviter une certaine lourdeur, nous noterons par  $P$  et  $w_2$  les approximations de l'opérateur et du résidu dans la base des éléments finis. On pose  $u = e_i$  et  $v = e_j$  pour les fonctions tests.

- $\langle \frac{dP}{ds}u, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \frac{dP}{ds}e_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} = \left( M \frac{dP}{ds} \right)_{ij}$ .
- $\langle \alpha P u, P v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \alpha P e_i, P e_j \rangle_{\Gamma_s} = (P^T M^\alpha P)_{ij}$  avec  $P^T$  la transposée de  $P$ .

On pose  $M_{ij}^\alpha = (e_i, e_j)|_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \alpha e_i e_j d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} e_i \alpha e_j d\Gamma_s = (e_i, \alpha e_j)|_{\Gamma_s} = M_{ji}^\alpha$ .

- $\langle P V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} u, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle P V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} e_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} = (BP)_{ij}$  avec  $B_{ij} = \langle V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} e_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} \neq B_{ji}$ .
- $\langle u, P V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} v \rangle_{\Gamma_s} = \langle e_i, P V_{\Gamma_s} \cdot \nabla_{\Gamma_s} e_j \rangle_{\Gamma_s} = (BP)_{ji} = (BP)_{ij}^T$ .
- $\langle \beta P u, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \beta P e_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} = (M^\beta P)_{ij}$ .  
On pose  $M_{ij}^\beta = (e_i, e_j)|_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \beta e_i e_j d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} e_i \beta e_j d\Gamma_s = (e_i, \beta e_j)|_{\Gamma_s} = M_{ji}^\beta$ .
- $\int_{\Gamma_s} \alpha \nabla_{\Gamma_s} u \nabla_{\Gamma_s} v d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} \alpha \nabla_{\Gamma_s} e_i \nabla_{\Gamma_s} e_j d\Gamma_s = K_{ij}^\alpha$ .

Finalement, la discrétisation par éléments finis de l'équation (4.6) est :

$$M \frac{dP}{ds} + P^T M^\alpha P + BP + (BP)^T + M^\beta P = K^\alpha. \quad (4.8)$$

Puisque  $w_2$  est supposé nul, nous n'allons pas le discrétiser.

## Opérateurs Q et résidu $w_1$

De la même manière que nous avons approché  $P$ ,  $Q$  et son résidu  $w_1$  peuvent être approchés de la manière suivante :

- l'opérateur  $Q$  est approché par  $Q_h$  tel que :  $Q_h e_i = \sum_{i=1}^N Q_{h,ij} e_i$ ,
- le résidu  $w_1$  est approché par  $w_1^h = \sum_{i=1}^N w_1^{h,i} e_i$ .

Nous simplifions les notations en écrivant  $Q$  et  $w_1$  respectivement l'approximations de l'opérateur et du résidu dans la base des éléments finis. On pose  $w^1 = e_i$  et  $v = e_j$  pour les fonctions tests.

- $\langle \frac{dQ}{ds}w^1, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \frac{dQ}{ds}e_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} = \left( M \frac{dQ}{ds} \right)_{ij}$ .
- $\langle \alpha \nabla_{\Gamma_s}(Qw^1), \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \rangle_{\Gamma_s} = \langle \alpha \nabla_{\Gamma_s}(Qe_i), \nabla_{\Gamma_s}(Qe_j) \rangle_{\Gamma_s} = (Q^T K^\alpha Q)_{ij}$ .
- $\langle w^1, V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \rangle_{\Gamma_s} = \langle e_i, V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qe_j) \rangle_{\Gamma_s} = (Q^T B)_{ij}^T$ .
- $\langle V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qw^1), v \rangle_{\Gamma_s} = \langle V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(Qe_i), e_j \rangle_{\Gamma_s} = (Q^T B)_{ij}$ .
- $\langle \beta Qw^1, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \beta Qe_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} = (M^\beta Q)_{ij}$ ,
- $\langle \alpha w^1, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \alpha e_i, e_j \rangle_{\Gamma_s} = M_{ij}^\alpha$ .

Ainsi, la discrétisation par éléments finis de l'équation (4.7) est :

$$M \frac{dQ}{ds} + Q^T K^\alpha Q - Q^T B - (Q^T B)^T - M^\beta = M^\alpha. \quad (4.9)$$

Concernant l'équation sur le résidu  $w_1$  :

- $\langle \frac{dw_1}{ds}, v \rangle_{\Gamma_s} = \langle \frac{dw_1}{ds}, e_j \rangle_{\Gamma_s} = \left( M \frac{dw_1}{ds} \right)_j$ .
- $\langle \alpha \nabla_{\Gamma_s}(w_1), \nabla_{\Gamma_s}(Qv) \rangle_{\Gamma_s} = \langle \alpha \nabla_{\Gamma_s}(w_1), \nabla_{\Gamma_s}(Qe_j) \rangle_{\Gamma_s} = (Q^T K^\alpha w_1)_j$ .
- $\langle V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(w_1), v \rangle_{\Gamma_s} = \langle V_{\Gamma_s} \nabla_{\Gamma_s}(w_1), e_j \rangle_{\Gamma_s} = (B^T w_1)_j$ .

La discrétisation par éléments finis de  $w_1$  donne :

$$M \frac{dw_1}{ds} + Q^T K^\alpha w_1 - B^T w_1 = 0 \quad (4.10)$$

## Simplification des équations

Comme  $(MP)^T = MP$  et  $(MQ)^T = MQ \implies M^{-1}P^T = PM^{-1}$  et  $M^{-1}Q^T = QM^{-1}$ .

Nous considérons l'approximation  $M^\beta = \frac{dM}{ds}$  alors les équations (4.8), (4.9) et (4.10) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= M^{-1}K^\alpha - \left( M^{-1} \frac{dM}{ds} + M^{-1}B \right) P - PM^{-1}B^T - PM^{-1}M^\alpha P, \quad P(0) = 0 \\ \frac{dQ}{ds} &= M^{-1}M^\alpha + \left( M^{-1} \frac{dM}{ds} + M^{-1}B^T \right) Q + QM^{-1}B - QM^{-1}K^\alpha Q, \quad Q(0) = 0 \\ \frac{dw_1}{ds} &= (M^{-1}B^T - QM^{-1}K^\alpha) w_1, \quad w_1(0) = u_1. \end{aligned}$$

## 4.4 Résultat numérique

### Schéma anadromique d'ordre 2

Nous discrétisons les équations en  $P$  et  $Q$  par le schéma anadromique d'ordre 2. Ces équations sont sous la forme :

$$X'(s) = A_{21} - XA_{11} + A_{22}X - XA_{12}X.$$

La discrétisation par le schéma anadromique d'ordre 2 donne :

$$\begin{aligned} Y &= (I - h/2A_{22} + h/2XA_{12})^{-1}(X + h/2A_{21} - h/2XA_{11}), \\ Z &= (h/2A_{21} + (I + h/2A_{22})Y)(I + h/2A_{11} + h/2A_{12}Y)^{-1}. \end{aligned}$$

## Résultats

Nous présentons ici le potentiel reconstruit à l'instant  $t = 88s$  et  $t = 60s$  respectivement :

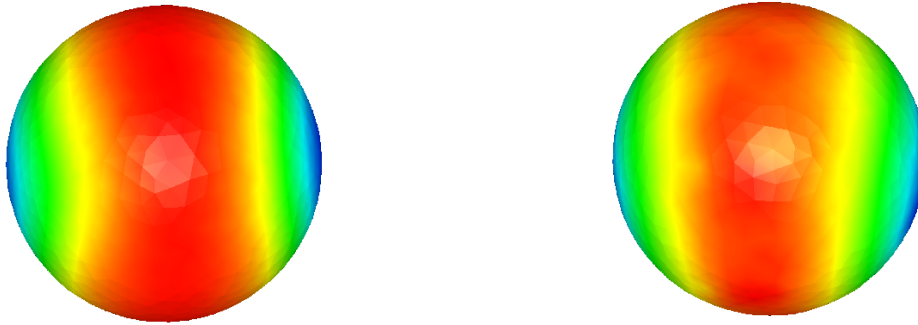


Figure 4.2 : Potentiel sur le coeur à gauche et potentiel reconstruit à droite.



Figure 4.3 : Potentiel sur le coeur à gauche et potentiel reconstruit à droite.

## Erreurs et Coefficients de corrélation

Les graphes ci-dessous illustrent respectivement l'évolution des erreurs et des coefficients de corrélation.

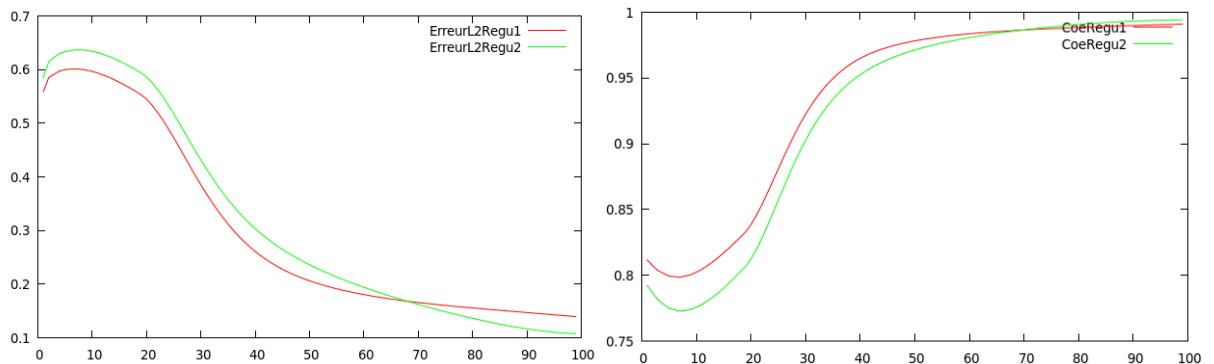


Figure 4.4 : L'évolution en fonction du temps des erreurs pour la figure de gauche et des coefficients de corrélation pour la figure de droite.

Certes, les erreurs ne sont pas très bonnes, mais les coefficients de corrélation sont proches de 1, cela nous permet de pouvoir détecter le front d'onde.

# Conclusion

Dans ce document il a été question de résoudre le problème inverse d'électrocardiographie en utilisant la méthode de plongement invariant. Avant de résoudre le problème inverse en 2D, nous avons appliqué la méthode de factorisation pour la résolution d'un problème direct. Nous avons dans ce cas étudié la convergence de la solution numérique vers la solution analytique, mais aussi la convergence de la solution semi-discrétisée vers la solution numérique. Il en résulte que la solution numérique converge bien vers la solution analytique, mais qu'à partir d'une certaine valeur de  $n$  (nombre de points dans la direction de plongement), les erreurs ne diminuent plus. Il faut dans ce cas en raffinant dans la direction de plongement, raffiner également la direction transverse. Par contre, la solution numérique converge sans problème vers la solution semi-discrétisée.

Nous avons résolu le problème inverse en utilisant la méthode de factorisation dans un domaine cylindrique. Vu que le problème de Cauchy gouvernant ce problème est mal posé, nous avons utilisé une régularisation de Tychonov pour garantir l'existence et l'unicité de la solution. Nous avons obtenu la convergence de la solution numérique vers la solution analytique en raffinant dans la direction de plongement. Par contre, comme dans le problème direct, à partir d'une certaine valeur de  $n$ , nous avons besoin de raffiner dans les deux directions pour que les erreurs relatives continuent de diminuer.

Nous avons enfin utilisé la méthode de plongement invariant pour la résolution du problème inverse dans un domaine tridimensionnel, en locurrence dans un domaine sphérique en utilisant le schéma andromique d'ordre.

# Bibliographie

- [1] Nejib Zemzemi , Julien Bouyssier and Jacques Henri. Inverse problem in electrocardiography via factorisation methode of boundary values problems. 2014.
- [2] Isabelle CHAMPAGNE. *Méthode de factorisation des équations aux Dérivées Partielles*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de Paris, 2004.
- [3] Jacques Henri et Angel Manuel Ramos. *La méthode de factorisation des problèmes aux limites par plongement invariant*. ISTE Edition Ltd, 2016.
- [4] Fadhel Jday. *La méthode de factorisation des problèmes aux limites : application à la reconstruction de données frontières*. PhD thesis, ENIT, Tunis, 2012.
- [5] REN-CANG LI and WILLIAM KAHAN. A family of anadromique numerical methods for matrix riccati differencial equations. *American Mathematical Society*, 81(277):233–265, January 2012.